

การเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงในระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กัน



นางสาววรรณิกา จำเป็น

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2546

ISBN 974-17-5398-5

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

**SELECTION OF INTERPOLATION FUNCTIONS IN  
THE DUAL RECIPROCITY METHOD**



**Miss Wannika Jumpen**

**สถาบันวิทยบริการ**  
**จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**  
**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science in Computational Science**

**Department of Mathematics**

**Faculty of Science**

**Chulalongkorn University**

**Academic Year 2003**

**ISBN 974-17-5398-5**

หัวข้อวิทยานิพนธ์  
โดย  
สาขาวิชา  
อาจารย์ที่ปรึกษา

การเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงในระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กัน  
นางสาววรรณนิกา จำเป็น  
วิทยาการคณนา  
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พรชัย สาตราวาท

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโทบริหารธุรกิจ

..... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร. เปี่ยมศักดิ์ เมนะเศวต)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร. จักษ์ อัสวานันท์)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พรชัย สาตราวาท)

..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิมลรัตน์ งามอร่ามวารงกูร)

..... กรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ไพศาล นาคมหาชาลสินธุ์)

วรรณิกา จำเป็น : การเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงในระเบียบวิธีส่วนกลับคู่กัน (SELECTION OF INTERPOLATION FUNCTIONS IN THE DUAL RECIPROCITY METHOD) อ. ที่ปรึกษา : ผศ. ดร. พรชัย สาตราวาหา ; 73 หน้า ISBN 974-17-5398-5.

นับตั้งแต่มีการพัฒนาวิธีส่วนกลับคู่กันเมื่อสี่สิบปีที่แล้ว ได้มีการวิจัยและเสนอฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ใช้ในวิธีนี้อย่างมากมาย ฟังก์ชันดังกล่าวแบ่งได้เป็นสามกลุ่ม คือ กลุ่มของฟังก์ชันฐานหลักเชิงตรีโกณมิติ (หรือฟังก์ชันเฉพาะที่) กลุ่มของฟังก์ชันโกลบอล และกลุ่มของฟังก์ชันลูกผสมที่ผสมผสานระหว่างฟังก์ชันสองกลุ่มแรก จึงมีความสำคัญอย่างมากสำหรับผู้ที่จะนำวิธีส่วนกลับคู่กันไปใช้ควรจะทราบว่าฟังก์ชันใดเหมาะที่จะใช้กับปัญหาที่มีอยู่ แต่เป็นที่น่าเสียดายที่ในการเสนอฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงแต่ละครั้ง ผู้เสนอมักจะอ้างว่าฟังก์ชันที่เสนอเป็นฟังก์ชันที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาที่พิจารณาในขณะนั้น โดยจะเปรียบเทียบผลที่ได้กับฟังก์ชัน  $r$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ใช้กันอย่างมากมายมาตั้งแต่ต้น แต่ในปัจจุบันได้ถูกมองว่าให้ผลด้อยที่สุด

งานวิจัยนี้ได้นำฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงจากสามกลุ่มมาใช้ในวิธีส่วนกลับคู่กัน เพื่อใช้หาผลเฉลยของปัญหาสี่แบบ โดยนำผลที่ได้จากแต่ละฟังก์ชันมาเปรียบเทียบกัน เพื่อสรุปเป็นแนวทางในการเลือกฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงให้เหมาะกับแต่ละปัญหา

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา.....คณิตศาสตร์..... ลายมือชื่อนิสิท.....

สาขาวิชา.....วิทยาการคณนา..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....

ปีการศึกษา.....2546

# # 4372389423 : MAJOR COMPUTATIONAL SCIENCE

KEY WORD: DUAL RECIPROCITY METHOD / INTERPOLATION FUNCTION

WANNIKA JUMPEN : SELECTION OF INTERPOLATION FUNCTIONS

IN THE DUAL RECIPROCITY METHOD. THESIS ADVISOR: ASSIST.

PROF. PORNCHAI SATRAVAHA, Ph.D., 73 pp. ISBN 974-17-5398-5.

Since the Dual Reciprocity Method (DRM) has been developed for twenty years ago, there has been much research and many proposals of interpolation functions (IF) utilised with this method. Such functions can be categorised in three groups; namely, a group of radial basis functions (or local functions), a group of global functions, and a group of hybrid functions, which are the combination of functions from the first two groups. It is thus very important that DRM users know adequately which one of the IF fits with their problems. Unfortunately, in each proposal of IF most authors would claim that the proposed IF is optimal for the problems under consideration by comparing their results with those of the  $r$  function, which is widely used since the emergence of the DRM but now considered the worst in performance.

In this thesis, IFs from three groups were used with DRM to solve four types of problems. The results obtained were then compared with each other. Finally, a conclusion of which IF is good for the problem was made.

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department Mathematics Student's signature.....

Field of study Computational Science Advisor's signature.....

Academic year 2546

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พรชัย สาตราหา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษาและเสนอแนะแนวทางสำหรับการพัฒนางานวิจัย ตลอดจนที่กรุณาสอนสั่ง ให้แรงผลักดันเสมอมา ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. จักษ์ อัครวานันท์ ประธานกรรมการสอบ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิมลรัตน์ งามอร่ามวางกูร ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ไพศาล นาคมหาชาลาสินธุ์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำและตรวจแก้ไขวิทยานิพนธ์จนสำเร็จลงได้ด้วยดี และขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่กรุณาสั่งสอนและให้ความรู้มากมายเพื่อเป็นพื้นฐานสำหรับงานวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ สำหรับทุนการศึกษาต้องขอขอบพระคุณคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล ที่กรุณาให้ทุนตามโครงการพัฒนาอาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ขอขอบคุณเพื่อนร่วมรุ่น รุ่นพี่ และรุ่นน้อง ที่คอยช่วยเหลือ ให้ความปรารถนาดีมาตลอด

สุดท้ายนี้ ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณครอบครัวที่เป็นผู้ส่งเสริม ให้กำลังใจในทุกๆ เรื่อง ซึ่งงานวิจัยนี้จะเสร็จสมบูรณ์ไม่ได้ถ้าขาดบุคคลทั้งหมดที่กล่าวข้างต้น ต้องขอบพระคุณอีกครั้งด้วยความจริงใจ

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญภาพ.....	ญ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
บทที่ 2 การสร้างสูตรวิธีส่วนกลับคู่กัน.....	7
2.1 ปัญหาสถานะคงตัว.....	7
2.2 ปัญหาภาวะชั่วคราว.....	12
2.2.1 วิธีส่วนกลับคู่กันเชิงผลต่างอันดับ.....	12
2.2.2 วิธีส่วนกลับคู่กันเชิงการแปลงลาปลาซ.....	15
2.3 ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง.....	19
2.3.1 ฟังก์ชันฐานหลักเชิงรัศมี.....	19
2.3.2 ฟังก์ชันโกลบอล.....	20
2.3.3 RBF ที่แต่งเติมด้วยพจน์ที่เป็นฟังก์ชันโกลบอล.....	23

# สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 ลักษณะของปัญหาที่พิจารณาและผลการวิเคราะห์.....	28
3.1 ค่าความคลาดเคลื่อน.....	28
3.2 ลักษณะของปัญหาที่พิจารณา.....	29
3.2.1 ปัญหาที่ $b$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า $f(x,y)$ .....	30
3.2.2 ปัญหาที่ $b$ ประกอบด้วยฟังก์ชันไม่ทราบค่า $u$ .....	34
3.2.3 ปัญหาที่ $b$ ประกอบด้วยอนุพันธ์ $\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial u}{\partial y}$ .....	41
3.2.4 ปัญหาที่ $b$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลา.....	47
บทที่ 4 สรุปผลการวิจัย และ ข้อเสนอแนะ.....	55
รายการอ้างอิง.....	58
ภาคผนวก.....	62
ก. ฟังก์ชันฐานหลักเชิงรีซีมีในรูปแบบทั่วไป.....	63
ข. ภาพประกอบสำหรับ Discretisation แต่ละแบบ.....	64
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	73



# สารบัญตาราง

ตาราง	หน้า
ตารางที่ 2-1	สามเหลี่ยมปascalสำหรับฟังก์ชันพหุนาม.....21
ตารางที่ 2-2	แสดงฟังก์ชันโกลบอลที่เป็นพหุนามและผลเฉลยเฉพาะ.....22
ตารางที่ 3-1	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา $\nabla^2 u = xe^y$ .....31
ตารางที่ 3-2	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา $\nabla^2 u = x^2$ .....33
ตารางที่ 3-3	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา $\nabla^2 u = -u$ .....36
ตารางที่ 3-4	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา $\nabla^2 u = u$ .....38
ตารางที่ 3-5	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา $\nabla^2 u = x - u$ .....40
ตารางที่ 3-6	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา $\nabla^2 u = -\frac{\partial u}{\partial x}$ .....43
ตารางที่ 3-7	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา $\nabla^2 u = -\frac{2}{x} \frac{\partial u}{\partial x}$ .....45
ตารางที่ 3-8	ความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา $\nabla^2 u = -u \frac{\partial u}{\partial x}$ .....46
ตารางที่ 3-9	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับ LTDRM ในปัญหาที่ 1.....49
ตารางที่ 3-10	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับ FDDRM ในปัญหาที่1....50
ตารางที่ 3-11	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับ LTDRM ในปัญหาที่ 2...53
ตารางที่ 3-12	ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับ FDDRM ในปัญหาที่ 2...54

# สารบัญภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
รูปที่ 2-1 รูปของจุดบนขอบและจุดภายในที่ใช้ใน DRM.....	7
รูปที่ 3-1 แสดงโดเมนและขอบของปัญหา $\nabla^2 u = xe^y$ .....	30
รูปที่ 3-2 โดเมนและค่าขอบของปัญหา $\nabla^2 u = x^2$ .....	32
รูปที่ 3-3 โดเมนที่พิจารณาของสมการ $\nabla^2 u = -u$ .....	35
รูปที่ 3-4 โดเมนที่พิจารณานบนแก้วรูปทรงสี่เหลี่ยม.....	48
รูปที่ 3-5 โดเมนที่พิจารณาสำหรับปัญหาการไหลของความร้อนในแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยม จัตุรัส.....	51

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# บทที่ 1

## บทนำ

แบบจำลองปรากฏการณ์ทางวิศวกรรมศาสตร์ส่วนใหญ่สามารถบรรยายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) หรือสมการเชิงปริพันธ์ (integral equation) ซึ่งความเข้าใจในปรากฏการณ์เหล่านี้เกิดขึ้นจากการทดลองและการหาผลเฉลยของสมการดังกล่าว ในอดีตการหาผลเฉลยมักใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical method) แต่วิธีนี้มีข้อจำกัดที่รูปทรงเรขาคณิตของปัญหาจะต้องไม่ซับซ้อนเกินไป อีกวิธีสำหรับการหาผลเฉลยคือ วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ซึ่งสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปทรงซับซ้อนได้ดีกว่าวิธีเชิงวิเคราะห์ อย่างไรก็ตามวิธีเชิงตัวเลขไม่ได้รับความสนใจมากนักในอดีต เนื่องจากต้องอาศัยการคำนวณที่รวดเร็วแม่นยำที่เกินความสามารถของมนุษย์และเครื่องมือที่มีอยู่ แต่ในช่วงเวลาไม่กี่สิบปีที่ผ่านมาคอมพิวเตอร์ได้รับการพัฒนาอย่างรวดเร็วทั้งทางด้านฮาร์ดแวร์และซอฟต์แวร์ อีกทั้งราคาก็ถูกลงอย่างต่อเนื่อง ในปัจจุบันวิธีเชิงตัวเลขจึงมีความสำคัญไม่ด้อยไปกว่าวิธีเชิงวิเคราะห์

วิธีเชิงตัวเลขมีหลายวิธี แต่ที่มีความสำคัญที่สุดมีสามวิธี ได้แก่ วิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method, FDM) วิธีชิ้นประกอบอันตะ (Finite Element Method, FEM) และวิธีชิ้นประกอบขอบ (Boundary Element Method, BEM) วิธีผลต่างอันตะเป็นวิธีที่เข้าใจง่ายและได้รับความนิยมมาเป็นเวลานาน จนได้รับการพัฒนาให้แก้ปัญหาหอนาชนิด ซึ่งครอบคลุมปัญหาที่บรรยายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น และสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น ข้อจำกัดที่สำคัญของวิธีผลต่างอันตะคือความยุ่งยากในการแก้ปัญหาที่มีโดเมนซับซ้อน วิธีชิ้นประกอบอันตะนับว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพสูงกว่าวิธีผลต่างอันตะในการแก้ปัญหาทั่วไป ถึงแม้ว่าวิธีชิ้นประกอบอันตะอาจเข้าใจยากกว่า และเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ยากกว่าวิธีผลต่างอันตะ แต่มีข้อได้เปรียบที่

สามารถแก้ปัญหาซึ่งมีรูปทรงของโดเมนที่ซับซ้อนได้ดี จึงทำให้ในปัจจุบันวิธีขึ้นประกอบอันตะกำลังได้รับความนิยมมากกว่าวิธีอื่นทั้งในวงการอุตสาหกรรมและวงการวิจัย

สิ่งที่เหมือนกันของวิธีผลต่างอันตะและวิธีขึ้นประกอบอันตะคือ วิธีทั้งสองใช้หาผลเฉลยทั้งภายในโดเมนและบนขอบของปัญหา ถึงแม้ว่าผลเฉลยที่ต้องการจะอยู่เพียงที่ขอบก็ตาม แต่ถ้าตัวแปรที่ต้องทราบค่าอยู่บนขอบและไม่ใช้ในโดเมน การใช้วิธีผลต่างอันตะหรือวิธีขึ้นประกอบอันตะเพื่อหาผลเฉลยทั้งภายในโดเมนและบนขอบเป็นการกระทำเกินความจำเป็นที่ทำให้สูญเสียทรัพยากรและเวลาโดยใช่เหตุ ในกรณีเช่นนี้วิธีที่มีความเหมาะสมกว่าคือ วิธีขึ้นประกอบขอบ วิธีนี้สามารถลดจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่า เนื่องจากมีกระบวนการเปลี่ยนปริพันธ์บนโดเมนในสมการเชิงปริพันธ์ไปเป็นปริพันธ์บนขอบ วิธีนี้จึงมีข้อดีตรงที่ลดมิติของปัญหา ทำให้ลดความยุ่งยากในการคำนวณ และทำให้การแก้ปัญหามีประสิทธิภาพมากขึ้น วิธีนี้จึงได้รับความนิยมมากขึ้นเรื่อยๆ และถูกนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่างๆ มากมาย แต่วิธีนี้มีข้อจำกัดอยู่ตรงที่ ถ้าพจน์ไม่เอกพันธ์ที่ปรากฏใน สมการควบคุม (governing equation) ไม่ใช่ฟังก์ชันฮาร์มอนิกแล้ว ข้อได้เปรียบหรือข้อดีของวิธีนี้คือ การเปลี่ยนปริพันธ์บนโดเมนไปเป็นปริพันธ์บนขอบเพื่อลดมิติของปัญหานั้นจะเสียไป เพราะจะยังคงมีปริพันธ์บนโดเมนซึ่งเกี่ยวข้องกับพจน์ไม่เอกพันธ์ดังกล่าวติดอยู่ในสมการเชิงปริพันธ์ การใช้เทคนิคเชิงตัวเลขในการประมาณค่าปริพันธ์บนโดเมนนี้จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าของผลเฉลยที่ต้องการได้ วิธีที่พัฒนามาจากวิธีขึ้นประกอบขอบเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวคือ วิธีส่วนกลับคู่กัน หรือ Dual Reciprocity Method (DRM) วิธีนี้ได้รับข้อได้เปรียบของวิธีขึ้นประกอบขอบคือการลดมิติของปัญหาลงไปหนึ่งมิติให้คงอยู่ ด้วยการประมาณพจน์ไม่เอกพันธ์โดยใช้การประมาณค่าในช่วง จากนั้นเปลี่ยนปริพันธ์บนโดเมนทั้งสองข้างของสมการไปเป็นปริพันธ์บนขอบด้วยหลักการของวิธีขึ้นประกอบขอบ วิธีนี้จึงสามารถจัดการพจน์ไม่เอกพันธ์ในหลายรูปแบบได้ไม่ว่าจะเป็นเชิงเส้นหรือไม่เชิงเส้น และอาจมีอนุพันธ์ประกอบอยู่ด้วยก็ได้ DRM จึงเป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่นักวิจัยสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาดังๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งปัญหาในด้านวิศวกรรม เพราะแบบจำลองปรากฏการณ์ทางวิศวกรรมศาสตร์ส่วนใหญ่ มีรูปแบบของสมการที่ค่อนข้างซับซ้อน

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า DRM จะต้องมีการเปลี่ยนปริพันธ์บนโดเมนไปเป็นปริพันธ์บนขอบ ซึ่งต้องอาศัยฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง (interpolation function) แรกเริ่มมีการใช้ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง  $r$  โดย Nadini และ Brebbia [1] ในปี 1982 กับปัญหา free vibration analysis โดยได้นำค่าคงที่มาบวกรวมกับฟังก์ชัน  $r$  ซึ่งต่อมาค่าคงที่นี้นิยมใช้เป็นหนึ่ง ฟังก์ชัน  $1 + r$  ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาต่างๆ มากมาย เช่น Poisson-type problem [3], ปัญหาที่พจน์ไม่เอกพันธ์มีอนุพันธ์ [4], Burger's equation [5] และปัญหาในโดเมนอนันต์ [8] รวมทั้งยังถูกนำไปประยุกต์ใช้ในปัญหาที่ขึ้นอยู่กับเวลาเช่น microwave heating problem [9] และการหาผลเฉลยของสมการการแพร่เชิงเส้น (linear diffusion equation) ในปริภูมิลาปลาซ [10] เป็นต้น ภายหลังฟังก์ชัน  $r$  ได้ถูกระบุว่าเป็นชนิดหนึ่งของฟังก์ชันฐานหลักเชิงรัศมี (Radial Basis Function) หรือ RBF ฟังก์ชัน  $r^3$  ก็เป็น RBF ด้วยและได้ถูกนำมาใช้โดย Yamada [25] และ Zhang [26] ส่วนฟังก์ชัน  $r$  ยกกำลังจำนวนเต็มคู่เช่น  $r^2$  ไม่ใช่ RBF และจะพบว่ามีผลกระทบต่อผลเฉลยเพียงเล็กน้อยเท่านั้นเมื่อนำไปรวมกับ RBF ตัวอื่น ทางที่ดีจึงควรหลีกเลี่ยงการใช้ฟังก์ชันชนิดนี้ [23]

ภายหลังจากที่มีการเสนอให้ใช้ฟังก์ชัน  $r$  ใน DRM แล้ว ได้มีการเสนอฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เป็น RBF อื่นๆ อีกเช่น Thin Plate Spline หรือ TPS,  $r^2 \ln r$ , ซึ่งถูกนำมาใช้แก้ปัญหาที่มีแรงวัตถุ (body force) [28], plate and shell bending [12], ปัญหาการแพร่ [13] ทั้งในปัญหาที่เป็นเชิงเส้น และไม่เชิงเส้น และยังมี RBF ตัวอื่นๆ ที่มีลักษณะของการใช้ต้องมีการกำหนดค่าของค่าคงที่เช่น Multiquadric และ Gaussian RBF [28]

ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ผ่านมาจะเกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน  $r$  ซึ่งเราเรียกรวมว่า ฟังก์ชันเฉพาะที่ (local function) ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงอีกประเภทหนึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันโกลบอล (global function) เป็นฟังก์ชันที่ไม่ขึ้นกับ  $r$  มีหลายลักษณะ เช่น ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial), การกระจายพจน์ของฟังก์ชันไซน์ (sine expansion) เป็นต้น Cheng et al. [29] ได้ตรวจสอบการนำฟังก์ชันเหล่านี้มาใช้ร่วมกับ DRM และได้ให้รายละเอียดของวิธีการนำไปประยุกต์ใช้ไว้ด้วย ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงชนิดนี้ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหา เช่น pressure

transients [21] และ Darcy's flow [22]

Augmented Thin Plate Spline (ATPS) เป็นฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ประกอบด้วย TPS และแต่งเติมด้วย 3 พจน์แรกของสามเหลี่ยมปาสคาลคือ  $1, x, y$  ฟังก์ชันนี้ถูกเสนอโดย Golberg [10] ซึ่งได้ศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีทางคณิตศาสตร์เพื่อตัดสินฟังก์ชันที่เหมาะสมใน DRM ATPS ได้ถูกนำไปใช้ได้ผลดีในหลายปัญหาเช่น heat transfer problem [14], elasticity problem [15], biharmonic problem [16] และ linear diffusion equation [17]

ATPS ทำให้เกิดฟังก์ชันกลุ่มใหม่ที่เรียกว่า ฟังก์ชันลูกผสม (Hybrid function) ซึ่งเป็นการรวมกันระหว่างฟังก์ชันเฉพาะที่กับฟังก์ชันโกลบอล [23] ฟังก์ชันนี้มีข้อดีตรงที่ในบางปัญหาเราอาจออกแบบฟังก์ชันลูกผสมได้เองโดยดูจากพจน์แรงวัตถุที่ต้องการประมาณค่า

ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงมีความสำคัญมากใน DRM เนื่องจากการเลือกใช้ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เหมาะสมกับปัญหานั้น ๆ ทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง จึงทำให้มีการศึกษาและเสนอฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงมากมาย และผู้เขียนแต่ละคนก็สรุปว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เสนอเป็นฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เหมาะสมที่สุด แต่ส่วนมากจะเปรียบเทียบฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เสนอกับฟังก์ชัน  $r$  ซึ่งในปัจจุบันถูกพิจารณาว่ามีประสิทธิภาพด้อยที่สุด [23] จึงทำให้นักวิจัยรวมทั้งวิศวกรที่สนใจเฉพาะการนำวิธี DRM ไปใช้ เกิดความสับสนในการเลือกใช้ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เหมาะสมที่สุด เป็นเหตุให้นักวิจัยทำการวิจัยเปรียบเทียบว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาแต่ละกลุ่ม [23] แต่ก็ยังมีปัญหาที่ต้องพิจารณาอีก

งานวิจัยนี้จะนำฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงหลายๆ แบบมาพิจารณา โดยนำไปใช้กับปัญหาหลายๆ กลุ่ม เช่น ปัญหาเชิงเส้น ปัญหาไม่เชิงเส้น และปัญหาที่ขึ้นอยู่กับเวลา โดยเฉพาะอย่างยิ่งปัญหาที่ขึ้นอยู่กับเวลานั้นจะนำวิธีผลต่างอันดับ และการแปลงลาปลาซมาประยุกต์ใช้กับ DRM ด้วย แล้วศึกษาผลลัพธ์ที่ได้เพื่อนำมาพิจารณาข้อดีข้อเสียในแต่ละกรณี และสรุปผลเป็นแนวทางให้นักวิจัยใช้ในการตัดสินใจเลือกฟังก์ชันที่เหมาะสมกับแต่ละปัญหาที่ทำการวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้แบ่งเป็นสี่บท โดยบทที่ 1 ซึ่งเป็นบทนำได้กล่าวถึงที่มา เหตุผล สำหรับงาน

วิจัยนี้ และข้อดี ข้อเสียของ DRM ตลอดจนงานวิจัยที่ผ่านมาที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ใช้ใน DRM

ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงการสร้างสูตรของวิธีส่วนกลับคู่กัน (DRM formulation) โดยสร้างให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ในรูปแบบทั่วไปเพื่อที่จะได้สะดวกต่อการนำไปประยุกต์ใช้ โดยปัญหาที่นำมาสร้างสูตรนั้นแบ่งกว้างๆ ออกเป็นสองแบบคือ ปัญหาสถานะคงตัว และ ปัญหาภาวะชั่วครู่ ในส่วนของการสร้างสูตรนั้นจะมีส่วนของการประมาณค่าพจน์ทางด้านขวาของสมการควบคุมซึ่งจะมีการนำฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงเข้าไปใช้ โดยที่เราจะแบ่งฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงเป็น 3 ประเภท คือ ฟังก์ชันฐานหลักเชิงตรีโกณมิติ ฟังก์ชันโกลบอล และ RBF ที่แต่งเติมด้วยพจน์ที่เป็นฟังก์ชันโกลบอล

ในบทที่ 3 อธิบายถึงรูปแบบของค่าความคลาดเคลื่อนที่ใช้ และการนำ DRM ไปประยุกต์ใช้กับแต่ละปัญหาซึ่งมีด้วยกันทั้งหมด 4 ประเภท คือ ปัญหาที่  $b$  เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า  $f(x, y)$  ปัญหาที่  $b$  ประกอบด้วยฟังก์ชันไม่ทราบค่า  $u$  ปัญหาที่  $b$  ประกอบด้วยอนุพันธ์  $\frac{\partial u}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial u}{\partial y}$  และ ปัญหาที่  $b$  เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลา แล้วพิจารณาและวิเคราะห์ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ให้ผลดี ผลเสีย สำหรับแต่ละประเภท อีกทั้งจะทำการเปรียบเทียบในส่วนของจำนวนของชั้นประกอบ และจำนวนจุดภายใน ที่แตกต่างกันด้วย และในแต่ละประเภทนั้นยังมีตัวอย่างของปัญหาในหลายลักษณะ โดยที่จะแสดงรูปแบบต่างๆ ของเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยด้วย

และในบทที่ 4 เป็นการสรุปผลจากบทที่ 3 ว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงใดที่ให้ผลดีที่สุดสำหรับแต่ละปัญหาทั้ง 4 ประเภทที่กล่าวข้างต้น และฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ให้ผลดีสำหรับทุกๆ ปัญหาจากการพิจารณาโดยรวม

การสรุปว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันใดให้ผลดีจะพิจารณาภายใต้เงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. โดเมนที่พิจารณาเป็นวงรี หรือสี่เหลี่ยม

2. เงื่อนไขขอบที่ใช้เป็นแบบดิริชเลต์ (Dirichlet condition) และ แบบผสม (mixed boundary condition)
3. ชั้นประกอบขอบที่ใช้ใน DRM เป็นแบบค่าคงตัว
4. จำนวนชั้นประกอบขอบ และจำนวนจุดภายในที่พิจารณาไม่เกิน 64 ชั้น และ 25 จุดตามลำดับ
5. เราจะถือว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำดี ถ้าค่าความคลาดเคลื่อนรากกำลังสองเฉลี่ยน้อยกว่า 0.005

โดยผลสรุปจะครอบคลุมปัญหาที่ได้แสดงไว้ในที่นี้เท่านั้น



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 2

### การสร้างสูตรวิธีส่วนกลับคู่กัน

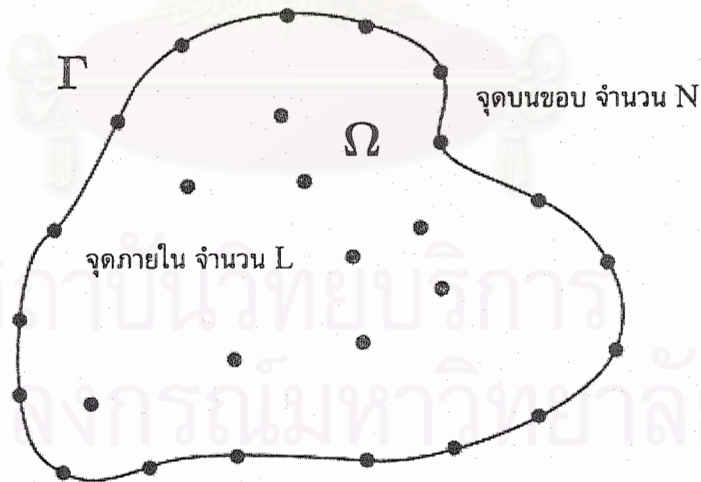
#### 2.1. ปัญหาสถานะคงตัว (Steady-State Problem)

พิจารณาปัญหาปัวซองในรูป

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = b \quad \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{x} = (x, y) \quad (2.1)$$

โดยที่  $u(\mathbf{x})$  เป็น ฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า (unknown function) ที่จุด  $\mathbf{x}$ ,  $\Omega$  เป็นโดเมนของผล

เฉลย และ  $b = b\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$



รูปที่ 2-1 รูปของจุดบนขอบและจุดภายในที่ใช้ใน DRM

เงื่อนไขขอบของสมการ (2.1) มีสองชนิดคือ เงื่อนไขดิริชเลต์ (Dirichlet condition) เป็นการกำหนดค่าขอบที่เป็นค่า  $u$

$$u(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (2.2)$$

และเงื่อนไขนอยมันน์ (Neumann condition) ซึ่งกำหนดอนุพันธ์แนวฉาก (normal derivative) ของ  $u$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \bar{q}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (2.3)$$

โดยที่  $\Gamma_1, \Gamma_2$  เป็นส่วนเติมเต็ม (complementary segment) ของขอบ  $\Gamma$  ของโดเมน  $\Omega$  และ  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  เป็น เวกเตอร์หน่วย (unit vector) ซึ่งมีทิศพุ่งออกบน  $\Gamma$  ที่จุด  $\mathbf{x}$  ส่วน  $\bar{u}$  และ  $\bar{q}$  เป็น ฟังก์ชันที่ทราบค่า

จากสมการ (2.1) เราประมาณ  $b$  ด้วยผลบวกอันตะของฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง  $f$

กล่าวคือ

$$b(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$$

แต่มักนิยมเขียนสั้น ๆ เป็น

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} f_j \alpha_j \quad (2.4)$$

โดยที่  $N$  เป็นจำนวนจุดขอบ (boundary node) บน  $\Gamma$  ที่ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชัน  $b$

$L$  เป็นจำนวนจุดภายใน (internal node) ของ  $\Omega$  ที่ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชัน  $b$

$f_j$  เป็นฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ขึ้นอยู่กับจุด  $j$  (node  $j$ )

$\alpha_j$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของ  $f_j$  ซึ่งยังไม่ทราบค่า

ใช้เทคนิคของวิธีขึ้นประกอบขอบ โดยคูณสมการ (2.1) ด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weighting function)  $u^*$  จากนั้นหาปริพันธ์บนโดเมน  $\Omega$  แล้วแทน  $b$  ด้วยสมการ (2.4) จะได้

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} f_j u^* d\Omega \quad (2.5)$$

แทน  $f_j$  ด้วย  $\nabla^2 \hat{u}_j$  ในสมการ (2.5) โดยที่  $\hat{u}_j$  เป็นผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)

ของสมการ  $\nabla^2 \hat{u}_j = f_j$  จากนั้นหาปริพันธ์โดยแยกส่วนสองครั้ง ทั้งสองข้างของสมการ (2.5)

โดย Green-Guass theorem จะได้

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \nabla^2 u^*(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &= \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ \int_{\Omega} \hat{u}_j(\mathbf{x}) \nabla^2 u^*(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}) \hat{q}_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}) \hat{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

โดยให้  $\nabla^2 u^* = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)$  ซึ่ง  $u^*$  เป็นผลเฉลยหลักมูล (fundamental solution) ของสมการ

ลาปลาซ และ  $u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\|$  ดังนั้น สมการ (2.6) จะเปลี่ยนเป็น

$$\begin{aligned} & c_l u(\mathbf{x}_l) + \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &= \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ c_l \hat{u}_j(\mathbf{x}_l) + \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}) \hat{q}_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}) \hat{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

โดยที่  $\mathbf{x}_l$  เป็น source point ของ  $u^*$  ซึ่งสามารถเป็นจุดๆ ในโดเมนหรือบนขอบ และ  $q, q^*, \hat{q}_j$

เป็นอนุพันธ์แนวฉาก ของ  $u, u^*, \hat{u}_j$  ตามลำดับ ค่า  $c_l$  ในสมการ (2.7) ขึ้นอยู่กับ  $\mathbf{x}_l$  กล่าวคือ

$$c_l = \begin{cases} \frac{\alpha(\mathbf{x}_l)}{2\pi}, & \text{ถ้า } \mathbf{x}_l \text{ เป็นจุดบนขอบ} \\ 1, & \text{ถ้า } \mathbf{x}_l \text{ เป็นจุดภายใน} \\ 0, & \text{อื่นๆ} \end{cases} \quad (2.8)$$

เมื่อ  $\alpha(\mathbf{x}_l)$  เป็นมุมภายในของขอบที่จุด  $\mathbf{x}_l$

จากสมการ (2.7) แบ่ง  $\Gamma$  ออกเป็น  $N$  ส่วนคือ  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$  จะได้ปริพันธ์แรกทาง

ซ้ายมือของสมการ (2.7) เป็น

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma &= \int_{\Gamma_1} u^*(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u^*(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma + \dots + \int_{\Gamma_N} u^*(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^*(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.9)$$

และเมื่อประมาณแต่ละขอบย่อยด้วยชิ้นประกอบขอบแบบค่าคงตัว (constant element) กล่าว

คือจะประมาณขอบย่อย  $\Gamma_k$  ด้วยชิ้นประกอบขอบ  $\bar{\Gamma}_k$  ซึ่งเป็นเส้นตรง และประมาณค่าของตัว

แปรไม่ทราบค่าบน  $\bar{\Gamma}_k$  ให้มีค่าเท่ากันตลอดทั้งชิ้นประกอบขอบและให้มีค่าเท่ากับค่าที่จุด  $\mathbf{x}_k$  ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของชิ้นประกอบขอบนั้น โดยการกระทำเช่นนี้ปริพันธ์ใน (2.9) จะเขียนได้เป็น

$$\int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x})q(\mathbf{x})d\Gamma = \sum_{k=1}^N q(\mathbf{x}_k) \int_{\bar{\Gamma}_k} u^*(\mathbf{x})d\Gamma$$

ทำเช่นนี้กับทุกปริพันธ์ใน (2.7) จะได้

$$\begin{aligned} c_l u_l + \sum_{k=1}^N q_k \int_{\bar{\Gamma}_k} u^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N u_k \int_{\bar{\Gamma}_k} q^* d\Gamma \\ = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ (c_l \hat{u}_j)_l + \sum_{k=1}^N (\hat{q}_j)_k \int_{\bar{\Gamma}_k} u^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N (\hat{u}_j)_k \int_{\bar{\Gamma}_k} q^* d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

หรือ

$$\begin{aligned} c_l u_l - \sum_{k=1}^N q_k g_{lk} + \sum_{k=1}^N u_k \hat{h}_{lk} \\ = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ c_l (\hat{u}_j)_l - \sum_{k=1}^N \hat{q}_{jk} g_{lk} + \sum_{k=1}^N \hat{u}_{jk} \hat{h}_{lk} \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

โดยที่  $u_l = u(\mathbf{x}_l)$ ,  $(\hat{u}_j)_l = \hat{u}_j(\mathbf{x}_l)$ ,  $q_k = q(\mathbf{x}_k)$  และ  $u_k = u(\mathbf{x}_k)$

$$g_{lk} = - \int_{\bar{\Gamma}_k} u^* d\Gamma = - \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_k} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\| d\Gamma$$

และ

$$\hat{h}_{lk} = - \int_{\bar{\Gamma}_k} q^* d\Gamma = - \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_k} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\|} d\Gamma$$

เมื่อนำสมการ (2.11) ไปประยุกต์กับจุดบนขอบและจุดภายในที่มาจากการเลือก (collocation point)  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N + L$  จะได้ระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{aligned} c_i u_i - \sum_{k=1}^N q_k g_{ik} + \sum_{k=1}^N u_k \hat{h}_{ik} \\ = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ c_i (\hat{u}_j)_i - \sum_{k=1}^N \hat{q}_{jk} g_{ik} + \sum_{k=1}^N \hat{u}_{jk} \hat{h}_{ik} \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

และสามารถจัดให้อยู่ในรูปเมทริกซ์เป็น

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\bar{\alpha} \quad (2.13)$$

โดยที่  $\mathbf{H}$  และ  $\mathbf{G}$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $(N + L) \times (N + L)$  ซึ่งแต่ละสมาชิกของเมทริกซ์คือ  $h_{ij}$  และ  $g_{ij}$  ตามลำดับ สัมประสิทธิ์  $c_i$  สามารถหาค่าได้จาก (2.8) และได้ถูกนำไปรวมไว้ในตำแหน่งทแยงมุมของเมทริกซ์  $\mathbf{H}$  ในทั้งสองข้างของสมการ โดยที่

$$h_{ij} = \begin{cases} \hat{h}_{ij}, & \text{ถ้า } i \neq j \\ \hat{h}_{ij} + c_i, & \text{ถ้า } i = j \end{cases} \quad (2.14)$$

เมทริกซ์  $\hat{\mathbf{U}}$  และ  $\hat{\mathbf{Q}}$  ใน (2.13) เป็นเมทริกซ์ที่มีแนวตั้งเป็นเวกเตอร์  $\hat{u}_j$  และ  $\hat{q}_j$  ตามลำดับ

สำหรับ  $\bar{\alpha}$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์ของ  $f_j$  หาค่าได้จากการใช้สมการ (2.4) กับจุดที่มาจากทางเลือก  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N + L$  จะได้

$$b_i = \sum_{j=1}^{N+L} f_{ij} \alpha_j \quad (2.15)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\bar{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \quad (2.16)$$

โดยที่  $\mathbf{F}$  เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกเป็น  $f_j(x_i)$  สิ่งหนึ่งที่ต้องระวังคือฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ใช้ต้องทำให้สามารถหา  $\mathbf{F}^{-1}$  ได้

แทนสมการ (2.16) ในสมการ (2.13) ทำให้ได้สมการหลายชั้น (simultaneous equation) ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{b} \quad (2.17)$$

โดยที่

$$\mathbf{S} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}$$

และเมทริกซ์ต่าง ๆ ในสมการ (2.17) มีรูปแบบดังนี้

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{IB} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{BB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{IB} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{U}_{BB} & \hat{U}_{BI} \\ \hat{U}_{IB} & \hat{U}_{II} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{BB} & \hat{Q}_{BI} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_{BB} & F_{BI} \\ F_{IB} & F_{II} \end{bmatrix}$$

โดยที่สัญลักษณ์  $B$  และ  $I$  สมทบกับ (associated with) จุดบนขอบและจุดภายในตามลำดับ

หลังจากใช้เงื่อนไขขอบแล้วเราจัดสมการ (2.17) ให้อยู่ในรูป  $Ay = z$  โดยที่  $A$  เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ขนาด  $(N + L) \times (N + L)$  และ  $z$  เป็นเวกเตอร์ค่าคงที่ขนาด  $(N + L) \times 1$  ส่วน  $y$  เป็นเวกเตอร์ของตัวไม่ทราบค่าที่มีขนาด  $(N + L) \times 1$  แล้วแก้สมการหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่าคือค่าที่จุดขอบ  $u_B$  หรือ  $q_B$  และค่าที่จุดภายใน  $u_I$  โดย Gaussian Elimination จากนั้นใช้สมการ (2.16) เพื่อหา  $\bar{\alpha}$  เมื่อทราบค่าต่างๆ เหล่านี้แล้วเราสามารถหาค่าประมาณของฟังก์ชัน  $u$  ที่ทุกจุด  $x_i$  ใดๆ ในโดเมน  $\Omega$  ได้โดยใช้สมการ (2.11)

## 2.2 ปัญหาภาวะชั่วคราว (Transient Problem)

### 2.2.1 วิธีส่วนกลับคู่กันเชิงผลต่างอันตะ หรือ Finite Difference Dual Reciprocity Method (FDDRM)

เป็นที่ทราบกันดีว่า FDM หรือ วิธีผลต่างอันตะ เป็นวิธีที่สามารถนำไปประยุกต์หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ หรือ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ง่าย ในที่นี้จะได้นำ FDM และ DRM มาประยุกต์เข้าด้วยกันเรียกว่า วิธีส่วนกลับคู่กันเชิงผลต่างอันตะ หรือ Finite Difference Dual Reciprocity Method (FDDRM) เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ขึ้นอยู่กับเวลา เช่น สมการการแพร่ (diffusion equation) ซึ่งมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า  $u$  เทียบกับเวลาจึงทำให้ไม่สามารถใช้ DRM ได้โดยตรง อย่างไรก็ตามเราสามารถนำเทคนิคของ FDM มาใช้กับอนุพันธ์เทียบกับเวลาก่อนแล้วจึงใช้เทคนิคของ DRM กับสมการที่ได้ โดยที่ค่าประมาณของฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยสามารถหาได้ที่ทุกจุดที่ต้องการ ณ เวลา  $t$  ใดๆ ซึ่งทำได้ด้วยการก้าวไปตามเวลา (time-marching) จากเวลาเริ่มต้น แล้วก้าวไปด้วยขั้นเวลา (time step) ที่เหมาะสมจนถึงเวลาที่ต้องการ ซึ่งวิธีนี้มีข้อดีคือ ทำให้ทราบแนวโน้มของผลเฉลยที่เวลาต่างๆ ก่อนหน้าเวลา

ที่เราต้องการ

พิจารณาสมการการแพร่

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.18)$$

โดยที่  $k$  เป็นค่าคงตัวที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ  $u(\mathbf{x}, t)$  เป็นฟังก์ชันที่ไม่รู้ค่า ณ จุด  $\mathbf{x}$  ที่เวลา  $t$  และ  $\Omega$  เป็นโดเมนของผลเฉลย  $u$  เงื่อนไขค่าขอบมีสองประเภทที่นำไปใช้กับสมการ (2.18) คือ เงื่อนไขดิริชเลต์

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (2.19)$$

และ เงื่อนไขนอยมันน์

$$q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \bar{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (2.20)$$

โดยที่  $\bar{u}$  และ  $\bar{q}$  เป็นฟังก์ชันที่รู้ค่า  $\Gamma_1, \Gamma_2$  เป็นส่วนเติมเต็มของขอบ  $\Gamma$  ของ  $\Omega$  และ  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  เป็น เวกเตอร์หน่วย โดยมีทิศพุ่งออกบน  $\Gamma$  ที่จุด  $\mathbf{x}$  และเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ที่เวลา  $t_0$

$$u_0(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.21)$$

ให้  $\Delta t$  เป็นขั้นเวลา และ  $t_i = i\Delta t, i = 1, 2, \dots, m$  โดยที่  $t_0 = 0$

สมการ (2.18) ที่เวลาเฉพาะ (particular time)  $t_i$  มีรูปแบบ

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t_i) = \frac{1}{k} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t_i)}{\partial t} \quad (2.22)$$

นำพจน์ด้านขวาของสมการมาประมาณด้วยวิธีผลต่างอันตะ

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t_i)}{\partial t} = \frac{u(\mathbf{x}, t_i) - u(\mathbf{x}, t_{i-1})}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (2.23)$$

สมการ (2.22) จะเปลี่ยนเป็นสมการปัวส์ซง หลังจากการตัดพจน์ของความคลาดเคลื่อนทิ้ง จะได้

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t_i) = \frac{1}{k} \frac{u(\mathbf{x}, t_i) - u(\mathbf{x}, t_{i-1})}{\Delta t} \quad (2.24)$$

ประมาณพจน์ทางด้านขวาของสมการ (2.24) ด้วยผลบวกอันตะของฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง  $f_j, j = 1, 2, \dots, N + L$  จะได้

$$\frac{1}{k} \frac{u(\mathbf{x}, t_i) - u(\mathbf{x}, t_{i-1})}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j(t_i) f_j(\mathbf{x}) \quad (2.25)$$

แทน (2.25) ในสมการ (2.24) จากนั้นใช้เทคนิคของวิธีซึ้นประกอบขอบดังที่ทำมาก่อนหน้า สุดท้ายจะได้

$$\begin{aligned} c_l u_l(t_i) + \sum_{k=1}^N u_k(t_i) h_{lk} - \sum_{k=1}^N q_k(t_i) g_{lk} \\ = \sum_{k=1}^{N+L} \left\{ \alpha_j(t_i) \left( c_l \hat{u}_j(\mathbf{x}_l) + \sum_{k=1}^N \hat{u}_j(\mathbf{x}_k) h_{lk} - \sum_{k=1}^N \hat{q}_j(\mathbf{x}_k) g_{lk} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

นำมาประยุกต์กับจุดที่เลือก แล้วเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้

$$\mathbf{H} \mathbf{u}_i - \mathbf{G} \mathbf{q}_i = (\mathbf{H} \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G} \hat{\mathbf{Q}}) \bar{\alpha}_i \quad (2.27)$$

เมื่อนำสมการ (2.25) มาใช้กับจุดที่เลือกมาทั้ง  $N + L$  จุดแล้วนำมาเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ จะได้

$$\frac{1}{k \Delta t} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) = \mathbf{F} \bar{\alpha}_i \quad (2.28)$$

หรือ

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{k \Delta t} \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \quad (2.29)$$

และหลังจากแทนสมการ (2.29) ลงในสมการ (2.27) แล้วทำให้ได้สมการหลายชั้นที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$\mathbf{H} \mathbf{u}_i - \mathbf{G} \mathbf{q}_i = \omega \mathbf{S} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \quad (2.30)$$

โดยที่

$$\omega = 1/(k \Delta t) \quad (2.31)$$

และ

$$\mathbf{S} = (\mathbf{H} \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G} \hat{\mathbf{Q}}) \mathbf{F}^{-1} \quad (2.32)$$

จากนั้นจัดพจน์ในสมการ (2.30) สุดท้ายจะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่เวลา  $t_i$  ดังนี้

$$(\mathbf{H} - \omega \mathbf{S}) \mathbf{u}_i - \mathbf{G} \mathbf{q}_i = -\omega \mathbf{S} \mathbf{u}_{i-1} \quad (2.33)$$



ซึ่ง  $i = 1, 2, \dots, m$  โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้น  $u_0 = \begin{bmatrix} u(x_1, t_0) \\ u(x_2, t_0) \\ \vdots \\ u(x_{N+L}, t_0) \end{bmatrix}$

หลังจากใช้เงื่อนไขขอบแล้วเราสามารถแก้สมการ (2.33) หาค่าตัวแปรไม่ทราบค่าได้จาก ระบบสมการเชิงเส้นในรูป  $Ay = z$  อย่างไรก็ดีตามจะต้องทำซ้ำไปจนถึงเวลาที่ต้องการ เมื่อเราทราบค่าที่จุดขอบ และค่าที่จุดภายใน ณ จุดที่เลือกแล้ว เราสามารถแก้สมการหา  $\tilde{u}_i$  โดยสมการ (2.29) จากนั้นเราสามารถหาค่าประมาณของฟังก์ชัน  $u$  ที่จุดใดๆในโดเมน  $\Omega$  ได้โดยใช้สมการ (2.26) ไปประยุกต์ใช้กับจุดที่เราต้องการ

## 2.2.2 วิธีส่วนกลับคู่กันเชิงการแปลงลาปลาซ หรือ Laplace Transform Dual Reciprocity Method (LTDRM)

วิธีการแปลงลาปลาซ เป็นวิธีหนึ่งของการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ หรือ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยเฉพาะอย่างยิ่งสมการที่ขึ้นกับเวลา ตัวอย่างเช่น สมการคลื่น หรือ ความร้อน ซึ่งจะต้องมีพจน์อนุพันธ์ที่ขึ้นกับเวลาอย่างน้อยหนึ่งพจน์

จากที่กล่าวมาแล้วถึงข้อดีของวิธี FDDRM คือทำให้ทราบแนวโน้มของผลเฉลยที่เวลาต่างๆ ก่อนหน้าเวลาที่เรากำลังต้องการ แต่ปัญหาอาจเกิดขึ้นได้ในกรณีที่ต้องการหาผลเฉลย ณ ขณะที่  $t$  มีค่ามากๆ นั่นคือเมื่อเวลาผ่านไปนานๆ การใช้วิธีดังกล่าวค่อนข้างยุ่งยากและเสียเวลา นอกจากนั้นค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นอาจมีค่ามาก อันเนื่องมาจากการสะสมค่าผิดพลาดของการหาผลเฉลยในแต่ละชั้นเพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวจึงได้นำการแปลงลาปลาซมาผสมผสานกับวิธีส่วนกลับคู่กัน เรียกว่า วิธีส่วนกลับคู่กันเชิงการแปลงลาปลาซ หรือ Laplace Transform Dual Reciprocity Method (LTDRM) ซึ่งสามารถหาผลเฉลย ณ เวลา  $t$  ใดๆ ได้โดยตรงโดยไม่ขึ้นกับเวลา และจะได้นำ LTDRM ไปใช้สำหรับการหาผลเฉลยของสมการการแพร่ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น

กระบวนการของ LTDRM แบ่งเป็นสามขั้นตอนหลักด้วยกัน ขั้นตอนแรกคือทำการแปลงลาปลาซกับทุกพจน์ของสมการควบคุมเพื่อกำจัดตัวแปร  $t$  เป็นการชั่วคราว ทำให้สมการขึ้นอยู่กับตัวแปร  $x$  และ  $y$  เท่านั้น ขั้นที่สอง นำ DRM มาหาผลเฉลยกับปัญหาที่อยู่ในปริภูมิลาปลาซนี้ ขั้นตอนสุดท้ายเป็นการใช้วิธีการผกผันเชิงตัวเลขของการแปลงลาปลาซที่เรียกว่า Stehfest's algorithm [35] เพื่อเปลี่ยนผลเฉลยกลับให้เป็นผลเฉลยในปริภูมิเวลาตามเดิม

พิจารณาสมการการแพร่ตามสมการ (2.18) พร้อมเงื่อนไขขอบ (2.19), (2.20) และเงื่อนไขเริ่มต้น(2.21) จากนิยามการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันไม่ทราบค่า  $u$  เทียบกับตัวแปร  $t$

$$\mathcal{L}\{u(\mathbf{x}, t)\} = U(\mathbf{x}, p) = \int_0^{\infty} u(\mathbf{x}, t)e^{-pt} dt \quad (2.34)$$

โดยที่  $p$  เป็นตัวแปรเสริมลาปลาซและโดยการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนจะได้

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right] = pU(\mathbf{x}, p) - u(\mathbf{x}, t_0) \quad (2.35)$$

หลังจากใช้การแปลงลาปลาซกระทำกับทุกพจน์ของ (2.18) จะได้สมการซึ่งไม่ขึ้นกับตัวแปร  $t$  ดังนี้

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{k} \{pU(\mathbf{x}, p) - u_0(\mathbf{x})\} \quad (2.36)$$

และเงื่อนไขค่าขอบ คือ

$$U(\mathbf{x}, p) = \mathcal{L}\{\bar{u}(\mathbf{x}, t)\}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (2.37)$$

และ

$$Q(\mathbf{x}, p) = \frac{\partial U(\mathbf{x}, p)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = \mathcal{L}\{\bar{q}(\mathbf{x}, t)\}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (2.38)$$

สมการ (2.36) เป็นสมการแบบปัวส์ซง จึงใช้ DRM หาผลเฉลยของสมการนี้ในปริภูมิลาปลาซได้ โดยประมาณพจน์ทางขวาของสมการ (2.36) ด้วยผลบวกอันตะของฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N + L$  ดังนี้

$$\frac{1}{k} \{pU(\mathbf{x}, p) - u_0(\mathbf{x})\} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (2.39)$$

โดยที่  $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, N + L$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของ  $f_j$  ซึ่งไม่ทราบค่า  
แทนสมการ (2.39) ลงในสมการ (2.36) จะได้

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}, p) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j(\mathbf{x}) \quad (2.40)$$

ทำตามกระบวนการของ DRM จากหัวข้อ 2.1 เราจะได้สมการเพื่อหาค่าของฟังก์ชันไม่ทราบค่า  $U$  ที่ source point  $\mathbf{x}_l$  ในโดเมน  $\Omega$  ดังนี้

$$\begin{aligned} c_l U_l(p) - \sum_{k=1}^N Q_k(p) g_{lk} + \sum_{k=1}^N U_k(p) h_{lk} \\ = \sum_{j=1}^{N+L} \left\{ \alpha_j \left( c_l (\hat{u}_j)_l - \sum_{k=1}^N \hat{q}_{jk} g_{lk} + \sum_{k=1}^N \hat{u}_{jk} h_{lk} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

โดยที่  $U_k(p) = U(\mathbf{x}_k, p)$  และ  $Q_k(p) = \frac{\partial U}{\partial n}(\mathbf{x}_k, p)$

ใช้สมการ (2.41) กับจุดที่เลือกมาทั้ง  $N + L$  จุดจะได้ระบบสมการเชิงเส้นในรูป

$$\mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{G}\mathbf{Q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.42)$$

โดยที่  $\mathbf{U}$  และ  $\mathbf{Q}$  เป็นเวกเตอร์ที่ประกอบด้วยสมาชิกเป็น  $U_k(p)$  และ  $Q_k(p)$  ตามลำดับ  
เนื่องจากเราต้องการทราบค่าของเวกเตอร์  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  เพื่อแก้ระบบสมการดังกล่าว ดังนั้นแทนค่า  $\mathbf{x}$  ด้วย  
จุดที่เลือกมาทั้ง  $N + L$  จุด ใน (2.39) จะได้

$$\frac{1}{k}(p\mathbf{U} - \mathbf{u}_0) = \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.43)$$

หรือ

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{F}^{-1} \frac{1}{k}(p\mathbf{U} - \mathbf{u}_0) \quad (2.44)$$

จากนั้นแทนสมการ (2.44) ลงในสมการ (2.42) จะได้

$$\mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{G}\mathbf{Q} = \frac{1}{k}\mathbf{S}(p\mathbf{U} - \mathbf{u}_0) \quad (2.45)$$

โดยที่

$$\mathbf{S} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \quad (2.46)$$

เราจัดสมการ (2.45) เสียใหม่เป็น

$$\left( H - \frac{p}{k} S \right) U - GQ = \frac{1}{k} S u_0 \quad (2.47)$$

ซึ่งเราสามารถแก้ระบบสมการนี้เพื่อหาค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมดได้ และนำค่าที่หาได้ไปใช้หาค่าของผลเฉลยที่จุด  $x_l$  ใดๆ ได้โดยสมการ (2.41) แต่ว่าผลเฉลยดังกล่าวอยู่ในปริภูมิลาปลาซ ดังนั้นจึงต้องอาศัยผลการแปลงลาปลาซผกผันเพื่อหาผลเฉลยที่ต้องการ การแปลงลาปลาซผกผันเชิงตัวเลขมีด้วยกันหลายวิธี ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีของ Stehfest ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้คือ

กำหนดค่า  $t$  ซึ่งเป็นเวลาที่ต้องการหาผลเฉลย จากนั้นกำหนดค่า  $p$  หลายๆ ค่า โดยที่

$$p_\nu = \frac{\ln 2}{t} \cdot \nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, N_p \quad (2.48)$$

โดยที่  $N_p$  เป็นจำนวนเต็มคู่ จากนั้นหาผลเฉลยในปริภูมิลาปลาซ  $N_p$  ครั้ง โดยที่ค่าของ  $p$  เปลี่ยนไปในแต่ละครั้งตาม (2.48) ซึ่งจะได้ผลเฉลย  $N_p$  ค่า คือ  $U(x_l, p_\nu)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, N_p$  จากนั้นนำผลเฉลยที่ได้มาทำการผกผันกลับด้วย Stehfest's algorithm ซึ่งมีสูตรเป็น

$$u_l(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{\nu=1}^{N_p} W_\nu \cdot U_l(p_\nu) \quad (2.49)$$

โดยที่ ค่าถ่วงน้ำหนัก  $W_\nu$  มีรูปแบบดังนี้

$$W_\nu = (-1)^{\frac{N_p}{2} + \nu} \frac{\sum_{\kappa=\left\lfloor \frac{1}{2}(\nu+1) \right\rfloor}^{\min\left\{ \nu, \frac{N_p}{2} \right\}} \frac{\kappa^{\frac{N_p}{2}} (2\kappa)!}{\left( \frac{N_p}{2} - \kappa \right)! \kappa! (\kappa - 1)! (\nu - \kappa)! (2\kappa - \nu)!}}{\quad} \quad (2.50)$$

สำหรับค่าของ  $N_p$  นั้น จากการศึกษาพบว่า ค่าของ  $N_p$  ควรอยู่ระหว่าง 6-16 และมีรายงานว่าค่า  $N_p = 6$  ก็เพียงพอที่จะให้ผลเฉลยที่มีค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด [10] ในที่นี้จะใช้ค่า  $N_p = 6$

สังเกตด้วยว่าเมื่อกำหนดค่า  $t$  เป็นค่าๆ หนึ่งแล้ว  $\bar{u}(x, t)$  และ  $\bar{q}(x, t)$  ในสมการ (2.37) และ (2.38) จะถือว่าเป็นค่าคงที่ในตัวแปร  $t$  ดังนั้นเราจึงสามารถค่าผลการแปลง

$$\text{ลาปลาซของทั้งสองฟังก์ชันในรูป } \mathcal{L}\{\bar{u}(x, t)\} = \frac{\bar{u}(x, t)}{p} \text{ และ } \mathcal{L}\{\bar{q}(x, t)\} = \frac{\bar{q}(x, t)}{p}$$

## 2.3 ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง

ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง  $f_j$  เป็นฟังก์ชันที่เลือกมาชนิดที่ต้องการฟังก์ชัน  $\hat{u}_j$  ได้ โดยที่

$\hat{u}_j$  เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ  $\nabla^2 \hat{u}_j = f_j$  และ  $\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y} \cdot n_y$  ซึ่ง

ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง  $f_j$  แบ่งเป็นประเภทต่างๆ ได้ดังนี้

### 2.3.1 ฟังก์ชันฐานหลักเชิงรัศมี (Radial Basis Function, RBF)

RBF เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับระยะห่างระหว่าง field point  $\mathbf{x} = (x, y)$  กับ source point

$\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$  ให้  $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$  และ  $w_j = (x - x_j)n_x + (y - y_j)n_y$

- ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เป็นเชิงเส้น

$$f_j(\mathbf{x}) = r_j \quad (2.51)$$

$$\hat{u}_j(\mathbf{x}) = \frac{r_j^3}{9} \quad (2.52)$$

$$\hat{q}_j(\mathbf{x}) = \frac{r_j}{3} w_j \quad (2.53)$$

- ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เป็นกำลังสาม (cubic)

$$f_j(\mathbf{x}) = r_j^3 \quad (2.54)$$

$$\hat{u}_j(\mathbf{x}) = \frac{r_j^5}{25} \quad (2.55)$$

$$\hat{q}_j(\mathbf{x}) = \frac{r_j^3}{5} w_j \quad (2.56)$$

- Thin Plate Spline (TPS)

$$f_j(\mathbf{x}) = r_j^2 \ln r_j \quad (2.57)$$

$$\hat{u}_j(\mathbf{x}) = \frac{r_j^4}{16} \ln r_j - \frac{r_j^4}{32} \quad (2.58)$$

$$\hat{q}_j(\mathbf{x}) = \left( \frac{r_j^2}{4} \ln r_j - \frac{r_j^2}{16} \right) \cdot w_j \quad (2.59)$$

- อันดับสูงของ Thin Plate Spline (VTPS)

$$f_j(\mathbf{x}) = r_j^4 \ln r_j \quad (2.60)$$

$$\hat{u}_j(\mathbf{x}) = \frac{r_j^6}{36} \ln r_j - \frac{r_j^6}{108} \quad (2.61)$$

$$\hat{q}_j(\mathbf{x}) = \left( \frac{r_j^4}{6} \ln r_j - \frac{r_j^4}{36} \right) \cdot w_j \quad (2.62)$$

- ผลบวกอันตะในพจน์ของ  $r_j$

$$f_j(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^M r_j^m \quad (2.63)$$

ในงานวิจัยนี้จะใช้  $M = 1$  และ  $3$  จะได้

$$f_j(\mathbf{x}) = 1 + r_j \quad \text{และ} \quad 1 + r_j + r_j^2 + r_j^3 \quad (2.64)$$

$$\hat{u}_j(\mathbf{x}) = \frac{r_j^2}{4} + \frac{r_j^3}{9} \quad \text{และ} \quad \frac{r_j^2}{4} + \frac{r_j^3}{9} + \frac{r_j^4}{16} + \frac{r_j^5}{25} \quad (2.65)$$

$$\hat{q}_j(\mathbf{x}) = \left( \frac{1}{2} + \frac{r_j}{3} \right) w_j \quad \text{และ} \quad \hat{q}_j(\mathbf{x}) = \left( \frac{1}{2} + \frac{r_j}{3} + \frac{r_j^2}{4} + \frac{r_j^3}{5} \right) w_j \quad (2.66)$$

- Multiquadric (MQ)

$$f_j(\mathbf{x}) = A \quad (2.67)$$

$$\hat{u}_j(\mathbf{x}) = \frac{-c^3}{3} \ln [cA + c^2] + \frac{1}{9} AB \quad (2.68)$$

$$\hat{q}_j(\mathbf{x}) = \frac{-c^3}{3} \left( \frac{r_j}{A(A+c)} \right) + \frac{1}{9} \left( \frac{r_j B}{A} + 2r_j A \right) \quad (2.69)$$

โดยที่  $A = \sqrt{r_j^2 + c^2}$  และ  $B = r_j^2 + 4c^2$

### 2.3.2 ฟังก์ชันโกลบอล

ฟังก์ชันโกลบอลเป็นฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ขึ้นอยู่กับ field point  $\mathbf{x}$  เท่านั้น เช่น

- ฟังก์ชันพหุนาม

$$f_j(x) = x^m y^n \quad (2.70)$$

โดยที่  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  ซึ่งสามารถเขียนในรูปสามเหลี่ยมปาสคาลได้ ดังตารางที่ 2-1

สามเหลี่ยมปาสคาลสำหรับฟังก์ชันพหุนาม					ระดับ
1					0
$x$		$y$			1
$x^2$	$xy$	$y^2$			2
$x^3$	$x^2y$	$xy^2$	$y^3$		3
$x^4$	$x^3y$	$x^2y^2$	$xy^3$	$y^4$	4

ตารางที่ 2-1

และเราสามารถหา  $\hat{u}_j$  ได้เป็น

$$\hat{u}_j(x) = \sum_{k=1}^{\text{Int}[(n+2)/2]} (-1)^{k+1} \frac{m!n!x^{m+2k}y^{n-2k+2}}{(m+2k)!(n-2k+2)!} \quad (2.71ก)$$

สำหรับ  $m \geq n$

$$\hat{u}_j(x) = \sum_{k=1}^{\text{Int}[(m+2)/2]} (-1)^{k+1} \frac{m!n!x^{m-2k+2}y^{n+2k}}{(m-2k+2)!(n+2k)!} \quad (2.71ข)$$

สำหรับ  $m < n$

โดยที่  $f_j$  และ  $\hat{u}_j$  50 พจน์แรกได้ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 2-2

สำหรับ  $\hat{q}_j$  สามารถหาได้เป็น

$$\hat{q}_j(x) = \sum_{k=1}^{\text{Int}[(n+2)/2]} \left\{ c_1 \left( (m+2k)x^{m+2k-1}y^{n-2k+2}n_x + (n-2k+2)x^{m+2k}y^{n-2k+1}n_y \right) \right\} \quad (2.72ก)$$

โดยที่  $c_1 = (-1)^{k+1} \frac{m!n!}{(m+2k)!(n-2k+2)!}$  เมื่อ  $m \geq n$

$j$	$f_j$	$\hat{u}_j$	$j$	$f_j$	$\hat{u}_j$
1	1	$x^2/2$	26	$x^2y^4$	$x^2y^6/30 - y^8/840$
2	$x$	$x^3/6$	27	$xy^5$	$xy^7/42$
3	$y$	$y^3/6$	28	$y^6$	$y^8/56$
4	$x^2$	$x^4/12$	29	$x^7$	$x^9/72$
5	$xy$	$x^3y/6$	30	$x^6y$	$x^8y/56$
6	$y^2$	$y^4/12$	31	$x^5y^2$	$-x^9/1512 + x^7y^2/42$
7	$x^3$	$x^5/20$	32	$x^4y^3$	$-x^8y/280 + x^6y^3/30$
8	$x^2y$	$x^4y/12$	33	$x^3y^4$	$x^3y^6/30 - xy^8/280$
9	$xy^2$	$xy^4/12$	34	$x^2y^5$	$x^2y^7/42 - y^9/1512$
10	$y^3$	$y^5/20$	35	$xy^6$	$xy^8/56$
11	$x^4$	$x^6/30$	36	$y^7$	$y^9/72$
12	$x^3y$	$x^5y/20$	37	$x^8$	$x^{10}/90$
13	$x^2y^2$	$x^4y^2/12 - x^6/180$	38	$x^7y$	$x^9y/72$
14	$xy^3$	$xy^5/20$	39	$x^6y^2$	$-x^{10}/2520 + x^8y^2/56$
15	$y^4$	$y^6/30$	40	$x^5y^3$	$-x^9y/504 + x^7y^3/42$
16	$x^5$	$x^7/42$	41	$x^4y^4$	$x^{10}/6300 - x^8y^2/140 + x^6y^4/30$
17	$x^4y$	$x^6y/30$	42	$x^3y^5$	$x^3y^7/42 - xy^9/504$
18	$x^3y^2$	$x^5y^2/20 - x^7/420$	43	$x^2y^6$	$x^2y^8/56 - y^{10}/2520$
19	$x^2y^3$	$x^5y^2/20 - y^7/420$	44	$xy^7$	$xy^9/72$
20	$xy^4$	$xy^6/30$	45	$y^8$	$y^{10}/90$
21	$y^5$	$y^7/42$	46	$x^9$	$y^{11}/110$
22	$x^6$	$x^8/56$	47	$x^8y$	$x^{10}y/90$
23	$x^5y$	$x^7y/42$	48	$x^7y^2$	$-x^{11}/3960 + x^9y^2/72$
24	$x^4y^2$	$-x^8/840 + x^6y^2/30$	49	$x^6y^3$	$-x^{10}y/840 + x^8y^3/56$
25	$x^3y^3$	$-x^7y/140 + x^5y^3/20$	50	$x^5y^4$	$x^{11}/13860 - x^9y^2/252 + x^7y^4/42$

ตารางที่ 2-2 แสดงฟังก์ชันโกลบอลที่เป็นพหุนามและผลเฉลยเฉพาะตามสมการ (2.71)



$$\hat{q}_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\text{Int}[(m+2)/2]} \left\{ c_2 \left( (m-2k+2)x^{m-2k+1}y^{n+2k}n_x + (n+2k)x^{m-2k+2}y^{n+2k-1}n_y \right) \right\} \quad (2.72\text{ข})$$

โดยที่  $c_2 = (-1)^{k+1} \frac{m!n!}{(m-2k+2)!(n+2k)!}$  เมื่อ  $m < n$

รูปแบบของเมทริกซ์  $F$  มีลักษณะดังนี้

$$F = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_1) & f_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & f_{N+L}(\mathbf{x}_1) \\ f_1(\mathbf{x}_2) & f_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & f_{N+L}(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\mathbf{x}_{N+L}) & f_2(\mathbf{x}_{N+L}) & \cdots & f_{N+L}(\mathbf{x}_{N+L}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & \cdots \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x_{N+L} & y_{N+L} & x_{N+L}^2 & x_{N+L}y_{N+L} & \cdots \end{bmatrix}$$

- ฟังก์ชันโคไซน์

$$f_j(\mathbf{x}) = \cos mx \cos ny \quad (2.73)$$

$$\hat{u}_j(\mathbf{x}) = -\frac{\cos mx \cos ny}{m^2 + n^2} \quad (2.74)$$

$$\hat{q}_j(\mathbf{x}) = \frac{(m \sin mx \cos ny)n_x + (n \cos mx \sin ny)n_y}{m^2 + n^2} \quad (2.75)$$

โดยที่  $m, n = 0, 1, 2, \dots$

- ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์

$$f_j(\mathbf{x}) = \cosh mx \cosh ny \quad (2.76)$$

$$\hat{u}_j(\mathbf{x}) = \frac{\cosh mx \cosh ny}{m^2 + n^2} \quad (2.77)$$

$$\hat{q}_j(\mathbf{x}) = \frac{(m \sinh mx \cosh ny)n_x + (n \cosh mx \sinh ny)n_y}{m^2 + n^2} \quad (2.78)$$

โดยที่  $m, n = 0, 1, 2, \dots$

### 2.3.3 RBF ที่แต่งเติมด้วยพจน์ที่เป็นฟังก์ชันโกลบอล หรือ ฟังก์ชันลูกผสม (Hybrid function)

- Augmented Thin Plate Spline คือ TPS ที่แต่งเติมด้วยฟังก์ชันพหุนาม ถึงระดับที่ 1 เมื่อนำไปประมาณพจน์  $b$  จะอยู่ในรูป

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} (r_j^2 \ln r_j) \alpha_j + \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \quad (2.79)$$

โดยที่  $\beta_i, i = 1, \dots, 3$  เป็นค่าคงที่ เพราะฉะนั้น ขนาดของเมทริกซ์  $F$  จะมีขนาดเพิ่มขึ้นเป็น  $(N + L + 3) \times (N + L + 3)$  นั่นคือ

$$F = \begin{pmatrix} \tilde{F} & \tilde{P}^T \\ \tilde{P} & \tilde{0} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

โดยที่

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,N+L} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{N+L,1} & \cdots & f_{N+L,N+L} \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

ซึ่งในแต่ละสมาชิกของเมทริกซ์  $\tilde{F}$  มาจากค่าของ RBF,  $f_j = r_j^2 \ln r_j$  และ

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{N+L} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{N+L} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

เป็นเมทริกซ์ที่ในแต่ละสมาชิกประกอบไปด้วยพจน์ที่เป็นพหุนามจนถึงระดับที่ 1

สำหรับค่าของแต่ละสมาชิกใน  $\tilde{P}$  และ  $\tilde{Q}$  จะใช้นำค่าจากฟังก์ชัน  $\hat{u}_j$  และ  $\hat{q}_j$  ที่อยู่ในหัวข้อ

2.3.1 และ 2.3.2 ซึ่งถ้าเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันกับ  $\tilde{F}$  ในเมทริกซ์  $F$  เราใช้ฟังก์ชัน

ในหัวข้อ 2.3.1 โดยจะใช้ฟังก์ชัน  $\hat{u}_j$  และ  $\hat{q}_j$  ตาม  $f_j$  ที่เราใช้ (สำหรับ ATPS นำมาจากสม

การ (2.58) และ (2.59) ตามลำดับ) แต่ถ้าเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันกับ  $\tilde{P}$  ในเมทริกซ์  $F$  ให้นำเอาฟังก์ชัน  $\hat{u}_j$  และ  $\hat{q}_j$  จากหัวข้อ 2.3.2 มาใช้โดยใช้ให้สัมพันธ์กับฟังก์ชันที่แต่งเดิม (สำหรับฟังก์ชันพหุนามนำมาจากสมการ (2.71) และ (2.72) ตามลำดับ) ส่วนตำแหน่งเดียวกันกับ  $\tilde{P}^T$  มีค่าเท่ากับศูนย์สำหรับทั้งสองเมทริกซ์ และ ในตำแหน่งอื่นๆของเมทริกซ์  $F$ ,  $\hat{U}$  และ  $\hat{Q}$  มีค่าเท่ากับศูนย์ เพราะฉะนั้นขนาดของเมทริกซ์  $H$  และ  $G$  จึงเพิ่มจากเดิมในแถวและหลักตามจำนวนพจน์ของฟังก์ชันโกลบอลที่แต่งเดิมเข้าไป (สำหรับ ATPS ขนาดของเมทริกซ์จะเพิ่มเป็น  $(N + L + 3) \times (N + L + 3)$ ) และเวกเตอร์  $u$  และ  $q$  ก็เช่นเดียวกันจะมีสมาชิกเพิ่มมาอีก 3 จำนวน ซึ่งการสร้างเมทริกซ์  $\hat{U}$  และ  $\hat{Q}$  สำหรับฟังก์ชันลูกผสม ในหัวข้อถัดไปจะมีการสร้างในลักษณะเดียวกันนี้

สำหรับฟังก์ชันลูกผสม คือการนำเอา RBF ใดๆ มารวมกับพจน์ของฟังก์ชันโกลบอลใดๆ เพราะฉะนั้นฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงแบบนี้จึงมีได้หลายลักษณะ เราจึงกำหนดสัญลักษณ์เพื่อแทน RBF และฟังก์ชันโกลบอลในแต่ละแบบดังนี้

○ อักษรตัวแรก แทน RBF ดังนี้

- R: ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เป็นเชิงเส้น;  $r$
- S: ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เป็นกำลังสาม (cubic);  $r^3$
- T: Thin Plate Spline (TPS);  $r^2 \ln r$
- V: อันดับสูงของ Thin Plate Spline;  $r^4 \ln r$
- MQ: Multiquadric;  $\sqrt{r^2 + c^2}$

○ A คือมีการแต่งเดิมด้วยฟังก์ชันโกลบอล

○ อักษรสองตัวสุดท้าย แทนชนิดของฟังก์ชันโกลบอล

- PT: มาจากสามเหลี่ยมปาสคาล

○ ตัวเลขตัวสุดท้ายแทนจำนวนของบรรทัดทั้งหมดของฟังก์ชันในสามเหลี่ยมปาสคาลที่

นำมาพิจารณา

ตัวอย่างเช่น SAPT2 ประกอบด้วย ฟังก์ชัน  $r^3$  และแต่งเติมด้วยพจน์ที่มาจากสามเหลี่ยมปาสคาลจำนวนสองบรรทัด นั่นคือ พจน์  $1, x, y$  และ VAPT3 ประกอบด้วยอันดับสูงของ TPS ที่แต่งเติมด้วยพจน์ที่มาจากสามเหลี่ยมปาสคาลจนถึงบรรทัดที่สาม คือพจน์  $1, x, y, x^2, xy,$  และ  $y^2$  เป็นต้น

ฟังก์ชันลูกผสม ที่เรานำมาพิจารณามีดังนี้ SAPT2, SAPT3, VAPT2, VAPT3

- SAPT2

เมื่อนำไปประมาณพจน์  $b$  แล้วจะอยู่ในรูป

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} r_j^3 \alpha_j + \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \quad (2.83)$$

โดยที่  $\beta_i, i = 1, \dots, 3$  เป็นค่าคงที่ และสังเกตได้ว่าขนาดของเมทริกซ์  $F$  จะเพิ่มในจำนวนของแถวและหลักเท่ากับจำนวน  $\beta$  ที่มี ซึ่งค่าในเมทริกซ์  $F$  นำมาจากค่าของ RBF,  $f_j = r_j^3$  และเมทริกซ์  $\tilde{P}$  มีลักษณะเหมือน  $\tilde{P}$  ใน ATPS (2.82)

- SAPT3

เมื่อนำไปประมาณพจน์  $b$  แล้วจะอยู่ในรูป

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} r_j^3 \alpha_j + \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 \quad (2.84)$$

โดยที่  $\beta_i, i = 1, \dots, 6$  เป็นค่าคงที่ โดยที่เมทริกซ์  $F$  จะมีโครงสร้างเหมือน (2.80) ซึ่งในแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์  $F$  มาจากค่าของ RBF,  $f_j = r_j^3$  และ  $\tilde{P}$  มีลักษณะ

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{N+L} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{N+L} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{N+L}^2 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_{N+L} y_{N+L} \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_{N+L}^2 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

- VAPT2

เมื่อนำไปประมาณพจน์  $b$  แล้วจะอยู่ในรูป

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} (r_j^4 \ln r_j) \alpha_j + \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \quad (2.86)$$

โดยที่เมทริกซ์  $F$  นั้นมาจาก (2.80) ซึ่งในแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์  $\tilde{F}$  มาจากค่าของ RBF,  $f_j = r_j^4 \ln r_j$  และ เมทริกซ์  $\tilde{P}$  มีลักษณะเหมือนใน (2.82)

- VAPT3

เมื่อนำไปประมาณพจน์  $b$  แล้วจะอยู่ในรูป

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} (r_j^4 \ln r_j) \alpha_j + \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 \quad (2.87)$$

ดังนั้นขนาดของเมทริกซ์  $F$  จะมีขนาดเป็น  $(N + L + 6) \times (N + L + 6)$  ซึ่งในแต่ละตำแหน่งของเมทริกซ์  $\tilde{F}$  มาจากค่าของ RBF,  $f_j = r_j^4 \ln r_j$  และเมทริกซ์  $\tilde{P}$  มีลักษณะเช่นเดียวกับ (2.85)

## บทที่ 3

### ลักษณะของปัญหาที่พิจารณาและผลการวิเคราะห์

หลังจากที่ทราบกระบวนการของ DRM, FDDRM และ LTDRM มาแล้วจากบทที่สอง ในบทที่สามนี้จะได้นำวิธีการเหล่านี้ไปประยุกต์กับปัญหาในลักษณะต่าง ๆ กัน ไม่ว่าจะเป็นปัญหาที่เป็นอิสระกับเวลา หรือ ปัญหาที่ขึ้นอยู่กับเวลา ในปัญหาที่เป็นอิสระกับเวลาฟังก์ชัน  $b$  มีได้หลายลักษณะโดยอาจประกอบด้วยพจน์เหล่านี้ เช่น พจน์ของฟังก์ชันที่ทราบค่า (known function), พจน์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องตัวแปรของปัญหา แต่ไม่มีพจน์ที่เป็นอนุพันธ์ พจน์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ หรือ convective type term และปัญหาที่ขึ้นกับเวลาจะพิจารณาสมการการแพร่ โดยจะหาผลเฉลยของแต่ละปัญหาโดยมีการเปลี่ยนฟังก์ชันประมาณค่าในหลายๆแบบ และจะนำผลเฉลยจากการคำนวณของแต่ละปัญหาไปเปรียบเทียบ และวิเคราะห์ผลดูข้อดีข้อเสียของแต่ละฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง

#### 3.1 ค่าความคลาดเคลื่อน

ค่าความคลาดเคลื่อนที่นิยมใช้มีหลายแบบ เช่น  $\epsilon_m$  เป็นอัตราร้อยละเฉลี่ย  $\epsilon_d$  เป็นค่าความแตกต่างระหว่างค่าของผลเฉลยแม่นยำ (exact solution) และผลเฉลยจากการคำนวณ (approximate solution) หรือ  $\epsilon_r$  คือรากกำลังสองเฉลี่ย (root mean square, RMS) ซึ่งความคลาดเคลื่อนต่างๆมีรูปแบบดังนี้

$$\epsilon_m = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{u_{\text{approximate}} - u_{\text{exact}}}{u_{\text{exact}}} \right| \times 100$$

$$\epsilon_d = |u_{\text{exact}} - u_{\text{approximate}}|$$

$$\varepsilon_r = \sqrt{\frac{\sum (u_{\text{exact}} - u_{\text{approximate}})^2}{n}} \quad (3.1)$$

ซึ่ง  $u$  เป็นตัวแปรของปัญหา และ  $n$  เป็นจำนวนจุดทั้งหมดที่พิจารณา

$\varepsilon_m$  อาจจะทำให้เกิดการประเมินค่าของความคลาดเคลื่อนสูงเกินไป ในกรณีที่ค่าของผลเฉลยแม่นยำน้อยมาก และไม่สามารถหาค่าได้ในกรณีที่ค่าของผลเฉลยแม่นยำเป็นศูนย์ ส่วน  $\varepsilon_d$  อาจจะทำให้เกิดการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนที่ต่ำเกินไปในกรณีที่ ค่าของผลเฉลยแม่นยำและค่าของผลเฉลยประมาณมีค่าน้อยมาก ๆ เพราะฉะนั้นทางที่ดีที่สุดน่าจะเสนอความคลาดเคลื่อนในรูป  $\varepsilon_r$  ตามสมการ (3.1) เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าว ซึ่ง  $\varepsilon_r$  มีข้อดีตรงที่สามารถบอกเราได้ว่าผลเฉลยที่หาได้มีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่เท่าใด เช่น  $\varepsilon_r=0.0008$  หมายความว่า เราสามารถคาดคะเนได้ว่าผลเฉลยในเชิงตัวเลขนั้นมีความถูกต้องแม่นยำถึงทศนิยมตำแหน่งที่สอง และถ้า  $\varepsilon_r=0.0001$  แสดงว่าผลเฉลยที่หาได้อาจมีความถูกต้องจนถึงทศนิยมตำแหน่งที่สาม

เนื่องจาก  $\varepsilon_r$  ของ  $q$  จะสูงกว่าของ  $u$  มาก แต่มีแนวโน้มของการเปลี่ยนแปลงเช่นเดียวกับ  $u$  ดังนั้นในที่นี้จะแสดงเฉพาะค่า  $\varepsilon_r$  ของ  $u$  เท่านั้น

ค่า  $\varepsilon_r$  สำหรับงานวิจัยนี้จะพิจารณาภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้คือ ชั้นประกอบขอบที่ใช้ใน DRM เป็นแบบค่าคงตัว และเราจะถือว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำดี ถ้าค่าความคลาดเคลื่อน  $\varepsilon_r < 0.005$  สำหรับปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบแบบดิริชเลต์ ค่า  $\varepsilon_r$  ของ  $u$  จะพิจารณาเฉพาะที่จุดภายในเท่านั้น ( $n = L$ ) และสำหรับเงื่อนไขขอบแบบผสม ค่า  $\varepsilon_r$  ของ  $u$  จะพิจารณาเฉพาะจุด  $u$  ที่ไม่ทราบค่าบนขอบรวมกับจุดภายในเท่านั้น ( $n = L + \text{จำนวนจุดขอบที่ } u \text{ ไม่ทราบค่า}$ )

### 3.2 ลักษณะของปัญหาที่พิจารณา

ปัญหาที่นำมาพิจารณาจะแบ่งตามประเภทของฟังก์ชัน  $b$  ที่เปลี่ยนไป

#### 3.2.1 ปัญหาที่ $b$ เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า $f(x,y)$

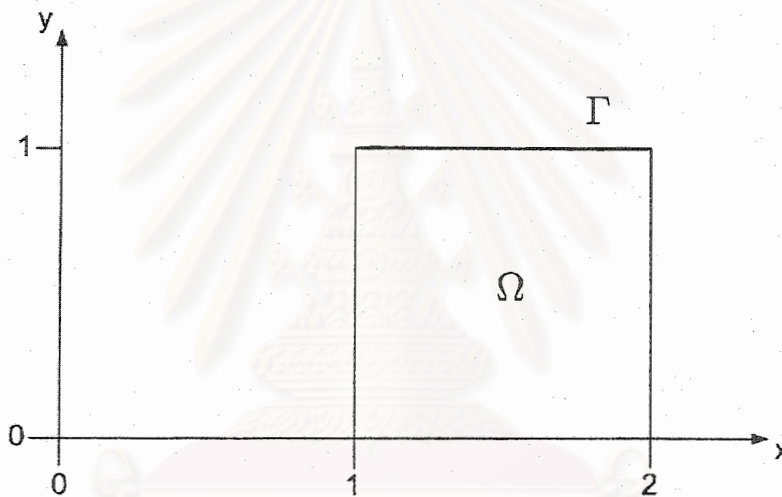
สำหรับฟังก์ชัน  $f(x, y)$  ในหัวข้อนี้พิจารณาใน 2 ปัญหาดังนี้

ปัญหาที่ 1 พิจารณาสมการ

$$\nabla^2 u = xe^y \quad (3.2)$$

โดยโดเมนที่พิจารณาคือ  $1 \leq x \leq 2$  และ  $0 \leq y \leq 1$  ตามรูปที่ 3-1 เส้นขอบเป็นแบบ  
ตรีเหลี่ยมโดยกำหนดค่า  $u = xe^y$  บน  $\Gamma$  ผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับปัญหานี้คือ

$$u = xe^y \quad (3.3)$$



รูปที่ 3-1 แสดงโดเมนและขอบเขตของปัญหา  $\nabla^2 u = xe^y$

เมื่อเราประยุกต์ใช้ DRM กับสมการ (3.2) แล้ว จะได้สมการซึ่งเขียนได้ในรูปเมทริกซ์

$$Hu - Gq = Sb \quad (3.4)$$

โดยที่เมทริกซ์  $S$  นี้เราจะใช้เหมือนกันตลอดทั้งบท โดยที่  $S = (H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1}$  และ  $b$  เป็น  
เวกเตอร์ ของฟังก์ชัน  $xe^y$  ที่จุด  $x_i = (x_i, y_i)$  โดยที่  $i = 1, 2, \dots, N + L$

ผลจากการคำนวณค่า  $\epsilon_r$  ของ  $u$  สำหรับแต่ละ  $f$  แสดงในตารางที่ 3-1 การแบ่งจุด  
ขอบและจุดภายในที่พิจารณามีสี่แบบ เมื่อเปรียบเทียบในกรณีจุดขอบเท่ากันแต่จุดภายในเพิ่ม  
ขึ้นนั้นจะมีเฉพาะฟังก์ชัน  $1 + r + r^2 + r^3$  และ ATPS เท่านั้นที่มีค่าความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น  
สำหรับค่าจากฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เป็นเชิงเส้นคือ  $r$  และ  $1 + r$  เมื่อเปรียบเทียบกันพบ



Discretisation แบบที่	$r$	$1+r$	$1+r+r^2+r^3$	$r^3$	TPS	VTPS	ATPS	SAPT2	VAPT2
1	0.001564	0.000710	0.001977	0.000617	0.002688	0.015196	0.000322	0.000617	0.015196
2	0.000479	0.000442	0.002038	0.000469	0.000560	0.000859	0.000563	0.000469	0.000859
3	0.000263	0.000305	0.002127	0.000256	0.000318	0.000431	0.000304	0.000256	0.000431
4	0.000263	0.000234	0.002034	0.000177	0.000236	0.000252	0.000208	0.000177	0.000252

ตารางที่ 3-1 ค่าความคลาดเคลื่อนรากกำลังสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา  $\nabla^2 u = xe^y$

Discretisation แบบที่ 1 : 20 ชั้นประกอบขอบ, 4 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 20 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 28 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

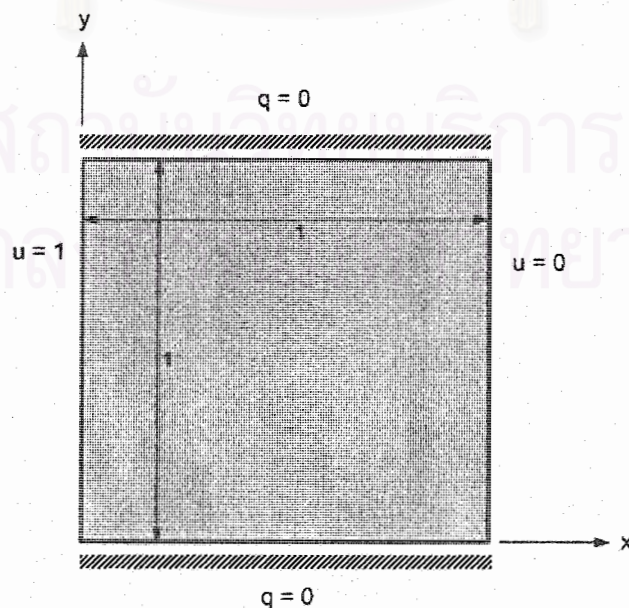
ว่า  $f = 1 + r$  ให้ค่าที่ดีกว่าเล็กน้อยยกเว้น Discretisation แบบที่ 3 เมื่อเราทำการแต่งเติมด้วย พจน์จากสามเหลี่ยมปาสคาลในสองระดับคือ ระดับที่ 1 และ 2 กับ VTPS หรือนั่นคือ VTPS2 และ VTPS3 (ไม่ได้แสดงในตาราง) พบว่าค่าไม่เปลี่ยนแปลง และสำหรับการแต่งเติมด้วยพจน์ จากสามเหลี่ยมปาสคาลของ  $r^3$  ก็ไม่เปลี่ยนแปลงเช่นเดียวกัน เมื่อลองทดสอบกับ  $1 + r + r^2 + r^3$  แล้วค่าไม่ดีขึ้นเนื่องจากมีพจน์ของ  $r^2$  โดยเมื่อดูจากค่า  $\epsilon_r$  แล้ว ผลเฉลยนั้น ถูกต้องแค่ทศนิยมตำแหน่งที่หนึ่งหรือมากที่สุดแค่ตำแหน่งที่สองเท่านั้น โดยสรุปแล้วปัญหานี้เมื่อ สังเกตจากตารางที่ 3-1 แล้วพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนของฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง  $r^3$  นั้น มีค่าน้อยที่สุด และเมื่อเพิ่มขึ้นประกอบขอบมากขึ้นสำหรับฟังก์ชัน  $f$  ทุกประเภททำให้ผล เฉลยมีความถูกต้องแม่นยำมากยิ่งขึ้น

ปัญหาที่ 2 พิจารณาสมการ

$$\nabla^2 u = x^2 \quad (3.5)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบตามรูปที่ 3-2 และผลเฉลยแม่นยำตรงคือ

$$u = 1 - \frac{13}{12}x + \frac{x^4}{12} \quad (3.6)$$



รูปที่ 3-2 โดเมนและค่าขอบของปัญหา  $\nabla^2 u = x^2$

Discretisation แบบที่	RBF					ฟังก์ชันลูกผสม				ฟังก์ชันโกลบอล		
	$r$	$1+r$	$r^3$	TPS	VTPS	ATPS	SAPT2	VAPT2	VAPT3	PT	cos	cosh
1	0.008061	0.010337	0.006734	0.005023	0.001346	0.005023	0.006734	0.001346	0.001346	0.182915	0.008304	0.008314
2	0.006847	0.008707	0.005659	0.003863	0.006263	0.003863	0.005659	0.006263	0.006263	1.613450	0.006853	0.006854
3	0.005470	0.006919	0.004498	0.003612	0.004349	0.003612	0.004498	0.004349	0.004349	2.707339	3.244277	176.180439
4	0.004575	0.005863	0.003769	0.002917	0.003647	0.002917	0.003769	0.003647	0.003647	0.199078	0.004385	0.004386
5	0.003682	0.004731	0.003022	0.002344	0.002999	0.002344	0.003022	0.002999	0.002999	0.003462	0.003461	0.003462
6	0.002614	0.003360	0.002145	0.001680	0.002260	0.001680	0.002145	0.002260	0.002260	0.094442	167.588371	130.799287

