บทที่ 4

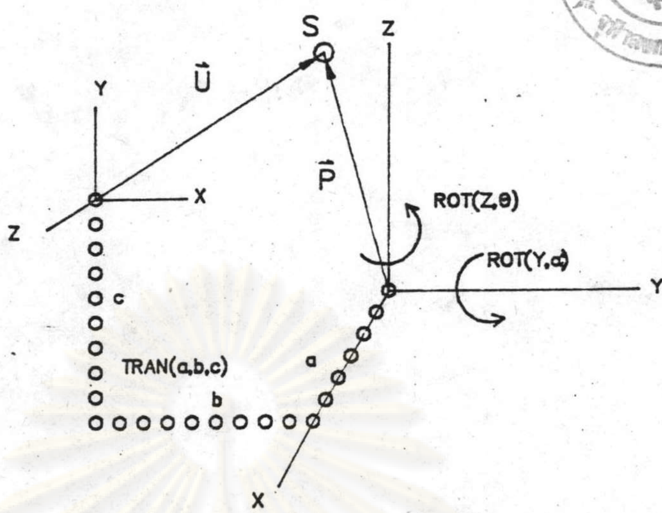
กลศาสตร์ของแขนกล

โคออดิเนท ทรานสฟอร์เมชั่น

แขนกลระบบแกนหมุนเกิดจากการนำลิงค์มาต่อแบบอนุกรม ด้วยข้อต่อที่มีการเคลื่อนที่แบบหมุน กลไกการควบคุมตำแหน่งประกอบด้วยลิงค์ 3 ลิงค์กับข้อต่อ 3 ข้อต่อ โดยข้อต่อที่ 1 ต่อลิงค์ที่ 1 กับฐานหรือลิงค์ 0 ข้อต่อที่ 2 ต่อปลายอีกข้างของลิงค์ 1 กับลิงค์ 2 และปลายอีกข้างของลิงค์ 2 ต่ออยู่กับปลายของลิงค์ 3 ด้วยข้อต่อที่ 3 ส่วนปลายอีกข้างของลิงค์ 3 สำหรับติดตั้งกลไกการควบคุมมุมทำงานหรือติดอุปกรณ์ทำงานอื่นๆ เช่น ข้อมือ การอธิบายการเคลื่อนที่ของข้อต่อและลิงค์ทั้ง 3 ด้วยวิธีทางเรขาคณิตธรรมดามีความยุ่งยากและซับซ้อนมาก ดังนั้นการบอกตำแหน่งการเคลื่อนที่มักบอกเป็นเวคเตอร์หรือพิกัดบนแกนคาร์เทเชียล โดยบอกตำแหน่งและทิศทางการเคลื่อนที่ของปลายแขน เทียบกับแกนคาร์เทเชียลของฐานด้วยทรานสฟอร์เมชั่นเมตริก

$$H = \left|\begin{array}{c:c} \text{Oreintation} & \text{Position} \\ \text{Matrix(3x3)} & \text{Vecter(3x1)} \\ \hdashline \text{Perspective} & \text{Scaling} \\ \text{transform(1x3)} & \text{factor(1x1)} \end{array}\right| \qquad \ldots 4.1$$

ทรานสฟอร์เมชั่นเมตริก H บนระบบ 3 มิติเป็นเมตริก 4x4 ประกอบด้วยเมตริกย่อยการหมุน เวคเตอร์ตำแหน่ง เมตริกเปอร์สเปคทีฟ และตัวแปรอัตราขยาย โดยที่เมตริกย่อยการหมุนจะหมุนเวคเตอร์ที่อยู่บนระบบแกนอ้างอิงใดๆ ไปแสดงอ้างอิงกับระบบแกนอื่น แต่ถ้าจุดกำเนิดของระบบแกนทั้งสองไม่อยู่บนตำแหน่งที่ทับกัน ต้องอาศัยเวคเตอร์ตำแหน่งแสดงระยะการเลื่อนแกน(Translation) สำหรับเมตริกเปอร์สเปคทีฟและตัวแปรอัตราขยายมีความสำคัญในเรื่องการมองเห็นของคอมพิวเตอร์ด้วยกล้องถ่ายภาพ แต่ไม่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ทางโครงสร้างของแขนกลจึงกำหนดให้ เมตริกเปอร์สเปคทีฟมีค่าเป็น(0,0,0) และตัวแปรอัตราขยายมีค่าเป็น 1 เสมอ



รูปที่ 4.1 แสดงการหมุนและการเลื่อนแกนคาร์ ทีเซียล

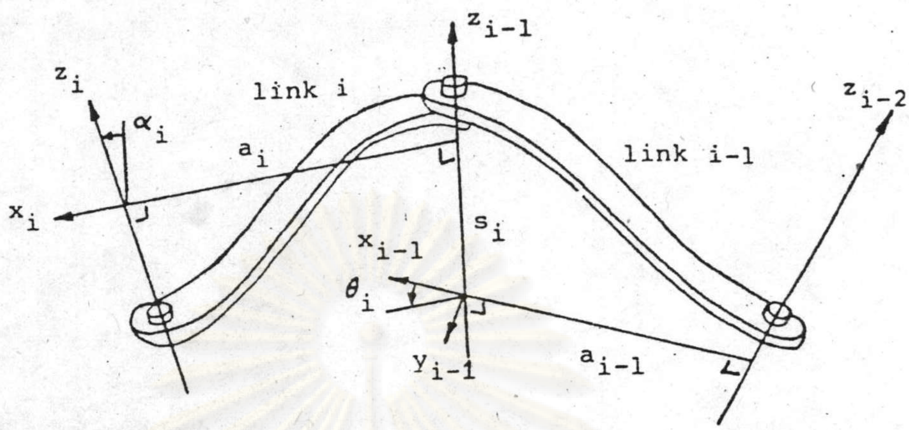
เมื่อมีระบบแกนคาร์ ทีเซียล 2 ชุดดังรูปที่ 4.1 กำหนดให้ระบบแกนรูปใหญ่เป็นระบบแกนอ้างอิง ระบบแกนรูปเล็กเป็นระบบแกนย่อย การอธิบายถึงความสัมพันธ์ของระบบแกนทั้งสองพบว่าระบบแกนย่อยเกิดจากการหมุนและการเลื่อนระบบแกนอ้างอิง โดยเริ่มจากแกนหมุนระบบแกนอ้างอิงรอบแกน z ด้วยมุม θ และหมุนรอบแกน y ด้วยมุม α แล้วเลื่อนระบบแกนอ้างอิงตามแนวแกน x,y,z เป็นระยะ a,b,c ตามลำดับ จึงสร้างเป็นทรานสฟอร์เมชั่นเมตริกดังสมการที่ 4.2

$$T = Trans(a,b,c)Rot(y,\alpha)Rot(z,\theta)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad ..4.2$$

จากรูปที่ 4.1 การหาค่าเวคเตอร์ p ที่ใช้บอกตำแหน่ง s เทียบกับระบบแกนอ้างอิงนั้นต้องทราบค่าเวคเตอร์ u ที่ใช้บอกตำแหน่ง s เทียบกับระบบแกนย่อย และทรานสฟอร์เมชั่นเมตริก(T) ดังสมการที่ 4.3

$$\vec{P} = T\vec{U} \quad ...4.3$$



รูปที่ 4.2 การตั้งแกนของแขนหุ่นยนต์ตามดีนาวิท-ฮาเทนเบอร์ก

การอธิบายความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ทั้งแบบเส้นตรง และแบบหมุนของลิงค์ที่ต่อกัน เพื่ออธิบายไคเนมาติคของแขนกลมักอาศัยวิธีของดีนาวิท-ฮาเทนเบอร์ก(Denavit-Hartenberg) มาช่วยในการจัดระบบแกนและสร้างทรานสฟอร์เมชั่นเมตริก(Transformation matrix) โดยพิจารณาจากรูปที่ 4.2 กำหนดระบบแกนตั้งฉาก $(x_i\ y_i\ z_i)$ ให้กับลิงค์ i โดยแกน z_i ผ่านแกนการหมุนของข้อต่อ i+1 , แกน x_i ตั้งฉากกับแกน z_{i-1} และ z_i และแกน y_i เป็นไปตามกฎมือขวา และบนระบบแกนตั้งฉากนี้สามารถบอกลักษณะของลิงค์ i ได้ด้วยพารามิเตอร์ 2 ตัว : a_i เป็นระยะห่างที่เกิดจากการลากเส้นตั้งฉากระหว่างแกน z_i และ z_{i-1} ซึ่งหมายถึงความยาวของลิงค์ และ α_i เป็นมุมระหว่างแกน z_i กับระนาบของเส้น a_i ที่ผ่านแกน z_{i-1} เมื่อต้องการกล่าวถึงลิงค์ i-1 ที่ต่อกับลิงค์ i ด้วยข้อต่อ i สามารถกล่าวถึงด้วยพารามิเตอร์ 2 ตัวเช่นกัน d_i เป็นระยะห่างระหว่างแกน x_{i-1} กับแกน x_i และ θ_i เป็นมุมระหว่างระนาบของเส้น a_i ที่ผ่านแกน z_{i-1} กับระนาบ $x_{i-1}z_{i-1}$ ของข้อต่อ i และเป็นมุมหมุนของข้อต่อที่แปรเปลี่ยนได้ จากระบบแกนตั้งฉากของลิงค์ i และลิงค์ i-1 ข้างต้น ความสัมพันธ์ของระบบแกนตั้งฉากของลิงค์ทั้ง 2 หาได้จากการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น และแบบเชิงมุม เพื่อสร้างระบบแกนอ้างอิง 2 ชุดให้สัมพันธ์กันโดย

หมุนรอบแกน z_{i-1} ด้วยมุม θ

เคลื่อนที่เชิงเส้นตามแกน z_{i-1} ด้วยระยะ d

เคลื่อนที่เชิงเส้นตามแกนที่หมุนแล้วของแกน x_{i-1} ด้วยระยะ a

หมุนรอบแกน x_i ด้วยมุม α

$${}_{i-1}A_i = Rot(z,\theta)Trans(0,0,d)Trans(a,0,0)Rot(x,\alpha)$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots.4.4$$

ได้ Homogeneous transformation matrix ${}_{i-1}A_i$ แสดงถึงความสัมพันธ์ของตำแหน่ง P_i ของลิงค์ i ที่บอกพิกัดเทียบกับระบบแกน i (x_i,y_i,z_i) ที่ข้อต่อ i กับตำแหน่ง P_{i-1} ของลิงค์ i-1 ซึ่งเป็นตำแหน่งเดิมแต่บอกพิกัดเทียบกับระบบแกน i-1$(x_{i-1},y_{i-1},z_{i-1})$ ที่ข้อต่อ i-1 ของลิงค์ i-1

$$P_{i-1} = {}_{i-1}A_i P_i \quad \ldots4.5$$

เมื่อ $P_{i-1} = (x_{i-1},y_{i-1},z_{i-1})_t$

$P_i = (x_i,y_i,z_i)_t$

สำหรับแขนกลที่ประกอบด้วยลิงค์ต่อกันแบบอนุกรม การกำหนดระบบแกนตั้งฉากอ้างอิง (x_i,y_i,z_i) ที่ข้อต่อลิงค์และพารามิเตอร์ $(a_i,d_i,\alpha_i,\theta_i)$ ให้กับลิงค์ใดๆ สามารถแยกเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. กำหนดระบบแกนของฐานอ้างอิง โดยอาศัยกฎมือขวากำหนดแกน 3 แกนที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน (x_o,y_o,z_o) ที่ฐานของแขนกล ให้แกน z_o ผ่านแกนการเคลื่อนที่หรือแกนการหมุนของข้อต่อที่ 1 ส่วนแกน x_o และ y_o กำหนดได้ตามสะดวกแต่ต้องตั้งฉากซึ่งกันและกันกับแกน z_o
2. ทำขั้นที่ 3-6 โดยเริ่มที่ i=1 ถึง n หรือครบทุกข้อต่อ
3. กำหนดแกนที่ข้อต่อให้แกน z_i ผ่านแกนการเคลื่อนที่หรือแกนการหมุนของข้อต่อที่ i+1
4. กำหนดจุด Origin ของระบบแกน i ให้อยู่ที่จุดตัดของแกน z_i และ z_{i-1} หรือจุดตัดเส้นตั้งฉากระหว่างแกน z_i และ z_{i-1} กับแกน z_i
5. กำหนดแกน x_i โดยที่ $x_i = \pm(z_{i-1} \times z_i) / \|z_{i-1} \times z_i\|$ หรือถ้าแกน z_i และ z_{i-1} ขนานกัน กำหนดให้แกน x_i ผ่านแนวเส้นตั้งฉากระหว่างแกน z_{i-1} และ z_i
6. กำหนดแกน y_i ให้เป็นไปตามกฎมือขวาของระบบแกนตั้งฉาก
7. หาพารามิเตอร์ของข้อต่อและลิงค์ ตามขั้นตอนที่ 8-11 โดยเริ่มจาก i=1 ถึง n
8. หาระยะ d_i ซึ่งหมายถึงระยะจาก Origin ของระบบแกน i-1 ถึงจุดตัดของแกน z_{i-1} กับแกน x_i ตามแนวแกน z_{i-1}

9. หาระยะ a_i ซึ่งหมายถึงระยะจากจุดตัดของแกน z_{i-1} และแกน x_i ถึง Origin ของระบบแกน i ตามแนวแกน x_i

10. หามุม α_i ซึ่งเป็นมุมที่หมุนจากแกน z_{i-1} ถึงแกน z_i รอบแนวแกน x_i

11. หามุม θ_i ซึ่งเป็นมุมที่หมุนจากแกน x_{i-1} ถึงแกน x_i รอบแนวแกน z_{i-1} ซึ่งพารามิเตอร์ตัวนี้จะเป็นตัวแปรของข้อต่อการหมุน

ขั้นตอนทั้ง 11 ขั้นนี้ได้แสดงการใช้งานโดยการกำหนดแกนให้กับแขนกลดังรูปที่ 4.3 มีพารามิเตอร์ของลิงค์ดังตารางในรูป สามารถหาเมตริก A ได้ดังนี้

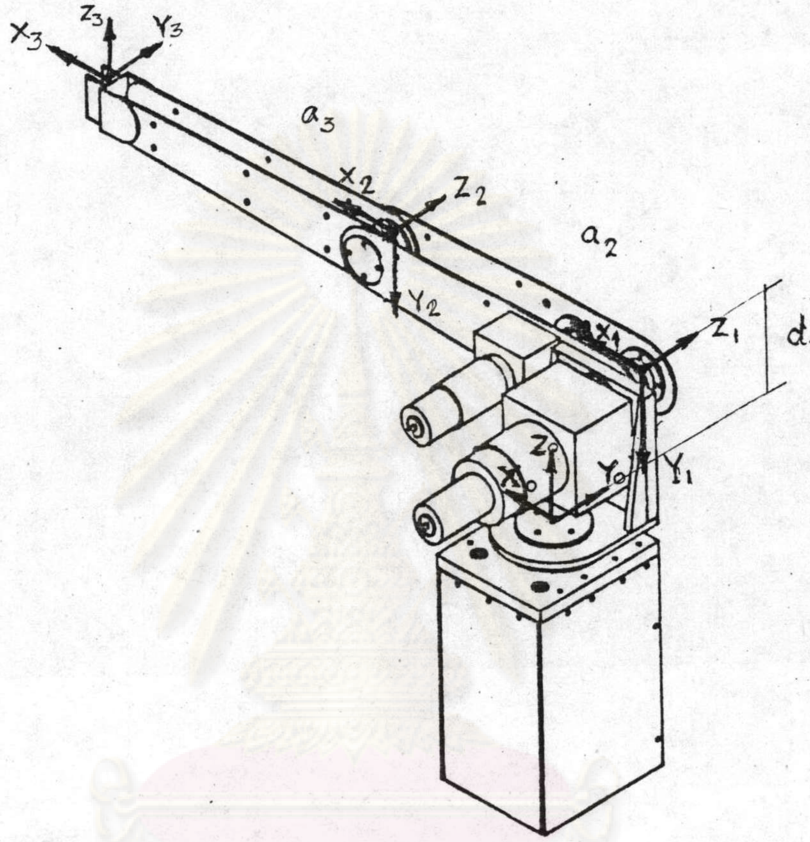
$$ {}_0A_1 = \begin{vmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots 4.6 $$

$$ {}_1A_2 = \begin{vmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots 4.7 $$

$$ {}_2A_3 = \begin{vmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3S_3 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots 4.8 $$

เมื่อ $S_i = \sin\theta_i \qquad S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$

$C_i = \cos\theta_i \qquad C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$

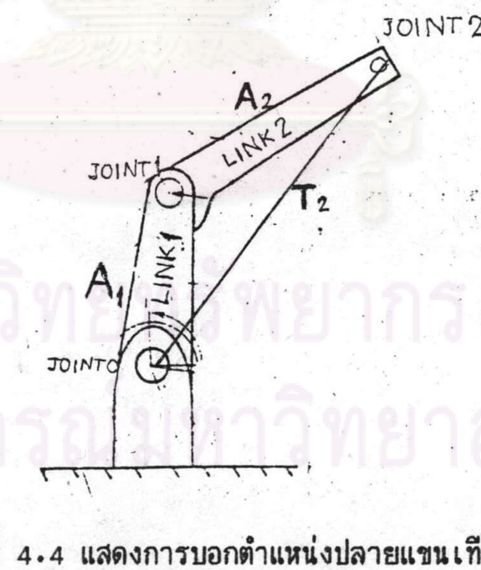


Joint	α_i	a_i	d_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$
1	-90	0.0	0.040	0	-1
2	0	0.40	-0.017	1	0
3	90	0.43	0.066	0	1

รูปที่ 4.3 การตั้งแกนของ CUME ROBOT

<u>ไคเนมาติคของแขนกล</u>

ไคเนมาติกของแขนกล เป็นการศึกษาถึงเรขาคณิตของการเคลื่อนที่ของแขนกลเทียบกับระบบแกนตั้งฉากอ้างอิงที่เวลาใดๆ โดยไม่คำนึงถึงแรงหรือโมเมนต์ที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ หรือเป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ ของข้อต่อของแขนกลกับตำแหน่งที่เคลื่อนที่ไปได้ของปลายแขนกล ซึ่งการหาความสัมพันธ์นี้พอจะแยกได้ 2 ลักษณะคือ 1. เริ่มจากทราบขนาดการเคลื่อนที่หรือมุมหมุนของแต่ละข้อต่อของแขนกล แล้วหาตำแหน่งที่เคลื่อนที่ไปได้ของปลายแขนกลเทียบกับระบบแกนอ้างอิง เรียกการหาความสัมพันธ์แบบนี้ว่า ฟอร์เวิร์ดไคเนมาติค(Forward Kinematic)และ 2. เริ่มจากทราบตำแหน่งของจุดปลายแขนกลเทียบกับแกนอ้างอิงของแขนกล แล้วหาขนาดของมุมหมุนของแต่ละข้อต่อของแขนกลเรียกความสัมพันธ์แบบนี้ว่า อินเวิร์สไคเนมาติค (Inverse Kinematic) ซึ่งที่ตำแหน่งหนึ่งของปลายแขนกลสามารถให้คำตอบขนาดมุมของแต่ละข้อต่อได้มากกว่าหนึ่งชุดคำตอบ ต่อไปจะกล่าวถึงการหาความสัมพันธ์ แบบฟอร์เวิร์ดไคเนมาติค จากหัวข้อก่อนได้กล่าวถึงทรานสฟอร์เมชั่นเมตริก(Transformation Matrix) และการกำหนดระบบแกนตั้งฉากและพารามิเตอร์ของลิงค์(Denavit) เพื่อบอกความสัมพันธ์ระหว่างข้อต่อหรือจุดปลายลิงค์ข้างหนึ่ง กับระบบแกนอ้างอิงที่ปลายอีกข้างหนึ่งของลิงค์ด้วยเมตริก A



รูปที่ 4.4 แสดงการบอกตำแหน่งปลายแขนเทียบกับฐาน

จากรูปที่ 4.4 ${}_0A_1$ อธิบายถึงตำแหน่งและการหมุนของปลายลิงค์ 1 เทียบกับแกนอ้างอิงที่ฐานของลิงค์ 1 (ระบบแกนที่ข้อต่อที่ 0) ${}_1A_2$ อธิบายถึงตำแหน่งและการหมุนของปลายลิงค์ 2 เทียบกับลิงค์ 1 (ระบบแกนที่ข้อต่อที่ 1) และการอธิบายถึงตำแหน่งและการหมุนของปลายลิงค์ 2 เทียบกับแกนอ้างอิงที่ฐานของลิงค์ 1 ทำโดยอาศัยสมการการทรานสฟอร์ม

$${}_0T_2 = {}_0A_1\ {}_1A_2 \qquad \ldots 4.9$$

สำหรับแขนกลที่มี 3 ลิงค์ต่ออนุกรมกันดังรูปที่ 4.3 การหาความสัมพันธ์แบบฟอร์เวิร์ดของปลายลิงค์ 3 เทียบกับแกนอ้างอิงที่ฐานของลิงค์ 1 หาได้ในทำนองเดียวกับความสัมพันธ์ของสมการ 4.9

$$ {}_{0}T_{3} = {}_{0}A_{1}\ {}_{1}A_{2}\ {}_{2}A_{3} \qquad \ldots 4.10 $$

จากสมการที่ 4.9-4.10 การหาความสัมพันธ์ของปลายลิงค์ 2 เทียบกับฐานลิงค์ 1 หรือปลายลิงค์ 3 เทียบกับฐานลิงค์ 1 ได้จากการคูณกันของเมตริก A ซึ่งถ้ามีลิงค์ต่อกัน n ลิงค์ก็สามารถหาความสัมพันธ์ของปลายลิงค์ n เทียบกับฐานลิงค์ 1 ได้ หรือจะหาความสัมพันธ์ของปลายลิงค์ n เทียบกับระบบแกนอ้างอิงที่ฐานของลิงค์ i โดย n มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ i ได้ซึ่งสามารถบอกความสัมพันธ์ระหว่างลิงค์ใดๆที่ต่อกันแบบอนุกรมได้ โดยมีสมการทั่วไปเป็น

$$ {}_{i-1}T_{i} = {}_{i-1}A_{i} \cdots {}_{n-1}A_{n} \qquad \ldots 4.11 $$

จากสมการที่ 4.6-4.10 สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งและการหมุนของปลายแขนกลกับมุมหมุนของข้อต่อระหว่างลิงค์ของแขนกล ตามรูปที่ 4.3 ได้ดังนี้

$$ \begin{aligned} {}_{0}T_{3} &= {}_{0}A_{1}\ {}_{1}A_{2}\ {}_{2}A_{3} \\ &= \left| \begin{array}{cccc} C_1C_{23} & -S_1 & C_1S_{23} & a_3C_1C_{23}+a_2C_1C_2-d_3S_1 \\ S_1C_23 & C_1 & S_1S_{23} & a_3S_1C_{23}+a_2S_1C_2+d_3C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_3S_{23}-a_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \qquad \ldots 4.12 \end{aligned} $$

เมตริกซ์ ${}_{0}T_{3}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีเวคเตอร์บอกตำแหน่งของปลายลิงค์ 3 เทียบกับระบบแกนอ้างอิงที่ฐานของลิงค์ 1 (x_0, y_0, z_0) อยู่ในแถวที่ 4

$$ X = -d_3S_1+a_2C_1C_2 \qquad \ldots 4.13 $$

$$ Y = d_3C_1+a_2S_1C_2 \qquad \ldots 4.14 $$

$$ Z = -a_3S_{23}-a_2S_2 \qquad \ldots 4.15 $$

เมื่อทราบค่ามุมหมุนของลิงค์ 1 , 2 และ 3 ก็สามารถบอกตำแหน่งปลายของลิงค์ 3 หรือปลายแขนกลเทียบกับระบบแกนอ้างอิงที่ฐานของลิงค์ 1 ได้ด้วยเวคเตอร์ตามสมการที่4.13-4.15

พลศาสตร์ของแขนกล

การเคลื่อนที่ของแขนกลจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง เกิดจากการเคลื่อนที่อย่างสัมพันธ์กันของลิงค์ทั้งหลายที่เป็นส่วนประกอบของแขนกล ซึ่งความสัมพันธ์ของลิงค์ต่างๆ กับตำแหน่งที่ต้องการให้แขนกลเคลื่อนที่ไปอธิบายได้ด้วยความสัมพันธ์ไคเนมาติกของแขนกล ตามที่กล่าวมาแล้วข้างต้น แต่แขนกลจะเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งที่ต้องการได้ถูกต้อง ต้องอาศัยแรงมาขับเคลื่อนลิงค์ทั้งหลายของแขนกลให้เคลื่อนที่ด้วยความเร็วและความเร่งที่เหมาะสม ความสัมพันธ์ของแรงขับเคลื่อนกับระยะขจัด, ความเร็ว และความเร่งของการเคลื่อนที่ เรียกว่า ความสัมพันธ์ไดนามิก (Dynamic Relation) ความสัมพันธ์ไดนามิกของแขนกลใช้อธิบายพฤติกรรมทางกลศาสตร์ของแขนกลได้ 2 แบบคือ

1. อธิบายได้ว่าต้องใช้แรงขับเท่าไรมาหมุนลิงค์ จึงทำให้ลิงค์หมุนได้ระยะ , ความเร็วและความเร่งตามที่กำหนดไว้ เพื่อนำไปควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนกลเรียกการอธิบายความสัมพันธ์แบบนี้ว่า อินเวอร์สไดนามิก

2. อธิบายผลของแรงขับลิงค์ที่กำหนดมาว่า ทำให้ลิงค์หมุนได้ระยะขจัด, ความเร็วและความเร่งเท่าไร เพื่อนำไปใช้ในการจำลองแบบด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนระบบแขนกลในการออกแบบระบบแขนกลให้มีประสิทธิภาพ

การหาความสัมพันธ์ไดนามิกของแขนกล เป็นระบบที่มีความซับซ้อนการเคลื่อนที่ของลิงค์ต่างๆต้องสัมพัทธ์กัน ทำให้การหาความสัมพันธ์ของแรงกับระยะขจัด , ความเร็ว และความเร่ง ทำได้ยากต้องอาศัยการวิเคราะห์วิธีของนิวตัน-ออยเลอร์(Newton-Eulor) และวิธีลากรานจ์ (Lagrangian) โดยในที่นี้จะกล่าวถึงการใช้วิธีของลากรานจ์ เพราะเป็นวิธีการที่สามารถทำความเข้าใจกับกายภาพของระบบได้ดี แม้ว่ามีการคำนวณที่ค่อนข้างยาว แต่สามารถจัดรูปสมการไดนามิกใหม่ให้ง่ายและสั้นลง การนำวิธีการของลากรานจ์มาใช้กับแขนกลเสนอโดย Uicker (1966),Paul (1981) และ Murry - Neuman (1984)

กลศาสตร์ของลากรานจ์

สมการของลากรานจ์ได้อธิบายความสัมพันธ์ ระหว่างแรงและตัวแปรของการเคลื่อนที่ (ระยะขจัด ความเร็ว ความเร่ง) ในรูปของระบบแกนพิกัดใดๆ โดยกำหนดให้ Lagrangian L เป็นผลต่างของพลังงานจลน์ (K) และพลังงานศักย์ (P)

$$L = K-P \qquad \ldots 4.16$$

และมีความสัมพันธ์ไดนามิกเป็น (ดูรายละเอียดการพิสูจน์ในภาคผนวก ก)

$$F_i = d(\partial L/\partial \dot{q}_i)/dt - \partial L/\partial q_i \qquad \ldots 4.17$$

โดยที่ q_i คือตำแหน่งหรือพิกัดของมวล i ของระบบที่นำมาหาพลังงานจลน์ , พลังงานศักย์ ให้เทอม L รวมทั้งความเร็ว $\dot{q}_i$ และแรงหรือทอร์ค F_i ก็คิดที่พิกัดเดียวกัน การนำสมการไดนามิกของลากรานจ์มาอธิบายความสัมพันธ์ไดนามิกของระบบแขนกลที่ประกอบด้วยลิงค์ต่ออนุกรมกัน จะบอกพิกัดของลิงค์ต่างๆเทียบกับแกนอ้างอิงที่ฐานของแขนกลโดยอาศัยความสัมพันธ์ไคเนมาติคข้างต้น จากสมการที่ 4.17 นำมาประยุกต์ใช้กับระบบแขนกลได้ ดังสมการที่ 4.18 (Palu)

$$F_i = \sum_{j=1}^{6} D_{ij}\ddot{q}_j + Ia_i\ddot{q}_i + \sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} D_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k + D_i \qquad \ldots 4.18$$

เมื่อ

$$D_{ij} = \sum_{p=\max ij}^{6} \mathrm{Trace}\left[\frac{\partial T_p}{\partial q_j} J_i \frac{\partial T_p}{\partial q_i}^{T} \right]$$

$$D_{ijk} = \sum_{p=\max ijk}^{6} \mathrm{Trace}\left[\frac{\partial T_p}{\partial q_j \partial q_k} J_i \frac{\partial T_p}{\partial q_i}^{T} \right]$$

$$D_i = \sum_{p=1}^{6} -m_p g^T \partial T_p {}^p r_p$$

$$J_i = \begin{vmatrix} (-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz})/2 & I_{ixy} & I_{ixz} & m_i x_i \\ I_{ixy} & (I_{xx}-I_{yy}+I_{zz})/2 & I_{iyz} & m_i y_i \\ I_{ixz} & I_{iyz} & (I_{xx}+I_{yy}-I_{zz})/2 & m_i z_i \\ m_i x_i & m_i y_i & m_i z_i & m_i \end{vmatrix}$$

ความสัมพันธ์ไดนามิกของแขนกล n ลิงค์หาได้ดังสมการที่ 4.18 โดยที่ D_{ij} เป็นเทอมอินเนอร์เชียของข้อต่อ i, D_{ij} เป็นผลกระทบของอินเนอร์เชียระหว่างข้อต่อ i และ j, D_{ijj} เป็นแรงเซนติพิกัลที่ข้อต่อ i เกิดจากความเร็วของข้อต่อ j, D_{ijk} เป็นแรงคอริโอลิสที่ข้อต่อ i เกิดจากความเร็วของข้อต่อ j และข้อต่อ k และ D_i แทนแรงดึงดูดของโลกที่กระทำต่อข้อต่อ i การเคลื่อนที่ของลิงค์ของแขนกลที่ความเร็วต่ำ เทอมของแรงคอริโอลิสมีผลกระทบต่อแรงรวมของระบบน้อย ความสัมพันธ์ไดนามิกตามวิธีของลากรานจ์ที่ได้นี้ยังไม่ได้รวมถึงผลจากความฝืดของการเคลื่อนที่ และน้ำหนักที่แขนกลต้องยกในการทำงาน การหาความสัมพันธ์ไดนามิกของแขนกลโดยตรงจากสมการที่ 4.18 โดยอาศัยการสร้างแกนให้กับระบบแขนกลตามสมการที่กล่าวมาแล้วข้างต้น (Denavit) แล้วหาอนุพันธ์อันดับที่ 1 และ 2 ของทรานสฟอร์เมตริกโดยตรงมาแทนลงในสมการที่ 4.18 เพื่อหา D_i, D_{ij} และ D_{ijk} ให้กับสมการที่ 4.18 เป็นวิธีการหาคำตอบแบบตรงๆ ซึ่งต้องใช้เวลามากและมีโอกาสผิดพลาดได้ง่าย เมื่อพิจารณาการทำทรานสโพสต์เมตริกและการหาอนุพันธ์ของทรานสฟอร์เมตริก สามารถสร้างเมตริก Q มาช่วยให้การหาความสัมพันธ์ไดนามิกตามรูปแบบสมการที่ 4.18 ทำได้สะดวกขึ้นและลดโอกาสการผิดพลาดลงได้ โดยที่รายละเอียดและตัวอย่างการหาความสัมพันธ์ไดนามิกกับแขนกล 3 แกนของรูปที่ 4.3 ตามวิธีการสร้างเมตริก Q ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข. และได้ความสัมพันธ์เป็น

$$F_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1+D_{21}\ddot{\theta}_2+D_{31}\ddot{\theta}_3+Ia_1\ddot{\theta}_1+D_1+D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+D_{113}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3+$$
$$D_{122}\dot{\theta}_2^{\,2}+D_{123}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+D_{133}\dot{\theta}_3^{\,2} \qquad \ldots 4.19$$
$$F_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1+D_{22}\ddot{\theta}_2+D_{32}\ddot{\theta}_3+Ia_2\ddot{\theta}_2+D_2+D_{223}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3+D_{233}\dot{\theta}_3^{\,2} \qquad \ldots 4.20$$
$$F_3 = D_{31}\ddot{\theta}_1+D_{32}\ddot{\theta}_2+D_{33}\ddot{\theta}_3+Ia_3\ddot{\theta}_3+D_3+D_{311}\dot{\theta}_1^{\,2}+D_{322}\dot{\theta}_2^{\,2} \qquad \ldots 4.21$$

ความสัมพันธ์ไดนามิกตามสมการที่ 4.19-4.21 ใช้คำนวณหาขนาดของทอร์คขับเคลื่อนเพื่อทำให้แขนกลหมุนได้มุมหมุน,ความเร็ว และความเร่งตามกำหนด แต่ในทางกลับกันถ้าต้องการนำความสัมพันธ์ไดนามิกนี้ไปใช้ในการจำลองแบบแทนระบบด้วยแบบจำลองคณิตศาสตร์พบว่าสมการที่ได้ค่อนข้างยากมาก การแก้สมการอนุพันธ์อันดับที่สองควรทำโดยการกระจายสมการให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งแล้วใช้วิธีการนิวเมอริคัล อินทิเกรชั่น(Numerical Integration) โดยอาศัยคอมพิวเตอร์มาช่วยคำนวณคำตอบ