บทที่ 2

สมการควบคุมและทฤษฎีทางรีโอโลยี

การศึกษาทางด้านกลศาสตร์ของไหล (fluid mechanics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของของไหลและผลกระทบที่เกิดขึ้นโดยรอบ โดยทั่วไปเป็นการพิจารณาการเคลื่อนที่ของโมเลกุลในสสารนั้น ของไหลที่พิจารณาอาจเป็นของเหลว (liquid) หรืออาจเป็นก๊าซ (gas) ขึ้นกับสมบัติของสสารนั้นสามารถอัดตัวได้ (compressible) หรือไม่สามารถอัดตัวได้ (incompressible) และแยกพิจารณาความหนืดของของไหลเป็นประเภทที่ขึ้นกับเวลา และประเภทที่ไม่ขึ้นกับเวลา สำหรับประเภทความหนืดที่ไม่ขึ้นกับเวลา แบ่งของไหลเป็น 2 ชนิด คือ ของไหลนิวโตเนียนและของไหลนอนนิวโตเนียน รวมทั้งทำการศึกษาศาสตร์ว่าด้วยเรื่องของการไหลและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของของไหล โดยเรียกศาสตร์ชนิดนี้ว่า รีโอโลยี ซึ่งมีความสำคัญอย่างมากต่อผู้ที่สนใจศึกษาปัญหาทางด้านของไหล

สิ่งสำคัญที่ใช้ในการศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการไหลคือ

1. สมการควบคุม (governing equation)
2. เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบ (initial condition and boundary condition)
3. รูปแบบลักษณะทางเรขาคณิตของโดเมนที่จะศึกษา (geometry)

กำหนดสมการควบคุมตามพื้นฐานสำคัญ 3 หลัก คือ หลักการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) และหลักการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) พื้นฐานสำคัญเหล่านี้สามารถแสดงในรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบไปด้วยกลุ่มของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ในพจน์ขององค์ประกอบของความเร็ว อุณหภูมิ และความดัน โดยค่าต่างๆ เหล่านี้จะขึ้นกับปริภูมิ (space) และเวลา (time) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขและข้อจำกัดต่างๆ ของแต่ละปัญหา

ผลกระทบทางอุณหพลศาสตร์ (thermodynamics) หรือผลกระทบจากอุณหภูมิไม่นำมาพิจารณาในบางปัญหา สมการพลังงานจึงไม่มีความจำเป็นในการพิจารณา แต่จะพิจารณาสมการโมเมนตัมหรือเรียกอีกอย่างว่า สมการเนเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) ดังนั้นสำหรับปัญหาการไหลชนิดนิวโตเนียนที่อุณหภูมิไม่ขึ้นกับเวลา จะเป็นการแก้สมการเนเวียร์-สโตกส์และสมการความต่อเนื่องซึ่งได้จากหลักการอนุรักษ์มวล ส่วนปัญหาการไหลชนิดนอนนิวโตเนียนจะเพิ่มสมการองค์ประกอบที่เกี่ยวข้องกับสมการความเค้น ปัญหาการไหลที่มีค่าตัวเลขเรโนลด์ (Reynolds number) น้อยมาก นิพจน์ของสมการไม่เชิงเส้นที่เกี่ยวข้องกับผลกระทบจากความเฉื่อยจะไม่นำมาพิจารณา

2.1 สมการควบคุม (Governing equation)

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล (Conservation of mass)

ส่วนสำคัญของหลักการอนุรักษ์มวล คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลของของไหลภายในโดเมนจะเท่ากับอัตราการไหลเข้าหรือออกของมวลผ่านพื้นผิว สร้างเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \tag{2.1}$$

หรือเป็นที่รู้กันในชื่อของสมการความต่อเนื่อง (continuity equation) เมื่อ

ρ คือ ความหนาแน่นที่ตรงกลาง หน่วยคือ kg/m^3

$\vec{u}$ คือ เวกเตอร์ของความเร็ว หน่วยคือ m/s

∇ คือ ตัวดำเนินการเกรเดียนต์ (gradient operator)

$\frac{\partial}{\partial t}$ คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา t

ให้ $\frac{D}{Dt}$ แทนตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เชิงวัสดุ (material derivative operator) หรือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์แบบออยเลอเรียน (Eulerian derivative operator) นั่นคือ

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \tag{2.2}$$

สมการ (2.1) สามารถแสดงได้ในอีกรูปแบบคือ

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{2.3}$$

สำหรับกรณีที่เป็นการไหลคงตัว (steady flow) ของไหล ณ ตำแหน่งต่างๆ ของเส้นทางการไหล (flow path) มีความเร็วในการไหลคงตัวตลอดระยะเวลาและความยาวของการไหล ดังนั้นสมการความต่อเนื่องจะกลายเป็น

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \tag{2.4}$$

เมื่อความหนาแน่นของอนุภาคของของไหลคงตัวจึงมีภาวะต่อเนื่อง (continuum) อยู่ในนิพจน์ที่ไม่สามารถอัดตัวได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

ดังนั้นสมการความต่อเนื่องจะกลายเป็น

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{2.5}$$

2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentum)

ส่วนสำคัญของหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมหรือกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน (Newton's second law of motion) กล่าวว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้น (linear momentum) ของกลุ่มอนุภาค จะมีค่าเท่ากับผลรวมของแรงภายนอกที่มากระทำต่อมวลของของไหลในโดเมน ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.6}$$

โดยที่ $\vec{F}$ คือแรงกระทำบนวัตถุ m คือมวลของวัตถุ และ $\vec{a}$ คือความเร่งของวัตถุ

เนื่องจากมีแรงภายใน (internal force) ของของไหลกระทำในโดเมนจึงพิจารณาหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมโดยใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตันได้เป็น

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\vec{u}dV = \int_s \tilde{\sigma}\cdot\hat{n}dS + \int_V \rho\vec{f}dV \tag{2.7}$$

เมื่อ $\hat{n}$ คือเวกเตอร์ฉากหน่วย (unit normal vector) บนพื้นผิว S

โดยใช้ทฤษฎีของเกาส์ (Gauss's theorem) เราสามารถเปลี่ยนการหาปริพันธ์เชิงปริมาตร (volume integral) เป็นการหาปริพันธ์เชิงผิว (surface integral) ดังนั้นสมการ (2.7) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\int_V \left(\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + (\nabla\cdot\rho\vec{u})\vec{u}\right)dV = \int_V \nabla\cdot\tilde{\sigma}dV + \int_V \rho\vec{f}dV \tag{2.8}$$

เมื่อ V คือปริมาตรใดๆ ดังนั้นปริพัทธ์ (integrand) ทางซ้ายและทางขวาของสมการ (2.8) จึงเท่ากัน ส่วนนิพจน์ที่ 2 และนิพจน์ที่ 4 ทางซ้ายของสมการ (2.8) สามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการ (2.1) ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ จึงได้

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla\cdot\tilde{\sigma} + \rho\vec{f} \tag{2.9}$$

สมการ (2.9) เป็นที่รู้จักกันในชื่อของสมการเนเวียร์-สโตกส์

โดยที่ $\tilde{\sigma}$ คือ เทนเซอร์ความเค้นของโคชี (Cauchy stress tensor) หน่วยคือ N/m^2

$\vec{f}$ คือ เวกเตอร์ของแรงวัตถุ (body force vector) ต่อมวล 1 หน่วย หน่วยคือ N

ใช้หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมนำไปสู่ความสมมาตร (symmetry) ของเทนเซอร์ความเค้น ในหลักการกล่าวไว้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงผลรวมโมเมนต์ (moment) ของโมเมนตัมของกลุ่มอนุภาค มีค่าเท่ากับผลรวมเวกเตอร์ของโมเมนต์ของแรงภายนอกที่มากระทำต่อระบบ จึงได้

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^t, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

โดยที่ตัวยก t แสดงถึงการสลับเปลี่ยน (transpose) ของเมทริกซ์

เมื่อของไหลเป็นแบบไม่สามารถอัดตัวได้ เทนเซอร์ความเค้นของโคชี $\tilde{\sigma}$ จะประกอบไปด้วยผลรวมของความดัน p แบบไอโซโทรปิค (isotropic pressure) และส่วนประกอบของเทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้า (extra stress tensor) $\tilde{T}$ นั่นคือ

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij} \tag{2.10}$$

เมื่อ δ_{ij} เป็นเทนเซอร์หน่วย (unit tensor) หรือโครเนคเคอร์เดลตา (Kronecker delta) ซึ่ง

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.11}$$

และ p เป็นความดันรวม (total pressure) ของของไหล หน่วยคือ N/m^2

ในกรณีของของไหลนิวโตเนียน ค่าความหนืดคงตัว จึงได้

$$\tilde{T} = 2\mu\tilde{D} \tag{2.12}$$

และ

$$\tilde{D} = \frac{\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^t}{2} \tag{2.13}$$

เมื่อ $\tilde{D}$ คือ เทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (rate of deformation tensor) ซึ่งเป็นเทนเซอร์สมมาตร และ μ คือ ความหนืด หน่วยคือ Ns/m^2 หรือ Pa.s ซึ่งเป็นค่าคงตัว

2.1.3 ระบบสมการไร้หน่วย (Non-dimensional system)

โดยทั่วไปเราจะพิจารณาระบบสมการควบคุม สมการองค์ประกอบ และค่าต่างๆ ที่นำมาใช้พิจารณาในรูปแบบไร้หน่วย โดยกำหนดตัวแปรแบบไร้หน่วย (non-dimensional variable) $r^*, z^*, u^*, p^*, T^*, t^*, \mu^*, \frac{D}{Dt^*}, \lambda^*, \mu_i^*, \chi^*$ ค่าต่างๆ เหล่านี้เกิดจากการหาอัตราส่วนของค่าที่มีหน่วยต่อตัวประกอบลักษณะเฉพาะ (characteristic factor) ของแต่ละค่านั้นๆ จุดประสงค์เพื่อสะดวกต่อการเปรียบเทียบกับการทดลอง หรืองานวิจัยที่ผู้อื่นกระทำมาแล้ว กำหนดดังนี้

- เวกเตอร์ระยะกระจัดในทิศทางของแกน r คือ $r^* = \frac{r}{L}$
- เวกเตอร์ระยะกระจัดในทิศทางของแกน z คือ $z^* = \frac{z}{L}$
- เวกเตอร์ความเร็ว คือ $u^* = \frac{u}{V}$
- ความดัน คือ $p^* = \frac{L}{\mu_0 V} p = \frac{1}{\mu_0 \dot{\varepsilon}_0} p$
- เทนเซอร์ความเค้น คือ $T^* = \frac{L}{\mu_0 V} T = \frac{1}{\mu_0 \dot{\varepsilon}_0} T$

- เวลา คือ $t^* = \frac{V}{L} t = t \dot{\varepsilon}_0$
- ตัวดำเนินการเกรเดียนต์ คือ $\nabla^* = L\nabla$
- ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ คือ $\frac{D}{Dt^*} = \frac{L}{V}\frac{D}{Dt} = \frac{1}{\dot{\varepsilon}_0}\frac{D}{Dt}$
- ค่าเวลาผ่อนคลาย คือ $\lambda^* = \frac{V}{L}\lambda = \dot{\varepsilon}_0 \lambda$
- ค่าความหนืด คือ $\mu_i^* = \frac{1}{\mu_0}\mu_i, \quad i = 1,2$
- ค่าอัตราการเฉือน คือ $\dot{\gamma}^* = \frac{L}{V}\dot{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\varepsilon}_0}$
- ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงตึงผิว คือ $\chi^* = \frac{1}{\mu_0 \dot{\varepsilon}_0 L}\chi$

โดยที่ L คือ ความยาวลักษณะเฉพาะ (characteristic length) หน่วยเป็น m

V คือ ความเร็วลักษณะเฉพาะ (characteristic velocity) หน่วยเป็น m/s

$\dot{\varepsilon}_0$ คือ อัตราการดึง (stretching-rate) หน่วยเป็น s^{-1}

μ_0 คือ ความหนืดอ้างอิง (reference viscosity) หน่วยเป็น Pa.s หรือ N/m^2 และมีค่าเท่ากับผลรวมของความหนืดของตัวทำละลายกับความหนืดของพอลิเมอร์

หมายเหตุ $V = \dot{\varepsilon}_0 L$

เมื่อแทนค่าต่างๆ เหล่านี้ลงในสมการ (2.5) และสมการ (2.9) แล้วจัดรูปใหม่โดยละสัญลักษณ์ * ออกไป เราจะได้สมการไร้หน่วยดังนี้

$$\mathrm{Re}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nabla \cdot \tilde{T} - \mathrm{Re}\,\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \nabla p \tag{2.14}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{2.15}$$

โดยที่ Re คือ ตัวเลขเรโนลด์ (Reynolds number) และ $\mathrm{Re} = \frac{\rho V L}{\mu}$

2.2 ฟังก์ชันวัสดุและการวัดค่าทางด้านรีโอโลยี (Material function and rheometry)

ในปัญหาทางกลศาสตร์ของไหลนอนนิวโตเนียน การศึกษาพฤติกรรมของความหนืดในการไหลแบบเฉือน (shear flow) และการไหลแบบขยาย (extensional flow) นับเป็นสิ่งที่ยากต่อการอธิบายและเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างลักษณะเฉพาะ และจุดเด่นของพฤติกรรมการไหลที่เห็นได้ชัดด้วยตาเปล่า ดังนั้น ฟังก์ชันวัสดุ (material function) หรือเรียกว่า ความหนืดเชิงฟังก์ชัน (functional viscosity) จะเป็นตัวบ่งบอกลักษณะของของไหลนอนนิวโตเนียน ในขณะที่การวัดทางด้านรีโอโลยีจะเกี่ยวข้องกับการตรวจสอบการผิดรูป คุณสมบัติการไหลของวัสดุและฟังก์ชันต่างๆในการไหลอย่างง่าย (simple flow) เช่น การไหลแบบเฉือนอย่างง่ายที่คงตัว (steady simple shear flow)

สำหรับของไหลนอนนิวโตเนียนค่าความหนืดไม่คงตัว และความสัมพันธ์ระหว่างเทนเซอร์ความเค้น และอัตราของเทนเซอร์การผิดรูปจึงไม่อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นอย่างง่าย แต่จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเฉือนและอัตราการยืด (elongation rate) ผลที่ได้จากการทดลองก่อให้เกิดข้อมูลสำหรับสร้างสมการองค์ประกอบแบบต่างๆ ซึ่งเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ มาเป็นตัวอธิบายและทำนายลักษณะการไหลแบบต่างๆ โดยจะนำมาเปรียบเทียบกับการทดลองในการพิจารณาการไหลโดยทั่วไปสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 รูปแบบดังนี้

2.2.1 การไหลแบบเฉือนอย่างง่าย (Simple shear flow)

การไหลแบบเฉือนอย่างง่าย เป็นการไหลในรูปแบบที่เกิดจากแรงเฉือน โดยจะต้องมีผนังหรือผิวของการไหลเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งการไหลในรูปแบบนี้มีความสำคัญอย่างมาก เพราะเป็นการไหลที่เกิดขึ้นในเครื่องมือผสมและเครื่องมือขึ้นรูปชนิดต่างๆ เราสามารถแบ่งของไหลในรูปแบบของการเฉือนได้เป็น 2 ประเภทหลักๆ ได้แก่ ของไหลนิวโตเนียนและของไหลนอนนิวโตเนียน

1. <u>ของไหลนิวโตเนียน</u>

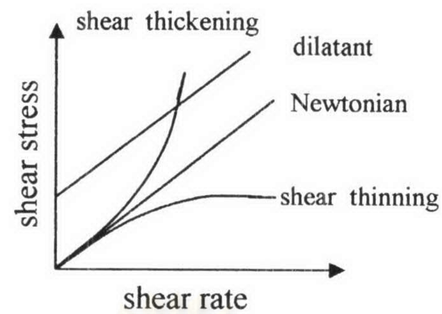
เป็นของไหลที่มีสมบัติเป็นไปตามกฎของนิวตัน ซึ่งมีค่าความหนืดเฉือน (μ_s) คงตัว เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอัตราความเครียดเฉือน สามารถเขียนในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\mu_s = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \tag{2.16}$$

โดยที่ τ คือ ค่าความเค้นเฉือน (shear stress) และ $\dot{\gamma}$ คือ ค่าอัตราการเฉือน (shear rate)

2. <u>ของไหลนอนนิวโตเนียน</u>

ของไหลชนิดนี้จะมีสมบัติไม่เหมือนกับของไหลชนิดนิวโตเนียน กล่าวคือ ความหนืดในรูปแบบของแรงเฉือนจะเปลี่ยนไปเมื่อมีการเปลี่ยนอัตราการเฉือน โดยสามารถแบ่งของไหลกลุ่มนี้ได้เป็นหลายประเภทได้แก่ ของไหลชนิดความหนาเฉือน (shear thickening) หรือเรียกว่าของไหลไดเลเทนท์ (dilatant) เป็นของไหลชนิดที่ค่า μ_s เพิ่มขึ้น เมื่ออัตราการเฉือนเพิ่มขึ้น ตัวอย่างของไหลชนิดนี้ เช่น เจลของ PVC และน้ำแป้ง ส่วนของไหลชนิดความบางเฉือน (shear thinning) หรือที่รู้จักกันว่าของไหลซูโดพลาสติก (pseudoplastic) เป็นของไหลที่มีความสำคัญในของไหลชนิดพอลิเมอร์ ซึ่งค่า μ_s มีค่าลดลงเมื่ออัตราการเฉือนเพิ่มขึ้น สามารถแสดงการเปรียบค่าความเค้นเฉือนของของไหลชนิดต่างๆ [18] ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงการเปรียบค่าความเค้นเฉือนของของไหลชนิดต่างๆ

ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinate system, xyz) ส่วนประกอบของความเร็วสำหรับการไหลแบบเฉือนอย่างง่ายที่เกี่ยวข้องกับเครื่องวัด (simple viscometric shear flow) สามารถเขียนได้อยู่ในรูปของ

$$u_x = y, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0 \tag{2.17}$$

ดังนั้นผลต่างของความเค้นแนวฉากปฐมภูมิ (primary normal stress) N_1 และความเค้นแนวฉากทุติยภูมิ (secondary normal stress) N_2 สามารถแสดงได้ในรูปของความเค้นแนวฉาก τ_{xx}, τ_{yy} และ τ_{zz} ดังนี้

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy} = \dot{\gamma}^2 \psi_1\left(\dot{\gamma}\right) \tag{2.18}$$

และ

$$N_2 = \tau_{yy} - \tau_{zz} = \dot{\gamma}^2 \psi_2\left(\dot{\gamma}\right) \tag{2.19}$$

โดยที่ ψ_1 และ ψ_2 เป็นสัมประสิทธิ์ของความเค้นแนวฉากปฐมภูมิ และทุติยภูมิตามลำดับ ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันวัสดุ (material function) ของค่าอัตราการเฉือนเช่นเดียวกันกับค่าความหนืดเฉือน (Bird et al. 1973 [19]) และ $\dot{\gamma} = \dfrac{du_x}{dy}$ สำหรับการไหลแบบเฉือนอย่างง่าย จะพิจารณา N_1 เป็นส่วนใหญ่ ส่วน N_2 จะไม่นำมาพิจารณาและกำหนดค่าความเค้นเฉือนเป็น

$$\tau_{xy} = \dot{\gamma}\,\mu_s\left(\dot{\gamma}\right) \tag{2.20}$$

ผลต่างของความเค้นแนวฉากปฐมภูมิเป็นตัวบอกปริมาณความยืดหยุ่น (elasticity) ของของไหลได้ [20] เช่นเดียวกับอัตราส่วน $\left(\dfrac{N_1}{2\tau_{xy}}\right)$ ซึ่งเรียกว่าความเฉือนที่กู้คืนได้ (recoverable shear) เมื่อค่าอัตราส่วนนี้มีค่ามากกว่า 0.5 แล้วของไหลจะมีความยืดหยุ่นสูง

2.2.2 การไหลแบบยืด (Elongational flow)

การไหลในรูปแบบที่เกิดจากแรงยืดหรือเรียกอีกอย่างว่าการขยายแกนเดียว (Uniaxial extensional flow) เป็นการไหลในลักษณะที่ของไหลได้รับแรงกระทำจนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในรูปแบบของการยืดตัวออกโดยไม่จำเป็นต้องอาศัยผนังระหว่างเกิดการไหล หรือที่เรียกว่า การไหลของผิวอิสระ (free surface flow)

ในการศึกษาการไหลของของไหลนอนนิวโตเนียน ได้แก่ สารละลายพอลิเมอร์ และพอลิเมอร์หลอมเหลวนั้น พฤติกรรมของการยืดตัวออกของของไหลมีความสำคัญอย่างมากต่อการทำนายและอธิบายถึงลักษณะการไหลของกระบวนการผลิตต่างๆ ในโรงงานอุตสาหกรรมได้ไม่น้อยกว่าความบางแบบแรงตึง (tension thinning) การไหลในรูปแบบที่เกิดจากแรงเฉือนถึงแม้ว่าการทดสอบและการวิเคราะห์ผลจะทำได้ยาก การไหลในรูปแบบนี้สามารถพบได้ในกระบวนการเป่าขวด กระบวนการขึ้นรูปแบบสุญญากาศ และกระบวนการผลิตฟิล์ม เป็นต้น จึงได้มีผู้สนใจศึกษากันอย่างมาก โดยเฉพาะการไหลแบบยืดที่มีค่าความเครียดสูงพร้อมทั้งทำการวิเคราะห์ตรวจสอบถึงผลกระทบต่างๆ โดยผ่านทางกระบวนการเชิงตัวเลขซึ่งมีหลายวิธีและนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

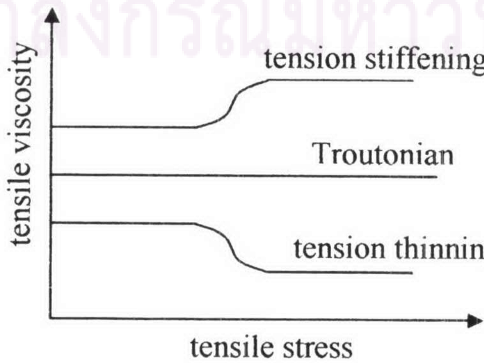
เมื่อพิจารณาการไหลแบบยืดนี้ สามารถแบ่งลักษณะของไหลออกเป็น 3 ชนิด คล้ายกับกรณีของการไหลแบบเฉือนในหัวข้อที่ผ่านมา คือ

1. ของไหลชนิดเทร้าโตเนียน (Troutonian) เป็นการไหลที่มีค่าความหนืดแบบยืดดึง (elongational viscosity) ไม่เปลี่ยนไปกับอัตราการยืดดึง (elongational rate)

2. ของไหลชนิดความแข็งแบบแรงตึง (tension stiffening) เป็นการไหลที่มีค่าความหนืดยืดดึงสูงขึ้นเมื่ออัตราการยืดดึงสูงขึ้น

3. ของไหลชนิดความบางแบบแรงตึง (tension thinning) เป็นการไหลที่มีค่าความหนืดยืดดึงต่ำลงเมื่ออัตราการยืดดึงสูงขึ้น

รูปที่ 2.2 แสดงการเปรียบเทียบแรงตึงของของไหลชนิดต่างๆ [21]



รูปที่ 2.2 แสดงการเปรียบเทียบแรงตึงของของไหลชนิดต่างๆ

ในการไหลแบบดึง (stretching flow) ซึ่งเป็นการไหลที่มีค่าความหนืดแบบขยาย (extensional viscosity) แสดงในรูปฟังก์ชันของเวลาและอัตราการยืดดึง $\mu_e\left(t,\dot{\varepsilon}\right)$

รีโอโลยีเป็นปริมาณที่ใช้วัดความแตกต่างภายใต้การไหลแบบเฉือนอย่างง่ายแบบคงตัว โดยเฉพาะอย่างยิ่งขึ้นกับความหนืดและความเค้น

ลักษณะของการเสียรูปเนื่องจากการยืดตัวแบ่งได้เป็น 3 แบบ คือ

1. การไหลแบบขยายแกนเดียว (uniaxial extensional flow)

การยืดจะมีลักษณะทิศทางเดียว ปัญหาที่มีลักษณะการไหลแบบนี้ ได้แก่ ปัญหาการยืดฟิลาเมนต์ เป็นต้น เมื่อพิจารณาในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ส่วนประกอบของความเร็วเขียนได้ดังนี้

$$u_x = \dot{\varepsilon}\,x, \quad u_y = -\frac{\dot{\varepsilon}}{2}y, \quad u_z = -\frac{\dot{\varepsilon}}{2}z \tag{2.21}$$

ดังนั้นผลต่างความเค้นจะเขียนได้เป็น

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = \tau_{yy} - \tau_{zz} = \dot{\varepsilon}\,\mu_e\left(\dot{\varepsilon}\right) \tag{2.22}$$

และ

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{2.23}$$

ค่าความหนืดแบบยืดเป็นค่าคงตัวบนช่วงกว้างของอัตราการยืด และความหนืดแบบยืดศูนย์ (zero–elongational viscosity) μ_e^0 สามารถพิสูจน์มาจากอัตราการยืดศูนย์ (zero-elongation rate) โดยปกติแล้ว $\mu_e^0 = 3\mu_0$ เมื่อ μ_0 เป็นความหนืดอัตราเฉือนศูนย์ของนิวโตเนียน (Newtonian zero-shear rate viscosity)

2. การไหลแบบขยายแกนสองทาง (biaxial extensional flow)

การยืดที่เกิดขึ้นจะเป็นไปใน 2 ทิศทางที่ตั้งฉากกัน ตัวอย่างปัญหาประเภทนี้ ได้แก่ กระบวนการเป่าขวด ซึ่งส่วนประกอบของความเร็วกำหนดโดย

$$u_x = \dot{\varepsilon}\,x, \quad u_y = \dot{\varepsilon}\,y, \quad u_z = -2\dot{\varepsilon}\,z \tag{2.24}$$

และผลต่างความเค้นมีค่าเป็น

$$\tau_{zz} - \tau_{xx} = \tau_{zz} - \tau_{yy} = \dot{\varepsilon}\,\mu_{eb}\left(\dot{\varepsilon}\right) \tag{2.25}$$

และ

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{2.26}$$

เมื่อ μ_{eb} คือ ความหนืดแบบขยายแกนสองทาง (biaxial extensional viscosity)

ดังนั้น Walter [22] ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดแบบแกนเดียว (uniaxial viscosity) และความหนืดแบบแกนสองทาง (biaxial viscosity) คือ

$$\mu_{eb}\left(\dot{\varepsilon}\right) = \mu_e\left(-2\dot{\varepsilon}\right) \tag{2.27}$$

3. การไหลแบบขยายเชิงระนาบ (planar extensional flow)

เป็นการยืดแผ่นบางของวัสดุใน 1 ทิศทางเท่านั้น (สมมติให้เป็นทิศทางแกน x) โดยทำให้ความหนาของวัสดุหดตัวลง (สมมติว่าทิศทางแกน z) แต่ความกว้างของแผ่นวัสดุไม่เปลี่ยนแปลง การไหลในรูปแบบนี้พบได้ในกระบวนการผลิตฟิลม์และแผ่นวัสดุต่างๆ ส่วนประกอบของความเร็วกำหนดโดย

$$u_x = \dot{\varepsilon}\, x, \quad u_y = 0, \quad u_z = -\dot{\varepsilon}\, z \tag{2.28}$$

และความหนืดแบบขยายเชิงระนาบ (planar extentional viscosity) (μ_{ep}) กำหนดโดย

$$\tau_{xx} - \tau_{zz} = \dot{\varepsilon}\, \mu_{ep}\left(\dot{\varepsilon}\right) \tag{2.29}$$

การไหลในรูปแบบนี้สมมูลกับการไหลแบบเฉือนบริสุทธิ์ (pure-shear flow) (Walter [22] และ Bernes et al.[23]) ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะพิจารณาการไหลในรูปแบบของการไหลแบบขยายแกนเดียว

2.2.3 อัตราเฉือนและอัตราการยืดดึง (Shear rate and elongation rate)

สำหรับพฤติกรรมของของไหลไอโซโทรปิคเอกพันธุ์แบบไม่ยืดหยุ่น(inelastic homogeneous isotropic fluid) ภายใต้การไหลของของไหลที่อุณหภูมิคงตัว (isothermal) รูปแบบทั่วไปของเทนเซอร์ความเค้นเอ็กซ์ตร้า จะอธิบายเป็นฟังก์ชันของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูปภายใต้สภาวะไม่อัดตัว (Rivlin and Eriksen [24], Reiner[25]) ดังนี้

$$T_{ij} = 2\mu\left(\dot{\gamma}, \dot{\varepsilon}\right) D_{ij} \tag{2.30}$$

กำหนดอัตราเฉือน ($\dot{\gamma}$) สำหรับการไหลแบบเฉือนอย่างง่ายแบบคงตัวเป็น

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{\mathrm{II}_d} \tag{2.31}$$

ส่วนอัตราการยืดดึง ($\dot{\varepsilon}$) จะกำหนดสำหรับการไหลแบบยืด คือ

$$\dot{\varepsilon} = 3\frac{\mathrm{III}_d}{\mathrm{II}_d} \tag{2.32}$$

โดยที่ II_d และ III_d คือ ความแปรผันอันดับที่สองและอันดับที่สาม (second and third invariant) ของเทนเซอร์ของอัตราการผิดรูป (D_{ij}) ตามลำดับ

ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinate system) ค่า II_d และ III_d จะกำหนดได้ดังนี้

$$\mathrm{II}_d = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(D^2\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2\right\} \tag{2.33}$$

และ

$$\mathrm{III}_d = \det(D) = -\mathrm{II}_d \tag{2.34}$$

จะพบว่าในระบบพิกัดแบบนี้ค่า III_d ขึ้นอยู่กับ II_d

กำหนดค่า II_d และ III_d ในระบบพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate system) เป็น

$$\mathrm{II}_d = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(D^2\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{u_r}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\right\} \tag{2.35}$$

และ

$$\mathrm{III}_d = \det(D) = \frac{V_r}{r}\left\{\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\right\} \tag{2.36}$$