ตารางที่ 3-2 ค่าความคลาดเคลื่อนรากกำลังสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา  $\nabla^2 u = x^2$

Discretisation แบบที่ 1 : 8 ชั้นประกอบขอบ, 1 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 8 ชั้นประกอบขอบ, 4 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 8 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 12 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 5 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 6 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

เมื่อประยุกต์ใช้ DRM แล้วจะได้ระบบสมการที่เขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ตั้งสมการ (3.4) โดยที่  $b$  เป็นเวกเตอร์ของฟังก์ชัน  $x^2$  ที่จุด  $x_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N + L$  จากความคลาดเคลื่อนที่แสดงไว้ในตารางที่ 3-2 จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ให้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องที่สุดคือกลุ่มของ RBF และฟังก์ชันลูกผสม สำหรับฟังก์ชันสองกลุ่มนี้จะเห็นว่า  $1 + r$  ให้ผลด้อยที่สุด ส่วนฟังก์ชันอื่นให้ผลใกล้เคียงกันแต่ TPS ให้ผลเฉลยดีที่สุด ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง  $r^3$  และ SAPT2 มีค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากัน และฟังก์ชัน TPS และ ATPS ก็ให้ความคลาดเคลื่อนเท่ากัน และอีกกลุ่มที่มีความคลาดเคลื่อนที่เท่ากันคือ VTPS, VAPT2 และ VAPT3 แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันโกลบอลที่นำไปแต่งเติมกับ RBF ไม่มีผลกระทบต่อผลเฉลย ในส่วนของฟังก์ชัน  $r$  และ  $1 + r$  ฟังก์ชัน  $r$  ให้ผลเฉลยที่ดึกกว่า  $1 + r$  เล็กน้อย สำหรับปัญหานี้เราจะพิจารณาฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เป็นโกลบอลเพิ่มขึ้นมา เมื่อดูจากตารางที่ 3-2 จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้จากฟังก์ชันโกลบอลไม่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำนัก และจะเห็นว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้จาก Discretisation บางกลุ่มเท่านั้นที่มีค่าน้อย เพราะฉะนั้นการใช้ฟังก์ชันโกลบอลนั้นไม่ควรใช้โดด ๆ ควรจะใช้ร่วมกับ RBF จะให้ผลดีกว่า [23,36] เนื่องจากการเลือกพิกัดของจุดนั้นอาจจะวางกันเป็นแนวเส้นตรงทำให้เมทริกซ์นั้นกลายเป็นเมทริกซ์เอกฐานได้ ซึ่งเราสามารถหลีกเลี่ยงได้โดยเปลี่ยนจุดใหม่ แต่เมทริกซ์ที่ได้ก็อาจจะยังคงมีค่า condition number ที่ใหญ่ได้ [20]

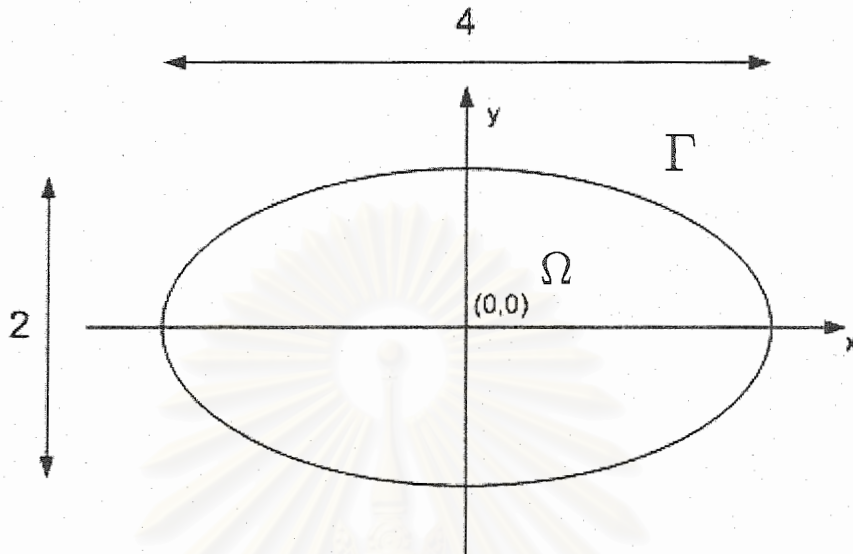
### 3.2.2 ปัญหาที่ $b$ ประกอบด้วยฟังก์ชันไม่ทราบค่า $u$

ฟังก์ชันประเภทนี้ประกอบด้วยฟังก์ชันไม่ทราบค่า  $u$  โดย  $b$  ไม่มีพจน์ที่มีอนุพันธ์มาเกี่ยวข้อง รูปแบบของฟังก์ชันคือ  $f(x, y, u)$  ซึ่งมี 3 ปัญหาดังนี้

#### ปัญหาที่ 1 พิจารณา

$$\nabla^2 u = -u \quad (3.7)$$

บนโดเมนรูปวงรี ซึ่งมีความยาวของแกนเอก (major axis) เท่ากับ 4 หน่วย และความยาวของแกนโท (minor axis) เป็น 2 หน่วย และมีจุดศูนย์กลางของวงรีอยู่ที่จุดกำเนิด ดังรูปที่ 3-3



รูปที่ 3-3 โดเมนที่พิจารณาของสมการ  $\nabla^2 u = -u$

ค่าขอบ คือ  $u = \sin x$  ซึ่งเป็นค่าเดียวกันกับผลเฉลยแม่นยำตรงด้วย และหลังจากการประยุกต์ใช้ DRM แล้วจะได้ระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์เป็น

$$Hu - Gq = -Su \quad (3.8)$$

หรือ

$$(H + S)u - Gq = 0 \quad (3.9)$$

จากการสังเกตค่า  $\epsilon_r$  ในตารางที่ 3-3 พบว่า ผลลัพธ์จะดีขึ้นตามการเพิ่มของจุดภายใน (พิจารณาจาก Discretisation แบบที่ 3 ถึง 4) และจุดขอบ (พิจารณาจาก Discretisation แบบที่ 1 และ แบบที่ 2) จะเห็นได้ว่า Discretisation แบบที่ 4 ให้ค่าผลเฉลยดีที่สุด และฟังก์ชัน  $r$  ให้ความถูกต้องดีกว่าฟังก์ชัน  $1+r$  ส่วนฟังก์ชัน  $r^3$  และ SAPT2 พบว่ามีค่าค่อนข้างใกล้เคียงกันมาก แม้ว่า SAPT2 จะเพิ่มพจน์ที่เป็นพหุนามเข้าไปก็ตาม แต่กลุ่มของฟังก์ชันที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ดีที่สุดคือ VTPS, VAPT2, VAPT3 และ MQ เนื่องจากค่า  $\epsilon_r$  ของฟังก์ชันกลุ่มนี้โดยเฉพาะในแบบที่ 3 มีความถูกต้องถึงทศนิยมที่มากกว่าฟังก์ชันแบบอื่นอยู่หนึ่งตำแหน่ง และ

Discretisation แบบที่	$r$	$1+r$	$r^3$	TPS	VTPS	MQ	ATPS	SAPT2	VAPT2	VAPT3
1	0.007963	0.011273	0.009347	0.007539	0.004801	0.000494	0.008028	0.009336	0.006701	0.006701
2	0.004401	0.006479	0.006121	0.004517	0.003211	0.000731	0.005190	0.006072	0.005716	0.005716
3	0.001229	0.001524	0.001219	0.001101	0.000803	0.000310	0.001066	0.001231	0.000882	0.000882
4	0.000651	0.000704	0.000309	0.000445	0.000169	0.000127	0.000375	0.000332	0.000187	0.000187

ตารางที่ 3-3 ค่าความคลาดเคลื่อนรากลำดับสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา  $\nabla^2 u = -u$

Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 7 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 32 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 64 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

VTPS ให้ความถูกต้องดีกว่า VAPT2 และ VAPT3 เล็กน้อย แต่ MQ ให้ความถูกต้องแม่นยำดี ที่สุดโดยค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยถึงทศนิยมตำแหน่งที่สาม สำหรับค่า  $c$  ที่ใช้ใน MQ ใน Discretisation ที่ 1 ถึง 4 จะใช้  $c = 1.7, 1.6, 1.4$  และ  $1.1$  ตามลำดับ แต่การได้มาซึ่งค่า  $c$  นั้นเสียเวลามากเนื่องจากต้องใช้ค่า  $c$  หลายๆค่าเพื่อหาค่า  $c$  ที่เหมาะสมที่สุดที่ทำให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ทำให้เปรียบเทียบ MQ กับฟังก์ชันอื่นลำบากจึงจะใช้ในบางปัญหาเท่านั้น

ปัญหาที่ 2 พิจารณาสมการ

$$\nabla^2 u = u \quad (3.10)$$

บนโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่ง  $0 \leq x \leq 1$  และ  $0 \leq y \leq 1$  เงื่อนไขขอบของสมการ (3.10)

กำหนดดังรูปที่ 3-2

ผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับตัวอย่างนี้คือ

$$u = \frac{e^x}{1-e^2} + \frac{e^{2-x}}{e^2-1} = \frac{\sinh(1-x)}{\sinh 1} \quad (3.11)$$

หลังจากใช้ DRM กับสมการ (3.10) แล้วจะได้

$$Hu - Gq = Su \quad (3.12)$$

หรือ

$$(H - S)u - Gq = 0 \quad (3.13)$$

ผลจากการเปรียบเทียบค่า  $\epsilon_r$  ตามตารางที่ 3-4 ในกลุ่ม RBF และฟังก์ชันลูกผสม มีการแปรผันของความคลาดเคลื่อนที่ลดลงตามการเพิ่มจุดภายในและจุดขอบ แต่จะเห็นว่าความคลาดเคลื่อนจะลดลงตามการเพิ่มของจุดภายในมากกว่าการเพิ่มจุดขอบ เมื่อดูโดยรวมแล้วค่าความคลาดเคลื่อนของทั้งกลุ่ม RBF และฟังก์ชันลูกผสมจะใกล้เคียงกัน  $r^3$ , TPS และ SAPT2 จะให้ค่าต่ำกว่าฟังก์ชันอื่น โดยเฉพาะ Discretisation แบบที่ 2 สำหรับในกลุ่ม RBF  $1 + r$  ให้ค่า

Discretisation แบบที่	RBF					ฟังก์ชันลูกผสม				ฟังก์ชันโกลบอล		
	$r$	$1+r$	$r^3$	TPS	VTPS	ATPS	SAPT2	VAPT2	VAPT3	PT	cos	cosh
1	0.008440	0.005919	0.010296	0.013863	0.016003	0.004621	0.010296	0.016003	0.016003	0.241028	1.224487	0.109427
2	0.006732	0.004876	0.011941	0.008761	0.006551	0.005058	0.011941	0.006551	0.006551	0.656783	0.020382	0.517349
3	0.005399	0.004029	0.005641	0.006641	0.005764	0.004833	0.005641	0.005764	0.005764	0.646230	1.078264	0.425897
4	0.004035	0.002783	0.004411	0.005266	0.004429	0.003447	0.004411	0.004429	0.004429	0.369987	0.337343	0.561534
5	0.003088	0.002057	0.003426	0.004102	0.003607	0.002461	0.003426	0.003607	0.003607	0.004316	0.546397	2.577304
6	0.002050	0.001309	0.002308	0.002775	0.002818	0.001449	0.002308	0.002818	0.002818	25.805740	3.866899	32.223800

ตารางที่ 3-4 ค่าความคลาดเคลื่อนรากกำลังสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา  $\nabla^2 u = u$

Discretisation แบบที่ 1 : 8 ชั้นประกอบขอบ, 1 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 8 ชั้นประกอบขอบ, 4 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 8 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 12 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 5 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 6 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน



ความคลาดเคลื่อนที่ดีที่สุด รองลงมาเป็น  $r$ ,  $r^3$  และ VTPS ส่วนกลุ่มของฟังก์ชันลูกผสม ฟังก์ชันที่ให้ผลเฉลยที่มีค่าใกล้เคียงแม่นยำตรงมากที่สุดคือ ATPS และจะสังเกตเห็นว่า SAPT2, VAPT2 และ VAPT3 มีค่าเท่ากับ RBF ของตัวมัน ในกลุ่มของฟังก์ชันโกลบอลยังคงให้ผลไม่ดีเช่นเดิม Partridge [23] ได้ให้ข้อสังเกตว่าฟังก์ชันโกลบอลควรจะใช้ร่วมกับ RBF มากกว่า เพราะเมทริกซ์ที่เป็นผลลัพธ์จะหลีกเลี่ยง ill condition ของปัญหาได้อย่างสิ้นเชิง ซึ่งไม่เช่นนั้นอาจพบปัญหาดังกล่าวได้ ถ้าใช้ฟังก์ชันโกลบอลนี้โดดๆ ดังนั้นในปัญหาต่อไปจะไม่พิจารณาฟังก์ชันโกลบอล และเมื่อเปรียบเทียบระหว่างฟังก์ชันที่ให้ผลดีในกลุ่มของ RBF และ ฟังก์ชันลูกผสม คือ  $1+r$  และ ATPS ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าค่า  $\epsilon_r$  ของ  $1+r$  ดีกว่าของ ATPS ยกเว้น Discretisation ในแบบแรกเท่านั้น

### ปัญหาที่ 3 พิจารณาสมการ

$$\nabla^2 u = x - u \quad (3.14)$$

โดยเงื่อนไขขอบคือ  $u = \sin x + x$  บน  $\Gamma$  ซึ่งพิจารณาบนโดเมนรูปวงรีจากรูปที่ 3-3 และผลเฉลยแม่นยำตรงคือ

$$u = \sin x + x \quad (3.15)$$

เมื่อประยุกต์ใช้ DRM กับสมการ (3.14) แล้วจะได้

$$Hu - Gq = S(v - u) \quad (3.16)$$

หรือ

$$(H + S)u - Gq = Sv \quad (3.17)$$

เมื่อ  $v$  เป็นเวกเตอร์ที่ประกอบด้วยสมาชิก  $x_i$  จากการเปรียบเทียบ  $\epsilon_r$  ของแต่ละฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงในตารางที่ 3-5 จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จะดีขึ้นจาก Discretisation แบบที่ 1 ถึง 4 ตามการเพิ่มขึ้นของจุดขอบและจุดภายใน จะสังเกตได้ว่าฟังก์ชัน  $1+r$  และ  $r^3$  ไม่ได้ไป

Discretisation แบบที่	$r$	$1+r$	$r^3$	TPS	VTPS	ATPS	SAPT2	VAPT2	VAPT3
1	0.013860	0.017272	0.015393	0.013597	0.010690	0.013597	0.015393	0.010690	0.010690
2	0.008212	0.010462	0.010098	0.008564	0.006996	0.008564	0.010098	0.006996	0.006996
3	0.001800	0.002146	0.001931	0.001785	0.001385	0.001785	0.001931	0.001385	0.001385
4	0.000756	0.000818	0.000464	0.000587	0.000309	0.000587	0.000464	0.000309	0.000309

ตารางที่ 3-5 ค่าความคลาดเคลื่อนรากล้างสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา  $\nabla^2 u = x - u$

Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 7 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 32 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 64 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กว่าฟังก์ชันที่เป็น  $r$  ธรรมดา และกลุ่มของฟังก์ชันที่ให้ผลเฉลยที่ดีคือ  $r$ , TPS และ VTPS เห็นได้ชัดจาก Discretisation แบบที่ 2 มีผลเฉลยที่ดีกว่าฟังก์ชันแบบอื่น และมีความถูกต้องถึงทศนิยมที่มากขึ้นหนึ่งตำแหน่งจาก Discretisation แบบแรก แต่ฟังก์ชันที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดในกลุ่มนี้คือ VTPS ส่วนในกลุ่มของฟังก์ชันลูกผสม จะเห็นว่าทุกฟังก์ชันให้ค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับค่าความคลาดเคลื่อนของ RBF ของตัวมันเอง แสดงว่าเมื่อเพิ่มฟังก์ชันโกลบอลเข้าไปแล้วไม่มีผลต่อผลเฉลย

### 3.2.3 ปัญหาที่ $b$ ประกอบด้วยอนุพันธ์ $\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial u}{\partial y}$

ฟังก์ชันประเภทนี้มีลักษณะคือ  $b = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$  โดยมีปัญหาในสามลักษณะ

เพื่อเปรียบเทียบกัน โดยสองปัญหาแรกเป็นปัญหาแบบเชิงเส้นและปัญหาสุดท้ายเป็นปัญหาไม่เชิงเส้นดังนี้

#### ปัญหาที่ 1 พิจารณาสมการ

$$\nabla^2 u = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.18)$$

บนโดเมนรูปวงรีเหมือนเดิม ดังรูปที่ 3-3 และมีการแบ่งจำนวนชั้นประกอบขอบและจำนวนจุดภายในเหมือนเดิม โดยเงื่อนไขขอบคือ  $u = e^{-x}$  บน  $\Gamma$  และยังเป็นผลเฉลยแม่นยำตรงด้วย ในการประยุกต์ DRM กับสมการ (3.18) จะต้องประมาณพจน์ทางด้านขวาของสมการ (3.18) ด้วยฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง  $f$  ดังนี้

$$\text{จาก } u = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j f_j \quad (3.19)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ  $x$  จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j \frac{\partial f_j}{\partial x}$$

เขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \bar{\beta} \quad (3.20)$$

จาก (3.19) เขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้  $\bar{\beta} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u}$  แทนค่าลงใน (3.20) จะได้

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \quad (3.21)$$

โดยกระบวนการของ DRM ซึ่งจะได้

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = -\mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$$

แทน  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$  จากสมการ (3.21) จะได้

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = -\mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \quad (3.22)$$

และเมื่อจัดรูปสมการ (3.22) แล้วจะได้

$$\left( \mathbf{H} + \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \right) \mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

ในปัญหานี้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วง  $r$ ,  $1+r$  และ TPS จะใช้ไม่ได้ เนื่องจากถ้า

$f_j(x) = r_j$  และ  $1+r_j$  แล้ว  $\frac{\partial f_j}{\partial x} = \frac{x-x_j}{r_j}$  และ ถ้า  $f_j(x) = r_j^2 \ln r_j$  แล้ว

$\frac{\partial f_j}{\partial x} = (1+2 \ln r_j)(x-x_j)$  จะเห็นว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้หาค่าไม่ได้ที่  $r_j = 0$  แต่ใน

ทางปฏิบัติเรายังคงใช้  $f_j(x) = r_j$  และ  $1+r_j$  ได้โดยให้  $\frac{\partial f_j}{\partial x} = 0$  [36] ส่วน TPS จะไม่นำมา

พิจารณาในที่นี้

จาก (3.23) เมื่อได้ค่า  $\mathbf{u}$  แล้วเรานำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ และใช้  $\varepsilon_r$

เพื่อดูความคลาดเคลื่อน จะได้ตามตารางที่ 3-6 เห็นได้ชัดว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง VTPS

ให้ผลโดยรวมดีที่สุด  $r^3$  ให้ผลดีกว่า  $r$  และ  $1+r$  ซึ่งให้ผลใกล้เคียงกัน  $r$  และ  $1+r$  ให้ผล

ดีขึ้นเมื่อเพิ่มจุดภายในและดีขึ้นเมื่อเพิ่มจุดขอบ แต่ผลที่ได้ด้อยลงเมื่อเพิ่มจุดขอบมากเกินไปในแบบที่ 4 ส่วน  $r^3$  ให้ผลดีขึ้นเมื่อเพิ่มจุดภายในหรือจุดขอบ VTPS ให้ผลดีขึ้นอย่างมาก เมื่อเพิ่มจุดขอบ แต่ผลที่ได้จะไม่ดีขึ้นไปอีกเมื่อเพิ่มจุดขอบในแบบที่สี่ ในส่วนของ MQ มีค่าความคลาดเคลื่อนใกล้เคียงกับ  $r^3$  ซึ่ง MQ สำหรับปัญหานี้ผลที่ได้ไม่ดีเหมือนในหัวข้อ 3.2.2 ในปัญหาที่ 1 โดย MQ สำหรับปัญหานี้มีความถูกต้องถึงทศนิยมที่ใกล้เคียงกับ  $r^3$  เท่านั้น

Discretisation แบบที่	$r$	$1+r$	$r^3$	VTPS	MQ
1	0.016820	0.018511	0.012581	0.004865	0.019186
2	0.009611	0.010135	0.007770	0.003386	0.008229
3	0.008453	0.008797	0.001886	0.000927	0.003657
4	0.010631	0.010918	0.000891	0.000938	0.001026

ตารางที่ 3-6 ค่าความคลาดเคลื่อนราคากำลังสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา  $\nabla^2 u = -\frac{\partial u}{\partial x}$

Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 7 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 32 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 64 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

ปัญหาที่ 2 พิจารณาสมการ

$$\nabla^2 u = -\frac{2}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.24)$$

โดยโดเมนที่พิจารณานั้นมีลักษณะเป็นวงรีเหมือนปัญหาก่อนหน้าซึ่งแสดงในรูปที่ 3-3 แต่ย้ายจุด

ศูนย์กลางของวงรีไปที่จุด  $(-3, 0)$  และผลเฉลยแม่นยำตรงคือ  $u = \frac{2}{x}$  โดยที่กำหนดเป็นเงื่อนไข

ขอบบน  $\Gamma$  ด้วย

หลังจากเราประยุกต์ใช้ DRM กับสมการ (3.24) แล้วจะได้ระบบสมการที่เขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$Hu - Gq = SD \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.25)$$

โดยที่  $D$  เป็นเมทริกซ์ทแยงมีสมาชิกในแนวทแยงเป็น  $-\frac{2}{x_i}$

จากนั้นทำการประมาณพจน์ทางด้านขวามือของสมการ (3.24) ในลักษณะที่คล้ายกับปัญหาที่ผ่านมา โดยประมาณพจน์  $\frac{\partial u}{\partial x}$  จากสมการ (3.19)-(3.21) และเมื่อแทน (3.21) ลงในด้านขวาของสมการ (3.25) แล้วจะได้

$$Hu - Gq = SD \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} u \quad (3.26)$$

จัดรูปสมการเสียใหม่จะได้

$$(H - R)u - Gq = 0 \quad (3.27)$$

โดยที่  $R = SD \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1}$

จากนั้นทำการหาผลเฉลย เมื่อได้ผลเฉลยแล้วนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ จะได้  $\epsilon_r$  ตามตารางที่ 3-7 เมื่อสังเกตจากผลโดยรวมแล้วพบว่า VTPS ให้ผลดี แต่เมื่อเพิ่มจุดภายใน (แบบที่ 2) ความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นจากแบบที่ 1 ใน Discretisation แบบที่ 1 และ 2 ค่าความคลาดเคลื่อนของฟังก์ชัน  $r$  และ  $1+r$  มีค่าน้อยกว่า ในฟังก์ชัน  $r^3$  และ VTPS แต่ค่า  $\epsilon_r$  ของฟังก์ชัน  $r^3$  และ VTPS มีค่าน้อยกว่าฟังก์ชัน  $r$  และ  $1+r$  เมื่อมีการแบ่งชั้นประกอบขอบมากขึ้น โดยเฉพาะ Discretisation แบบที่ 4 มีความถูกต้องถึงทศนิยมที่มากขึ้นมาอีกหนึ่งตำแหน่ง เมื่อพิจารณาในลักษณะของการเพิ่มจุดภายในแต่ละฟังก์ชันให้ผลดังนี้ VTPS ดีขึ้นตามการเพิ่มจำนวนชั้นประกอบขอบ แต่ไม่ดีขึ้นตามการเพิ่มจุดภายใน  $r$  และ  $1+r$  ดีขึ้นตามจำนวน จุดภายในที่เพิ่มขึ้น แต่ไม่ดีขึ้นเมื่อจำนวนชั้นประกอบขอบเพิ่มขึ้น ส่วน  $r^3$  ดี

ชั้นเมื่อเพิ่มขึ้นประกอบขอบและจุดภายใน

Discretisation แบบที่	$r$	$1+r$	$r^3$	VTPS
1	0.004036	0.004653	0.006533	0.004656
2	0.002779	0.003282	0.004984	0.005256
3	0.002213	0.002316	0.001523	0.002032
4	0.003176	0.003207	0.000815	0.000667

ตารางที่ 3-7 ค่าความคลาดเคลื่อนราคากำลังสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา  $\nabla^2 u = -\frac{2}{x} \frac{\partial u}{\partial x}$

Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 7 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 32 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 64 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

ปัญหาที่ 3 พิจารณาสมการไม่เชิงเส้น

$$\nabla^2 u = -u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.28)$$

โดยที่โดเมน เส้นขอบและผลเฉลยแม่นยำตรงที่พิจารณาเหมือนกับปัญหาก่อนหน้า หลังจากประยุกต์ DRM และประมาณพจน์ด้านขวาของสมการ (3.28) ด้วยฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงแล้ว จะได้รูปแบบของสมการที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ที่คล้ายกับสมการ (3.26) คือ

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = -\mathbf{S}\mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (3.29)$$

โดยเมทริกซ์  $\mathbf{U}$  ใน (3.29) แทนเมทริกซ์  $\mathbf{D}$  ใน (3.26) ซึ่ง  $\mathbf{U}$  เป็นเมทริกซ์แนวทแยง มีสมาชิกเป็น  $u_1, u_2, \dots, u_{N+L}$  เมื่อจัดรูปแบบของสมการ (3.29) ใหม่แล้วจะได้

$$\left( \mathbf{H} + \mathbf{S}\mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \right) \mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = 0 \quad (3.30)$$

สำหรับปัญหาไม่เชิงเส้นนั้น  $U$  ยังไม่ทราบค่า เพราะฉะนั้นจึงต้องใช้กระบวนการทำซ้ำ ค่าของ  $u_i, i = 1, 2, \dots, N + L$  สำหรับรอบแรกของการทำซ้ำหาได้จากสมการลาปลาซ  $Hu - Gq = 0$  ซึ่งจะทำให้ได้เวกเตอร์  $u_1$  และนำไปใส่ในแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์  $U$  ทำให้ได้  $U_1$  แล้วนำไปใช้หาผลเฉลยในสมการ (3.30) ทำให้ได้  $u_2$  ทำซ้ำเช่นนี้ไปจนกระทั่งค่าของผลเฉลยในรอบปัจจุบันและในรอบก่อนหน้ามีค่าใกล้เคียงกัน โดยที่มีความแตกต่างน้อยกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับ (tolerance) จึงจะได้ผลเฉลย สำหรับปัญหานี้ ค่า  $u$  ลู่เข้าสู่ค่าที่ยอมรับได้ โดยใช้การทำซ้ำทั้งหมดเพียง 3 ครั้ง ในทุกฟังก์ชันและ Discretisation ทุกแบบ ยกเว้น Discretisation ในแบบที่ 4 ของฟังก์ชัน  $r$  และ  $1+r$  มีการทำซ้ำทั้งหมด 4 ครั้ง ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับเท่ากับ  $10^{-4}$  มีผลของ  $\epsilon_r$  ในตารางที่ 3-8 ดังนี้

Discretisation				
แบบที่	$r$	$1+r$	$r^3$	VTPS
1	0.003863	0.004518	0.006361	0.004473
2	0.002721	0.003222	0.005001	0.005078
3	0.002098	0.002203	0.001499	0.001984
4	0.002956	0.002979	0.000787	0.000644

ตารางที่ 3-8 ความคลาดเคลื่อนรากล้างสองเฉลี่ยสำหรับปัญหา  $\nabla^2 u = -u \frac{\partial u}{\partial x}$

Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 7 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 32 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 64 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

จากค่าความคลาดเคลื่อนในตารางที่ 3-8 พบว่า มีแนวโน้มคล้ายในปัญหาก่อนหน้า คือ ใน Discretisation แบบที่ 1 และ 2 ฟังก์ชัน  $r$  และ  $1+r$  ให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ดีกว่า



ฟังก์ชัน  $r^3$  และ VTPS ยกเว้น ค่า  $\epsilon_r$  ของฟังก์ชัน VTPS ใน Discretisation ในแบบที่ 1 มีค่าน้อยกว่าค่า  $\epsilon_r$  ของฟังก์ชัน  $1+r$  เพียงเล็กน้อย แต่เมื่อมีการแบ่งจำนวนชั้นประกอบขอบมากขึ้นฟังก์ชัน  $r^3$  และ VTPS กลับให้ค่าที่ดีกว่าฟังก์ชันสองแบบแรก โดยเฉพาะ Discretisation แบบที่ 4 แต่เมื่อดูผลโดยรวมแล้วจะเห็นว่า  $r^3$  และ VTPS ให้ผลดีที่สุด

### 3.3.4 ปัญหาที่ b เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลา

เราจะพิจารณาหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นคือสมการการแพร่ในสมการ (2.18) โดยใช้ FDDRM และ LTDRM ซึ่งการสร้างสูตรได้กล่าวไว้แล้วในบทที่สองในหัวข้อ 2.1.2 และ 2.1.3 ตามลำดับ สำหรับปัญหาที่พิจารณามีสองตัวอย่างดังนี้

ปัญหาที่ 1 สำหรับกรณีแรกนี้ Moridis และ Reddell [33] ได้เคยนำมาทดสอบโดยใช้วิธี LTBE ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับการไหลของความร้อนในแก้วมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $-a < x < a$  และ  $-b < y < b$  ที่  $a = b = 0.2$  เมตร ดังรูปที่ 3-4 โดยที่เวลาเท่ากับศูนย์ อุณหภูมิเริ่มต้นภายในโดเมนเป็นหนึ่งหน่วย และที่ขอบอุณหภูมิเป็นศูนย์ และยังคงเป็นศูนย์ตลอดในเวลาต่อมา

พิจารณาสมการ

$$\nabla^2 u(x, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.31)$$

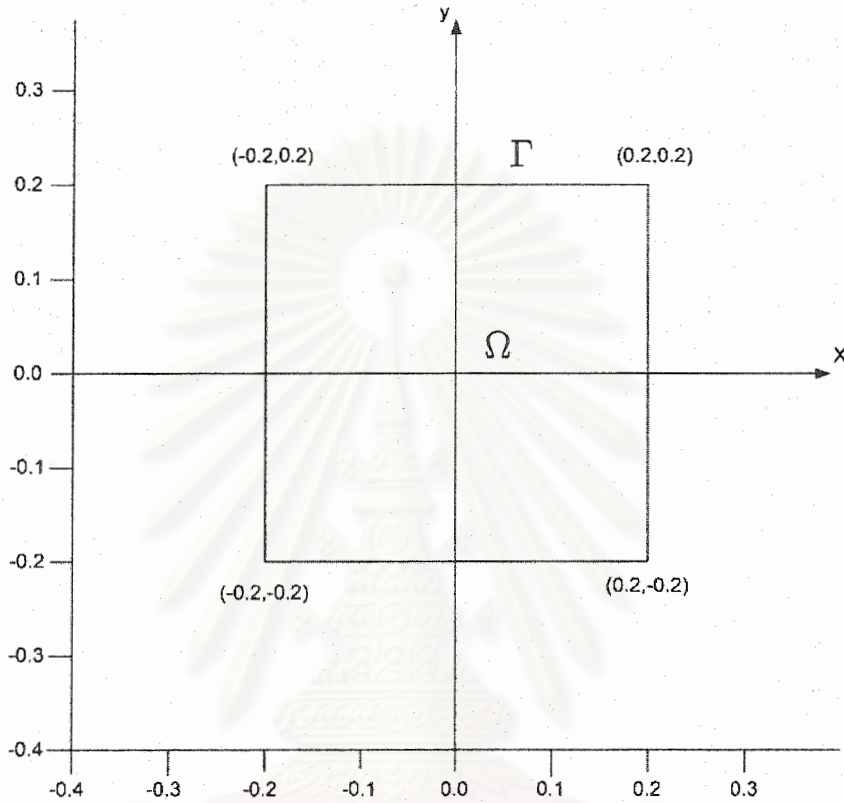
ค่าของ  $k$  บอกถึงการกระจายความร้อนของสารนั้น มีหน่วยเป็น  $[L^2][T^{-1}]$  สำหรับปัญหานี้เราจะใช้  $k = 5.8 \times 10^{-7}$  เมตร<sup>2</sup>/วินาที

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytic solution) ของสมการ (3.31) โดย Carslaw และ Jaeger [34]

คือ

$$u(x, y, t) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_{n,m} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b} e^{-D_{n,m} t} \quad (3.32)$$

$$\text{โดยที่ } L_{n,m} = \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)} \text{ และ } D_{n,m} = \frac{k\pi^2}{4} \left[ \frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2}{b^2} \right]$$



รูปที่ 3-4 โดเมนที่พิจารณบนแก้วรูปทรงสี่เหลี่ยม

หาผลเฉลยโดยใช้ FDDRM และ LTDRM ที่เวลา 9000 วินาที แล้วหาความคลาดเคลื่อนสำหรับ Discretisation ทั้ง 4 แบบ ดังตารางที่ 3-9 และ 3-10 ซึ่งพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนมีแนวโน้มเหมือนกันระหว่างตารางทั้งสอง กล่าวคือมีการแปรผันตาม Discretisation แบบต่างๆ เหมือนกัน แต่ในตารางที่ 3-10 ให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ดีกว่าเมื่อแต่ละชั้นเวลาเท่ากับ 1 วินาที แต่ถึง FDDRM จะให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ดีกว่า LTDRM ก็ตาม แต่ยังมีผลเสียในเรื่องของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลค่อนข้างนานกว่า LTDRM เนื่องจากต้องมีการทำซ้ำถึง 9000 รอบกว่าจะได้ผลเฉลย ณ เวลาที่ต้องการ แต่ LTDRM นั้นใช้จำนวนการวนซ้ำเท่ากับค่า  $N_p = 6$  เท่านั้นซึ่งน้อยกว่ามาก เพราะฉะนั้นเมื่อทั้งสองตารางมีแนวโน้มของ ความคลาดเคลื่อน

Discretisation แบบที่	$r$	$1+r$	$r^3$	TPS	VTPS	ATPS	SAPT2	VAPT2	VAPT3
1	0.037556	0.039449	0.023015	0.026720	0.023277	0.026720	0.023015	0.023277	0.023277
2	0.026835	0.027269	0.029975	0.027351	0.034500	0.027351	0.029975	0.034500	0.034500
3	0.028870	0.029444	0.029055	0.027363	0.031187	0.027363	0.029055	0.031187	0.031187
4	0.030317	0.030925	0.028351	0.027429	0.029291	0.027429	0.028351	0.029291	0.029291

ตารางที่ 3-9 ค่าความคลาดเคลื่อนรากล้างสองเฉลี่ยสำหรับ LTDRM

Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 12 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 40 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Discretisation									
แบบที่	$r$	$1 + r$	$r^3$	TPS	VTPS	ATPS	SAPT2	VAPT2	VAPT3
1	0.033235	0.035136	0.018341	0.022166	0.018532	0.022166	0.018341	0.018532	0.018532
2	0.021674	0.022099	0.024779	0.022266	0.029372	0.022266	0.024779	0.029372	0.029372
3	0.023689	0.024274	0.023762	0.022088	0.025875	0.022088	0.023762	0.025875	0.025875
4	0.025182	0.025806	0.023026	0.022106	0.023949	0.022106	0.023026	0.023949	0.023949

ตารางที่ 3-10 ค่าความคลาดเคลื่อนรากล้างสองเฉลี่ยสำหรับ FDDRM

Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 12 จุดภายใน

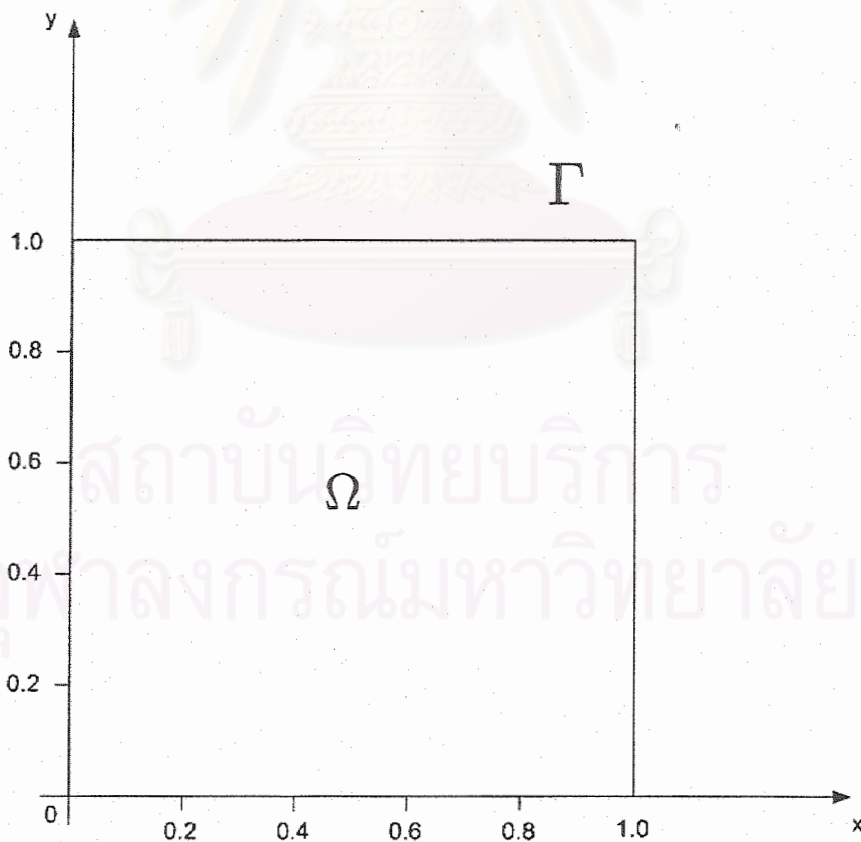
Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 40 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

ที่เหมือนกัน จึงขอพิจารณาเพียงตารางที่ 3-9 เพียงตารางเดียว สังเกตได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนของฟังก์ชันส่วนใหญ่ไม่ได้แปรผันตามจำนวนจุดภายในหรือจุดบนขอบที่เพิ่มขึ้น มีเพียงบางฟังก์ชัน เช่น  $r^3$  และ VTPS ที่ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงเมื่อเพิ่มจุดขอบ และ  $r, 1+r$  ที่ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงเมื่อเพิ่มจุดภายใน ส่วนฟังก์ชันลูกผสมให้ค่าเท่ากับฟังก์ชัน RBF ของตัวเองซึ่งหมายความว่า ฟังก์ชันโกลบอลที่นำมาแต่งเติมกับ RBF ไม่มีผลกระทบต่อผลที่ได้ และในส่วนของฟังก์ชันที่ให้ค่าผลเฉลี่ยที่ดี จากการพิจารณาโดยรวมเห็นได้ว่าทุกฟังก์ชันมีค่าความคลาดเคลื่อนที่ใกล้เคียงกัน และสามารถใช้งานจำนวนชั้นประกอบขอบและจุดภายในน้อยๆ ได้

ปัญหาที่ 2 สำหรับปัญหาที่ผ่านมาเป็นการกำหนด เงื่อนไขขอบแบบดิริชเลต์ ในกรณีนี้จะใช้เงื่อนไขขอบแบบผสม (mixed boundary condition) โดยปัญหานี้สามารถอธิบายได้ถึงการไหลของความร้อนในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดหนึ่งหน่วย ตามรูปที่ 3-4



รูปที่ 3-5 โดเมนที่พิจารณาสำหรับปัญหาการไหลของความร้อนในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัส

โดยพิจารณาสมการเดิม (3.31) ค่า  $k = 5.8 \times 10^{-7}$  เมตร<sup>2</sup>/วินาที เช่นเดิม ซึ่งมีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์คือ

$$u(x, y, t) = \frac{4}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) e^{-(\pi^2/2)kt} \quad (3.33)$$

โดยเงื่อนไขขอบแบบดิริชเลต์ใช้ค่าจากสมการ (3.33) บนขอบของสี่เหลี่ยมด้านที่  $x = 0$  และ  $y = 0$  และเงื่อนไขขอบแบบนอยมันน์ ใช้ค่าอนุพันธ์แนวฉากของสมการ (3.33) บนขอบด้านที่  $x = 1$  และ  $y = 1$  โดยโดเมนของปัญหานี้แสดงไว้ตามรูปที่ 3-4 โดยหาผลเฉลยที่เวลา 9000 วินาที และค่าของความคลาดเคลื่อน  $\epsilon_r$  ในตารางที่ 3-11 และ 3-12 จากการสังเกตโดยรวมสำหรับ ตารางที่ 3-11 และ 3-12 แล้วพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน และทั้ง 2 ตารางมีแนวโน้มตามการเพิ่มจำนวนจุดขอบและจุดภายในเหมือนกัน จึงจะพิจารณาแค่ตารางที่ 3-11 พบว่า ฟังก์ชัน  $r$ ,  $1+r$ , TPS และ ATPS ให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงเมื่อเพิ่มจุดภายในและเพิ่มจุดขอบ แต่ฟังก์ชัน  $r^3$ , SAPT2, VTPS, VTPS2 และ VTPS3 ให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงเฉพาะเมื่อเพิ่มจุดขอบเท่านั้น และจากการสังเกตผลโดยรวมแล้ว TPS และ ATPS ให้ผลดีที่สุด แต่ค่าที่ได้เหมือนกันจึงควรเลือก TPS เพราะมีการคำนวณที่ง่ายกว่า และเนื่องจากผลเฉลยมีค่าใกล้เคียงกันสำหรับ LTDRM และ FDDRM เพราะฉะนั้นการแก้ปัญหาในลักษณะนี้น่าจะใช้ LTDRM เนื่องจากเสียเวลาในการประมวลผลทางคอมพิวเตอร์น้อยกว่า FDDRM ซึ่งต้องทำการทำซ้ำถึง 9000 รอบโดยใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 1 วินาที

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Discretisation แบบที่	$r$	$1+r$	$r^3$	TPS	VTPS	ATPS	SAPT2	VAPT2	VAPT3
1	0.002191	0.004853	0.001634	0.000751	0.000778	0.000751	0.001634	0.000778	0.000778
2	0.001580	0.003417	0.155945	0.000587	0.011930	0.000587	0.155945	0.011930	0.011930
3	0.001317	0.002668	0.001077	0.000516	0.074232	0.000516	0.001077	0.074232	0.074232
4	0.001195	0.002353	0.001034	0.000502	0.021152	0.000502	0.001034	0.021152	0.021152

ตารางที่ 3-11 ค่าความคลาดเคลื่อนรากล้างสองเฉลี่ยสำหรับ LTDRM

Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 28 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Discretisation แบบที่	$r$	$1+r$	$r^3$	TPS	VTPS	ATPS	SAPT2	VAPT2	VAPT3
1	0.002184	0.004853	0.001634	0.000756	0.388326	0.000756	0.001634	0.388326	0.388326
2	0.001582	0.003410	0.002132	0.000592	0.014746	0.000592	0.002132	0.014746	0.014746
3	0.049027	0.099027	0.039903	0.019191	0.205172	0.019191	0.039903	0.205172	0.205172
4	0.001203	0.002355	0.001037	0.000505	0.003319	0.000505	0.001037	0.003319	0.003319

ตารางที่ 3-12 ค่าความคลาดเคลื่อนรากล้างสองเฉลี่ยสำหรับ FDDRM

Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 3 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

Discretisation แบบที่ 4 : 28 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 4

### สรุปผลการวิจัย และ ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้เราได้นำฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงหลายๆ ฟังก์ชันมาใช้กับ DRM เพื่อแก้ปัญหา 4 ประเภท เพื่อเปรียบเทียบข้อดีข้อเสียของฟังก์ชันดังกล่าว และการสรุปว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันใดให้ผลดีจะพิจารณาภายใต้เงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. โดเมนที่พิจารณาเป็นวงรี หรือสี่เหลี่ยม
2. เงื่อนไขขอบที่ใช้เป็นแบบดิริชเลต์ และ แบบผสม
3. ชั้นประกอบขอบที่ใช้ใน DRM เป็นแบบค่าคงตัว
4. จำนวนชั้นประกอบขอบ และจำนวนจุดภายในที่พิจารณาไม่เกิน 64 ชั้น และ 25 จุด

ตามลำดับ

5. เราจะถือว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำดี ถ้าค่าความคลาดเคลื่อน  $\epsilon_r < 0.005$

โดยผลสรุปจะครอบคลุมปัญหาที่ได้แสดงไว้ในที่นี้เท่านั้น ซึ่งปัญหาจะแบ่งตามประเภทของ  $b$  ดังต่อไปนี้

ปัญหาที่  $b$  เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า  $f(x, y)$

เมื่อมองโดยรวมแล้วค่าความคลาดเคลื่อนสำหรับปัญหาแบบนี้มีค่าน้อยลงตามการเพิ่มจำนวนจุดขอบและจุดภายในที่มากขึ้น และฟังก์ชันที่ให้ผลเฉลยที่ดีสำหรับปัญหาที่เสนอทั้งสองปัญหาคือ  $f = r^3$  แม้ว่าในปัญหาที่ 2 Thin Plate Spline จะให้ผลดีที่เล็กน้อย อย่างไรก็ตาม  $r^3$  ก็ยังให้ผลดีคือ มีความถูกต้องถึงทศนิยมที่เท่ากับ Thin Plate Spline

ปัญหาที่  $b$  ประกอบด้วยฟังก์ชันไม่ทราบค่า  $u$

สำหรับปัญหาประเภทนี้ ผลลัพธ์ที่ได้จะดีขึ้นตามการเพิ่มจำนวนจุดภายในและจุดขอบที่มากขึ้น เช่นเดียวกับปัญหาที่  $b$  เป็นฟังก์ชันที่ทราบค่า  $f(x,y)$  เพราะฉะนั้นค่าความคลาดเคลื่อนตามตารางใน Discretisation แบบสุดท้ายจะมีค่าน้อยที่สุด และฟังก์ชันที่ให้ผลเฉลยที่ดีคือ Multiquadric และ  $r^4 \ln r$  แต่เนื่องจาก Multiquadric มีความยุ่งยากให้การหาค่าคงที่ ดังนั้นการใช้  $r^4 \ln r$  จึงสะดวกกว่าและได้ผลเฉลยที่ให้ผลเฉลยดีใกล้เคียงกัน โดยที่ผลเฉลยมีความถูกต้องถึงทศนิยมที่เท่ากับปัญหาที่ 1 ส่วนปัญหาแบบที่ 2 โดเมนที่พิจารณาเปลี่ยนไปจากวงรีในปัญหาแบบที่ 1 เป็นโดเมนที่เป็นสี่เหลี่ยม พบว่าฟังก์ชันที่ให้ผลเฉลยที่ดีคือ  $1+r$  ซึ่งดีกว่า ATPS เพียงเล็กน้อยเท่านั้นแต่มีความถูกต้องถึงทศนิยมที่เท่ากัน และในปัญหาที่ 3 โดเมนที่พิจารณาเหมือนกับปัญหาแบบที่ 1 พบว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ให้ผลดีที่สุดเป็น  $r^4 \ln r$  ดังนั้นเมื่อมองโดยรวมแล้วฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่ให้ผลเฉลยที่ดีสำหรับปัญหาที่  $b$  ประกอบด้วยฟังก์ชันไม่ทราบค่า  $u$  คือ  $f = r^4 \ln r$

ปัญหาที่  $b$  ประกอบด้วยอนุพันธ์  $\frac{\partial u}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial u}{\partial y}$

ในปัญหาเชิงเส้น Multiquadric ใช้ไม่ได้ผลดีนัก ไม่เหมือนในปัญหาที่  $b = f(x,y)$  จากผลโดยรวมแล้วฟังก์ชันที่ให้ผลดีคือ  $f = r^4 \ln r$  และ  $r^3$  โดยให้ผลดีทั้งปัญหาที่ 1 และ 2 สำหรับในปัญหาที่ 3 เป็นปัญหาไม่เชิงเส้นซึ่งมีกระบวนการทำให้เป็นเชิงเส้น (linearisation) จากนั้นต้องทำกระบวนการทำซ้ำ สำหรับปัญหานี้มีการทำซ้ำมากที่สุดแค่เพียง 4 รอบเท่านั้น เพราะฉะนั้นกระบวนการทำซ้ำที่เกิดขึ้นไม่ทำให้เสียเวลาสำหรับการประมวลผลมากนัก จากปัญหาทั้งสามแบบนี้ พบว่าฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงสำหรับปัญหาที่มีอนุพันธ์คือ ฟังก์ชันอันดับสูงของ Thin Plate Spline และ  $r^3$

ปัญหาที่  $b$  เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลา

ในปัญหาชนิดนี้เราจะพิจารณาสมการการแพร่ พร้อมกับเงื่อนไขขอบสองลักษณะ โดยปัญหาแรกเงื่อนไขค่าขอบมีเพียงเงื่อนไขดิริชเลต์ ซึ่ง LTDRM ของปัญหาแบบที่ 1 ให้ผลด้อย

กว่า FDDRM แต่เพียงเล็กน้อยเท่านั้น เมื่อคำนึงถึงเวลาที่ใช้ในการประมวลผลแล้ว FDDRM ใช้เวลาดำเนินการมากกว่ามาก ผลที่ได้จากทั้งสองวิธีสำหรับฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงทุกฟังก์ชันมีค่าใกล้เคียงกัน เมื่อผลเฉลยจาก LTDRM และ FDDRM มีค่าค่อนข้างใกล้เคียงกัน ดังนั้นควร จะเลือกใช้วิธี LTDRM ส่วนปัญหาที่ 2 ใช้เงื่อนไขขอบเป็นแบบผสม พบว่าผลเฉลยของ TPS และ ATPS ดีกว่าฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงอื่นๆ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกัน เพราะฉะนั้นผลโดยรวม จากสองปัญหานี้ เราควรพิจารณาเลือกใช้ TPS และใช้ LTDRM เหมาะสมกว่า FDDRM

### ผลการสรุปโดยรวมจากทุกปัญหา

ในกลุ่มของฟังก์ชัน  $r$  และ  $r^3$  สังเกตได้ว่ากำลังของ  $r$  ที่มากขึ้นไม่ทำให้ผลเฉลยดีขึ้น เสมอไป เนื่องจาก  $r^3$  จะใช้ได้ดีสำหรับบางปัญหาเท่านั้น ส่วนฟังก์ชันลูกผสม หรือ RBF ที่แต่งเติมด้วยฟังก์ชันโกลบอล เมื่อนำมาใช้แล้วค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้ใกล้เคียงหรือเท่ากับ RBF ก่อนแต่งเติม แสดงว่าฟังก์ชันโกลบอลที่แต่งเติมเข้าไปไม่มีผลต่อผลเฉลยนัก

จากค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้ในทุกตารางในบทที่ 3 นั้น เมื่อสังเกตจากผลโดยรวมแล้วสามารถสรุปได้ว่า สำหรับปัญหาทั้ง 4 แบบ ที่นำมาพิจารณา ฟังก์ชันที่ควรพิจารณาเลือกใช้ 3 อันดับแรกคือ  $r^3$ , TPS และ VTPS

โดยที่  $r^3$  จะใช้ได้ดีกับปัญหา แบบที่ 1 และ 3

TPS จะใช้ได้ดีกับปัญหา แบบที่ 1 และ 4

VTPS จะใช้ได้ดีกับปัญหา แบบที่ 2 และ 3

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# รายการอ้างอิง

1. Nardini, D. and Brebbia, C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary element. In : Brebbia CA, editor. Boundary element methods in engineering, Berlin : Springer (1982) : 312-326.
2. Partridge, P.W., Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C. The Dual Reciprocity Boundary Element Method. Southampton : Computational Mechanics Publications (Elsevier, Boston), 1992.
3. Partridge, P.W. and Brebbia, C.A. Computer implementation of the BEM dual reciprocity method for Poisson-Type problems in Software for Engineering Workstations. Vol. 5. No. 4. Southampton : CML Publication, Oct. 1989.
4. Partridge, P.W. and Berbbia, C.A. Computer implementation of the BEM dual reciprocity method for the solution of general field equations. Communications in applied numerical methods 6 (1990) : 83-92.
5. Eiichi Chino and Nobuyoshi Tosaka. Dual reciprocity boundary element analysis of time-independent Burger's equation. Engineering Analysis with Boundary Element 21 (1998) : 261-270.
6. Wrobel, L.C., Brebbia, C.A. and Nardini D. The Dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction in Finite Element in Water Resources. Eds. A So de Costa et al, Vol. VI. Berlin : Springer-Verlag, 1986.
7. Wrobel, L.C., Telles, J.C.F. and Brebbia, C.A. A dual reciprocity boundary element formulation for axisymmetric diffusion problem. BEM VIII (1986).
8. Loeffler, L.F and mansur, W.J. Dual reciprocity bounadry element formulation for potential problems in infinite domains. BEM X (1981) : 155-163.
9. Zhu, S., Zhang, Y. and Marchart, T.R. A DRBEM model for microwave heating problems. Appl. Math. Modelling 19 (1995) : 287-297
10. Zhu, S. Satraraha, P. and Xiapping Lu. Solving linear diffusion equations with the dual reciprocity method in Laplace space. Engineering Analysis with Boundary Element 13 (1994) : 1-10.

11. Ramachandran, P.A. and Karur, S.R. Multidimensional interpolation using oscillatory radial basis functions. Computers Math. Applic 35, 11 (1998) : 63-73.
12. Wen, P.H., Aliabadi, M.H. and Young, A. Application of dual reciprocity method to plates and shells. Engineering Analysis with Boundary Elements 24 (2000) : 583-590.
13. Lu, X.P. On the application of the thin plate spline in the LTDRM for solving linear and nonlinear diffusion problems. In 2nd Biennial Australian Engineering Mathematics, Sydney, Australia (July 1996).
14. Karur, S.R. and Ramachandran, P.A. Augmented thin plate spline approximation in DRM. Boundary Elements Communication 6 (1995) : 55-58.
15. Bridges, T.R. and Wrebel, L.C. A Dual Reciprocity Formulation for Elasticity Problems with Body Forces using Augmented thin plate splines. Communications in Numerical Methods in Engineering 12, 3 (1996) : 209-220.
16. Davies, A.J., Toutip, W. and Kaen, S.J. The dual reciprocity method for solving bihamonic problems. Boundary Elements XXIV WIT Press (2002).
17. Zhu, S.P., Lin, H.W. and Lu, X.P. A combination of the LTDRM and The ATPS in solving diffusion Problems. Engineering Analysis with Boundary Elements 21 (3) (1998) : 285-289.
18. Golberg, M.A., Chen, C.S. and Karur, S.R. Improved multiquadric approximation for partial differential equation. Engineering Analysis with Boundary Elements 18 (1996) : 9-17.
19. Zhu, S.P. and Liu, H.W. On the application of the multiquadric bases in conjunction with the LTDRM method to solve nonlinear diffusion equations. Applied Mathematics and Computation 96 (2-3) (1998) : 161-175.
20. Cheng, A.H.-D., Lafe, O. and Orilli, S. Dual-reciprocity BEM based on global interpolation functions. Engineering Analysis with Boundary Element 13 (1994) : 303-311.
21. Arocher, R. Computing Flow and Pressure Transients in Heterogeneous Media Using Boundary Element Method. Ph.D. Dissertation, Stanford U., 2000.

22. El Harrouni, K., Ouazar, D., Wrobel, L.C. and Cheng, A.H.-D. Global Interpolation Function Based DRBEM Applied to Darcy's Flow in Heterogeneous Media. Engineering Analysis with Boundary Elements (1996) : 281-285.
23. Partridge, P.W. Towards criteria for selecting approximation function in the Dual Reciprocity Method. Engineering Analysis with Boundary Elements 24 (2000) : 519-529.
24. Zhu, S. and Zhang, YL. Improvement on the dual reciprocity boundary element method for equations with convective terms. Communications in Applied Numerical Methods 10 (1994) : 361-71.
25. Yamada, T., Wrobel, L.C. and Power, H. On the convergence of the dual reciprocity boundary element method. Engineering Analysis with Boundary Elements 13 (1994) : 291-8.
26. Zhang, Y. and Zhu, S. On the choice of interpolation function used in the dual reciprocity boundary element method. Engineering Analysis with Boundary Elements 13 (1994) : 387-396.
27. Powell, M.J.D. The theory of radial basis function approximation. Lancaster, UK: Numerical Analysis Summer School 1990.
28. Karur, S.R. and Ramachandran, P.A. Radial basis function approximation in the dual reciprocity method. Mathematical and Computational Modelling 20 (1994) : 59-70.
29. Cheng, A.H.-D., Grilli, S. and Lefe, O. Dual Reciprocity BEM based on Complete Set Global Shape Functions. BEM XV (1993) : 343-58.
30. Golberg, M. Recent development in the numerical evaluation of particular solutions in the BEM. J Appl Math Computation 75 (1996) : 91-101.
31. Golberg, M.A. and Chen, C.S. The theory of radial basis function applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations. Boundary Element Communications 5 (1994) : 57-61.
32. Partridge, P.W. and Sensale, B. Hybrid approximation functions in dual reciprocity boundary element method. Communications in Numerical Methods in Engineering 13 (1997) : 83-94.
33. Moridis, G.L. and Reddell, D.L. The Laplace transform boundary element (LTBE) method for the solution of diffusion-type equations. Boundary

Element XIII Vol. 1, Computational Mechanics Publication, Southampton, Springer-Verlag, Berlin (1991) : 83-97.

34. Carslow, H.S. and Jaeger, J.C. Conduction of Heat in Solids. London: Oxford University Press, London, 1959.
35. Stehfest, H. Algorithm 386: numerical inversion of Laplace transform. Comm. ACM 13 (1970) : 47-49 and 624.
36. Partridge, P.W. Local v. global approximation function for diffusion convection and other problems. Engineering Analysis with Boundary Elements 14 (1995) : 349-56 .
37. Zhu, S. and Zhang, Y. Solving general field equations in infinite domains with dual reciprocity boundary element method. Engineering Analysis with Boundary Element 12 (1993) : 241-250.



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



**ภาคผนวก**

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## ภาคผนวก ก

### ฟังก์ชันฐานหลักเชิงรัศมีในรูปแบบทั่วไป

ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงดั่งที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ในหัวข้อ 2.3.1 เป็นฟังก์ชันฐานหลักเชิงรัศมีในรูปแบบเฉพาะซึ่งฟังก์ชันเหล่านั้นมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

สำหรับฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เป็นเชิงเส้นและฟังก์ชันประมาณค่าในช่วงที่เป็นกำลังสาม นำมาจากรูปแบบทั่วไปคือ

$$f = r^n$$

$$\hat{u} = \frac{r^{n+2}}{(n+2)^2}$$

$$\hat{q} = \frac{r^n}{(n+2)} \cdot ((x - x_j)n_x + (y - y_j)n_y)$$

โดยที่  $n = 0, 1, 3, 5, \dots$

สำหรับ Thin Plate Spline และ อันดับสูงของ Thin Plate Spline มีรูปแบบทั่วไปคือ

$$f_j = r_j^n \ln r_j$$

$$\hat{u} = [(n+2) \ln r - 2] \left( \frac{r^{n+2}}{(n+2)^3} \right)$$

$$\hat{q} = \frac{r^n}{(n+2)} \left( \ln r + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+2} \right) \cdot ((x - x_j)n_x + (y - y_j)n_y)$$

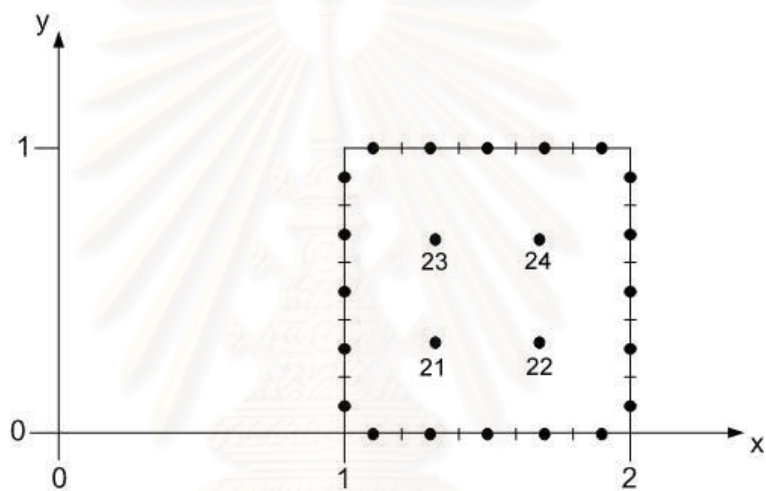
โดยที่  $n = 2, 4, 6, \dots$

## ภาคผนวก ข

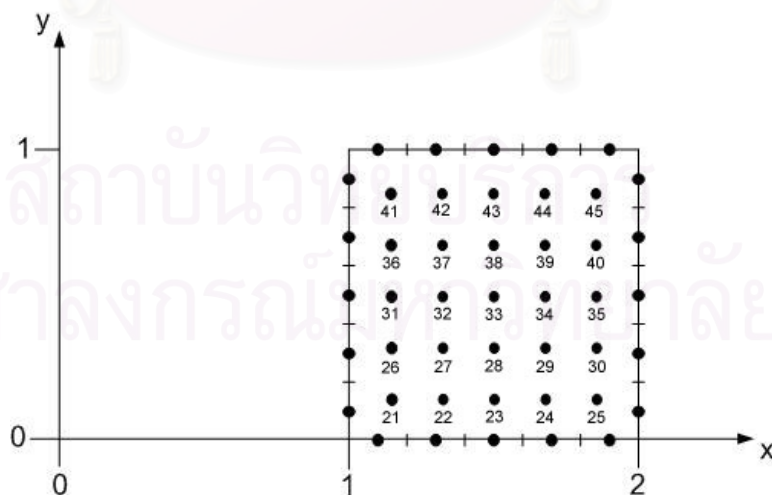
### ภาพประกอบสำหรับ Discretisation แต่ละแบบ

ภาพประกอบที่แสดง Discretisation ในตารางทั้งหมดในบทที่ 3

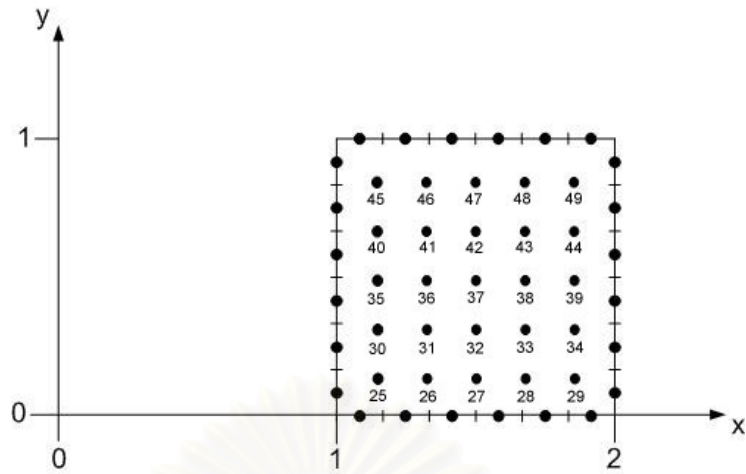
รูปที่ 1 ถึง 4 แสดงภาพประกอบสำหรับตาราง 3-1



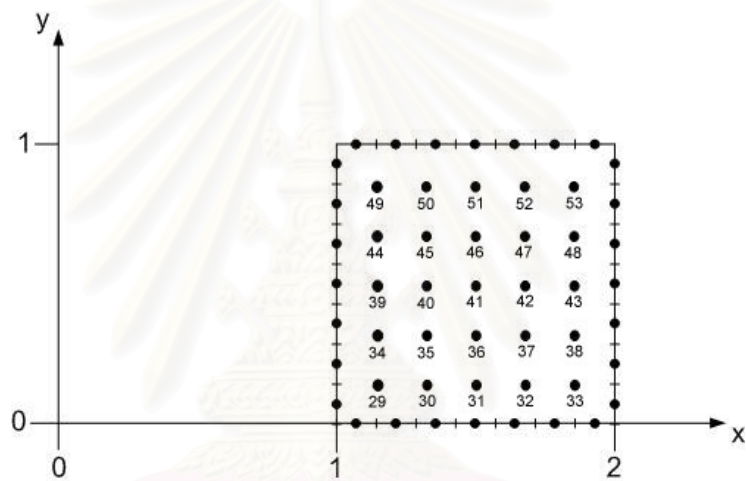
รูปที่ 1 แสดง Discretisation แบบที่ 1 : 20 ชั้นประกอบขอบ, 4 จุดภายใน



รูปที่ 2 แสดง Discretisation แบบที่ 2 : 20 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

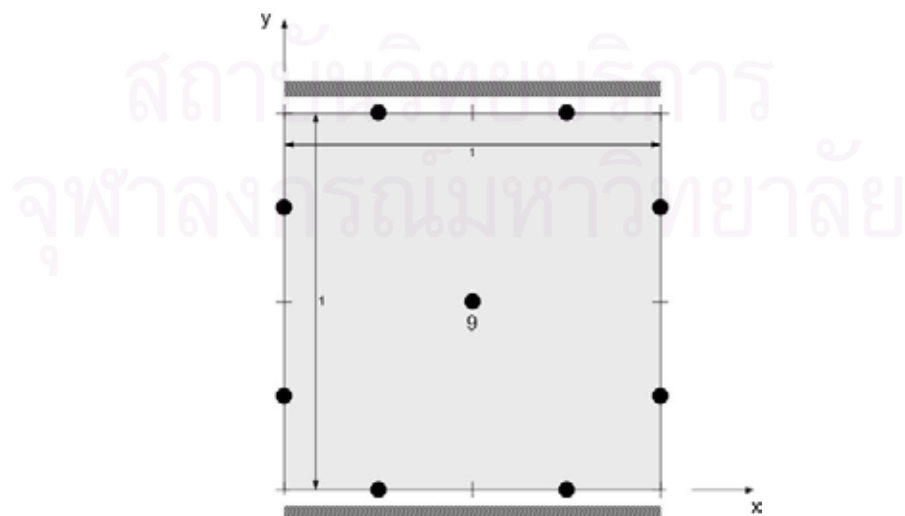


รูปที่ 3 แสดง Discretisation แบบที่ 3 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

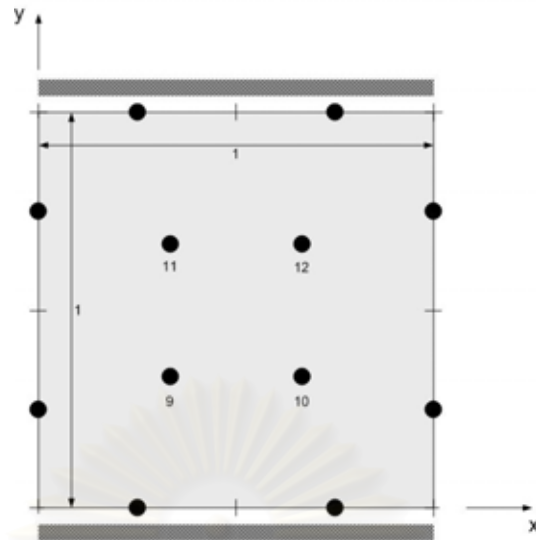


รูปที่ 4 แสดง Discretisation แบบที่ 4 : 28 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

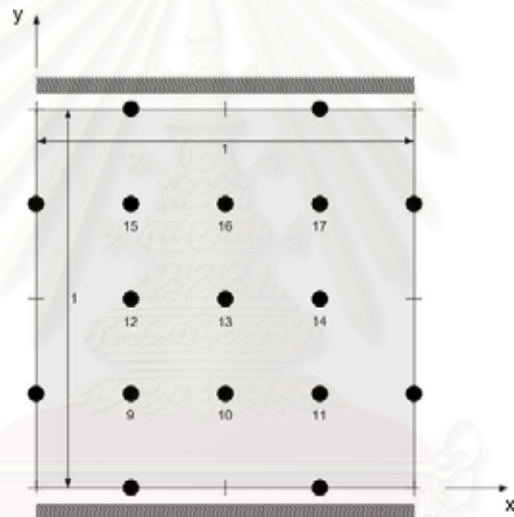
รูปที่ 5 ถึง 10 แสดงภาพประกอบสำหรับตารางที่ 3-2 และ ตารางที่ 3-4



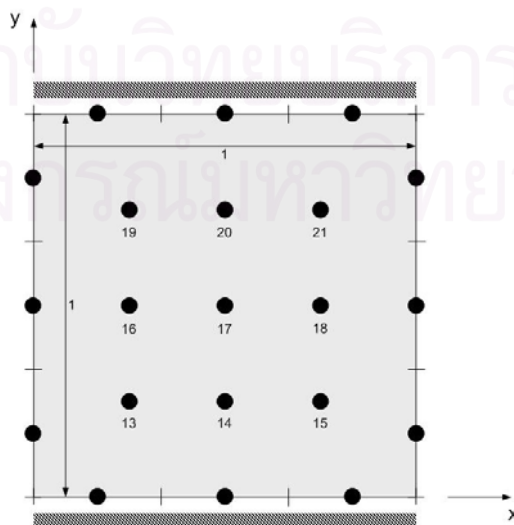
รูปที่ 5 แสดง Discretisation แบบที่ 1 : 8 ชั้นประกอบขอบ, 1 จุดภายใน



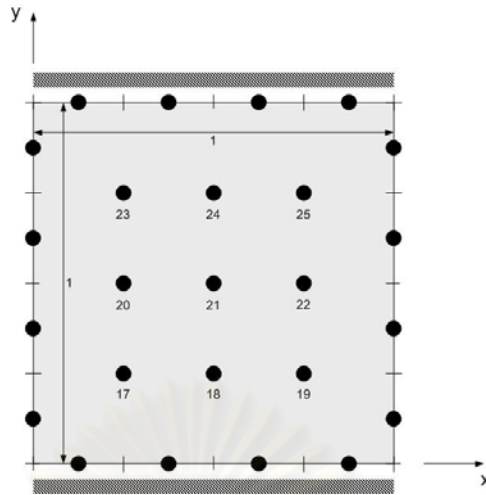
รูปที่ 6 แสดง Discretisation แบบที่ 2 : 8 ชั้นประกอบขอบ, 4 จุดภายใน



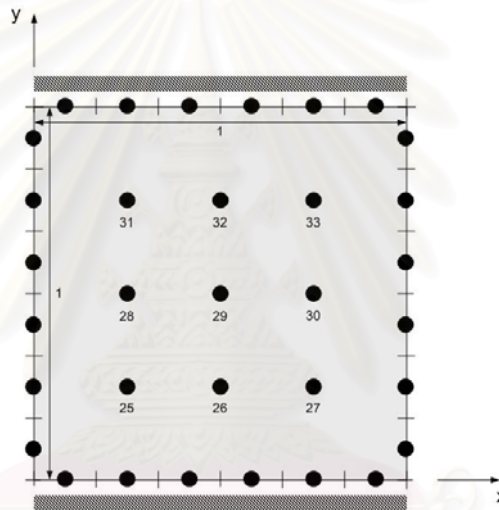
รูปที่ 7 แสดง Discretisation แบบที่ 3 : 8 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน



รูปที่ 8 แสดง Discretisation แบบที่ 4 : 12 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

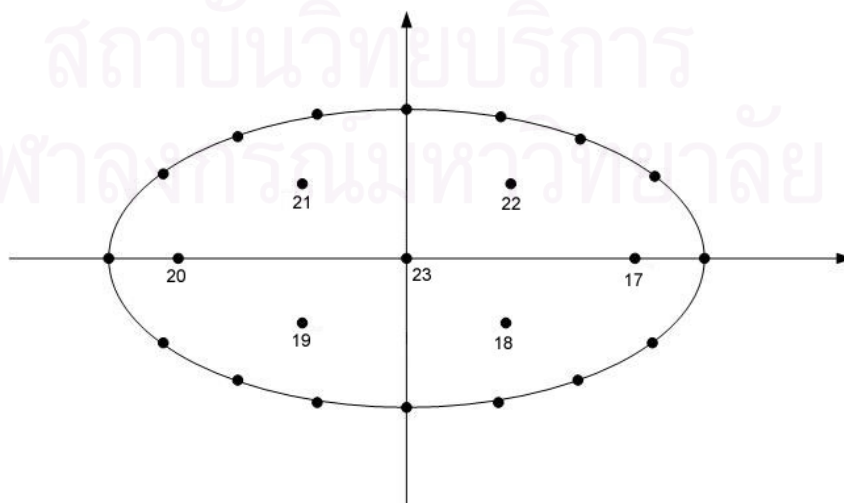


รูปที่ 9 แสดง Discretisation แบบที่ 5 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

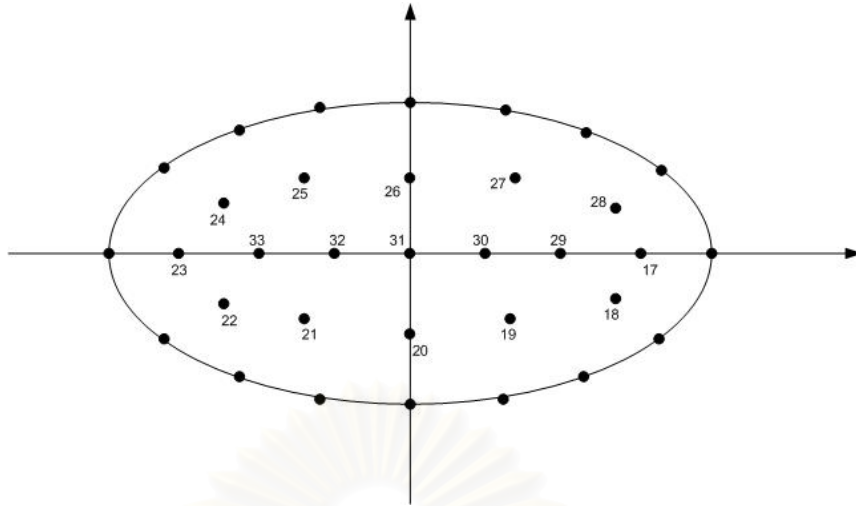


รูปที่ 10 แสดง Discretisation แบบที่ 6 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน

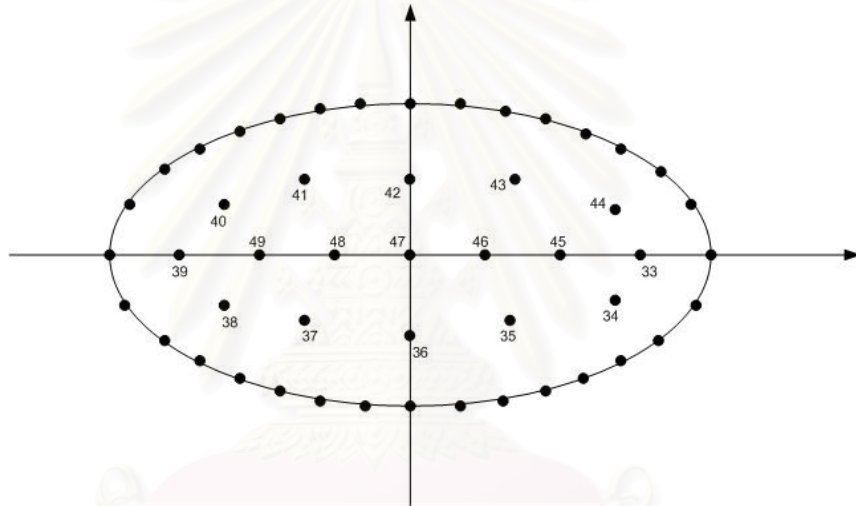
รูปที่ 11 ถึง 14 แสดงภาพประกอบสำหรับตาราง 3-3 และ ตารางที่ 3-5 ถึง ตารางที่ 3-8



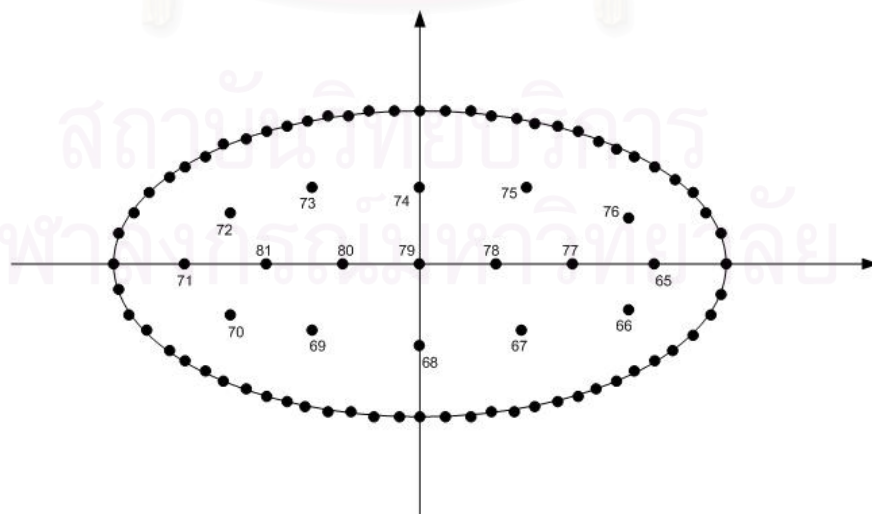
รูปที่ 11 แสดง Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 7 จุดภายใน



รูปที่ 12 แสดง Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

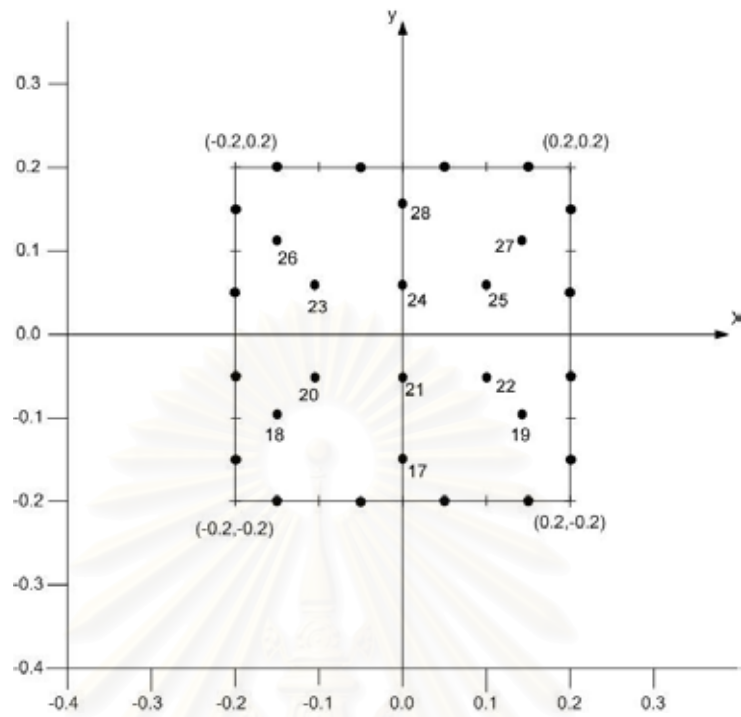


รูปที่ 13 แสดง Discretisation แบบที่ 3 : 32 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

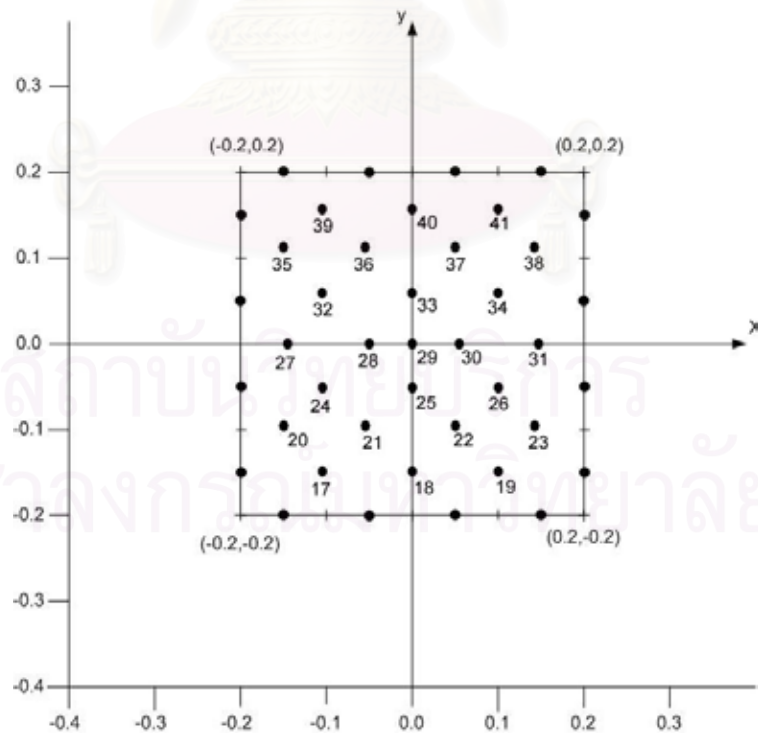


รูปที่ 14 แสดง Discretisation แบบที่ 4 : 64 ชั้นประกอบขอบ, 17 จุดภายใน

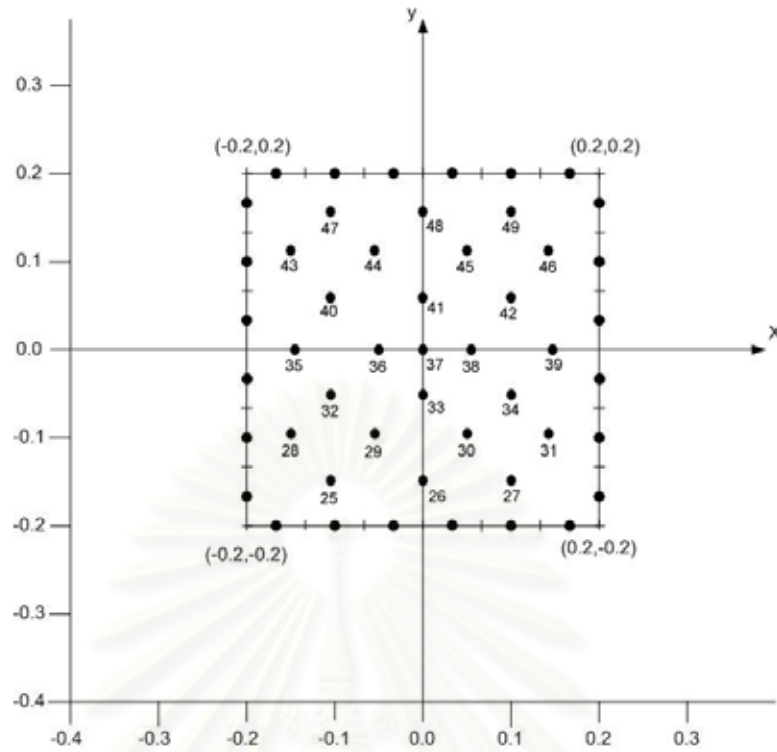
รูปที่ 15 ถึง 18 แสดงภาพประกอบสำหรับตาราง 3-9 และ ตารางที่ 3-10



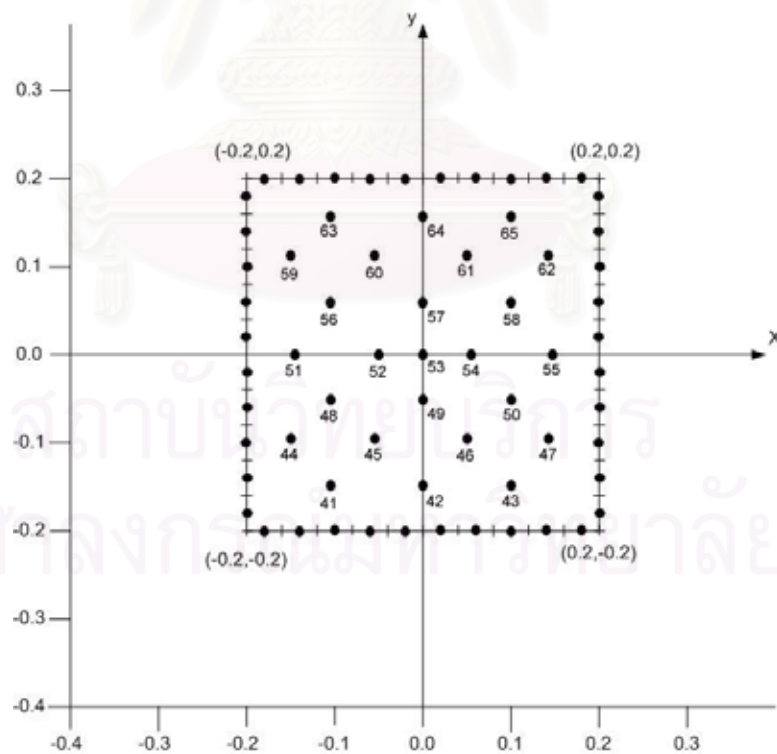
รูปที่ 15 แสดง Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 12 จุดภายใน



รูปที่ 16 แสดง Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน



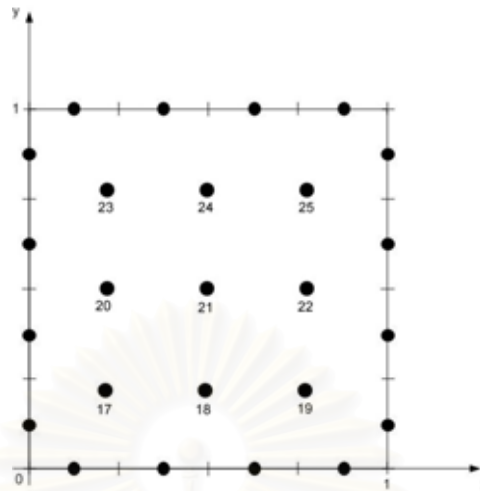
รูปที่ 17 แสดง Discretisation แบบที่ 3 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน



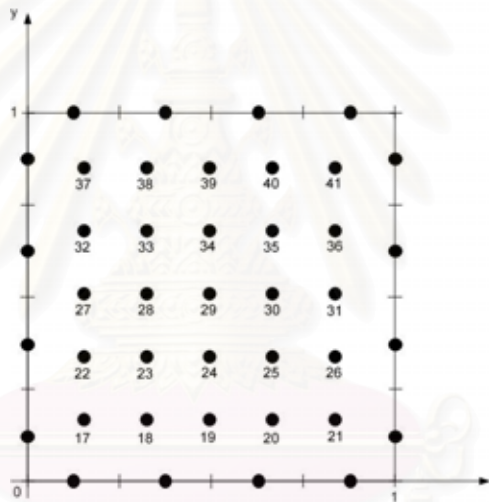
รูปที่ 18 แสดง Discretisation แบบที่ 4 : 40 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน



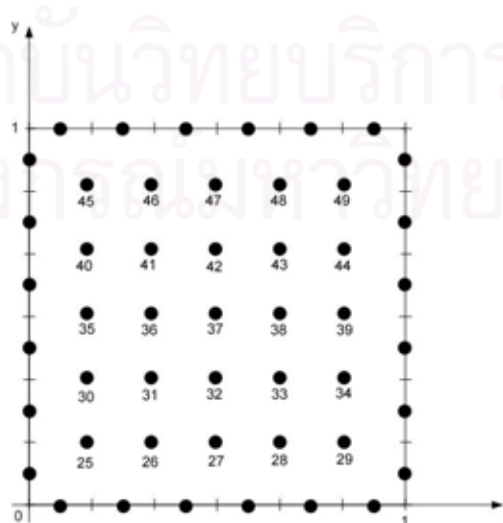
รูปที่ 19 ถึง 21 แสดงภาพประกอบสำหรับตาราง 3-11 และ ตารางที่ 3-12



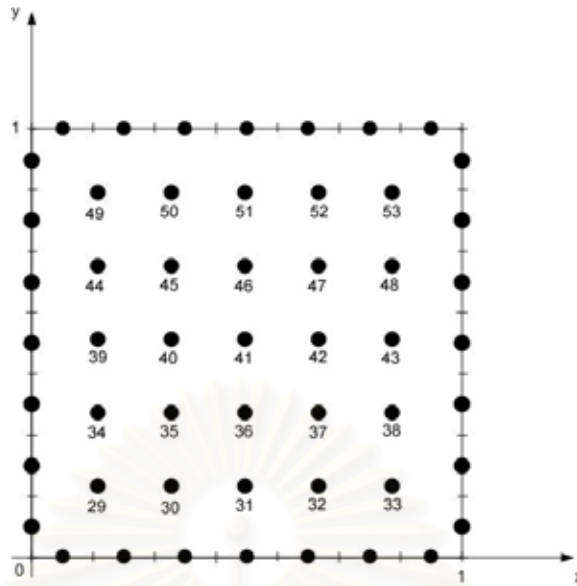
รูปที่ 18 แสดง Discretisation แบบที่ 1 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 9 จุดภายใน



รูปที่ 19 แสดง Discretisation แบบที่ 2 : 16 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน



รูปที่ 20 แสดง Discretisation แบบที่ 3 : 24 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน



รูปที่ 21 แสดง Discretisation แบบที่ 4 : 28 ชั้นประกอบขอบ, 25 จุดภายใน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาววรรณิกา จำเป็น เกิดวันที่ 8 มีนาคม 2521 ภูมิลำเนาอยู่จังหวัดนนทบุรี สำเร็จ  
การศึกษาปริญญาตรีวิทยาศาสตร์บัณฑิต ภาควิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์  
เทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ในปีการศึกษา 2543 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิทยา  
ศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาวิทยาการคณนา คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย