บทที่ 3

วิธีดำเนินการทดลอง

ในการวิจัยครั้งนี้ต้องการศึกษาเปรียบเทียบสถิติทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวน 5 วิธี คือ การทดสอบเอฟ (F test) การทดสอบคล้อทซ์ (Klotz test) การทดสอบมู้ด (Mood test) การทดสอบทูกี้-ซีเกล (Tukey-Siegel test) และการทดสอบสแควร์แรงค์ (squared ranks test) โดยจะศึกษาอำนาจการทดสอบและความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของการทดสอบทั้ง 5 วิธีดังกล่าว เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) แบบยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution) และการแจกแจงแบบโลจิสติค (Logistic Distribution) เพราะว่าการแจกแจงทั้ง 3 รูปแบบดังกล่าว เป็นการแจกแจงที่นิยมใช้ศึกษาขั้นเชิงทฤษฎี โดยเฉพาะการศึกษาค่าแอซิมโทติครีเลทีฟแอฟฟิเชียนซี (Asymptotic Relative Efficiency) สำหรับในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบเบ้นั้น จะศึกษาอำนาจการทดสอบและความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เฉพาะการทดสอบเอฟและการทดสอบสแควร์แรงค์ ($\bar{X}$) ในกรณีของการทดสอบสแควร์แรงค์จะศึกษาเฉพาะการทดสอบสแควร์แรงค์ที่คำนวณค่าสถิติจากอันดับของค่าที่แตกต่างจากค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง ทั้งนี้เพราะว่าโดยทั่ว ๆ ไปแล้วอาจจะไม่ทราบค่าเฉลี่ยของประชากร และกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบเบ้นั้น จะศึกษาเฉพาะกรณีที่ประชากรมีความเบ้เป็นบวก ส่วนความโด่งจะพิจารณาเมื่อประชากรมีความโด่งใกล้เคียงกับความโด่งของการแจกแจงแบบปกติ และความโด่งมีมากกว่าการแจกแจงแบบปกติ โดยความโด่งสูงที่สุดที่พิจารณาในทางการวิจัยครั้งนี้มีค่าเป็น 4.2 ซึ่งเป็นความโด่งที่เท่ากับความโด่งของการแจกแจงแบบโลจิสติค ซึ่งค่าความโด่งและความเบ้ที่ใช้ในการศึกษาทั้งหมดกำหนดไว้ในแผนการทดลอง สำหรับขนาดของตัวอย่างที่สนใจศึกษาในการวิจัยครั้งนี้แบ่งเป็นขนาดของตัวอย่างเท่ากัน 3 ขนาด คือ (10:10) (15:15) และ (20:20) และขนาดของตัวอย่างไม่เท่ากัน 4 ขนาดคือ (5:10) (5:15) และ (5:20) ทั้งนี้เทคนิคที่ใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจของการทดสอบ คือวิธีมอนติคาร์โล (Monte Carlo Method) ซึ่งเป็นเทคนิคอย่างหนึ่งที่ใช้แก้ปัญหาในการคำนวณทางคณิตศาสตร์

เนื่องจากวิธีมอนติคาร์โลเป็นเทคนิคที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ดังนั้นในตอนแรกของบทนี้จะกล่าวถึงวิธีมอนติคาร์โลก่อน แล้วจึงแสดงรายละเอียดของแผนการทดลอง ขั้นตอนของการทดลอง และโปรแกรมที่ใช้ในการทดลองตามลำดับ ซึ่งรายละเอียดต่าง ๆ เป็นดังนี้

วิธีมอนติคาร์โล (Monte Carlo Method)

เทคนิคที่ใช้สำหรับแก้ปัญหาในการคำนวณทางคณิตศาสตร์นั้นมีอยู่หลายวิธี วิธีมอนติคาร์โลก็เป็นเทคนิคอย่างหนึ่งที่จะใช้แก้ปัญหานี้ได้ Hammersley และ Handscomb (1964:2) กล่าวว่า วิธีมอนติคาร์โลเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์เชิงทดลอง ซึ่งหลักการของวิธีมอนติคาร์โลนั้น จะใช้ตัวเลขสุ่ม (Random Number) มาช่วยในการหาคำตอบของปัญหาที่ต้องการศึกษา

เนื่องจากวิธีมอนติคาร์โลเป็นวิธีที่ถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ เป็นเวลานานแล้ว และก็ยังเป็นวิธีนิยมใช้ในปัจจุบัน ดังนั้นจะกล่าวถึงประวัติโดยย่อของวิธีมอนติคาร์โลก่อน แล้วจึงจะกล่าวถึงขั้นตอนของวิธีมอนติคาร์โล ซึ่งรายละเอียดต่าง ๆ เป็นดังนี้

1. ประวัติโดยย่อของวิธีมอนติคาร์โล ชื่อและการพัฒนาระบบของวิธีมอนติคาร์โลถูกกล่าวถึงในราวปี ค.ศ.1944 แต่อย่างไรก็ตามได้มีผู้ใช้วิธีมอนติคาร์โลสำหรับแก้ปัญหาต่าง ๆ เป็นจำนวนมากในช่วงแรก ๆ ที่มีเทคนิคนี้เกิดขึ้น ตัวอย่างเช่น ในกลางศตวรรษที่ 19 มีคนกลุ่มหนึ่งได้ทดลองโยนเข็มอย่างสุ่มบนแผ่นกระดาษแข็งที่มีเส้นขนานขีดอยู่ แล้วหาค่าความน่าจะเป็นที่เข็มจะแตะหรือตัด (Intersection) เส้นขนานเส้นใดเส้นหนึ่ง ซึ่งความน่าจะเป็นนี้มีค่าทางทฤษฎีเป็น $\frac{2\ell}{d\pi}$ โดยที่ d คือระยะระหว่างเส้นขนาน ℓ คือความยาวของเข็ม จากค่าความน่าจะเป็นที่ได้นี้พวกเขาสามารถที่จะหาค่า π ได้ ซึ่งจากการทดลองในลักษณะเดียวกันนี้ปรากฏว่าในปี ค.ศ.1850 Volser ได้ค่า π จากการทดลองเป็น 3.1596 และในราวต้นศตวรรษที่ 20 โรงเรียนสอนสถิติในประเทศอังกฤษ ได้เก็บรวบรวมผลงานทางด้านมอนติคาร์โลไว้ แต่ลักษณะของผลงานนี้เป็นผลงานที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนมากกว่าที่จะใช้ในการวิจัยหรือการค้นพบ ในปี ค.ศ.1908 Student (W.S. Gosset) ได้ทำการทดลองโดยการสุ่มตัวอย่าง เพื่อจะหาการแจกแจงของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient) เขาได้ทราบมาบ้างแล้วว่า โมเมนต์ของการแจกแจงนั้นเป็นสัดส่วนกับ $(1-\alpha\gamma)^{\beta}$ ซึ่งเป็นเส้นโค้งความถี่ (frequency curve) ของ Pearson แบบหนึ่ง โดย γ เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ α และ β เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับค่าของ n เขาลองใช้ n=4 และ n=8 เพื่อที่จะ

ดูความต่อเนื่องที่เกิดขึ้นของฟังก์ชันนี้ จากนั้นก็พิจารณาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นเพื่อจะนำไปประมาณค่า α และ β เขาเดาว่า $\alpha=1$ และ $\beta=\frac{1}{2}$ $(n-4)$ ซึ่งปรากฏว่าค่านี้เกิดเป็นค่าจริงในทางทฤษฎี แต่อย่างไรก็ตาม วิธีของ student ค่อนข้างจะแตกต่างกับวิธีมอนติคาร์โล ซึ่งใช้ในปัจจุบัน ซึ่งมักจะไม่พยายามใช้การเดา

การที่วิธีมอนติคาร์โลถูกนำมาใช้อย่างแท้จริง เพื่อเป็นเครื่องมือสำหรับการวิจัย มีสาเหตุมาจากการใช้ระเบิดปรมาณูระหว่างสงครามโลกครั้งที่สอง โดย von Neumann และ Ulam ซึ่งพวกเขาใช้เทคนิคมอนติคาร์โลกับงานที่เกี่ยวข้องโดยตรงกับการจำลองของปัญหาแบบ "Probabilistics" ซึ่งเกี่ยวข้องกับการแพร่กระจายอย่างสุ่มของนิวตรอนของวัสดุเชื้อเพลิง หลังจากนั้นวิธีมอนติคาร์โลได้ถูกพัฒนาอีกโดย Harris และ Herman Kahn ในปี ค.ศ.1948

การนำวิธีมอนติคาร์โลมาใช้กับปัญหาแบบ deterministic ได้รับความสนใจจาก Fermi, von Neumannและ Ulam พวกเขาได้เผยแพร่ผลงานเกี่ยวกับปัญหาด้านนี้โดยทันที เมื่อเสร็จสิ้นจากสงครามโลกครั้งที่สอง ราว ๆ ปี ค.ศ. 1948 Fermi, Metropolis และ Ulam ใช้วิธีมอนติคาร์โล ประมาณค่า ไอเกน (Eigen value) ของ สมการ Schrodinger ต่อมา Dr.Stephen Brush ผู้ซึ่งสนใจเกี่ยวกับประวัติทางคณิตศาสตร์ ได้รื้อฟื้นผลงานของ Kelvin ซึ่งใช้เทคนิคมอนติคาร์โลเพื่อตรวจสอบสมการ Boltzmann มาศึกษาอีก แต่อย่างไรก็ตามผู้ที่สมควรจะได้รับการยกย่องในฐานะที่รื้อฟื้นและปรับปรุงวิธีมอนติคาร์โลใหม่ คือ Ulam, von Neumann และ Fermi

วิธีมอนติคาร์โลได้ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลาย หลังจากปี ค.ศ.1950 โดยเฉพาะในประเทศสหรัฐอเมริกา เพื่อนำมาตอบปัญหาต่าง ๆ ที่ยังขัดแย้งกันอยู่และในปัจจุบันนี้วิธีมอนติคาร์โลก็เป็นวิธีที่นิยมใช้กันมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง วิธีนี้จะถูกนำมาใช้เมื่อคิดว่าเป็นวิธีที่ดีที่สุด หรือเป็นวิธีเดียวที่จะใช้ศึกษาได้ และในปัจจุบันนี้ได้มีการพัฒนาสาขาวิชาต่าง ๆ มากยิ่งขึ้น เช่น สาขาด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์ (Applied Mathmematic) สาขาการวิจัยดำเนินงาน (Operational Reserch) เป็นต้น ยิ่งมีการพัฒนาทางด้านวิชาการมากขึ้นเท่าไร ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นนี้ในทางปฏิบัติ ซึ่งไม่สามารถที่จะหาคำตอบโดยวิธีทางทฤษฎีก็จะมีมากยิ่งขึ้น นั่นก็หมายความว่าเทคนิคมอนติคาร์โลก็ยิ่งมีความจำเป็นมากขึ้น

2. ขั้นตอนของวิธีมอนติคาร์โล ในปัจจุบันวิธีมอนติคาร์โลได้ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลาย เช่น ให้หาค่าอินทิกรัล (Integral) การหาจุดที่เหมาะสม (Optimization) การศึกษาความแกร่ง (Robustness) ของการทดสอบ เป็นต้น ซึ่งขั้นตอนของวิธีมอนติคาร์โลแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

2.1 การสร้างตัวเลขสุ่ม (Random Number) การใช้ตัวเลขสุ่มเป็นสิ่งที่สำคัญมากในวิธีมอนติคาร์โล ทั้งนี้เพราะว่าหลักการของวิธีมอนติคาร์โลนั้นจะใช้ตัวเลขสุ่มมาช่วยในการหาคำตอบของปัญหา ลักษณะของตัวเลขสุ่มจะมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วง (0, 1) สำหรับวิธีการสร้างตัวเลขสุ่มมีผู้เสนอไว้หลายวิธี แต่วิธีที่ดีนั้นลักษณะของตัวเลขสุ่มที่เกิดขึ้นจะต้องมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วง (0, 1) และเป็นอิสระต่อกัน

2.2 การประยุกต์ปัญหาที่ต้องการศึกษามาใช้กับตัวเลขสุ่ม ซึ่งขั้นตอนนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาที่ต้องการศึกษา บางปัญหาอาจจะไม่ใช้ตัวเลขสุ่มโดยตรง แต่อาจจะมีขั้นตอนอื่นหลาย ๆ ขั้นตอน ซึ่งขั้นตอนเหล่านี้มีบางขั้นตอนที่ต้องใช้ตัวเลขสุ่ม

2.3 การทดลองกระทำ เมื่อประยุกต์ปัญหาให้ใช้กับตัวเลขสุ่มได้แล้ว ขั้นตอนต่อไปก็คือการทดลอง โดยใช้กระบวนการของการสุ่ม (Random Process) มากระทำในลักษณะที่ซ้ำ ๆ กัน (Replication) เพื่อหาคำตอบของปัญหาที่ต้องการศึกษา

<u>แผนการทดลอง</u>

แผนการทดลองอธิบายด้วยอักษรภาษาอังกฤษซึ่งแทนลักษณะการแจกแจงแบบต่าง ๆ ดังนี้

N แทนการแจกแจงแบบปกติ

U แทนการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม

L แทนการแจกแจงแบบโลจิสติค

S แทนการแจกแจงแบบเบ้

ในการวิจัยครั้งนี้ต้องการศึกษาอำนาจการทดสอบและความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของการทดสอบ 5 วิธีดังกล่าว สำหรับกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบเบ้ จะศึกษาเฉพาะการทดสอบเอฟและการทดสอบสแควร์แรงค์ ($\bar{X}$) ซึ่งจะคำนวณค่าอำนาจของการทดสอบในช่วงความเบ้และความโด่งที่การทดสอบทั้ง 2 วิธีนี้สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้เท่านั้น โดยที่ลักษณะการแจกแจงของประชากร

ทั้ง 2 กลุ่มที่ต้องการศึกษาครั้งนี้จะต้องมีการแจกแจงแบบเดียวกัน ซึ่งแสดงได้ดังตาราง 3.1

ตาราง 3.1 แสดงการแจกแจงของประชากร ซึ่งใช้ในการคำนวณค่าอำนาจการทดสอบ และความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

NN	UU
LL	SS

จากตารางสัญญลักษณ์ NN หมายความว่าประชากรกลุ่มแรกมีการแจกแจงแบบปกติ และประชากรกลุ่มที่ 2 มีการแจกแจงแบบปกติด้วย สำหรับสัญญลักษณ์อื่น ๆ แทนความหมายแบบเดียวกัน

สำหรับกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบเบ้ ค่าความเบ้และความโด่งที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้แสดงเป็นคู่ลำดับได้ดังตาราง 3.2 ซึ่งค่าของสมาชิกตัวแรกในคู่ลำดับคือความเบ้ ส่วนตัวที่สองจะเป็นค่าความโด่ง

ตาราง 3.2 แสดงค่าความเบ้และความโด่งทั้งหมดที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบเบ้

(.25, 2.8)	(.25, 3.0)	(.25, 3.2)	(.25, 3.6)	(.25, 4.2)
(.50, 2.8)	(.50, 3.0)	(.50, 3.2)	(.50, 3.6)	(.50, 4.2)
(.75, 2.8)	(.75, 3.0)	(.75, 3.2)	(.75, 3.6)	(.75, 4.2)
(1.0, 3.6)	(1.0, 4.2)			

จากค่าความเบ้ ความโด่ง ซึ่งใช้ในการศึกษาครั้งนี้ ไม่ได้ศึกษาในกรณีที่ความเบ้มีค่า (1.0, 2.8) (1.0, 3.0) และ (1.0, 3.2) เพราะว่าการแจกแจงแบบเบ้ที่ใช้ในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้ (GLD) ไม่มีค่าความเบ้ และความโด่ง (not exist) สำหรับความเบ้ ความโด่งดังกล่าว

ในการศึกษาค่าอำนาจการทดสอบและความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 กำหนดค่าเฉลี่ยเป็น 100 และความแปรปรวนของประชากรมีค่า 100 สำหรับค่าเริ่มต้น กรณีที่ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรมีค่าอื่น ผลสรุปที่ได้จะเหมือนกัน กล่าวคือค่าสถิติที่คำนวณได้จะมีค่าเท่ากันไม่ว่าจะศึกษา ณ จุดที่ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนมีค่าใด ๆ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

