

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล



ในการวิจัยเรื่อง การศึกษาความสามารถและกลวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ในโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษา เขตการศึกษา 7 ผู้วิจัยได้นำเสนอ
ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 3 ตอน ดังนี้คือ

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยม
ศึกษาตอนต้น จำแนกตามระดับชั้นปรากฏในตารางที่ 3 - 4

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์การใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยม
ศึกษาตอนต้น จำแนกตามระดับชั้นปรากฏในตารางที่ 5

ตอนที่ 3 ผลการวิเคราะห์การใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยม
ศึกษาตอนต้น ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ในแต่ละระดับชั้นปรากฏใน
ตารางที่ 6 - 8

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น จำแนกตามระดับชั้นปรากฏในตารางที่ 3 - 4

ตารางที่ 3 แสดงค่าค่ามัธยิมเลขคณิต (\bar{x}) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) และค่ามัธยิมเลขคณิตร้อยละ ($\bar{x}_{\%}$) ของคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

ระดับชั้น	\bar{x}	S.D.	$\bar{x}_{\%}$	เกณฑ์การประเมิน
มัธยมศึกษาปีที่ 1	21.12	9.68	26.40	ต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ
มัธยมศึกษาปีที่ 2	28.14	17.05	35.17	ต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ
มัธยมศึกษาปีที่ 3	26.70	13.51	33.38	ต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ

จากตารางที่ 3 เมื่อพิจารณาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ในแต่ละระดับชั้นแล้วพบว่า ค่ามัธยิมเลขคณิตร้อยละของคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เท่ากับ 26.40 ค่ามัธยิมเลขคณิตร้อยละของคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เท่ากับ 35.17 และค่ามัธยิมเลขคณิตร้อยละของคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เท่ากับ 33.38 ซึ่งคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งสามระดับชั้น เมื่อเทียบกับเกณฑ์การประเมินระดับผลการเรียน ของกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการแล้ว พบว่าอยู่ในเกณฑ์ต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำทุกระดับชั้น

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 4 แสดงจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น จำแนกตามระดับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ในแต่ละระดับชั้น

ระดับความสามารถในการ แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ (คะแนนเต็ม 100 คะแนน)	ระดับชั้น / จำนวนนักเรียน (คน)					
	มัธยมศึกษาปีที่ 1		มัธยมศึกษาปีที่ 2		มัธยมศึกษาปีที่ 3	
	จำนวน	ร้อยละ	จำนวน	ร้อยละ	จำนวน	ร้อยละ
อยู่ในเกณฑ์ดีมาก (คะแนน 80 - 100)	0	0	8	5.20	0	0
อยู่ในเกณฑ์ดี (คะแนน 70 - 79)	1	0.64	9	5.84	4	2.49
อยู่ในเกณฑ์ปานกลาง (คะแนน 60 - 69)	3	1.91	7	4.55	20	12.42
อยู่ในเกณฑ์ขั้นต่ำ (คะแนน 50 - 59)	1	0.64	9	5.84	8	4.97
อยู่ในเกณฑ์ต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำ (คะแนน 0 - 49)	152	96.81	121	78.57	129	80.12
รวม	157	100	154	100	161	100

จากตารางที่ 4 เมื่อพิจารณาจำนวนนักเรียนในแต่ละระดับชั้น ที่ได้คะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ในช่วงคะแนนต่างๆ พบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ อยู่ในช่วงต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำมากที่สุด คือ ร้อยละ 96.81 รองลงมา มีจำนวนนักเรียนร้อยละ 1.91 มีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาอยู่ในเกณฑ์ปานกลาง มีจำนวนนักเรียนร้อยละ 0.64 มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี และ ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ ซึ่งมีจำนวนเท่ากัน และไม่มีจำนวนนักเรียนที่มีความสามารถในการทำแบบทดสอบอยู่ในเกณฑ์ดีมาก ตามลำดับ

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ อยู่ในช่วงต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำมากที่สุด คือ ร้อยละ 78.57 รองลงมา มีจำนวนนักเรียนร้อยละ 5.84 ที่มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดีและผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ ซึ่งมีมีจำนวนเท่ากัน มีจำนวนนักเรียนร้อยละ 5.84 ที่มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดีมาก และมีจำนวนนักเรียนร้อยละ 4.55 มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ปานกลาง ตามลำดับ

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ อยู่ในช่วงต่ำกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำมากที่สุด คือ ร้อยละ 80.12 รองลงมา มีจำนวนนักเรียนร้อยละ 12.42 ที่มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ปานกลาง มีจำนวนนักเรียนร้อยละ 4.97 มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ มีจำนวนนักเรียนร้อยละ 2.49 ที่มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี และไม่มีจำนวนนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดีมาก ตามลำดับ



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์การใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น
จำแนกตามระดับชั้นปรากฏในตารางที่ 5

ตารางที่ 5 แสดงความถี่ของการใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ตอนต้น จำแนกตามระดับชั้น

กลวิธี	นักเรียนในระดับชั้น		
	มัธยมศึกษาปีที่ 1	มัธยมศึกษาปีที่ 2	มัธยมศึกษาปีที่ 3
1.เดาและตรวจสอบ	5	12	12
2.เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง	13	38	31
3. สร้างตาราง	0	0	0
4. ใช้ตัวแปร	2	9	21
5. ค้นหารูปแบบ	0	0	0
6. แบ่งเป็นกรณี	0	0	0
7. ใช้การให้เหตุผล ทางตรงหรือทางอ้อม	0	0	0
8. ทำย้อนกลับ	8	6	0
9. สร้างปัญหาขึ้นใหม่	1	2	2
10 ทำปัญหาให้เป็น ปัญหาย่อย	31	42	23

จากตารางที่ 6 เมื่อพิจารณาการใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาภาคคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ที่เป็นตัวอย่างประชากร จำแนกตามระดับชั้น พบว่า กลวิธีในการแก้ปัญหาภาคคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ใช้มากที่สุด คือ กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 31 รองลงมา คือ กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 13 กลวิธีทำย้อนกลับ มีความถี่ของการใช้เป็น 8 กลวิธีเดาและตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 6 กลวิธีใช้ตัวแปร มีความถี่ของการใช้เป็น 2 และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ มีความถี่ของการใช้เป็น 1 ตามลำดับ ส่วนกลวิธีในการแก้ปัญหาภาคคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ไม่ได้ใช้ในการแก้ปัญหาภาคคณิตศาสตร์ คือ กลวิธีสร้างตาราง กลวิธีค้นหารูปแบบ กลวิธีแบ่งเป็นกรณี และกลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม

กลวิธีในการแก้ปัญหาภาคคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ใช้มากที่สุด คือ กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 42 รองลงมา คือ กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 38 กลวิธีเดาและตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 12 กลวิธีใช้ตัวแปร มีความถี่ของการใช้เป็น 9 กลวิธีทำย้อนกลับ มีความถี่ของการใช้เป็น 6 และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ มีความถี่ของการใช้เป็น 2 ตามลำดับ ส่วนกลวิธีในการแก้ปัญหาภาคคณิตศาสตร์ ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ไม่ได้ใช้ในการแก้ปัญหาภาคคณิตศาสตร์ คือ กลวิธีสร้างตาราง กลวิธีค้นหารูปแบบ กลวิธีแบ่งเป็นกรณี และกลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม

กลวิธีในการแก้ปัญหาภาคคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ใช้มากที่สุด คือ กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 31 รองลงมา คือ กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 23 กลวิธีใช้ตัวแปร มีความถี่ของการใช้เป็น 21 กลวิธีเดาและตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 12 และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ มีความถี่ของการใช้เป็น 2 ตามลำดับ ส่วนกลวิธีในการแก้ปัญหาภาคคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ไม่ได้ใช้ในการแก้ปัญหาภาคคณิตศาสตร์ คือ กลวิธีสร้างตาราง กลวิธีค้นหารูปแบบ กลวิธีแบ่งเป็นกรณี กลวิธีทำย้อนกลับ และกลวิธีใช้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตอนที่ 3 ผลการวิเคราะห์การใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น
ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ในแต่ละระดับชั้นปรากฏใน ตารางที่ 6 - 8

ตารางที่ 6 แสดงความถี่ของการใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จำแนกตามความสามารถ
ทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

กลวิธี	ระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1		
	สูง	ปานกลาง	ต่ำ
1.เดาและตรวจสอบ	1	0	4
2.เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง	6	2	5
3. สร้างตาราง	0	0	0
4. ใช้ตัวแปร	2	0	0
5. ค้นหารูปแบบ	0	0	0
6. แบ่งเป็นกรณี	0	0	0
7. ใช้การให้เหตุผลทาง ตรงหรือทางอ้อม	0	0	0
8. ทำย้อนกลับ	3	2	3
9. สร้างปัญหาขึ้นใหม่	1	0	0
10 ทำปัญหาให้เป็นปัญหา ย่อย	13	11	7

จากตารางที่ 6 เมื่อพิจารณาการใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เป็นตัวอย่างประชากร จำแนกตามความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำพบว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ใช้มากที่สุด คือ กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 13 รองลงมา คือ เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 6 กลวิธีทำย้อนกลับ มีความถี่ของการใช้เป็น 3 กลวิธีใช้ตัวแปร มีความถี่ของการใช้เป็น 2 กลวิธีเดาและตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 1 กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ มีความถี่ของการใช้เป็น 1 ตามลำดับ ซึ่งกลวิธีกลวิธีเดาและตรวจสอบ และ กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่นั้น มีความถี่ของการใช้เป็น 1 เท่ากัน ส่วนกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ไม่ได้ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กลวิธีสร้างตาราง กลวิธีค้นหารูปแบบ กลวิธีแบ่งเป็นกรณี และกลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม

กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลางใช้มากที่สุด คือ กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 11 รองลงมา คือ กลวิธีทำย้อนกลับ และ กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 2 เท่ากัน ตามลำดับ ส่วนกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลาง ไม่ได้ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กลวิธีเดาและตรวจสอบ กลวิธีสร้างตาราง กลวิธีใช้ตัวแปร กลวิธีค้นหารูปแบบ กลวิธีแบ่งเป็นกรณี กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่

กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำใช้มากที่สุด คือ กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 7 รองลงมา คือ กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิและสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 5 กลวิธีเดาและตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 4 และกลวิธีทำย้อนกลับ มีความถี่ของการใช้เป็น 3 ตามลำดับ ส่วนกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ ไม่ได้ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กลวิธีสร้างตาราง กลวิธีใช้ตัวแปร กลวิธีค้นหารูปแบบ กลวิธีแบ่งเป็นกรณี กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่

ลักษณะของกลวิธีที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ลักษณะของกลวิธีที่นักเรียนใช้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น สามารถสังเกตได้จากร่องรอยการคิดที่นักเรียนได้แสดงไว้ในแบบทดสอบ หรือในส่วนที่เป็นกระดาษสำหรับทดสอบ หรือจากการที่นักเรียนตอบคำถามในการสัมภาษณ์หลังการทำแบบทดสอบ ซึ่งพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ใช้กลวิธีช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย คือ กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง กลวิธีทำย้อนกลับ กลวิธีใช้ตัวแปร กลวิธีเดา และตรวจสอบ และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ ซึ่งสามารถแสดงลักษณะของกลวิธีที่นักเรียนใช้ได้ดังนี้ คือ

1. กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย

มีโจทย์ปัญหาหลายข้อในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สามารถใช้กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย ช่วยในการหาคำตอบได้ ตัวอย่างของโจทย์ปัญหา เช่น

ในการหล่อกะทะทองเหลืองใบหนึ่ง มีส่วนผสมของโลหะโดยมีน้ำหนักดังนี้ ทองแดง 10.05 กิโลกรัม สังกะสี 9.187 กิโลกรัม ที่เหลือจะเป็นน้ำหนักของเหล็ก ถ้าน้ำหนักของกะทะทองเหลืองเป็น 25.5 กิโลกรัม ต้องใช้เหล็กหนักเท่าไร

จากโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ข้างต้น นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบ ดังภาพที่ 8 ดังนี้

ภาพที่ 8 แสดงการใช้กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

2) แสดงวิธีทำเพื่อหาว่าตอบ		
ทองแดง	10.05	+
สังกะสี	9.187	
เหล็ก	19.137	
น้ำหนักของกะทะทองเหลือง	15.500	-
เหล็ก	19.137	
น้ำหนักของเหล็ก	6.963	
ตอบ	6.963	กิโลกรัม

จากภาพที่ 8 สิ่งที่โจทย์ต้องการให้หาคือ น้ำหนักของเหล็กที่ต้องใช้ในการหล่อกระทงเหล็ก ซึ่งนักเรียนหาคำตอบโดยนำน้ำหนักของทองแดงกับน้ำหนักของสังกะสีที่โจทย์กำหนดให้บวกกันก่อน แล้วจึงนำไปลบออกจากน้ำหนักของกระทงเหล็ก จึงได้น้ำหนักของเหล็กที่โจทย์ต้องการให้หา

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อีกข้อหนึ่ง ที่สามารถใช้กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อยช่วยในการหาคำตอบได้ เช่น

ห้องนอนห้องหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 3.50 เมตร ยาว 4.50 เมตร ต้องการปูกระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ขนาด 0.20 เมตร จะต้องใช้กระเบื้องอย่างน้อยที่สุดกี่แผ่น

จากโจทย์ปัญหาดังต้นนักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบดังภาพที่ 9 ดังนี้

ภาพที่ 9 แสดงการใช้กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

2) แสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบ

กว้าง 3.50 เมตร ยาว 4.50 เมตร

น้ำหนักของทองแดง + น้ำหนักของสังกะสี และแม่พิมพ์ กว้าง 9.50 เมตร ยาว 4.50 เมตร

กระเบื้องปูสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 0.20 เมตร = 20 เซนติเมตร

น้ำหนักของแผ่นเหล็ก = $3.50 \times 4.50 \text{ เมตร} \times 27$

$= 350 \times 450$

$= 157500 \text{ กรัม}$

น้ำหนักของแม่พิมพ์ = 9.50×4.50

$= 20 \times 20$

$= 400 \text{ กรัม}$

น้ำหนักของแม่พิมพ์ = 157500 กรัม

น้ำหนักของแม่พิมพ์ = 993.463 กรัม

น้ำหนักของแม่พิมพ์ = 394 กรัม

น้ำหนักของแม่พิมพ์ = 394 กรัม

จากภาพที่ 9 นักเรียนหาคำตอบที่โจทย์ถามโดย หาค่าพื้นที่ของห้องนอนก่อน แล้วหาค่าพื้นที่ของ กระเบื้องสี่เหลี่ยมจัตุรัส จำนวน 1 แผ่น และหาค่าจำนวนกระเบื้องที่ต้องใช้ในการปูพื้นห้อง โดยนำพื้นที่ของ ห้องนอนหารด้วยพื้นที่ของกระเบื้อง 1 แผ่น ซึ่งทำให้ได้คำตอบที่โจทย์ต้องการให้หา

หรือจากคำตอบของนักเรียนจากการตอบคำถามในการสัมภาษณ์ ว่า

"เอาน้ำหนักของทองแดงกับสังกะสีบวกกันก่อน แล้วเอาไปลบออกจากกะทะ"

"หาค่าพื้นที่ห้องก่อน แล้วหาค่าพื้นที่กระเบื้อง แล้วนำพื้นที่กระเบื้องไปหารพื้นที่ห้อง"

จากร่องรอยการคิดของนักเรียนจากภาพที่ 1 และภาพที่ 2 และข้อมูลจากการสัมภาษณ์ แสดงว่า นักเรียนมีการใช้กลยุทธ์ทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา

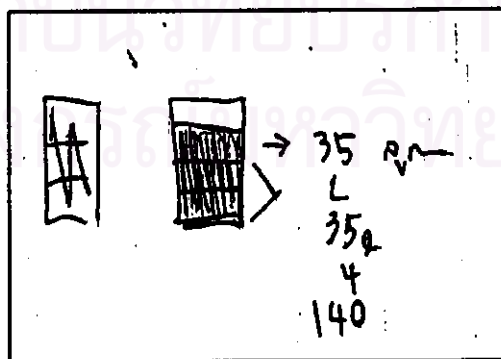
2. กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สามารถใช้กลยุทธ์วิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่วยในการแก้ โจทย์ปัญหาได้ เช่น

ถังน้ำใบหนึ่งมีน้ำ $\frac{3}{4}$ ถัง หลังจากใช้น้ำไป 35 ลูกบาศก์เมตร เหลือน้ำอยู่ $\frac{1}{2}$ ถัง ถังน้ำใบนี้จุน้ำได้กี่ ลูกบาศก์เมตร

นักเรียนได้ใช้วิธีการวาดภาพ แสดงรายละเอียดของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ ดังภาพที่ 10

ภาพที่ 10 แสดงการใช้กลยุทธ์เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1



จากภาพที่ 10 นักเรียนวาดภาพแห่งสี่เหลี่ยมแล้วแบ่งออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆกัน โดยระบายหรือแลงส่วนที่ใส่น้ำ 3 ส่วน ตามที่โจทย์กำหนดให้ และโจทย์กำหนดว่าเมื่อใช้น้ำไป 35 ลูกบาศก์เมตร แล้วเหลือน้ำ $\frac{1}{2}$ ถัง จากการที่นักเรียนวาดภาพนั้น ทำให้รู้ว่าน้ำที่ใช้ไป 35 ลูกบาศก์เมตรนั้น คือปริมาณน้ำ $\frac{1}{4}$ ถัง แสดงถึงน้ำ 1 ส่วน จนน้ำได้ 35 ลูกบาศก์เมตร ซึ่งทำให้หาความจุของถังน้ำได้

หรือจากคำตอบของนักเรียนที่ได้จากการสัมภาษณ์หลังการทบทวนทดสอบ ว่า

"วาดรูป จะทำให้เราเข้าใจมากยิ่งขึ้น"

"การวาดรูป ทำให้เราเห็นภาพชัดเจนยิ่งขึ้น"

"การวาดรูป มีประโยชน์มากสำหรับการทำโจทย์ข้อนี้"

จากร่องรอยการคิดของนักเรียนในภาพที่ 3 และข้อมูลจากการสัมภาษณ์นักเรียน แสดงว่านักเรียนมีการใช้กลยุทธ์เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

3. กลวิธีทำย้อนกลับ

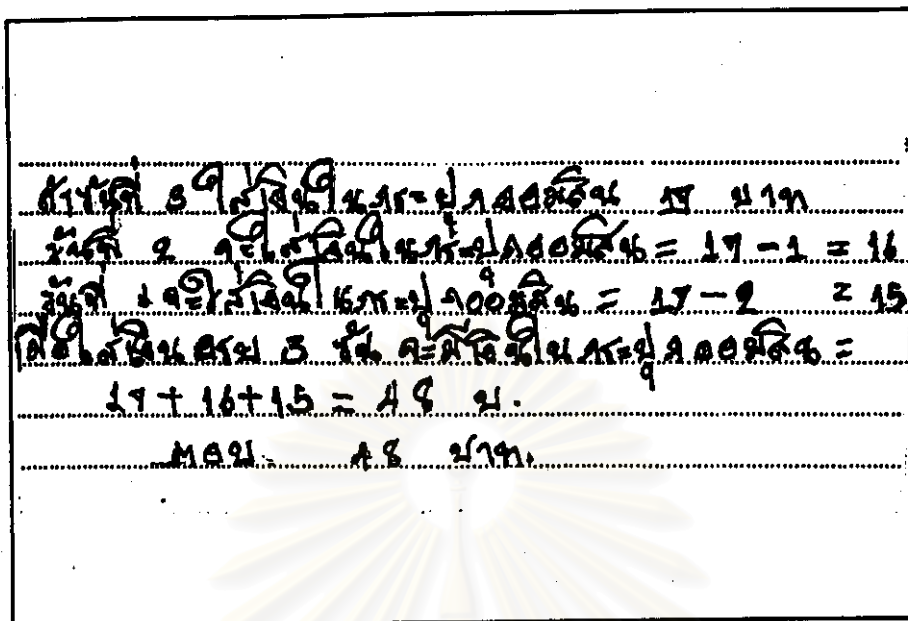
ตัวอย่างของโจทย์ปัญหา ในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่นักเรียนสามารถใช้กลยุทธ์ทำย้อนกลับ ช่วยในการหาคำตอบที่โจทย์ต้องการให้หาได้ เช่น

กูกิโกเก็บเงินใส่ในกระปุกออมสิน โดยที่จะใส่เงินในกระปุกออมสินมากกว่าวันที่ผ่านมาก 1 บาท ตั้งวันที่สาม ใส่เงินในกระปุกออมสิน 17 บาท เมื่อใส่ครบสามวัน จะมีเงินในกระปุกออมสินกี่บาท

นักเรียนหาคำตอบของโจทย์ข้อนี้ โดยการพิจารณาข้อมูลสุดท้ายที่โจทย์กำหนดมาให้ และข้อมูลต่างๆที่โจทย์กำหนด ช่วยในการหาคำตอบ ดังภาพที่ 11 ดังนี้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาพที่ 11 แสดงการใช้กลวิธีทำย้อนกลับ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1



จากภาพที่ 11 นักเรียนหาคำตอบที่โจทย์ถามโดยการพิจารณาข้อมูลสุดท้าย คือ วันที่สาม ก็ใส่เงินในการปลูกอมสิน 17 บาท และโจทย์กำหนดว่าในการใส่เงินในการปลูกอมสินทั้งสามวันนั้น จะใส่เงินมากกว่าวันที่ผ่านม 1 บาท ซึ่งจำนวนเงินที่ใส่ในการปลูกอมสินวันที่สอง คือ นำจำนวนเงินวันที่สามซึ่งเท่ากับ 17 บาท ลบด้วย 1 นั่นคือ $17 - 1 = 16$ บาท และหาจำนวนเงินที่ใส่ในการปลูกอมสินวันแรกจาก $(17 - 2)$ ซึ่งเท่ากับ 15 แล้วนำจำนวนเงินทั้งสามวันมาบวกกัน เป็นคำตอบที่โจทย์ต้องการ

หรือจากการตอบคำถามของนักเรียนในการสัมภาษณ์หลังจากนักเรียนได้ทำแบบทดสอบแล้วว่า

“วันที่สามก่อนว่าใส่ 17 บาท วันที่สองน้อยกว่าวันที่สาม 1 บาท แล้วก็วันที่หนึ่งน้อยกว่าวันที่สอง 1 บาท

“โจทย์กำหนดวันที่สามมาให้ แล้วหาวันที่สอง แล้วก็วันที่หนึ่ง แล้วเอาทั้งสามวันมาบวกกัน”

จากภาพที่ 4 และข้อมูลที่ได้จากการสัมภาษณ์นั้น แสดงว่านักเรียนใช้กลวิธีทำย้อนกลับช่วยในการหาคำตอบที่โจทย์ปัญหาต้องการ

4. กลวิธีใช้ตัวแปร

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหา ในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่นักเรียนสามารถใช้กลวิธีใช้ตัวแปร ช่วยในการหาคำตอบที่โจทย์ต้องการให้หาได้ เช่น

ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ครึ่งหนึ่ง มีคะแนนเต็ม 60 คะแนน ครึ่งหนึ่งของผลบวกของคะแนนที่
และป้อนสอบได้ เท่ากับ 42 คะแนน ถ้าป้อนสอบได้ 38 คะแนน ในการสอบครึ่งนี้ป้อนสอบได้กี่คะแนน

นักเรียนหาคำตอบโดยใช้กลวิธีใช้ตัวแปรช่วยในการหาคำตอบ ดังภาพที่ 12 ดังนี้

ภาพที่ 12 แสดงการใช้กลวิธีใช้ตัวแปร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

วิธีทำ	ให้ x แทนคะแนนที่ป้อนสอบได้ครึ่งหนึ่ง
	เงื่อนไขผลบวกได้ดังนี้ $(x + 38) \div 2 = 42$
นำ 2	มาคูณทั้งสองข้างของสมการ
	$(x + 38) \div 2 \times 2 = 42 \times 2$
	$x + 38 = 84$
นำ 38	มาลบทั้งสองข้างของสมการ
	$x + 38 - 38 = 84 - 38$
	$x = 46$
ดังนั้น	นักเรียนที่ป้อนสอบได้ 46 คะแนน
ตอบ	46 คะแนน

จากภาพที่ 12 นักเรียนหาคำตอบโดยการกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา แล้วเขียนเป็นสมการ แล้วแก้สมการเพื่อหาคำตอบที่โจทย์ต้องการ

หรือจากข้อมูลที่ได้จากการตอบคำถามในการสัมภาษณ์นักเรียนว่า

“ใช้การกำหนดตัวแปรขึ้นมา แล้วก็แก้สมการหาค่าตัวแปร”

จากภาพที่ 12 และข้อมูลที่ได้จากการสัมภาษณ์นักเรียนนั้น แสดงว่านักเรียนมีการใช้กลวิธีใช้ตัวแปรช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา

5. กลวิธีเดาและตรวจสอบ

โจทย์ปัญหาในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 นั้น มีโจทย์ปัญหาหลายข้อที่นักเรียนสามารถใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบ ช่วยในการหาคำตอบที่โจทย์ต้องการให้ทำได้ เช่น

ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของครั้งหนึ่ง คะแนนเต็ม 60 คะแนน ครั้งหนึ่งของผลบวกของคะแนนที่ปูและปุยสอบได้ เท่ากับ 42 คะแนน ถ้าปูสอบได้ 38 คะแนน ในการสอบครั้งนี้ ปุยสอบได้กี่คะแนน

โดยพิจารณาคำตอบของนักเรียนที่ได้จากการสัมภาษณ์ว่า

“ลองคิด แล้วยก็ลองเดาคำตอบดู”

“เดาคำตอบดูก่อน แล้วลองคิดในเศษกระดาษ”

และร่องรอยที่พบในส่วนที่เป็นกระดาษทดของนักเรียน ดังภาพที่ 13

ภาพที่ 13 แสดงร่องรอยการคิดในการใช้กลวิธีการเดา และตรวจสอบ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

Handwritten student work showing trial and error for a math problem. The student lists several pairs of numbers (pu and pui) and their sums, eventually finding the correct pair (46 and 38) which sums to 84.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{r} 40+38 \\ \hline 78 \end{array} \quad \begin{array}{r} 42+39 \\ \hline 81 \end{array} \\ \begin{array}{r} 42+38 \\ \hline 80 \end{array} \quad \begin{array}{r} 46+38 \\ \hline 84 \end{array} \\ \begin{array}{r} 44+38 \\ \hline 82 \end{array} \end{array}$$

คำตอบที่นักเรียนตอบคำถามในการสัมภาษณ์ หลังจากการทำแบบทดสอบของนักเรียน และร่องรอยการคิดของนักเรียนที่ได้จากกระดาษทานั้น เป็นสิ่งหนึ่งที่แสดงถึงการใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบ ในขณะที่นักเรียนดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

6. กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่

การใช้กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ของนักเรียน ในการแก้โจทย์ปัญหานั้น นักเรียนนำมาใช้ในลักษณะของการนึกถึงวิธีการที่เคยใช้แก้โจทย์ปัญหาที่คล้ายกัน มาช่วยในการหาคำตอบ ตัวอย่างของโจทย์ปัญหา เช่น

พ่อค้าแบ่งลาวตซึ่งยาว $65\frac{1}{2}$ เมตร ออกเป็นชุดเล็กๆ เพื่อความสะดวกในการจำหน่าย แต่ละชุดยาว $7\frac{1}{2}$ เมตร จะแบ่งลาวตได้ทั้งหมดกี่ชุด

ซึ่งนักเรียนตอบคำถามจากการสัมภาษณ์ว่า

"นึกถึงเรื่องที่เรียนมา และที่แบบฝึกหัดที่เคยทำ" และคำตอบของนักเรียนในการสัมภาษณ์ต่อไป คือ

"นึกถึงตอนที่เรเคยทำโจทย์เกี่ยวกับการหาร เช่น แบ่งของออกเป็นกองๆ กองละ สมมติว่า กองละ 5 ก็เอา 5 ไปหาร โจทย์ข้อนี้ก็เอา ความยาวของชุดลาวตที่แบ่ง ไปหารความยาวที่โจทย์กำหนดให้"

คำตอบของนักเรียนที่ได้จากการสัมภาษณ์นั้น แสดงให้เห็นว่านักเรียนได้ใช้กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ครั้งนี้ด้วย



สถาบันวิจัยและการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 7 แสดงความถี่ของการใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จำแนกตามความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

กลวิธี	ระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2		
	สูง	ปานกลาง	ต่ำ
1.เดาและตรวจสอบ	1	4	7
2.เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง	10	17	11
3. สร้างตาราง	0	0	0
4. ใช้ตัวแปร	7	1	1
5. ค้นหารูปแบบ	0	0	0
6. แบ่งเป็นกรณี	0	0	0
7. ใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม	0	0	0
8. ทำย้อนกลับ	2	4	0
9. สร้างปัญหาขึ้นใหม่	2	0	0
10 ทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย	23	11	8

จากตารางที่ 7 เมื่อพิจารณาการใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เป็นตัวอย่างประชากร จำแนกตามความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำพบว่า กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ใช้มากที่สุด คือ กลยุทธ์ทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 23 รองลงมา คือ กลยุทธ์เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 10 กลยุทธ์ใช้ตัวแปร มีความถี่ของการใช้เป็น 7 กลยุทธ์ทำย้อนกลับ มีความถี่ของการใช้เป็น 2 กลยุทธ์สร้างปัญหาขึ้นใหม่ มีความถี่ของการใช้เป็น 2 และกลยุทธ์เดาและตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 1 ตามลำดับ ซึ่งกลยุทธ์ทำย้อนกลับ และ กลยุทธ์สร้างปัญหาขึ้นใหม่นั้น มีความถี่ของการใช้เป็น 2 เท่ากัน ส่วนกลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ไม่ได้ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กลยุทธ์สร้างตาราง กลยุทธ์ค้นหารูปแบบ กลยุทธ์แบ่งเป็นกรณี และกลยุทธ์ใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม

กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลางใช้มากที่สุด คือ กลยุทธ์เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 17 รองลงมา คือ กลยุทธ์ทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 11 กลยุทธ์เดาและตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 4 กลยุทธ์ทำย้อนกลับ มีความถี่ของการใช้เป็น 4 และกลยุทธ์ใช้ตัวแปร มีความถี่ของการใช้เป็น 1 ตามลำดับ ซึ่งกลยุทธ์เดาและตรวจสอบ และกลยุทธ์ทำย้อนกลับนั้น มีความถี่ของการใช้เป็น 4 เท่ากัน ส่วนกลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลาง ไม่ได้ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กลยุทธ์สร้างตาราง กลยุทธ์ค้นหารูปแบบ กลยุทธ์แบ่งเป็นกรณี กลยุทธ์ใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม และกลยุทธ์สร้างปัญหาขึ้นใหม่

กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำใช้มากที่สุด คือ กลยุทธ์เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 11 รองลงมา คือ กลยุทธ์ทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 8 กลยุทธ์เดาและตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 7 และกลยุทธ์ใช้ตัวแปร มีความถี่ของการใช้เป็น 1 ตามลำดับ ส่วนกลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ ไม่ได้ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กลยุทธ์สร้างตาราง กลยุทธ์ค้นหารูปแบบ กลยุทธ์แบ่งเป็นกรณี กลยุทธ์ใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม กลยุทธ์ทำย้อนกลับ และกลยุทธ์สร้างปัญหาขึ้นใหม่

ลักษณะของกลวิธีที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

กลวิธีที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ให้เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย คือ กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง กลวิธีเดาและตรวจสอบ กลวิธีใช้ตัวแปร กลวิธีทำย้อนกลับ และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่ ซึ่งสามารถแสดงลักษณะของกลวิธีที่นักเรียนใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ คือ

1. กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่นักเรียนสามารถใช้กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย ช่วยในการหาคำตอบที่โจทย์ต้องการให้หาได้ เช่น

ปัจจุบันสมบัติมีอายุ 51 ปี เมื่อสามปีที่แล้ว สมบูรณ์มีอายุเป็น $\frac{1}{8}$ ของอายุสมบัติ ปัจจุบันสมบัติอายุมากกว่าสมบูรณ์เท่าไร

นักเรียนแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ข้างต้น ดังภาพที่ 14 ดังนี้

ภาพที่ 14 แสดงการใช้กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ปัจจุบัน สมบัติมีอายุ	51	ปี
เมื่อ	3	ปีที่แล้ว
สมบัติมีอายุ	48	ปี
สมบูรณ์มีอายุเป็น	$\frac{1}{8}$	ของอายุสมบัติ
\therefore สมบูรณ์ 3 ปีที่แล้ว	$= \frac{1}{8} \times 48$	ปี
	$= 6$	
สรุป: ปัจจุบัน สมบูรณ์มีอายุ	$= 6 + 3$	ปี
	$= 9$	
ปัจจุบัน สมบัติมีอายุ	51	ปี
\therefore สมบัติปัจจุบัน สมบูรณ์โตมากกว่าสมบูรณ์	$= 51 - 9 = 42$	ปี

จากภาพที่ 14 นักเรียนหาคำตอบที่โจทย์ถามโดยการแบ่งปัญหาออกเป็นตอนย่อยๆ แล้วหาคำตอบทีละตอน โดยหาอายุของสมบัติเมื่อสามปีที่แล้ว แล้วหาอายุของสมบูรณ์เมื่อสามปีที่แล้ว จากนั้นหาอายุปัจจุบันของสมบูรณ์ เมื่อนักเรียนหาอายุปัจจุบันของทั้งสมบัติและสมบูรณ์ได้แล้ว ก็สามารถหาคำตอบที่โจทย์ถามได้

หรือสังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียนในการสัมภาษณ์ว่า

"หาอายุของสมบัติเมื่อสามปีที่แล้ว แล้วหาอายุของสมภารณ์เมื่อสามปีที่แล้ว แล้วก็หาอายุปัจจุบันของสมภารณ์"

"คิดตามที่โจทย์บอก หาอายุของสมภารณ์เมื่อสามปีที่แล้ว แล้วก็หาอายุปัจจุบันของสมภารณ์ แล้วก็หาอายุปัจจุบันของสมบัติกับสมภารณ์มาลบกัน"

จากภาพที่ 14 และข้อมูลจากการสัมภาษณ์นักเรียน เห็นได้ว่านักเรียนได้มีการใช้กลยุทธ์แก้ปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

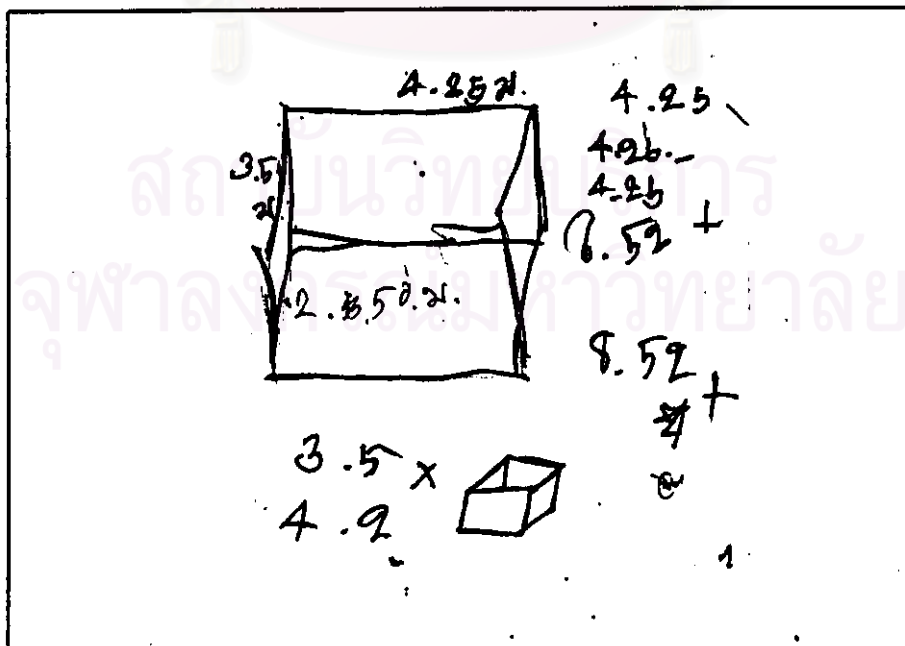
2. กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่นักเรียนสามารถใช้กลยุทธ์เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาได้ เช่น

ผนังห้องเรียนกว้าง 3.5 เมตร ยาว 4.25 เมตร ความสูงจากพื้นห้องถึงเพดาน 2.50 เมตร ค่าทาสีห้องตารางเมตรละ 50 บาท ถ้าต้องการทาสีผนังและเพดานห้อง ต้องจ่ายเงินค่าทาสีห้องนี้เท่าไร

นักเรียนได้วาดภาพประกอบในการแก้โจทย์ปัญหา เพื่อช่วยในการหาคำตอบ ดังภาพที่ 15 ดังนี้

ภาพที่ 15 แสดงการใช้กลยุทธ์เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

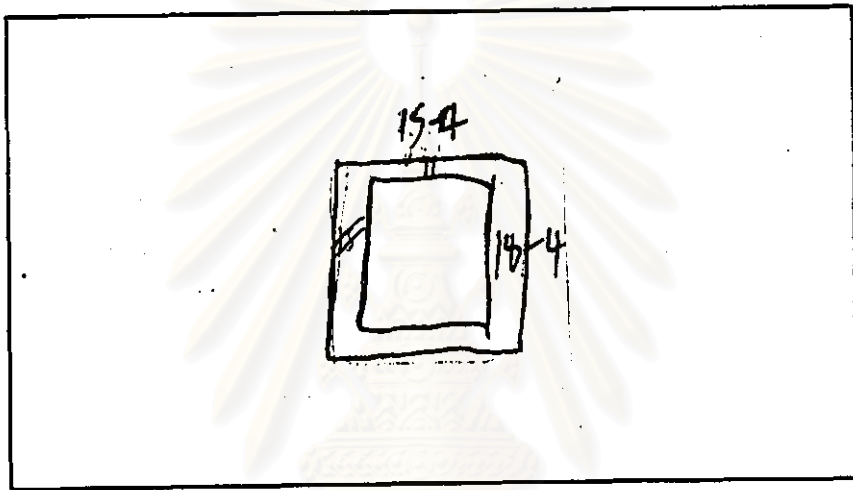


และจากตัวอย่างโจทย์ปัญหาอีกข้อหนึ่ง ที่นักเรียนสามารถใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เช่น

สนามหญ้าหน้าโรงเรียนแห่งหนึ่ง เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีพื้นที่ 270 ตารางเมตร มีความกว้าง 15 เมตร เมื่อทำทางเดินรอบในซิดขอบสนาม กว้าง 2 เมตร เท่ากันตลอด จะเหลือความยาวรอบสนามกี่เมตร และเหลือพื้นที่สนามเท่าไร

นักเรียนได้แสดงร่องรอยการคิด โดยการวาดภาพช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา ดังภาพที่ 16

ภาพที่ 16 แสดงการใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2



หรือจากการที่นักเรียนตอบคำถามในการสัมภาษณ์ว่า

การวาดรูป ช่วยให้เราเข้าใจมากขึ้นกว่าเดิม ดีกว่าเรามองคิดอย่างเดียว จะทำให้เราเห็นภาพว่าเป็นอย่างไร

“วาดรูป จะทำให้เราเห็นภาพชัดเจนขึ้น”

จากคำตอบของนักเรียนที่ได้จากการสัมภาษณ์ และจากภาพที่ 15 และภาพที่ 16 ที่นักเรียนวาดภาพประกอบในส่วนที่เป็นที่ว่างสำหรับหาคำตอบ ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นถึงการใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง เพื่อช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

3. กลวิธีเดาและตรวจสอบ

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่นักเรียนใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบ เพื่อช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เช่น

การตอบปัญหาวันเด็กแห่งชาติของโรงเรียนแห่งหนึ่ง คนตอบปัญหาถูกคนแรกจะได้รับแจกดินสอเท่ากับครึ่งหนึ่งของดินสอที่มีอยู่ คนที่ตอบถูกเป็นคนที่ 2 จะได้รับแจกเท่ากับครึ่งหนึ่งของดินสอที่เหลือ พอแจกดินสอให้กับคนที่ตอบปัญหาถูกเป็นคนที่ 3 แล้ว เหลือดินสออยู่ 5 แห่ง เดิมมีดินสออยู่ทั้งหมดกี่แห่ง

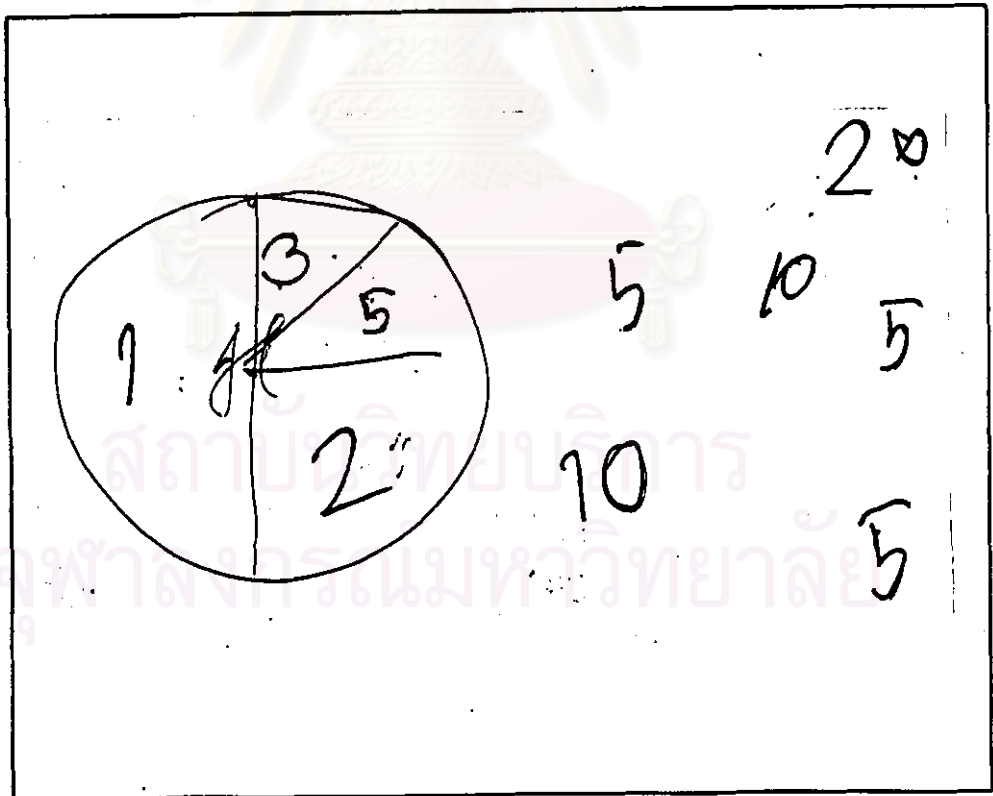
สังเกตได้จากการตอบคำถามของนักเรียนในการสัมภาษณ์ว่า

"ลองเดาคำตอบดู ถ้าเดาครั้งแรกไม่ได้ก็ลองเดาใหม่ เพิ่มหรือลดไปเรื่อยๆ"

"คาดคะเนคำตอบไปเรื่อยๆ ถ้าไม่ใช่ก็เปลี่ยนคำตอบไปเรื่อยๆ จนกว่าจะใช่"

และจากร่องรอยการคิดของนักเรียนในกระดาษสำหรับทศเลข ดังภาพที่ 17

ภาพที่ 17 แสดงร่องรอยการคิดในการใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2



จากข้อมูลที่ได้จากการสัมภาษณ์และร่องรอยการคิดของนักเรียนนั้น เป็นสิ่งหนึ่งที่แสดงว่านักเรียนใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบ ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

4. กลวิธีใช้ตัวแปร

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่นักเรียนสามารถใช้กลวิธีใช้ตัวแปร ช่วยในการหาคำตอบได้ เช่น

กระเป๋าสตางค์ใบหนึ่งมีเหรียญอยู่ 26 เหรียญ เป็นเหรียญ 1 บาท กับเหรียญ 5 บาท ถ้าในกระเป๋
ใบนี้มีเงินทั้งหมด 73 บาท จะมีเหรียญแต่ละชนิดอย่างละกี่เหรียญ

นักเรียนได้แสดงวิธีการคิดในการหาคำตอบสำหรับโจทย์ข้อนี้ ดังภาพที่ 18 ดังนี้

ภาพที่ 18 แสดงการใช้กลวิธีใช้ตัวแปร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

วิธีแก้ โจทย์ปัญหา 1 คือ ๑
เหรียญ 5 คือ $5 - x$

$$1x + 5(25 - x) = 73$$

$$1x + 125 - 5x = 73 - 125$$

$$1x - 5x = -52$$

$$-4x = -52$$

$$x = 13$$

∴ มีเหรียญ 1 บาท คือ 13 เหรียญ
มีเหรียญ 5 บาท คือ $25 - 13 = 12$ เหรียญ

จากภาพที่ 18 นักเรียนหาคำตอบโดยการกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา นำมาเขียน
ความสัมพันธ์ในรูปของสมการ แล้วแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

5. กลวิธีทำย้อนกลับ

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาในรูปแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่นักเรียนสามารถใช้กลวิธีทำย้อนกลับ ช่วยในการหาคำตอบได้ เช่น

การตอบปัญหาวันเด็กแห่งชาติของโรงเรียนแห่งหนึ่ง คนตอบปัญหาถูกคนแรกจะได้รับแจกดินสอเท่ากับครึ่งหนึ่งของดินสอที่มีอยู่ คนที่ตอบถูกเป็นคนที่ 2 จะได้รับแจกเท่ากับครึ่งหนึ่งของดินสอที่เหลือ พอแจกดินสอให้กับคนที่ตอบปัญหาถูกเป็นคนที่ 3 แล้ว เหลือดินสออยู่ 5 แห่ง เดิมมีดินสออยู่ทั้งหมดกี่แห่ง

ลักษณะของการใช้กลวิธีทำย้อนกลับ เพื่อช่วยในการหาคำตอบนั้น พิจารณาได้จากคำตอบของนักเรียน ในการสัมภาษณ์ ว่า

“ดูดินสอที่เหลือ แล้วก็หาคำตอบจากคนที่สาม มาคนที่หนึ่ง”

“ดูจำนวนดินสอที่เหลือ แล้วก็หาดินสอที่แจกให้คนที่สาม คนที่สอง คนที่หนึ่ง”

จากคำตอบของนักเรียน ที่ได้จากการสัมภาษณ์นั้น นักเรียนใช้วิธีการพิจารณาข้อมูลสุดท้ายที่โจทย์กำหนดให้ แล้วหาคำตอบย้อนกลับไม่เรื่อยๆ ลักษณะของวิธีการที่นักเรียนใช้ในการหาคำตอบนี้ แสดงว่านักเรียนใช้กลวิธีทำย้อนกลับในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

6. กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่

ลักษณะของการใช้กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น นักเรียนนำมาใช้ในลักษณะการนึกถึงวิธีการที่เคยใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา ที่มีลักษณะคล้ายกัน ตัวอย่างของโจทย์ปัญหา ที่นักเรียนใช้กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น

รถนำเที่ยวคันหนึ่ง แล่นได้ระยะทาง 190 กิโลเมตรต่อชั่วโมง โดยสม่ำเสมอ ถ้าสถานที่ท่องเที่ยวอยู่ไกลจากจุดเริ่มต้น เป็นระยะทาง 950 กิโลเมตร ถ้ารถแล่นด้วยอัตราเร็วสม่ำเสมอ จะใช้น้ำมัน 2 ลิตรต่อชั่วโมง ก่อนออกเดินทางเติมน้ำมันไว้ 40 ลิตร เมื่อถึงสถานที่ท่องเที่ยวจะเหลือน้ำมันกี่ลิตร

ซึ่งพิจารณาได้จากการตอบคำถามในการสัมภาษณ์ ว่า

“นึกถึงเรื่องที่เรียนมา แล้วก็ที่ครูเคยให้ทำการบ้าน” และ “เคยทำแบบฝึกหัดโจทย์ที่คล้ายกันมาบ้าง เช่น โจทย์ข้อนี้ ต้องใช้การเขียนเป็นสัดส่วน ให้สิ่งๆ เหมือนกันอยู่ลำดับเดียวกัน ก็ใช้ความรู้เรื่องสัดส่วนมาหาคำตอบ”

ลักษณะของคำตอบที่นักเรียนตอบคำถามในการสัมภาษณ์นั้น แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีการนำกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่มาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา

ตารางที่ 8 แสดงความถี่ของการใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จำแนกตามความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

กลวิธี	ระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3		
	สูง	ปานกลาง	ต่ำ
1.เดาและตรวจสอบ	1	5	6
2.เขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง	9	14	8
3. สร้างตาราง	0	0	0
4. ใช้ตัวแปร	8	7	6
5. ค้นหารูปแบบ	0	0	0
6. แบ่งเป็นกรณี	0	0	0
7. ใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม	0	0	0
8. ทำย้อนกลับ	0	0	0
9. สร้างปัญหาขึ้นใหม่	1	1	0
10 ทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย	10	8	5

จากตารางที่ 8 เมื่อพิจารณาการใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นตัวอย่างประชากร จำแนกตามความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ พบว่า กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ใช้มากที่สุด คือ กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 10 รองลงมา คือ กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 9 กลวิธีใช้ตัวแปร มีความถี่ของการใช้เป็น 8 กลวิธีเดา และตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 1 และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่ มีความถี่ของการใช้เป็น 1 ตามลำดับ ซึ่งกลวิธีเดาและตรวจสอบ และ กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่นั้น มีความถี่ของการใช้เป็น 1 เท่ากัน ส่วนกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง ไม่ได้ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กลวิธีสร้างตาราง กลวิธีค้นหารูปแบบ กลวิธีแบ่งเป็นกรณี กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม และกลวิธีทำย้อนกลับ

กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลางใช้มากที่สุด คือ กลวิธีกลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 14 รองลงมา คือ กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 8 กลวิธีใช้ตัวแปร มีความถี่ของการใช้เป็น 7 กลวิธีเดาและตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 5 และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่ มีความถี่ของการใช้เป็น 1 ตามลำดับ ส่วนกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ปานกลาง ไม่ได้ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กลวิธีสร้างตาราง กลวิธีค้นหารูปแบบ กลวิธีแบ่งเป็นกรณี กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม และ กลวิธีทำย้อนกลับ

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ ใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มากที่สุด คือ กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง มีความถี่ของการใช้เป็น 8 รองลงมา คือ กลวิธีเดาและตรวจสอบ มีความถี่ของการใช้เป็น 6 กลวิธีใช้ตัวแปร มีความถี่ของการใช้เป็น 6 และกลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย มีความถี่ของการใช้เป็น 5 ตามลำดับ ซึ่งกลวิธีเดาและตรวจสอบ และกลวิธีใช้ตัวแปรนั้น มีความถี่ของการใช้เป็น 6 เท่ากัน ส่วนกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ ไม่ได้ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ กลวิธีสร้างตาราง กลวิธีค้นหารูปแบบ กลวิธีแบ่งเป็นกรณี กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรงหรือทางอ้อม กลวิธีทำย้อนกลับ และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่

ลักษณะของกลวิธีที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ใช้กลวิธีช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย คือ กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย กลวิธีใช้ตัวแปร กลวิธีเดา และตรวจสอบ และกลวิธีสร้างปัญหาขึ้นมา ซึ่งสามารถแสดงลักษณะของกลวิธีต่างๆที่นักเรียนใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

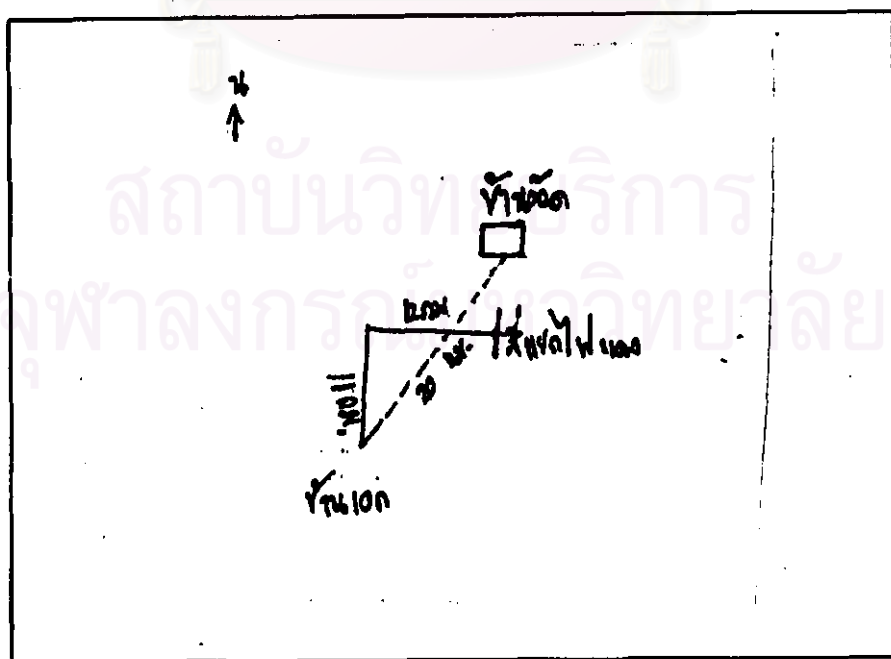
1. กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่นักเรียนสามารถใช้กลวิธีกลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่วยในการหาคำตอบได้ เช่น

เอกขับรถออกจากบ้านเพื่อไปบ้านอ้อด โดยขับรถตรงขึ้นไปทางทิศเหนือ 11 กิโลเมตร แล้วเลี้ยวขวาตรงไปทางทิศตะวันออก จนถึงสี่แยกไฟแดงเป็นระยะทาง 12 กิโลเมตร จากสี่แยกไฟแดงตรงขึ้นไปทางทิศเหนืออีกระยะหนึ่งถึงบ้านอ้อด ถ้าวัตรระยะทางเป็นเส้นตรงจากบ้านของเอก ถึงบ้านของอ้อดได้ 20 กิโลเมตร อยากทราบว่า บ้านของอ้อดอยู่ห่างจากสี่แยกไฟแดง เป็นระยะทางกี่กิโลเมตร

นักเรียนได้แสดงวิธีการช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา โดยการวาดภาพในส่วนที่เป็นกระดาษทด ดังภาพที่ 19

ภาพที่ 19 แสดงการใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

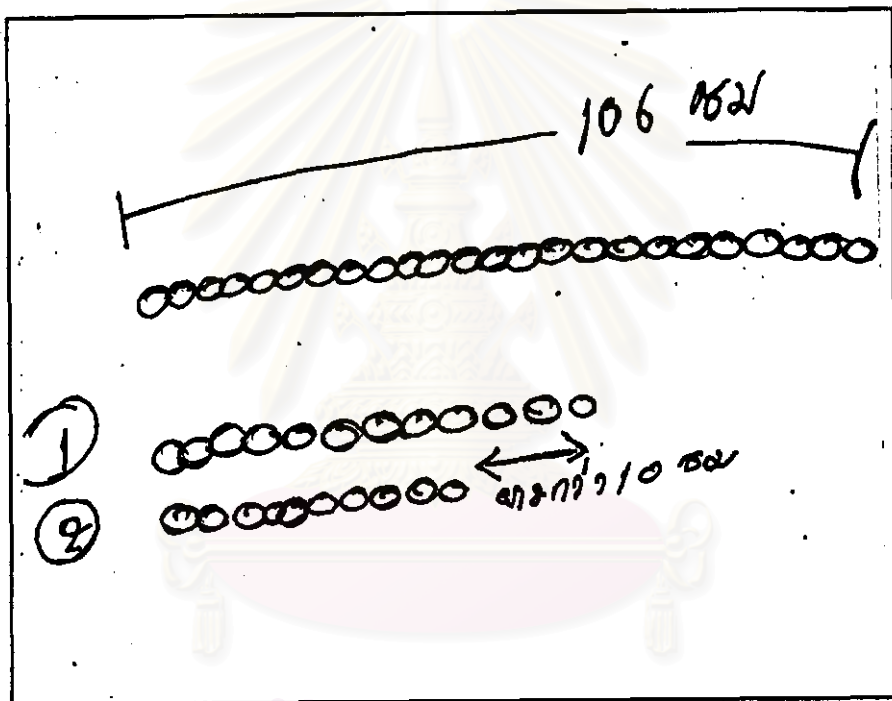


ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาอีกข้อหนึ่ง ที่สามารถใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น

โศภกร้อยลูกปัดไว้สองเส้น เมื่อนำลูกปัดทั้งสองเส้นมาต่อกัน วัดความยาวได้ 106 เซนติเมตร และลูกปัดเส้นแรกยาวกว่าลูกปัดเส้นที่สองอยู่ 10 เซนติเมตร จงหาความยาวของลูกปัดเส้นที่หนึ่ง และความยาวของลูกปัดเส้นที่สอง

นักเรียนได้วาดภาพแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ ดังภาพที่ 20

ภาพที่ 20 แสดงการใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3



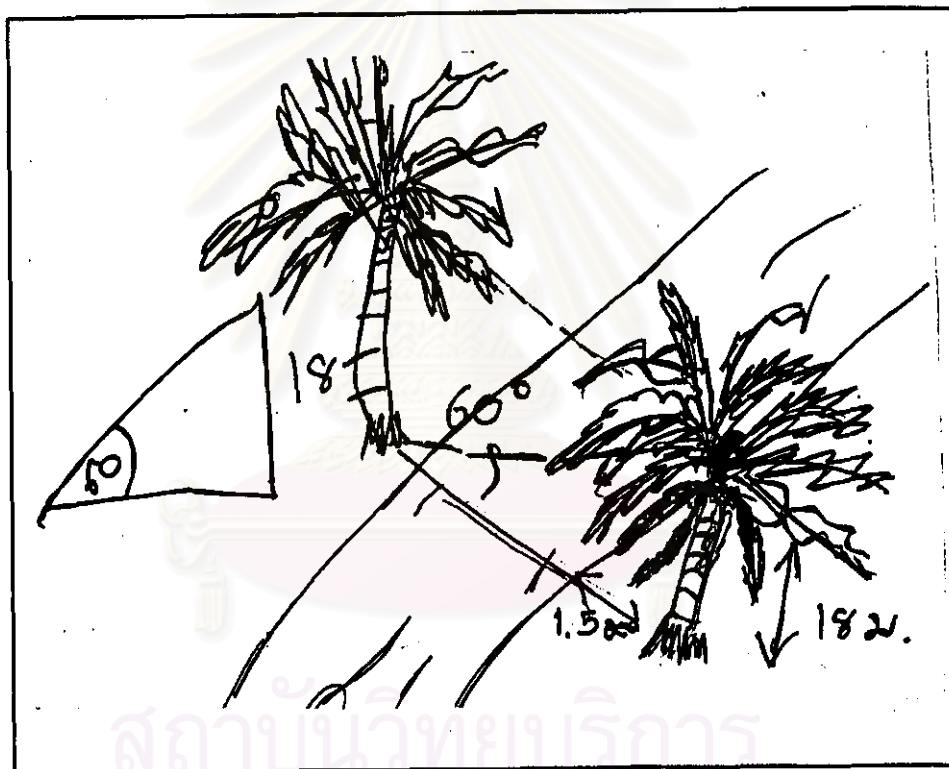
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาอีกข้อหนึ่ง ในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่นักเรียนสามารถใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่วยในการแก้ปัญหา เช่น

นายแก้วบินไปอยู่บนต้นมะพร้าวซึ่งสูง 18 เมตร ก้มมองเห็นโคนต้นมะพร้าวอีกต้นหนึ่ง ซึ่งอยู่ฝั่งตรงข้ามคนละฟากคลอง เป็นมุม 60 องศา กับแนวระดับสายตา อยากทราบว่าคลองกว้างเท่าไร ถัดต้นมะพร้าวทั้งสองต้น อยู่ห่างจากริมคลอง 1.5 เมตร

นักเรียนได้วาดภาพแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล ที่โจทย์กำหนดให้ ดังภาพที่ 21 ดังนี้

ภาพที่ 21 แสดงการใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3



จากร่องรอยการคิดของนักเรียนในภาพที่ 19 ภาพที่ 20 และภาพที่ 21 จะเห็นได้ว่านักเรียนได้ใช้การวาดภาพเพื่อช่วยในการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นลักษณะของการใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง

2. กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหา ในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่นักเรียนใช้กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อยช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น

ลูกบอลสุนทรภะกลม วัดเส้นรอบวงที่ใหญ่ที่สุดของบอลสุนได้ 66 เซนติเมตร ถ้าลูกบอลสุนทำด้วยวัสดุหนา 0.5 เซนติเมตร ลูกบอลสุนนี้จะจุลมได้กี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

นักเรียนได้แสดงวิธีการหาคำตอบ ดังภาพที่ 22 ดังนี้

ภาพที่ 22 แสดงการใช้กลวิธีทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

$$\begin{aligned} \text{รัศมีวงกลม} &= \frac{C}{2\pi} & \text{เส้นรอบวง} &= 2\pi r \\ \text{รัศมี} & 66 &= & 2\pi r \\ 66 &= \frac{2 \times 22 \times r}{7} \\ 66 \times 7 &= 44r \\ 10.5 &= r & \text{น้ำในบอลสุน} &= 10 \\ \text{พหุคูณ} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10 \times 10 \\ &= 1190.47 \\ \therefore \text{บอลสุนจะจุ} & 1190.47 \text{ ลูกบาศก์} \end{aligned}$$

จากภาพที่ 22 นักเรียนหาคำตอบที่โจทย์ถาม โดยการแบ่งปัญหาออกเป็นตอนๆ โดยหาคำตอบของบอลสุนสำหรับการหาปริมาตรก่อน แล้วจึงหาปริมาตรของบอลสุน

3. กลวิธีใช้ตัวแปร

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่นักเรียนสามารถใช้กลวิธีใช้ตัวแปร ช่วยในการหาคำตอบได้ เช่น

กำลังสองของผลบวกของจำนวน จำนวนหนึ่งกับ 7 เท่ากับผลบวกของสิบเท่าของจำนวนนั้น กับ 94 จงหาจำนวนนั้น

นักเรียนได้แสดงวิธีการในการหาคำตอบที่โจทย์ถาม ดังภาพที่ 23

ภาพที่ 23 แสดงการใช้กลวิธีใช้ตัวแปร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

$$\begin{aligned}
 & \text{๑) } (x+7)^2 = x \\
 & (x+7)^2 = 10x+94 \\
 & x^2+14x+49 = 10x+94 \\
 & x^2+14x-10x+49-94 = 0 \\
 & x^2+4x-45 = 0 \\
 & (x+9)(x-5) = 0 \\
 & x = -9, 5 \\
 & \therefore \text{จำนวนนั้นคือ } -9, 5
 \end{aligned}$$

สถาบันวิจัยบวร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหา ที่สามารถใช้ตัวแปร ในการแก้โจทย์ปัญหาได้ เช่น

โสมกร้อยลูกปัดไว้สองเส้น เมื่อนำลูกปัดทั้งสองเส้นมาต่อกัน วัดความยาวได้ 106 เซนติเมตร และลูกปัดเส้นแรกยาวกว่าลูกปัดเส้นที่สองอยู่ 10 เซนติเมตร จงหาความยาวของลูกปัดเส้นที่หนึ่ง และความยาวของลูกปัดเส้นที่สอง

นักเรียนได้แสดงวิธีการในการหาคำตอบที่โจทย์ถาม ดังภาพที่ 24 ดังนี้

ภาพที่ 24 แสดงการใช้กลยุทธ์ใช้ตัวแปร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

วิธีทำ	ลูกปัดเส้นแรกยาว	$x + 10$ ซม.
	เส้นที่สองยาว	x ซม.
	ถ้าทั้งสองเส้นต่อกันได้	106 ซม.
	สมการคือ	$(x + 10) + x = 106$
		$2x + 10 = 106$
		$2x = 106 - 10$
		$x = 48$
	ลูกปัดเส้นแรก ยาวกว่าลูกปัดเส้นที่สอง อยู่ 10 ซม	
		$48 + 10 = 58$
ตอบ	ลูกปัดเส้นแรกยาว	58 ซม
	ลูกปัดเส้นที่สอง	48 ซม

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างโจทย์ปัญหาอีกข้อหนึ่งที่สามารถใช้กลยุทธ์ใช้ตัวแปร ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น

วิฑูรย์ขับรถออกจากกรุงเทพ ไปตามถนนสายหนึ่ง ด้วยความเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง อีกหนึ่งชั่วโมงต่อมา วิฑูรย์ขับรถออกจากที่เดียวกัน ด้วยความเร็ว 50 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหว่านแทนหาวิฑูรย์จะขับรถมาหน้าวิฑูรย์ไป 10 กิโลเมตร

นักเรียนได้แสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ ดังภาพที่ 25 ดังนี้

ภาพที่ 25 แสดงการใช้กลยุทธ์ใช้ตัวแปร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

วิฑูรย์	ขับรถออกจากกรุงเทพ	40 ชม.
วิฑูรย์	ขับรถ	$x-1$ ชม.
วิฑูรย์	ขับรถด้วยความเร็ว	40 กม.
วิฑูรย์	ขับรถด้วยความเร็ว	$50(x-1)$ กม.
วิฑูรย์	ขับรถมาหน้าวิฑูรย์ไป	10 กม.
สมการคือ	$50(x-1) - 40x = 10$	
	$50x - 50 - 40x = 10$	
	$10x - 50 = 10 + 50$	
	$10x = 60 = \frac{60}{10}$	
	$x = 6$	
ตอบ :	6 ชม. วิฑูรย์ขับรถมาหน้าวิฑูรย์ไป 10 กม.	

จากร่องรอยการคิดของนักเรียนในภาพที่ 23 ภาพที่ 24 และภาพที่ 25 นักเรียนใช้วิธีกำหนดตัวแปร ในการหาคำตอบที่โจทย์ถาม ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนได้มีการใช้กลยุทธ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4. กลวิธีเดาและตรวจสอบ

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่นักเรียนใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบ ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา เช่น

กำลังสองของผลบวกของจำนวน จำนวนหนึ่งกับ 7 เท่ากับผลบวกของสิบเท่าของจำนวนนั้น กับ 94 จงหาจำนวนนั้น

พิจารณาได้จากการตอบคำถามของนักเรียน ในการสัมภาษณ์ว่า

"ลองเดาคำตอบดู น่าจะทำให้ได้คำตอบ"

"ลองเดาคำตอบไปเรื่อยๆ"

และร่องรอยจากการเดาในส่วนที่เป็นกระดาษทด ดังภาพที่ 26

ภาพที่ 26 แสดงร่องรอยการคิดในการใช้กลวิธีการเดา และตรวจสอบ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

$$(x+7)^2 = 10x + 94$$

$$\cancel{(x)(x)} = \cancel{10x + 94}$$

$$x^2 + 14x + 49 = 10x + 94$$

$$(1+7)^2 = (10 \times 1) + 94$$

$$64 = 104$$

$$(3+7)^2 = 100$$

$$124$$

จากตัวอย่างคำตอบของนักเรียนที่ได้จากการสัมภาษณ์ และร่องรอยการคิดของนักเรียน แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีการใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบในการแก้โจทย์ปัญหา

5. กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่

การใช้กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ของนักเรียนนั้น นักเรียนใช้ในลักษณะของการนำวิธีการที่เคยใช้แก้ โจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกัน มาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา ตัวอย่างของโจทย์ เช่น

นายหัวบินไปอยู่บนต้นมะพร้าวซึ่งสูง 18 เมตร ก็มองเห็นโคนต้นมะพร้าวอีกต้นหนึ่ง ซึ่งอยู่ฝั่งตรงข้ามคนละฟากคลอง เป็นมุม 60 องศา กับแนวระดับสายตา อยากทราบว่าคลองกว้างเท่าไร ถัดต้นมะพร้าวทั้งสองต้น อยู่ห่างจากริมคลอง 1.5 เมตร

ซึ่งพิจารณาได้จากคำตอบของนักเรียนจากการสัมภาษณ์ว่า

เคยเรียนเรื่องนี้มา แล้วก็เคยฝึกทำโจทย์แบบนี้ตอนเรียน ข้อนี้ต้องจำค่าต่างๆ ที่ต้องใช้ให้ได้ เคยทำโจทย์คล้ายๆกัน ทาระยะความห่างของเรือในทะเลกับตึกริมทะเล โจทย์จะบอกมุมมาให้ "

จากคำตอบของนักเรียนนั้น แสดงว่านักเรียนมีการใช้กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่ในการแก้โจทย์ปัญหา

การนำกลวิธีมาช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น ไม่ได้ช่วยให้นักเรียนแก้ โจทย์ปัญหาได้เสมอ

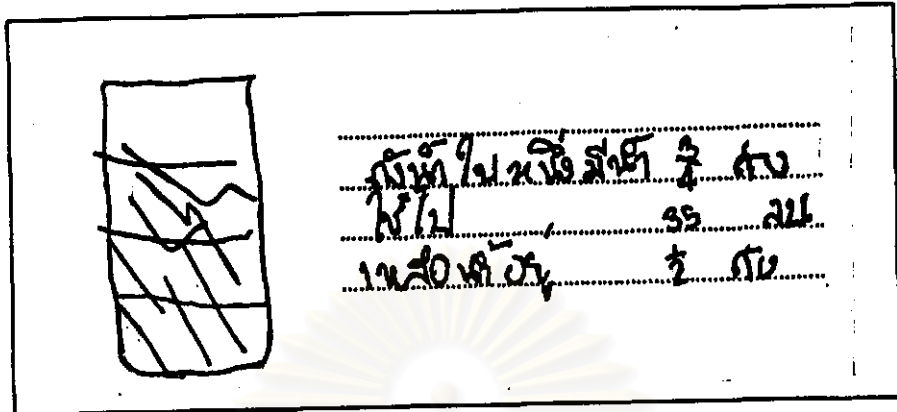
ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เช่น

ถังน้ำใบหนึ่งมีน้ำ $\frac{3}{4}$ ถัง หลังจากใช้น้ำไป 35 ลูกบาศก์เมตร เหลือน้ำอยู่ $\frac{1}{2}$ ถัง ถังน้ำใบนี้จุน้ำได้ที่
ลูกบาศก์เมตร

นักเรียนใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา แต่ไม่สามารถหาคำตอบได้ ดังภาพที่ 27 ดังนี้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาพที่ 27 แสดงการใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 แต่ไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

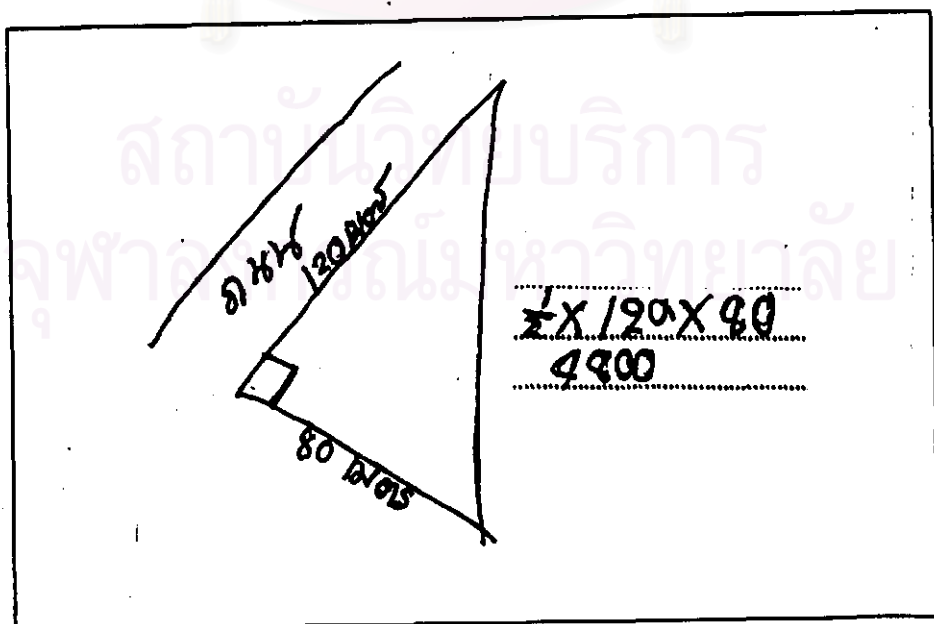


ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เช่น

นาข้าวรูปสามเหลี่ยมแห่งหนึ่ง มีด้านที่ขนานกับถนนยาว 120 เมตร และด้านที่ตั้งฉากกับถนนยาว 80 เมตร ถ้าคนรับจ้างเกี่ยวข้าวคนหนึ่ง สามารถเกี่ยวข้าวได้วันละครึ่งไร่ และคิดค่าจ้างวันละ 120 บาทต่อคน จะต้องจ่ายเงินค่าจ้างเกี่ยวข้าวเท่าไร

นักเรียนใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่วยในการแก้ปัญหา แต่ไม่สามารถหาคำตอบได้ ดังภาพที่ 28 ดังนี้

ภาพที่ 28 แสดงการใช้กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 แต่ไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์



ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เช่น

ลูกบอลสุนทรภะกลม วัดเส้นรอบวงที่ใหญ่ที่สุดของบอลได้ 66 เซนติเมตร ถ้าลูกบอลสุนทรภะทำด้วยวัสดุหนา 0.6 เซนติเมตร ลูกบอลสุนทรภะนี้จะจุลมได้กี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

นักเรียนใช้กลยุทธ์ทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา แต่ไม่สามารถหาคำตอบได้ ดังภาพที่ 29 ดังนี้

ภาพที่ 29 แสดงการใช้กลยุทธ์ทำปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แต่ไม่ประสบความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ลูกบอลสุนทรภะของบอลได้	= 66	cm
วัดเส้นรอบวง	= 66	cm
ลูกบอลสุนทรภะ	= 66	cm
	= 10.5	cm
ลูกบอลสุนทรภะ	= 0.5	cm
	= 10.5 - 0.5	
	= 10	
สูตรปริมาตรบอล	= $\frac{4}{3} \pi r^3$	
	= $\frac{4}{3} \times 3.14 \times 1000$	
	= 12571.4	
รวม ลูกบอลสุนทรภะ	12571.4	ลูกบอล

จากภาพที่ 27 ภาพที่ 28 และภาพที่ 29 เป็นการแสดงการใช้กลยุทธ์ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน แต่ไม่สามารถหาคำตอบที่โจทย์ต้องการให้ทำได้