บทที่ 3

การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
(System Identification)

โดยทั่วไปในการออกแบบระบบควบคุมมักจะเริ่มจากการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับกระบวนการที่ต้องการออกแบบนั้นซึ่งวิธีการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ก็มีด้วยกันหลายวิธี ในบทนี้จะขอนำเสนอวิธีการหาค่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์วิธีหนึ่ง ซึ่งหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากผลตอบของการรบกวนกระบวนการด้วยสัญญาณแบบขั้นบันได ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายไม่ยุ่งยากและเหมาะสำหรับการคำนวนด้วยคอมพิวเตอร์

ในการหาค่าของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอนี้ จะแทนกระบวนการด้วยกระบวนการกำลังสองที่มีเวลาประวิง (Second-order-plus-deadtime) ทั้งนี้เพราะผลตอบของกระบวนการโดยทั่วไปที่ใช้ในการควบคุมปัจจุบัน ไม่ว่าจะเป็นกระบวนการทางเคมี กระบวนการ Servomechanism กระบวนการควบคุมของอากาศยานและกระบวนการอื่น ๆ ก็สามารถประมาณเป็นกระบานการกำลังสองที่มีเวลาประวิงได้ [10] และใช้ผลการประมาณนั้นมาออกแบบดูการทำงานของกระบวนการนั้น ๆ ซึ่งเป็นผลให้การออกแบบและการคำนวนง่ายลงเป็นอย่างมาก

สมการทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการกำลังสองที่มีเวลาประวิง สามารถแสดงได้ตามสมการที่ 3.1 เมื่อกระบวนการเป็นกระบวนการหน่วงเกิน (Overdamped System) หรือกระบวนการหน่วงวิกฤต (Critically-damped System) และเป็นไปตามสมการที่ 3.2 เมื่อกระบวนการเป็นกระบวนการหน่วงขาด (Underdamped System)

$$G(s) = Ke^{-Ls}/[(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)] \quad \text{---------------}[3.1]$$

$$G(s) = Ke^{-Ls}/(s^2 + 2zws + w^2) \text{ --------------------[3.2]}$$

โดยที่ :-

K = อัตราขยายวงรอบเปิดของกระบวนการ

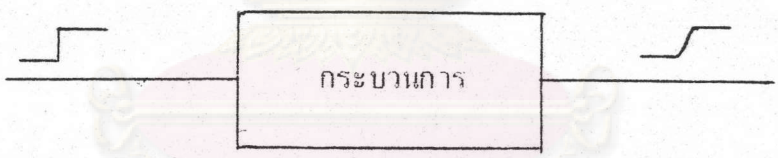
L = เวลาประวิงของกระบวนการ

T_1, T_2 = โพล (Pole) ของกระบวนการ

z = อัตราส่วนการหน่วง (Damping Ratio) ของกระบวนการ

w = ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) ของกระบวนการ

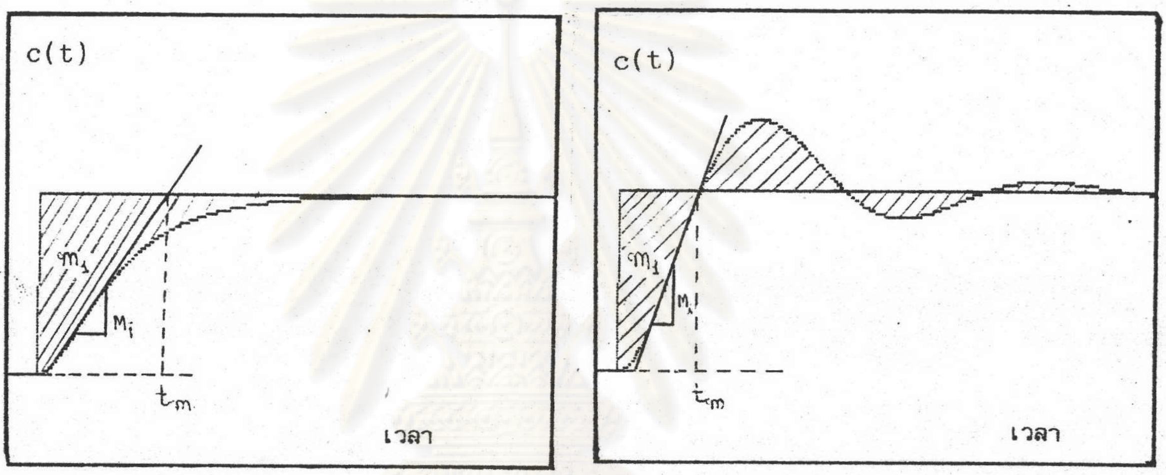
ในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการ จะต้องหาพารามิเตอร์ของกระบวนการ ซึ่งได้แก่ค่า K, L และค่า T_1, T_2 ในกรณีที่กระบวนการเป็นกระบวนการหน่วงเกินหรือกะบวนการหน่วงวิกฤต และค่า z, w เมื่อกระบวนการเป็นกระบวนการหน่วงขาด



รูปที่ 3.1 แสดงการรบกวนกระบวนการ

ในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ หรือพารามิเตอร์ของกระบวนการ ตามวิธีที่นำเสนอนี้นั้น จะเริ่มจากการให้สัญญาณรบกวนกระบวนการแบบขั้นบันไดขนาดเล็ก ในขณะที่กระบวนการเป็นกระบวนการวงรอบเปิด (Open-Loop System) ดังแสดงในรูปที่ 3.1 สิ่งสำคัญในการรบกวนกระบวนการนั้นขึ้นอยู่กับการเลือกขนาดของสัญญาณรบกวนกระบวนการ ซึ่งจะต้องมีขนาดที่ใหญ่พอที่จะวัดสัญญาณผลตอบของกระบวนการได้ แต่ต้องระวังไม่ให้สัญญาณมีขนาดใหญ่เกินไป จนทำให้กระบวนการขาดเสถียรภาพหรือทำให้กระบวนการอยู่นอกช่วงของการเป็นเชิงเส้น

ในการหาค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการนี้ เราจะหาค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการจากผลตอบของกระบวนการที่ถูกรบกวน ดังนั้นจากผลตอบของกระบวนการที่ได้ตามรูป 3.2 เราต้องหาพารามิเตอร์จากผลตอบจำนวน 3 ตัว เพื่อนำไปคำนวนหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการ พารามิเตอร์ 3 ตัวที่ต้องการทราบจากผลตอบของกระบวนการ ได้แก่ Control Area ของกระบวนการที่กำหนดตามสมการที่ 3.3 ซึ่งได้แก่พื้นที่ที่แสดงในรูปที่ 3.2, ความชันที่มากที่สุดของผลตอบ (Maximum Slope) M_i และเวลาที่ M_i ตัดกับผลตอบที่สภาวะคงตัว t_m



ก) กระบวนการหน่วงเกิน หรือ กระบวนการหน่วงวิกฤต

ข) กระบวนการหน่วงขาด

รูปที่ 3.2 แสดง Control Area ของกระบวนการ

$$m_1 = \int_0^{\infty} [1-c(t)]\, dt \qquad \text{------------------------} [3.3]$$

c(t) - ผลตอบของกระบวนการ

ความสัมพันธ์ระหว่าง Control Area (m_1) และฟังก์ชันถ่ายโอน Transfer function $G_p(s)$ แสดงได้ตามสมการที่ 3.4

$$m_1 = -dG_p(s)/ds \,|_{s=0}$$

$$= L + T_1 + T_2 \quad \text{------------------------}[3.4]$$

ในกรณีที่กระบวนการเป็นกระบวนการหน่วงเกิน เมื่อพิจารณาผลตอบสนองทางเวลา (Time Response) ของกระบวนการ จะได้ผลตอบเชิงเวลา ตามสมการที่ 3.5

$$c(t) = [\ 1 - [T_1EXP(-(t-L)/T_1)]/(T_1-T_2) + [T_2EXP(-(t-L)/T_2)]/(T_1-T_2)]U(t-L) \quad \text{--------}[3.5]$$

จากสมการที่ 3.5 เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 และให้ผลของอนุพันธ์อันดับที่สองเท่ากับศูนย์เพื่อหาค่าความชันมากที่สุด Maximum Slope ของผลตอบ [ดูภาคผนวก ก] จะได้

$$t_m = L + a\ ln(n) \quad \text{----------------------}[3.6]$$

เมื่อ t_m = เวลาที่เกิดความชันมากที่สุด (Maximum Slope)

$n = T_1/T_2$

$a = (T_1T_2)/(T1 - T2)$

แทนค่า t_m ในสมการ d/dt c(t) เพื่อหาค่าของความชันมากที่สุด จะได้

$$d/dt\ c(t) = M_i = [nEXP(1/(1-n))]/(n-1) \quad \text{-----------}[3.7]$$

ดังนั้นความชันมากที่สุด M_i จะผ่านจุด t_i และตัดค่าสุดท้ายของผลตอบ (final value of c(t)) ที่เวลา t_m ซึ่งเมื่อทำการหาค่า t_m จะได้

$$t_m = L + a[\ln(n) + (n^2-1)/n] \quad \text{----------------[3.8]}$$

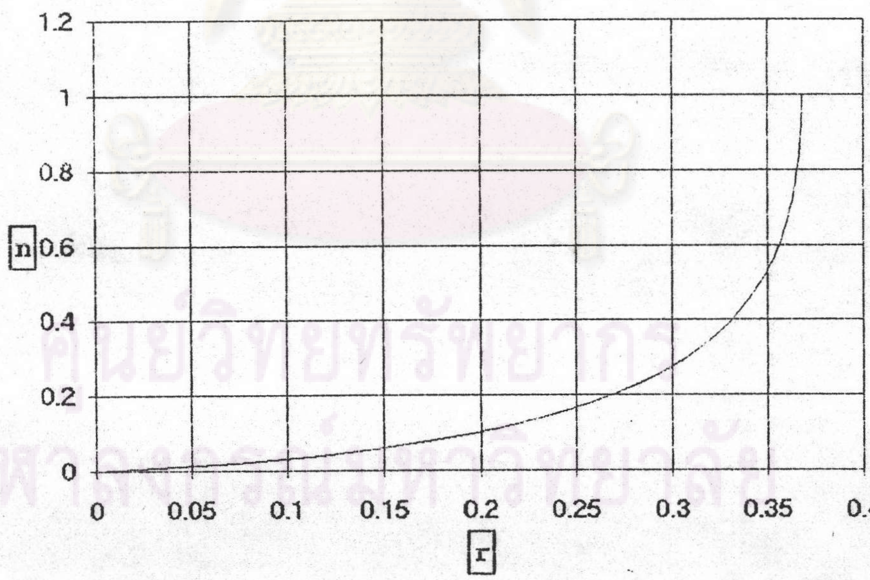
จากสมการที่ 3.4, 3.7, 3.8

$$(t_m-m_1)M_i = [n\ln(n)EXP(1/(1-n))]/(n-1)$$

กำหนดให้

$$r = (t_m-m_1)M_i = [n\ln(n)EXP(1/(1-n))]/(n-1) \quad \text{------[3.9]}$$

จากสมการที่ 3.9 นำมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง r กับ n จะได้ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง r และ n

จากผลตอบการรบกวนของกระบวนการ เราสามารถหาค่า t_m, M_i และ m_1 ซึ่งทำให้เราสามารถคำนวนหาค่า r และค่า n ได้จากสมการที่ 3.9 ดังนั้น เราจึงสามารถหาค่า

T_1, T_2 และ L ได้ดังต่อไปนี้

$$T_1 = [nEXP(n/(1-n))]/M_i$$

$$T_2 = [nEXP(_1/(1-n))]/M_i$$

$$L = m_1 - [n(n+1)EXP(1/(1-n))]/(nM_i)$$

ในกรณีที่กระบวนการเป็นกระบวนการหน่วงวิกฤต จะได้ว่า $n = 1$ ซึ่งทำให้ได้

$$T_1 = T_2 = 1/(M_i e)$$

$$L = m_1 - 2/(M_i e)$$

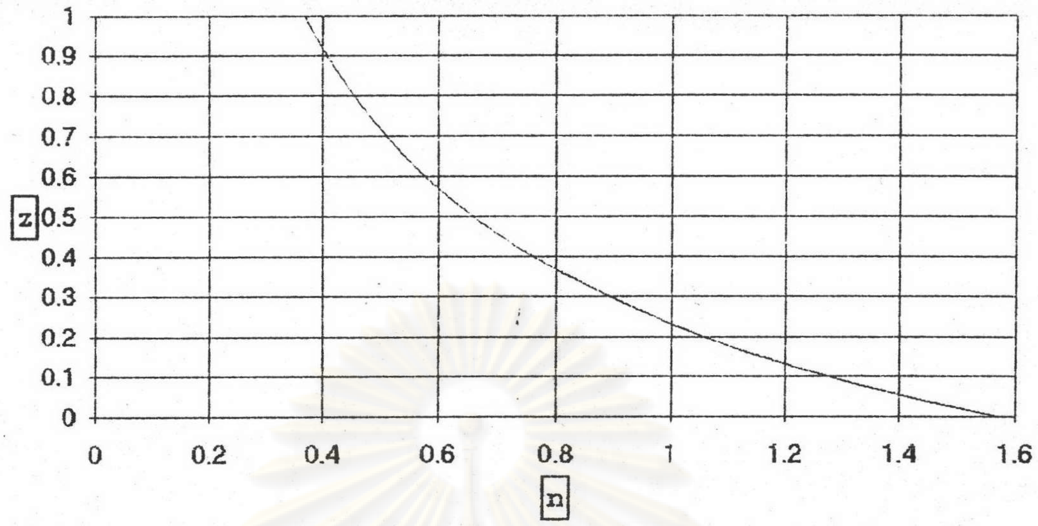
ในทำนองเดียวกันเมื่อกระบวนการเป็นกระบวนการหน่วงขาด เราสามารถแทนฟังก์ชันถ่ายโอนของกระบวนการได้ตามสมการที่ 3.2 ซึ่งผลตอบเชิงเวลา จะได้ตามสมการที่ 3.10

$$c(t) = [\ 1 - wzEXP(-(t-L))[\ zSin(\sqrt{1-z^2}\ w(t-L))/(\sqrt{1-z^2}\ ) + Cos(\sqrt{1-z^2}\ w(t-L))]] \text{ -----------------------------[3.10]}$$

ซึ่งเมื่อหาค่า t_i, M_i ในลักษณะเดียวกันกับข้างต้นแล้วหาค่าของ r จะได้

$$r = (t_m-m_1)M_i = [Cos^{-1}(z)]EXP(-zCos^{-1}(z)/(\sqrt{1-z^2}))]/(\sqrt{1-z^2}) \text{ -[3.11]}$$

ซึ่งเมื่อนำความสัมพันธ์ในสมการที่ 3.11 มาเขียนเป็นกราฟระหว่าง r และ z ซึ่งจะได้ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง r กับ z

เมื่อแก้สมการที่ได้แล้วหาค่า w , L จะได้

$$w = \mathrm{Cos}^{-1}(z)/[(t_m-m_1)\sqrt{1-z^2}\ ]$$

$$L = m_1 - 2z/w$$

จากวิธีดังกล่าวมาข้างต้น ทำให้เราสามารถหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการที่สามารถนำไปคำนวนต่อไป เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมในการควบคุมกระบวนการได้