

ทฤษฎีสวนศาสตร์และการวิเคราะห์ความถี่เสียง

3.1 คลื่นจากการสั่นของเส้นเสียง

พิจารณารูปแบบจำลองอย่างง่ายของกล่องเสียง (รูปที่ 3.1) อากาศจะถูกดันด้วยความดัน P_1 จากภายในปอดผ่านช่องแคบระหว่างเส้นเสียง สู่ช่องคอเหนือกล่องเสียง ผ่านช่องทางเดินเสียง โดยมี P_2 เป็นความดันเหนือกล่องเสียง พลังงานจลน์ต่อหน่วยปริมาตรของมวลอากาศที่เคลื่อนที่ผ่านช่องแคบคือ

$$P_1 - P_2 = \rho u^2 / 2 \quad (1.1)$$

เมื่อความต้านทานช่องแคบนิยามโดย อัตราส่วนของผลต่างความดันเทียบกับกระแสมวล

จะได้ $R_u^* = \rho u / 2A = \rho U / 2A^2 \quad (1.2)$

เมื่อ R_u^* คือ ความต้านทานช่องแคบ

ρ คือ ความหนาแน่นอากาศ

A คือ พื้นที่หน้าตัดของช่องแคบ

u คือ ความเร็วอนุภาค

U คือ ความเร็วปริมาตร

ในทางปฏิบัติความเร็วของอากาศไม่สม่ำเสมอ ทำกันทุกอนุภาคและไม่ได้เคลื่อนที่ในเส้นตรง ดังการอนุমানเชิงทฤษฎี ความซับซ้อนของกระแสอากาศผ่านช่องแคบทำให้ความต้านทานช่องแคบเพิ่มขึ้น ความต้านทานเนื่องจากความหนืดของอากาศทำให้ความเร็วอนุภาคลดลง จากค่าที่คำนวณในทางทฤษฎี ดังนั้นความต้านทานช่องแคบอาจประมาณโดยผลรวมเชิงเส้นของความต้านทานจากการเคลื่อนที่และความหนืด ดังนี้

$$R_u = R_v + k(\rho U / 2A^2) \quad (1.3)$$

โดย R_v คือ ความต้านทานเนื่องจากความหนืดอากาศ

k คือ ค่าคงตัว

Wegel และ Van Den Berg (อ้างถึงใน Flanagan, 1972) ได้ทดลองสร้างแบบจำลอง

กล่องเสียงมนุษย์โดยแปรความกว้างของพื้นที่หน้าตัดเพื่อหาสมการเชิงทดลองของความต้านทานกล่องเสียงได้

$$R_s = P_s / U = \eta 12 d / lw^3 + 0.875 u / 2(lw)^2 \quad (1.4)$$

โดย η คือ สัมประสิทธิ์ความหนืด

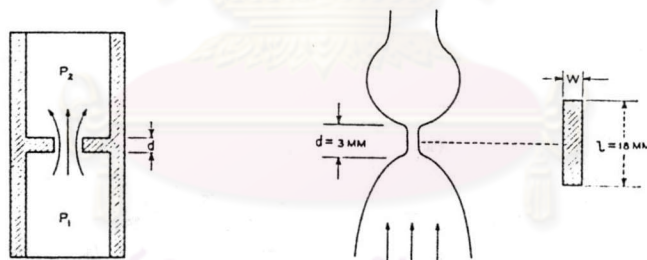
d คือ ความหนาของช่องแคบหรือกล่องเสียง

l คือ ความยาวของช่องแคบ

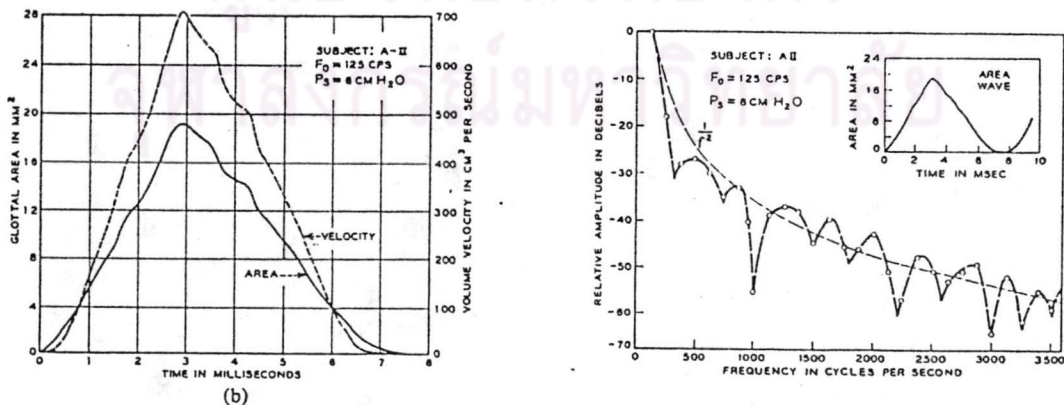
w คือ ความกว้างของช่องแคบ

P_s คือ $P_1 - P_2$

พื้นที่หน้าตัดของช่องแคบคือ lw ความหนาของช่องแคบและความยาวช่องแคบคงที่มีค่าเท่ากับ 3 และ 18 มิลลิเมตรตามลำดับ เมื่อใช้ข้อมูลจากภาพถ่ายความเร็วสูงต่อเนื่องแทนค่าพื้นที่หน้าตัดของช่องแคบและความดันที่วัดได้แทนค่าลงในสมการ (1.4) สามารถหาความเร็วปริมาตรที่แปรกับพื้นที่หน้าตัดซึ่งขึ้นกับเวลา Flanagan (1969) ได้คำนวณหาความสัมพันธ์ของค่าทั้งสามเป็นรูปกราฟ และสเปกตรัมของสัญญาณที่เกิดขึ้นจากกล่องเสียงจำลอง ดังรูปที่ 3.1



กล่องเสียงจำลอง



รูปที่ 3.1 กล่องเสียงจำลอง พื้นที่หน้าตัด ความเร็วปริมาตร และสเปกตรัมสัญญาณที่เกิดขึ้น

3.2 เรโซแนนซ์ของทรงกระบอก

เสียงพูดเกิดจากการสั่นของเส้นเสียง มีความถี่หลักมูล (fundamental frequency) แปรตามสรีระของเส้นเสียง เมื่อคลื่นเสียงผ่านช่องคอและปากซึ่งมีลักษณะคล้ายท่อ ทำให้เกิดความถี่เรโซแนนซ์ (resonant frequency) ต่างๆ สำหรับท่อที่มีพื้นที่หน้าตัด S ยาว L วางตามแกน x ตำแหน่งปลายท่ออยู่ที่ $x = 0$ และ $x = L$ เมื่อเกิดคลื่นที่ปลาย $x = 0$ ดังสมการ

$$p = Ae^{j(\omega t + k(L-x))} + Be^{j(\omega t - k(L-x))} \quad (2.1)$$

A, B คือ ค่าคงตัวจากเงื่อนไขขอบเขตที่ $x = 0$ และ $x = L$ ตามลำดับ พิจารณาที่ $x = L$ ให้ความต้านทานเชิงซ้อนเชิงกล (mechanical impedance, Z_m) มีค่า Z_{mL} แรงและความเร็วอนุภาคที่ปลายท่อต้องต่อเนื่องกัน จะได้

$$u(L, t) = -(1/\rho_0) \int (\partial p / \partial x) dt, \quad (2.2)$$

เมื่อ $P(L, t)/S$ คือ แรงกระทำของอนุภาคที่ปลายท่อ

ดังนั้น

$$Z_{mL} = \rho_0 c S (A+B) / (A-B) \quad (2.3)$$

ที่ปลาย $x = 0$ จะได้

$$Z_{m0} = \rho_0 c S \frac{Ae^{jkL} + Be^{-jkL}}{Ae^{jkL} - Be^{-jkL}} \quad (2.4)$$

จากสมการ (2.3) และ (2.4) ได้

$$\frac{Z_{m0}}{\rho_0 c S} = \frac{\frac{Z_{mL}}{\rho_0 c S} + j \tan kL}{1 + j \frac{Z_{mL}}{\rho_0 c S} \tan kL} \quad (2.5)$$

ความถี่เรโซแนนซ์หาได้จากสมการ
$$-j \frac{x \tan^2 kL + (r^2 + x^2 - 1) \tan kL - x}{(r^2 + x^2) \tan^2 kL - 2x \tan kL + 1} = 0 \quad (2.6)$$

ให้คลื่นเกิดที่ปลาย $x = 0$ และปลาย $x = L$ ปิดแน่น Z_{mL} ในสมการที่ (2.5) เข้าสู่ขั้นถัด

$$Z_{m0} / \rho_0 c S = -j \cot(kL) \quad (2.7)$$

จะได้ $\cot(kL) = 0$ เมื่อ $k_n L = (2n-1)\pi$ โดยที่ $n = 1, 2, 3, \dots$

ดังนั้นความถี่เรโซแนนซ์ของท่อปลายปิดเท่ากับ
$$f_n = (2n-1)c/4L \quad (2.8)$$

ถ้าปลาย $x=L$ เปิด มี $Z_{mL} = 0$ จะได้

$$Z_{m0}/(\rho_0 cS) = j \tan (kL) \quad (2.9)$$

ดังนั้นความถี่เรโซแนนซ์ของท่อปลายเปิดเท่ากับ $f_n = nc/2L$ (2.10)

3.3 ความต้านทานเชิงซ้อนการแผ่คลื่นเสียง

ในทางส่วนศาสตร์แหล่งกำเนิดคลื่นจะมีความต้านทานเชิงซ้อนเชิงกลของแหล่งกำเนิดแผ่รังสีไปสู่สื่อบริเวณ และมีความต้านทานเชิงซ้อนการแผ่คลื่นเสียงของของเหลวซึ่งเป็นตัวกลางการเคลื่อนที่ของคลื่นกล ผลรวมของความต้านทานเชิงซ้อนเชิงกลของแหล่งกำเนิดและความต้านทานเชิงซ้อนการแผ่คลื่นเสียง อาจเขียนอยู่ในรูป

$$Z_r = Z_r \exp(j\theta) = R_r + jX_r \quad (3.1)$$

โดย R_r คือ ความต้านทานการแผ่คลื่นเสียง (radiation resistance)

X_r คือ ความต้านทานจินตภาพการแผ่คลื่นเสียง (radiation reactance)

ค่าบวกของความต้านทานการแผ่คลื่นเสียง หมายถึงความต้านทานเชิงกลเพิ่มขึ้น ทำให้กำลังงานของแหล่งกำเนิดสูญเสียมากขึ้น ค่าความต้านทานการแผ่คลื่นเสียงคำนวณได้จากกำลังงานที่คลื่นแผ่ไปในของเหลว โดยแหล่งกำเนิดตั้งสมการ

$$\Pi = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}\{f_r\} \text{Re}\{u_0\} dt$$

จากสมการที่(3.1) จะได้ $\Pi = \frac{1}{2} U_0^2 Z_r \cos \theta = \frac{1}{2} U_0^2 R_r$ (3.2)

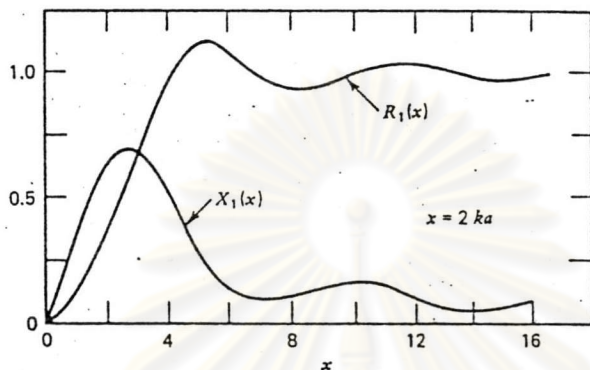
ค่าบวกของความต้านทานจินตภาพการแผ่คลื่นเสียงทำให้ความถี่เรโซแนนซ์ต่ำลง ผลกระทบของมวลการแผ่คลื่นเสียงตัดทิ้งได้เมื่อแหล่งกำเนิดอยู่ในตัวกลางที่เบาเช่น อากาศ แต่เมื่อแหล่งกำเนิดอยู่ในตัวกลางที่มีความหนาแน่นมากขึ้นเช่น น้ำ มวลการแผ่คลื่นเสียงจะมีผลต่อการคำนวณมากขึ้น ค่าความต้านทานเชิงซ้อนการแผ่คลื่นเสียงของลูกสูบในผนัง (Kinsler et al., 1962) คือ

$$\begin{aligned} R_r &= \pi a^2 \rho_0 c R_1(2ka) \\ X_r &= \pi a^2 \rho_0 c X_1(2ka) \end{aligned} \quad (3.3)$$

โดย

$$\begin{aligned} R_1(x) &= 1 - \frac{2J_1(x)}{x} = \frac{x^2}{2^2 1! 2!} - \frac{x^4}{2^4 2! 3!} + \dots \\ X_1(x) &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{x}{3} - \frac{(x)^3}{3^2 \cdot 5} + \frac{(x)^5}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

ค่าของ R_1 และ X_1 ได้แสดงไว้ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ค่า R_1 และ X_1 ของลูกสูบในผนังในสมการ (3.4)

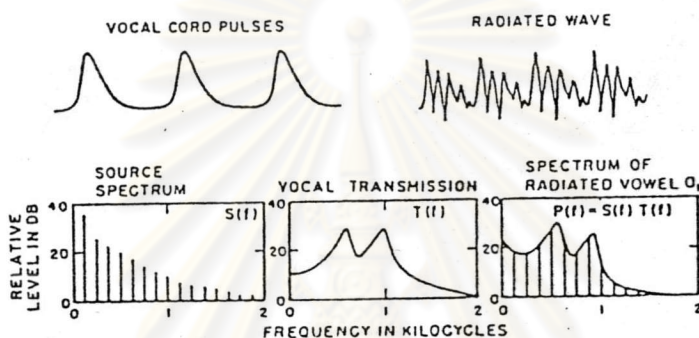
ในขีดจำกัดความถี่ต่ำ $ka \ll 1$ ความต้านทานเชิงซ้อนของการแผ่คลื่นเสียงของลูกสูบแผ่นบางในผนังประมาณด้วยพจน์แรกของสมการ (3.4) คือ

$$R_r = \frac{1}{2} \pi a^2 \rho_0 c (ka)^2$$

$$X_r = \pi a^2 \rho_0 c \frac{8}{3\pi} (ka) \tag{3.5}$$

Flanagan (1972) ได้อธิบายการแผ่คลื่นเสียงที่สัมพันธ์กับเสียงพูดของมนุษย์เปรียบเทียบ การออกเสียงของช่องปากและคิระกะทำหน้าที่เสมือนลูกสูบที่ฝังอยู่ในทรงกลม โดยประมาณ ขนาดช่องเปิดของปากเป็นวงกลมมีรัศมี 9 เซนติเมตร สำหรับช่วงความถี่คลื่นเสียงไม่เกิน 5,000 เฮิรตซ์ ความต้านทานเชิงซ้อนของการแผ่คลื่นเสียงพูดที่ปาก ประมาณโดยใช้ความต้านทานเชิงซ้อนของลูกสูบในผนังในกรณีนี้ $ka \ll 1$ ได้ดี

พิจารณารูปที่ 3.3 (Fant 1970) เสียงพูดประกอบด้วยการสั่นของเส้นเสียง เป็นแหล่งกำเนิดมีรูปสัญญาณในโดเมนของเวลาดังรูปบนซ้าย มีผลแปลงฟูเรียร์เป็นฮาร์มอนิก สเปกตรัมดังรูปล่างซ้าย เรียกว่า สเปกตรัมแหล่งกำเนิด ($S(f)$) แอมพลิจูดความถี่ต่างๆ ถูกคูณด้วยตัวประกอบอัตราขยายที่มีลักษณะเฉพาะสำหรับแต่ละฮาร์มอนิกซึ่งเรียกว่า ฟิลเตอร์ ฟังก์ชัน ($T(f)$) ผลลัพธ์คือคลื่นเสียงพูดดังรูปบนและมีสเปกตรัม ($P(f)$) ดังรูปล่างขวา ซึ่งอาจเขียนเป็นสมการคือ $P(f) = S(f) T(f)$



รูปที่ 3.3 สัญญาณและสเปกตรัมของแหล่งกำเนิด, ฟิลเตอร์ฟังก์ชัน และ คลื่นเสียงผลลัพธ์

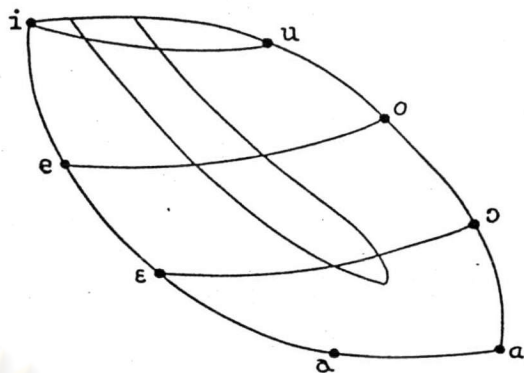
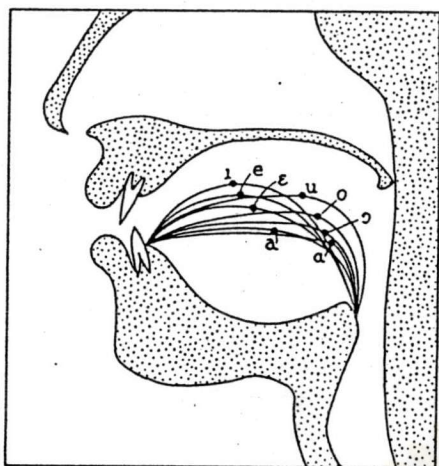
3.4 สัทลักษณะและแบบจำลองทางเดินเสียง

ลักษณะและการทำงานของอวัยวะที่ใช้ในการแปลงเสียงสามารถจำแนกเป็นสามกลุ่มได้แก่ (1) ปอดและหลอดลม (2) กล่องเสียงและเส้นเสียง (3) อวัยวะบริเวณเหนือเส้นเสียง ปอดและหลอดลมทำหน้าที่เสมือนตัวส่งแรงภายนอกในรูปของกระแสลมมากระทบกับเส้นเสียงที่อยู่ภายในกล่องเสียงทำให้เส้นเสียงเกิดการสั่นไหว เนื่องจากเส้นเสียงถูกยึดและรั้งไว้ด้วยเส้นเอ็นและกล้ามเนื้อต่างๆ ทำให้เกิดการสั่นได้หลายลักษณะแต่ละลักษณะมีผลต่อเสียงที่เปล่งออกมา ส่วนอวัยวะบริเวณเหนือเส้นเสียงที่สำคัญต่อการแปลงเสียงคือ ริมฝีปาก, ลิ้น, ฟัน และเพดานอ่อน โดยลิ้นและริมฝีปากจะมีบทบาทสำคัญในการเปลี่ยนแปลงรูปร่างทางกายภาพของช่องทางเดินเสียง ซึ่งทำหน้าที่เป็นเรโซเนเตอร์ของคลื่นเสียงที่เกิดขึ้นจากการสั่นของเส้นเสียงลักษณะของริมฝีปากในการแปลงเสียงสระมี 3 รูป คือ ห่อ, เปิดธรรมดา และรี โดยทั่วไปนักสัทศาสตร์จะพูดถึงรูปริมฝีปากเพียง 2 รูป คือ ริมฝีปากห่อ กับ ริมฝีปากไม่ห่อ โดยรวมริมฝีปากเปิดธรรมดาและริมฝีปากรีเข้าด้วยกันเรียก

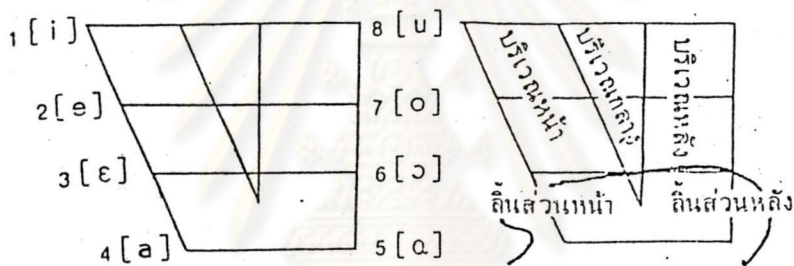
ว่าริมฝีปากไม่ห่อ ลักษณะของลิ้นในการเปล่งเสียงสระพบว่า จุดที่สูงที่สุดของลิ้นจะอยู่ต่างที่กันเสมอ ตำแหน่งของจุดที่สูงที่สุดของลิ้นขณะที่เปล่งเสียงสระแต่ละเสียง เรียกว่าตำแหน่งของเสียงสระหรือที่เกิดของเสียงสระ Daniel Jones (1969) ได้สร้างระบบสระแกน (cardinal vowel system) ขึ้นเพื่อความสะดวกในการบรรยายตำแหน่งดังกล่าว เมื่อต้องการบรรยายจุดที่สูงที่สุดของลิ้นในการเปล่งเสียงสระก็สามารถทำได้โดยหาว่า เสียงสระดังกล่าวมีเสียงคล้ายกับสระแกนเสียงใดมากที่สุดและประมาณว่าจุดที่สูงที่สุดของลิ้นในการเปล่งเสียงสระนั้นอยู่ห่างจากจุดที่สูงที่สุดของลิ้นในการเปล่งเสียงสระแกนดังกล่าวมากน้อยเพียงใดในแนวราบและแนวตั้ง จากการวิเคราะห์เสียงสระในภาษาต่างๆ นักสัทศาสตร์พบว่า ในแนวนอนส่วนของลิ้นที่ยกขึ้น ไปสูงสุดอยู่ตั้งแต่บริเวณหน้าสุดจนถึงหลังสุดของลิ้นส่วนแนวตั้งลิ้นสามารถเคลื่อนที่ไปจนถึงบริเวณหนึ่งได้ เพดานปากเท่านั้น ถ้าเคลื่อนที่ขึ้นสูงกว่านั้นจะทำให้เกิดเสียงแทรก ดังนั้นนักสัทศาสตร์จึงสามารถกำหนดบริเวณที่เกิดเสียงสระขึ้นได้ เสียงสระแกนเสียงแรกที่กำหนดขึ้นคือ เสียงสระแกนเสียงที่ 1 คือ [i] และเสียงที่ 5 คือ [ɑ] ตำแหน่งของสระแกนเสียงที่ 1 คือ ยกขึ้นสูงขึ้นไปสู่เพดานแข็งให้มากที่สุดแต่ต้องไม่ให้เกิดเสียงเสียดแทรกและอยู่ในตำแหน่งหน้าของช่องปากให้มากที่สุด ริมฝีปากเป็นแบบไม่ห่อ ตำแหน่งของสระแกนเสียงที่ 5 คือ บังคับลิ้นให้ลดต่ำที่สุดและดึงไปด้านหลังส่วนโค้งให้มากที่สุดแต่ต้องไม่เกิดเสียงเสียดแทรกให้ส่วนหลังของลิ้นยกขึ้นสูงกว่าส่วนอื่นเล็กน้อยริมฝีปากไม่ห่อ สระแกนเสียงอื่นๆสามารถกำหนดตำแหน่งได้ด้วยการบังคับการเคลื่อนตัวของลิ้น โดยใช้เสียงที่ 1 และ 5 เป็นจุดอ้างอิง (กัลยา ดิงศภัทย์ 2533) ดังแสดงในรูปที่ 3.4.ก และ ข (สระแกนเสียงที่ 1 และ 5 ใช้สัญลักษณ์ [i] และ [ɑ] ซึ่งเป็นสัทอักษรสากลแทนเสียงทั้งสองตามลำดับ)

เมื่อนำค่าความถี่ฟอร์แมนท์ (ดูบทที่ 4 หัวข้อ 3) ที่หนึ่ง (F1) และฟอร์แมนท์ที่สอง (F2) ของสระแกนมาเขียนกราฟโดยกำหนดแกนตั้งเป็นค่า F1 แกนราบเป็นค่า F2 ใช้ลอการิทึมสเกลที่กลับสเกลจากปกติซึ่งเรียงค่าต่ำไปสูงตามแนวแกนเป็นสเกลเรียงค่าสูงไปต่ำ จะพบความสอดคล้องของตำแหน่งสระบนกราฟและแผนภูมิสระดังรูปที่

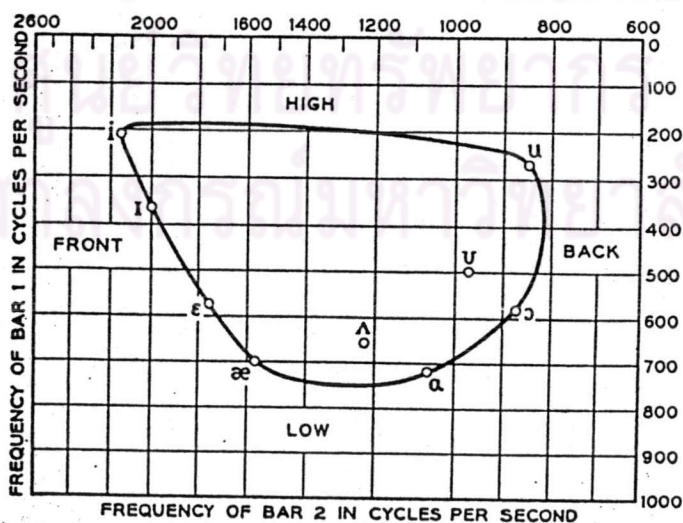
3.4.ค



รูปที่ 3.4.ก บริเวณที่เกิดเสียงสระแค้น (รูปขวาคือส่วนขยายบริเวณตำแหน่งสูงสุดของลิ้นในการเปล่งเสียงสระแค้น)

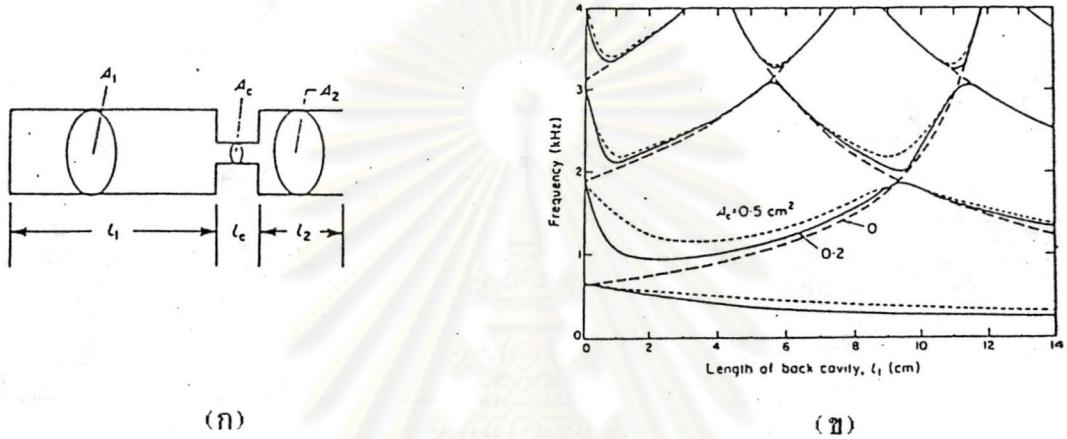


รูปที่ 3.4.ข ตำแหน่งสระบนแผนภูมิสระและความสัมพันธ์ระหว่างบริเวณแผนภูมิ



รูปที่ 3.4.ค กราฟความถี่F1และF2ของสระแค้นโดย Wise (1957)

การแปลงเสียงสละลินจะถูกยกทำให้เกิดช่องแคบแยกช่องทางเดินเสียงออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนหน้าซึ่งเปิดออกสู่บรรยากาศและส่วนหลังที่อยู่บริเวณช่องคอและมีความยาวประมาณ 16 เซนติเมตร ช่องทางเดินเสียงสามารถจำลองด้วยรูปทรงกระบอก 2 ชิ้นต่อกัน (Stevens 1989) มีพื้นที่หน้าตัด A_1 ยาว l_1 แทนส่วนหลังและพื้นที่หน้าตัด A_2 ยาว l_2 แทนส่วนหน้า บริเวณช่องแคบที่เกิดจากการขลิบแทนด้วยพื้นที่หน้าตัด A_c ยาว l_c ดังรูปที่ 1 ก.



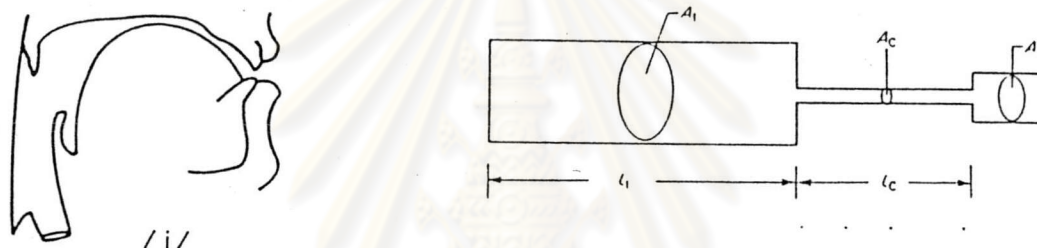
(ก) (ข)

รูปที่ 3.5 (ก) แบบจำลองทางเดินเสียงด้วยทรงกระบอก และ (ข) ความถี่เรโซแนนซ์ของแบบจำลอง

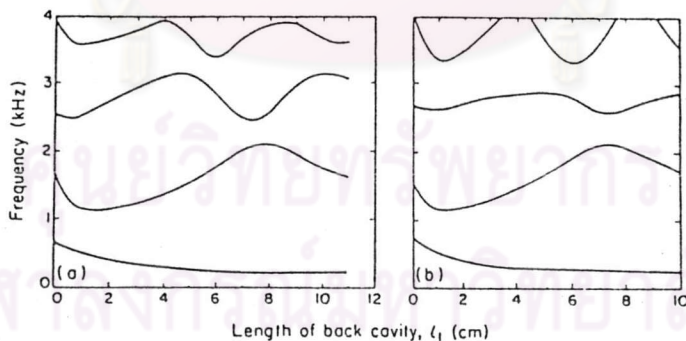
ความถี่เรโซแนนซ์ของทรงกระบอกส่วนหลังมีค่า $0, c/2l_1, c/l_1, \dots$
 ความถี่เรโซแนนซ์ของทรงกระบอกส่วนหน้ามีค่า $c/4l_2, 3c/4l_2, \dots$
 ดังนั้นความถี่เรโซแนนซ์ของแบบจำลองเมื่อผลการคัปปลิงระหว่างทรงกระบอกประกอบด้วยความถี่เรโซแนนซ์ของทรงกระบอกทั้งสอง โดยมีเงื่อนไข $l_1 + l_2 + l_c = 16$ เซนติเมตร เส้นประในรูปที่ 1 ข. แสดงความถี่เรโซแนนซ์ของแบบจำลองเมื่อแปรความยาว l_1 และกำหนดให้ $l_c = 2$ เซนติเมตรคงที่ $A_1 = A_2 = 3$ ลูกบาศก์เซนติเมตร $A_c = 0$ ผลการคัปปลิงระหว่างทรงกระบอกจะทำให้ความถี่เรโซแนนซ์ของแบบจำลองเปลี่ยนไปเล็กน้อย ดังแสดงด้วยเส้นประ (ขีดสั้น) และเส้นทึบเมื่อ $A_c = 0.5, 0.2$ ตารางเซนติเมตรตามลำดับ จากรูปที่ 1 ข. ความถี่เรโซแนนซ์ที่แสดงมีค่าไม่เกิน 4 กิโลเฮิรตซ์ เนื่องจากเหตุผลสองประการคือ ความไวต่อความถี่เสียงสูงของผู้ฟังลดลงเมื่อเทียบกับเสียงความถี่ต่ำ เนื่องจากแถบความถี่วิกฤตของมนุษย์มีลักษณะเป็นฟังก์ชันลอการิทึมของค่าความถี่แบบ 1/3 ออกเทฟ และการสูญเสียพลังงานเสียงมีค่าแปรตามความถี่

เสียงสระต่างกันต้องใช้แบบจำลองทางเดินเสียงต่างกัน เนื่องจากสรีระทางเดินเสียงแปรตามตำแหน่งลิ้นดังนี้

สระหน้า-สูง (เสียง [i]) ตำแหน่งของลิ้นถูกยกสูงและเยื้องไปด้านหน้า ดังรูปที่ 3.6 จากรูปจะพบว่าช่องโพรงปากแคบกว่าช่องคอ แบบจำลองที่สอดคล้องกันคือ ทรงกระบอก 2 ชั้น มีพื้นที่หน้าตัด 3, 1 ตารางเซนติเมตร ยาว l_1, l_2 ตามลำดับ มีช่องแคบพื้นที่หน้าตัด 0.3 ตารางเซนติเมตร ยาว l_c คั่นกลาง รูปที่ 3.7 แสดงความถี่เรโซแนนซ์ที่แปรตามความยาว l_1 ของแบบจำลองนี้เมื่อ l_c เท่ากับ 5 และ 6 เซนติเมตร ตามลำดับ ความถี่เรโซแนนซ์ในช่วง $l_1 = 6$ ถึง 9 เซนติเมตรของรูปที่ 3.7 เป็นค่าที่สอดคล้องกับภาพตัดขวางของทางเดินเสียง



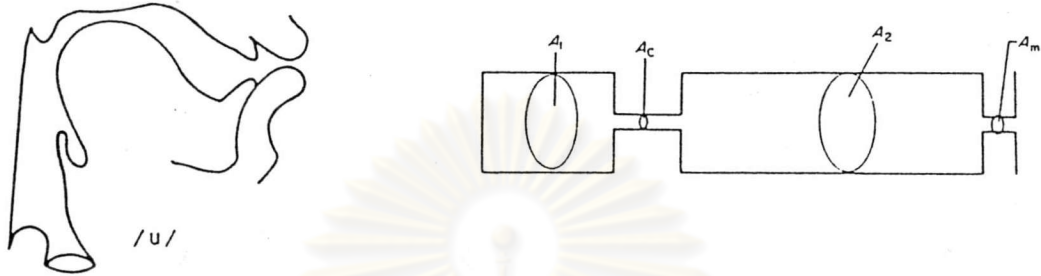
รูปที่ 3.6 แบบจำลองทางเดินเสียงด้วยทรงกระบอก (เสียง [i])



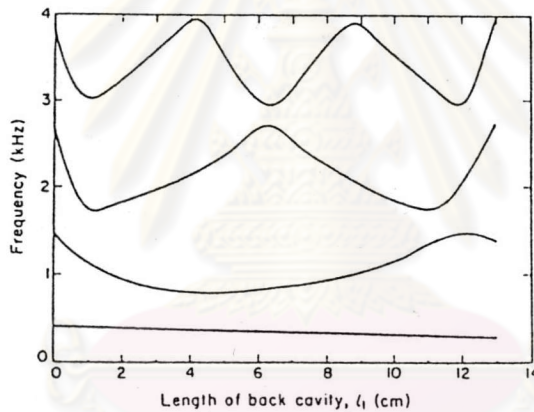
รูปที่ 3.7 ความถี่เรโซแนนซ์ของแบบจำลองรูปที่ 3.6

สระหลัง-สูง (เสียง [u]) ตำแหน่งสูงสุดของลิ้นอยู่เยื้องไปด้านหลังในบริเวณเพดานอ่อนดังรูปที่ 3.8 การออกเสียงสระหลัง-สูงมีการห่อริมฝีปากด้วย (เช่น สระ u) แบบจำลองทางเดินเสียงรูปที่ 3.8 จึงเพิ่มช่องแคบที่ทรงกระบอกส่วนหน้า

ความถี่เรโซแนนซ์ที่สอดคล้องแบบจำลองเมื่อกำหนด $A_1 = A_2 = 3$ ตารางเซนติเมตรและ $A_c = A_m = 0.3$ ตารางเซนติเมตร จากรูปที่ 3.9 ความถี่เรโซแนนซ์ทั้งสองมีค่าต่ำ ขณะที่ความถี่เรโซแนนซ์ที่หนึ่งมีค่าสูงขึ้นเล็กน้อย

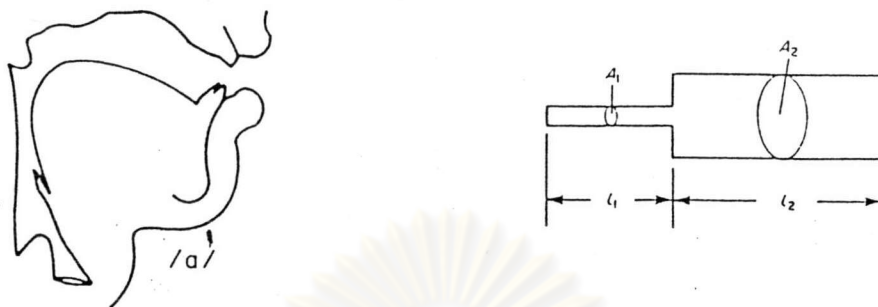


รูปที่ 3.8 แบบจำลองทางเดินเสียงด้วยทรงกระบอก (เสียง [u])

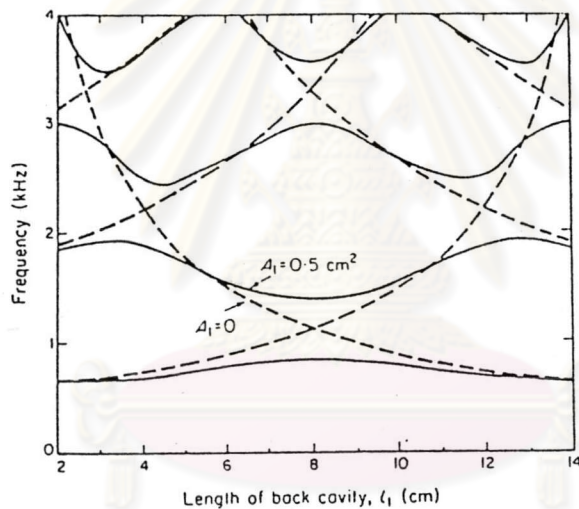


รูปที่ 3.9 ความถี่เรโซแนนซ์ของแบบจำลองรูปที่ 3.8

สระต่ำ (เสียง [a]) ตำแหน่งของลิ้นถูกรั้งไปด้านหลังขีดช่องคอและระดับความสูงของตำแหน่งสูงสุดของลิ้นจะอยู่ต่ำกว่าสระตัวอื่นดังรูปที่ 3.10 จึงสามารถสร้างแบบจำลองทางเดินเสียงด้วยทรงกระบอกสองชิ้นต่อกัน โดยมีพื้นที่หน้าตัดแคบในส่วนหลังและพื้นที่หน้าตัดกว้างในส่วนหน้าดังรูปที่ 3.10 ความถี่เรโซแนนซ์ของแบบจำลองเมื่อกำหนด $A_2 = 3$ ตารางเซนติเมตร $A_1 = 0.5$ ตารางเซนติเมตร แสดงไว้ในรูปที่ 3.11 ความถี่เรโซแนนซ์ที่ $l_1 = 7$ ถึง 9 เซนติเมตรเท่านั้นที่สอดคล้องกับข้อจำกัดทางกายภาพของช่องคอ ในช่วงความยาว l_1 นี้ พบว่าความถี่เรโซแนนซ์ที่หนึ่งมีค่าสูง ความถี่เรโซแนนซ์ที่สองมีค่าต่ำ เป็นลักษณะเด่นของเสียงสระตัวนี้



รูปที่ 3.10 แบบจำลองทางเดินเสียงด้วยทรงกระบอก (เสียง [a])



รูปที่ 3.11 ความถี่เรโซแนนซ์ของแบบจำลองรูปที่ 3.10

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



3.5 การวิเคราะห์ความถี่คลื่น

ในทางปฏิบัติสัญญาณที่ต่อเนื่องจะต้องถูกชักตัวอย่างเก็บค่าไว้เพื่อส่งให้เครื่องประมวลผลสัญญาณเชิงตัวเลขนำไปวิเคราะห์ต่อไป โดยการชักตัวอย่างสัญญาณจะเกิดขึ้นทุก ๆ ช่วงเวลา T พิจารณาฟังก์ชันต่อเนื่อง $h(t)$ ที่ $t = T$ ค่า $h(t)$ ที่ถูกชักตัวอย่างณเวลา t เท่ากับ T เขียนเป็นสมการดังนี้

$$\hat{h}(t) = h(t)\delta(t - T) = h(T)\delta(t - T) \quad (5.1)$$

ถ้าฟังก์ชัน $h(t)$ ต่อเนื่องและถูกชักตัวอย่างทุกเวลาที่ $t = nT$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ จะได้

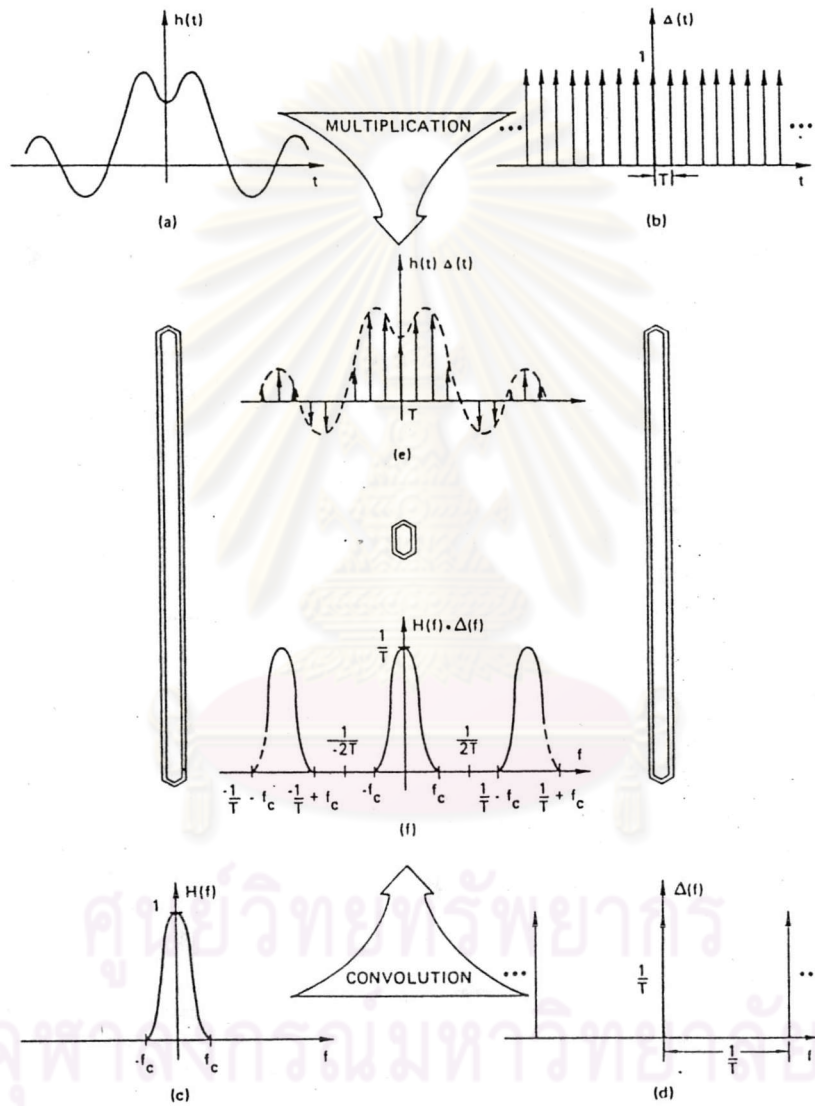
$$\hat{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t - nT) \quad (5.2)$$

โดยที่ $\hat{h}(t)$ คือ เทอมของสัญญาณ $h(t)$ ที่ถูกชักตัวอย่างไว้

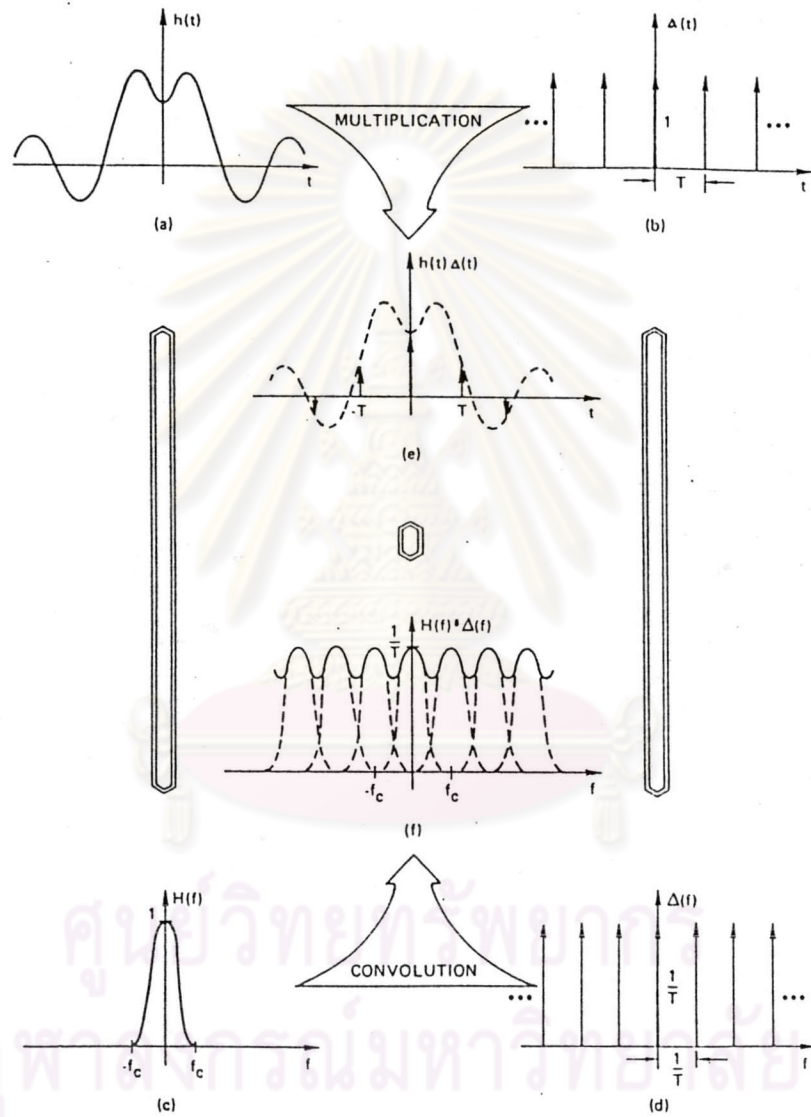
T คือ คาบของการชักตัวอย่างสัญญาณ

รูปที่ 3.12 แสดงลักษณะสัญญาณต่อเนื่อง $h(t)$ ฟังก์ชันการชักตัวอย่าง (sampling function) ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $\Delta(t)$ และฟังก์ชันสัญญาณที่ถูกชักตัวอย่างไว้ $\hat{h}(t)$

- จากรูป 3.12
- คือ สัญญาณต่อเนื่องที่เป็นฟังก์ชันกับเวลา หรือ $h(t)$
 - คือ สัญญาณการชักตัวอย่างทุกช่วงเวลา T หรือเรียกว่าฟังก์ชันการชักตัวอย่าง หรือ $\Delta(t)$
 - คือ ผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $h(t)$ ในรูป (a) ใช้สัญลักษณ์ $H(f)$
 - คือ ผลการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณ $\Delta(t)$ ในรูป (b) ใช้สัญลักษณ์ $\Delta(f)$
 - คือ ฟังก์ชัน $\hat{h}(t)$ ซึ่งเป็นค่าของ $h(t)$ ที่ถูกชักตัวอย่างด้วย $\Delta(t)$ หรือ $\hat{h}(t) = h(t)\Delta(f)$
 - คือ ผลการแปลงฟูเรียร์ของ $\hat{h}(t)$ หรือ $H(f)\Delta(f)$



รูปที่ 3.12 สัญญาณต่อเนื่อง $h(t)$, ฟังก์ชันการซีกตัวอย่าง $\Delta(t)$ และฟังก์ชันสัญญาณที่ถูกซีกตัวอย่างไว้ $\hat{h}(t)$



รูปที่ 3.13 การเพี้ยนของผลแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเนื่องจากการซัดตัวอย่าง

คาบของการซีกตัวอย่างสัญญาณ (T) มีผลต่อการแปลงฟูรีเยร์ของ $h(t)$ ดังแสดงในรูปที่ 3.13 เมื่อ T มีค่ามากขึ้นหมายถึงช่วงเวลาซีกตัวอย่างสัญญาณห่างกันมากขึ้น ผลแปลงฟูรีเยร์ของสัญญาณ $h(t)$ ก็จะเกิดการเพี้ยน (distortion) ดังรูปที่ 3.13(f) ซึ่งเรียกว่า เอเลียซิง (aliasing)

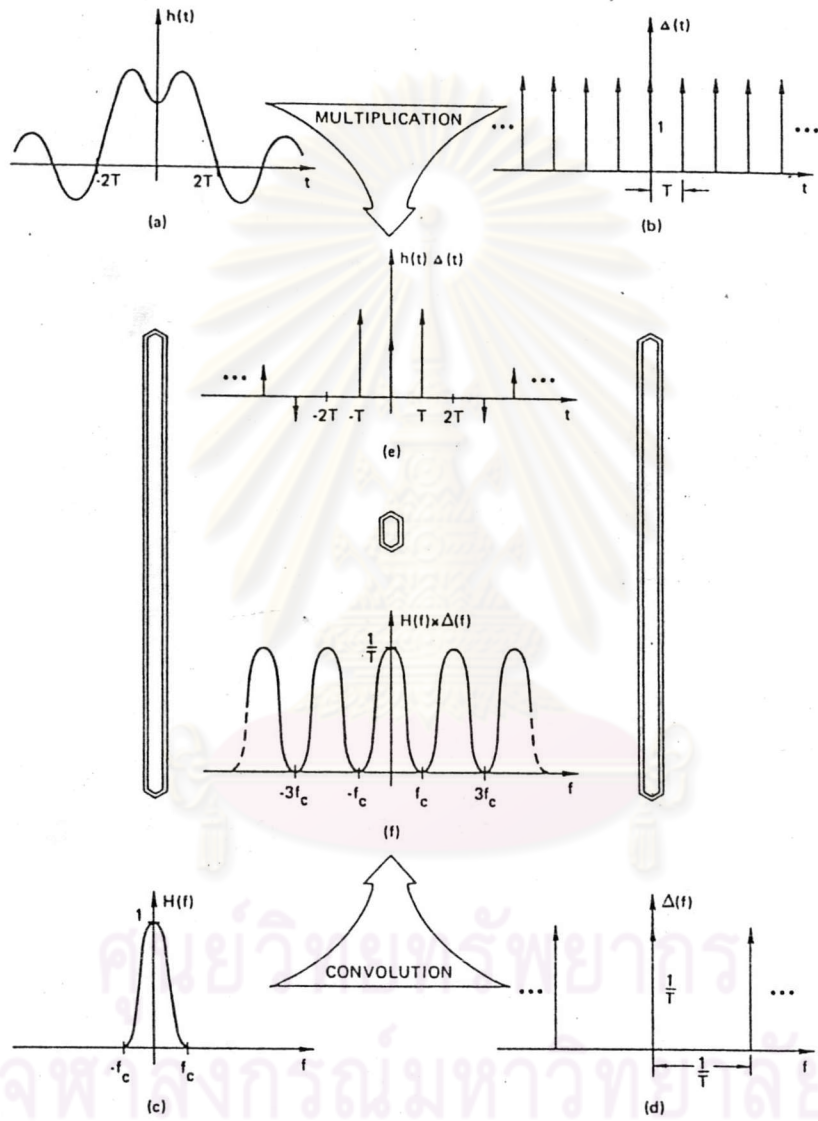
ทฤษฎีการซีกตัวอย่าง : ถ้าผลแปลงฟูรีเยร์ของฟังก์ชัน $h(t)$ มีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุก ๆ ความถี่ที่มากกว่า f_c แล้ว คุณสมบัติฟังก์ชันต่อเนื่อง $h(t)$ สามารถศึกษาได้จาก $h(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ซีกตัวอย่างมาจาก $h(t)$ โดย

$$\hat{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t - nT) \quad (5.3)$$

$$T = 1/2f_c \quad (5.4)$$

เพื่อแสดงทฤษฎีบทให้เป็นรูปธรรมขึ้นจะพิจารณารูปที่ 3.14 เมื่อกำหนดตัวอย่างให้ฟังก์ชันต่อเนื่อง $h(t)$ ดังรูป (a) มีผลแปลงฟูรีเยร์เป็นศูนย์สำหรับความถี่ที่มากกว่า f_c ดังรูป (c) หรืออาจกล่าวได้ว่าฟังก์ชันความถี่ของตัวอย่างนี้มี แบนด์-ลิมิต (band-limit) ที่ความถี่ f_c เขียนเป็นสมการ $H(f) = 0$ เมื่อ $|f| > f_c$ (5.5)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



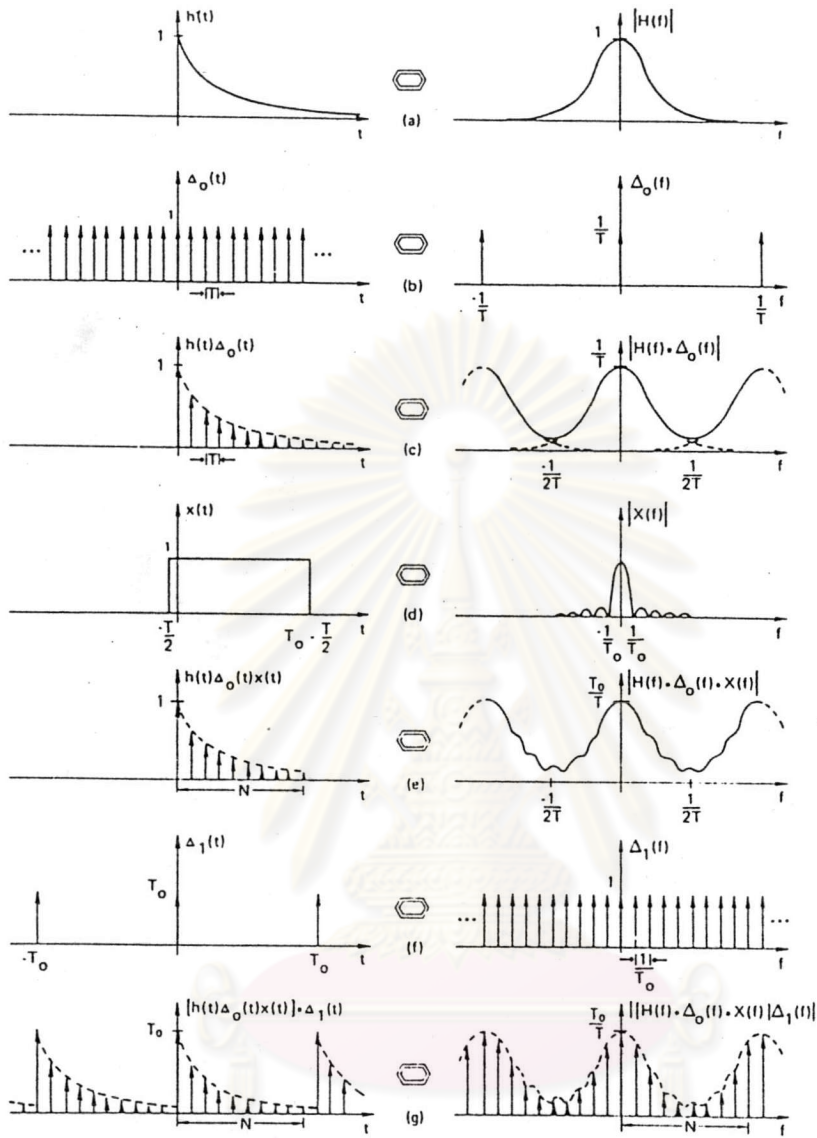
รูปที่ 3.14 การแปลงฟูเรียร์ฟังก์ชันมี แบนด์-ลิมิตที่ความถี่ f_c

ในรูป (c) มีความกว้างแถบ (bandwidth) เท่ากับ f_c เงื่อนไขต่อมาของทฤษฎีคือเลือก
 ชักตัวอย่างโดยมีช่วงการชักตัวอย่าง $T = 1/2f_c$ ดังรูป (b) ผลแปลงฟูเรียร์ของ
 ฟังก์ชันการชักตัวอย่าง ($\Delta(f)$) จะมีค่า $1/T = 2f_c$ ดังรูป (d) ช่วงห่างของการชัก
 ตัวอย่างจะทำให้ผลการคอนโวลูชัน(convolution) ของ $\Delta(f)$ กับ $H(f)$ ไม่มีเอเลียซิง
 ดังรูป (f) จากรูปถ้าเลือก $T > 1/2f_c$ จะเกิดเอเลียซิง ดังนั้นช่วงการชักตัวอย่าง
 สัญญาณควรมีค่ามากที่สุดไม่เกิน $T = 1/2f_c$ หรือกล่าวได้ว่าความถี่ในการชักตัวอย่างเท่ากับ
 $1/T = 2f_c$ ซึ่งเรียกว่า อัตราการชักตัวอย่างไนควิสต์ (Nyquist sampling rate)
 ในการแปลงฟูเรียร์ด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะต้องแปรขั้นตอนทางคณิตศาสตร์จากการแปลงฟูเรียร์
 ต่อเนื่องในทางทฤษฎี ข้อแตกต่างที่สำคัญคือจะต้องมีการชักตัวอย่างสัญญาณฟังก์ชันต่อเนื่อง
 ด้วยฟังก์ชันการชักตัวอย่าง ทำให้ฟังก์ชันสัญญาณที่ได้มีค่าเป็นจุดของสัญญาณเดิม โดยมีระยะ
 ห่างของจุดเท่ากับคาบของฟังก์ชันการชักตัวอย่าง นอกจากนี้ประเด็นสำคัญอีกข้อหนึ่งคือ
 การประมวลผลเชิงตัวเลขมีข้อจำกัดในด้านจำนวนข้อมูลที่ใช้ในการประมวลผล จะต้องจำกัด
 จำนวนข้อมูล การจำกัดจำนวนข้อมูลจะปรากฏอยู่ในผลการแปลงฟูเรียร์ไม่ต่อเนื่องด้วย
 พิจารณารูปที่ 3.15 กำหนดให้ $h(t)$ เป็นสัญญาณต่อเนื่องที่มีผลแปลงฟูเรียร์ $H(f)$ ดังรูป
 (a) $\Delta_0(t)$ เป็นฟังก์ชันการชักตัวอย่างมีผลแปลงฟูเรียร์ $\Delta_0(f)$ ดังรูป (b) ฟังก์ชัน
 สัญญาณต่อเนื่องที่ถูกชักตัวอย่างคือ $h(t)\Delta_0(t)$ โดยมีคาบการชักตัวอย่างเท่ากับ T เขียน
 เป็นสมการได้

$$h(t)\Delta_0(t) = h(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (5.6)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t - kT) \quad (5.7)$$

รูป (c) แสดงค่าในสมการที่ (5.6) ซึ่งเป็นสัญญาณที่ถูกชักตัวอย่างเป็นจำนวนมากไม่เหมาะ
 ต่อการวิเคราะห์ จึงต้องตัดสัญญาณให้มีจำนวนน้อยลงในกรอบที่จำกัดด้วยฟังก์ชันสี่เหลี่ยม
 (rectangular function) $x(t)$ หรืออาจเรียกว่า ทรังเคชันฟังก์ชัน
 (truncation function) ดังรูป (d) ช่วงจำกัดสัญญาณเท่ากับ T_0 ดังนั้นสัญญาณที่
 อยู่ในฟังก์ชันสี่เหลี่ยมมีจำนวน $N = T_0/T$ จุดดังรูป (e)



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 3.15 การหาผลแปลงฟูเรียร์ไม่ต่อเนื่อง

ขั้นสุดท้ายของวิธีแปลงฟูเรียร์ไม่ต่อเนื่องคือ การชักตัวอย่างค่าผลแปลง

ฟูเรียร์ของสมการที่ (5.7) พิจารณาในโดเมนเวลา (time domain) การชักตัวอย่าง
ผลแปลงฟูเรียร์ก็คือ คอนโวลูชัน (convolution) ของฟังก์ชันในสมการ (5.7) กับฟังก์ชัน
เวลา $\Delta_1(t)$ ในรูป (f) โดยมีสมการเป็น

$$\Delta_1(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_0) \tag{5.8}$$

ผลการคอนโวลูชันของสมการ (5.7) กับฟังก์ชันเวลาในรูป (f) คือ

$$[h(t)\Delta_0(t)x(t)] * \Delta_1(t) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT) \right] * \left[T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_0) \right]$$

$$\hat{h}(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT - rT_0) \right] \quad (5.9)$$

สมการ (5.9) คือค่าประมาณของฟังก์ชันต่อเนื่อง $h(t)$ และมีการซ้ำรอบของสัญญาณโดยมีคาบ T_0 เราสามารถหาผลแปลงฟูเรียร์ของสมการ (5.9) โดย

$$\hat{H}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(f - nf_0) \quad (5.10)$$

เมื่อ $f_0 = 1/T_0$

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0 - T/2} \hat{h}(t) e^{-j2\pi n t / T_0} dt \quad (5.11)$$

แทนค่าจากสมการ (5.9) ลงในสมการ (5.11) ได้

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0 - T/2} T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT - rT_0) e^{-j2\pi n t / T_0} dt$$

อินทิเกรตในช่วง 1 คาบ T_0 จะได้

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-j2\pi k n T / T_0}$$

แต่ $T_0 = NT$ ดังนั้น

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-j2\pi k n / N}$$

ดังนั้นผลแปลงฟูเรียร์ของสมการ (5.9) คือ

$$\hat{H}\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-j2\pi k n / N} \quad (5.12)$$

ให้ $n = r$ เมื่อ r คือเลขจำนวนเต็มใด ๆ

จากสมการ (5.12)

$$\hat{H}\left(\frac{r}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-j2\pi k r / N} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } n = r + N \text{ จะได้ } \hat{H}\left(\frac{r+N}{NT}\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-j2\pi k(r+N)/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-j2\pi kr/N} \\ &= \hat{H}\left(\frac{r}{NT}\right) \end{aligned}$$

นั่นคือจะมีค่า N ค่าของสมการ (5.12) สามารถนำไปหาค่าต่อไป $H(n/NT)$ มีการซ้ำรอบ โดยมีคาบทุกๆ N ค่าที่ซ้ำตัวอย่างได้ผลแปลงฟูเรียร์ของสมการ (5.12) อาจเขียนเป็น

$$G\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g(kT)e^{-j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.14)$$

ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม หรือ FFT เป็นวิธีหาค่าผลแปลงฟูเรียร์เชิงตัวเลข ที่สามารถลดขั้นตอนการคำนวณทางคณิตศาสตร์ จึงประหยัดเวลากว่าการหาผลแปลงโดยวิธีปกติ

Brigham (1988) ได้แสดงถึงหลักสำคัญของ FFT คือการแยกเมตริกซ์ตัวประกอบ (matrix-factoring) โดยพิจารณาการแปลงฟูเรียร์ในสมการที่ (5.14)

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k)e^{-j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.15)$$

โดยใช้ $k=kT$ และ $n=n/NT$

ในสมการที่ (5.15) บรรจุสมการจำนวน N สมการไว้ ถ้ากำหนดให้ $N=4$ และสมการที่ (5.15) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^0 + x_0(2)W^0 + x_0(3)W^0 \\ X(1) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^1 + x_0(2)W^2 + x_0(3)W^3 \\ X(2) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^2 + x_0(2)W^4 + x_0(3)W^6 \\ X(3) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^3 + x_0(2)W^6 + x_0(3)W^9 \end{aligned} \quad (5.16)$$

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

สมการที่ (5.17) อาจเขียนเป็นสัญลักษณ์ดังนี้

$$X(n) = W^{nk} x_0(k) \quad (5.18)$$

โดยใช้อักษรตัวหนาแทนค่าเมตริกซ์ต่าง ๆ ที่สอดคล้องกันกับสมการที่ (5.17)

การคำนวณผลคูณเมตริกซ์ในสมการที่ (5.17) จะต้องคูณสมาชิกในเมตริกซ์ N^2 ครั้ง และบวกผลคูณนั้น $N(N-1)$ ครั้ง แต่ FFT จะใช้เทคนิคการแยกเมตริกซ์เพื่อลดจำนวนครั้งในการหาผลคูณและผลบวก

ให้ $N=2$ โดย γ เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งหมายถึงจำนวนสัญญาณที่ถูกซีกตัวอย่างมาเพื่อหาผลแปลงฟูเรียร์ จากสมการที่ (5.17) จะได้ $N = 4$ ในขั้นแรกของการหาผลแปลงฟูเรียร์แบบ FFT คือจัดรูปสมการที่ (5.17) ใหม่

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

โดยกำหนดให้ $W^{nk} = W^{nk \bmod N}$

$nk \bmod N$ คือการหาร nk ด้วย N แล้วตัดเศษเหลือ เช่น $N=4$, $n=2$, $k=3$ จะได้ $W^6 = W^2$ ลำดับต่อมาคือแยกเมตริกซ์ในสมการที่ (5.19) ออกเป็น

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

การหาค่าสมการที่ (5.20) จะต้องหาผลคูณ 4 ครั้ง ผลบวก 8 ครั้ง ส่วนการหาค่าสมการที่ (5.17) จะต้องหาผลคูณ 16 ครั้ง ผลบวก 12 ครั้ง

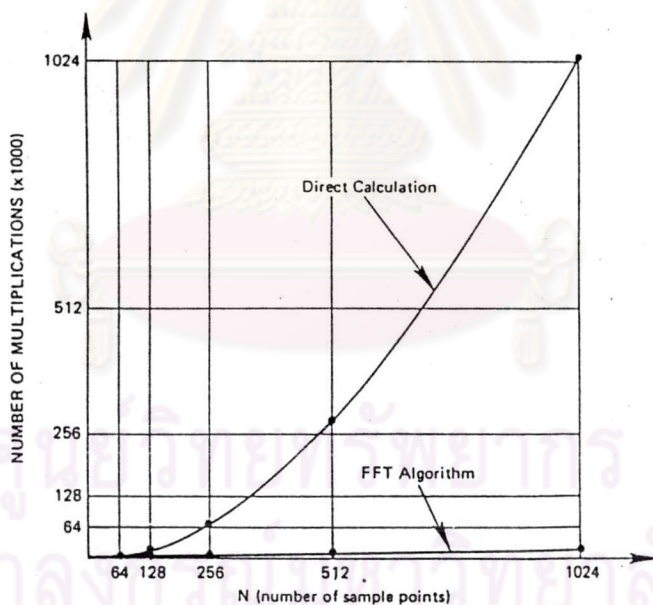
กล่าวโดยสรุปกระบวนการของ FFT สามารถลดจำนวนครั้งในการคำนวณตัวเลขลง โดยเฉพาะอย่างยิ่งการหาผลคูณ ทำให้เครื่องประมวลผลเชิงตัวเลขทำงานได้

เร็วขึ้น สำหรับข้อมูลจำนวน $N = 2^c$ กระบวนการ FFT จะแยกเมตริกซ์ขนาด $N \times N$ ในการคำนวณออกเป็น γ เมตริกซ์ เพื่อลดจำนวนครั้งในการหาผลคูณเหลือ $N\gamma/2$ และหาผลบวกจำนวน $N\gamma$ ครั้ง ในขณะที่วิธีคำนวณโดยตรงจะต้องหาผลคูณ N^2 ครั้ง และหาผลบวก $N(N-1)$ ครั้ง

ถ้าเวลาที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมดแปรตามจำนวนครั้งในการหาผลคูณ ดังนั้นสัดส่วนของเวลาที่ใช้ในการคำนวณโดยวิธี FFT กับวิธีคำนวณโดยตรงสามารถหาได้จาก

$$\frac{N^2}{N\gamma/2} = \frac{2N}{\gamma} \tag{5.21}$$

รูปที่ 3.16 แสดงจำนวนครั้งในการหาผลคูณที่มีข้อมูลขนาดต่าง ๆ ตามสมการที่ (5.21)



รูปที่ 3.16 แสดงจำนวนครั้งในการหาผลคูณที่มีข้อมูลขนาดต่าง ๆ โดยวิธี FFT กับวิธีคำนวณโดยตรง

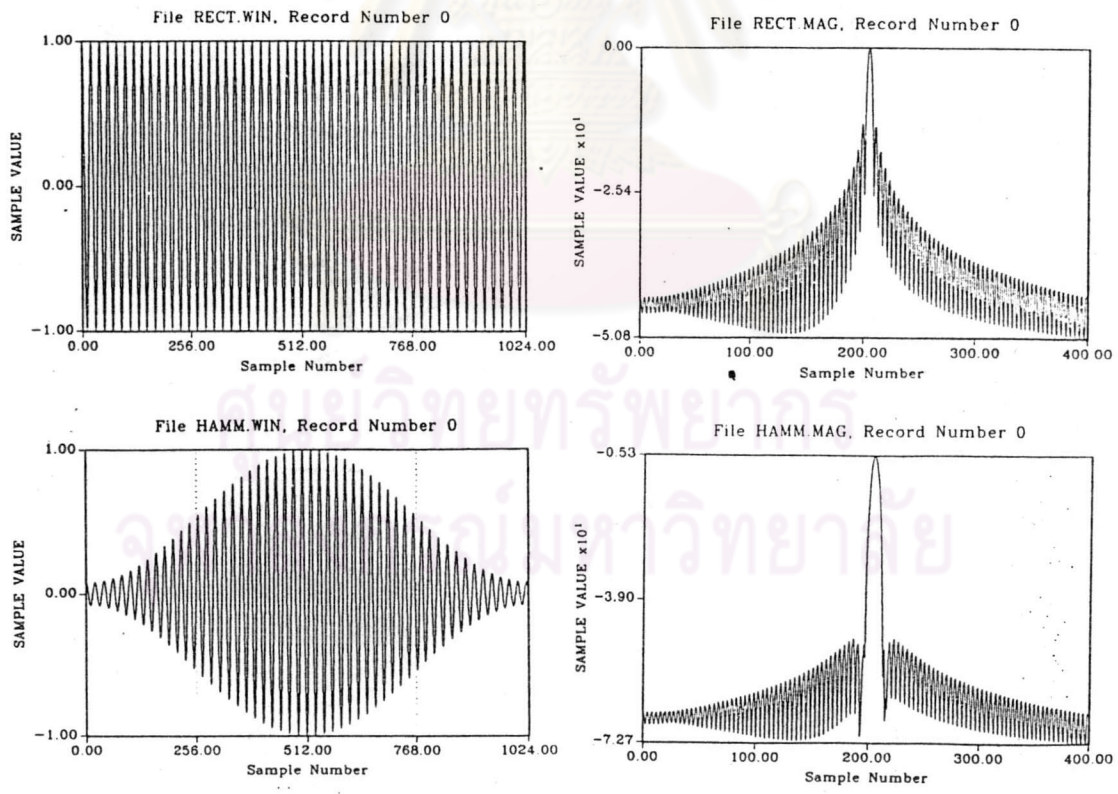
ทรงเคชันฟังก์ชันที่ใช้ตัดสัญญาณให้มีจำนวนน้อยลงในกรอบที่จำกัดด้วยฟังก์ชันสี่เหลี่ยมดังรูปที่ 3.15(d) ไม่เหมาะต่อการวิเคราะห์สัญญาณต่อเนื่องที่มีคาบของสัญญาณไม่ตรงกับคาบของฟังก์ชันสี่เหลี่ยม ทรงเคชันฟังก์ชันที่เหมาะสมต่อการวิเคราะห์สัญญาณเสียงคือ (Rabiner and Schafer, 1978) แฮมมิงฟังก์ชัน (Hamming function) หรืออาจเรียกทรงเคชันฟังก์ชันที่เป็นแฮมมิงฟังก์ชันว่า Hamming window ซึ่งมีสมการดังนี้

$$W_H(n) = 0.54 - 0.46 \cos \left(6.28 n / (N-1) \right) ;$$

เมื่อ $0 < n < N - 1$

และ $W_H(n) = 0$ เมื่อ n เป็นค่าอื่น (5.22)

รูปที่ 3.17 แสดงทรงเคชันฟังก์ชันแบบสี่เหลี่ยมเปรียบเทียบกับแฮมมิงฟังก์ชันพร้อมทั้งผลแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันทั้งสอง ผลแปลงฟูเรียร์ของแฮมมิงฟังก์ชันมีระดับโลบข้างเคียงที่สูงสุด (highest sidelobe) -43 เดซิเบล ในขณะที่ผลแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันสี่เหลี่ยมมีระดับโลบข้างเคียงที่สูงสุด -13 เดซิเบล (Randall, 1987)



รูปที่ 3.17 ทรงเคชันฟังก์ชันแบบสี่เหลี่ยม (รูปซ้ายบน) และแฮมมิงฟังก์ชัน (รูปซ้ายล่าง) พร้อมทั้งผลแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันทั้งสอง (รูปซ้ายบนและล่างตามลำดับ)