1. กรณีของการทดสอบเอฟ

ตัวสถิติของการทดสอบเอฟ คือ $$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i-\bar{X})^2 / (n_1-1)}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j-\bar{Y})^2 / (n_2-1)}$$

สมมติว่า X_i และ Y_j เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเป็นดังนี้

$$E(X_i) = 0 \quad , \quad V(X_i) = 1 \quad ; \; i=1, 2, \ldots, n_1$$

$$E(Y_j) = 0 \quad , \quad V(Y_j) = 1 \quad j=1, 2, \ldots, n_2$$

กำหนดให้ $X'_i = a + \sqrt{b}\, X_i$

$$Y'_j = c + \sqrt{b}\, Y_j$$

โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$E(X'_i) = a \qquad V(X'_i) = b$$

$$E(Y'_j) = c \qquad V(Y'_j) = b$$

ดังนั้นค่าสถิติเอฟค่าใหม่จะเป็นดังนี้

$$F^* = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i-\bar{X})^2 / (n_1-1)}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_i-\bar{Y})^2 / (n_2-1)}$$

$$F^* = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (a + \sqrt{b}\, X_i - a - \sqrt{b}\, \bar{X})^2 / (n_1-1)}{\sum_{j=1}^{n_2} (c + \sqrt{b}\, Y_i - c - \sqrt{b}\, \bar{Y})^2 / (n_2-1)}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (\sqrt{b}\ (X_i - \bar{X}))^2 / (n_1 - 1)}{\sum_{j=1}^{n_2} (\sqrt{b}\ (Y_i - \bar{Y}))^2 / (n_2 - 1)}$$

$$= \frac{b \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 / (n_1 - 1)}{b \sum_{j=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2 / (n_2 - 1)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 / (n_1 - 1)}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2 / (n_2 - 1)} = F$$

2. กรณีการทดลองมูด การทดล่อบคลัอทซ์ และการทดล่อบทูกี้-ซีเกล

เนื่องจากข้อตกลงเบื้องต้นของการทดล่อบทั้ง 3 วิธีนี้ ประชากรทั้งล่องกลุ่มจะต้องมีค่า มีเดียน (Median) เท่ากัน ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ศึกษาอำนาจของการทดล่อบและความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของการทดล่อบดังกล่าว เฉพาะการแจกแจงที่ล่มมาตร (Symmetric) เท่านั้น ดังนั้นค่าเฉลี่ยของประชากรกับค่ามีเดียนของประชากรจะเป็นค่าเดียวกัน

สำหรับการทดล่อบทั้ง 3 วิธีนี้จะพิสูจน์ว่าไม่ว่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรมีค่าใด ๆ อันดับที่เกิดจากทางจัดเรียงค่าสังเกตุทั้งล่องกลุ่มร่วมกันจะมีค่าเท่าเดิม ซึ่งแล่ดงดังนี้

- ล่มมติ X_i และ Y_j เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเหมือนกับกรณี 1.

กำหนด X_i' และ Y_j' มีค่าดังนี้

$$X_i' = a + \sqrt{b}\ X_i$$

$$Y_j' = a + \sqrt{b}\ X_j$$

โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$E(X_i') = a \quad , \quad V(X_i') = b$$

$$E(Y_j') = a \quad , \quad V(Y_j') = b$$

∴ อันดับของจัดเรียงค่าของ X_i และ Y_j ร่วมกันมีค่าเท่ากับอันดับของการจัดเรียงค่า $a + \sqrt{b}\, X_i$ และ $a + \sqrt{b}\, Y_j$ ร่วมกันเสมอ ดังนั้นค่าสถิติของการทดสอบทั้ง 3 วิธีนี้จะเท่ากัน ไม่ว่าค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรมีเป็นเท่าใด

3. การทดสอบสแควร์แรงค์

สำหรับกรณีของการทดสอบสแควร์แรงค์นี้จะแยกได้เป็น 2 กรณีคือ กรณีที่ 1 จะคำนวณค่าสถิติจากอันดับของการจัดเรียงค่า $(X_i - \mu_x)^2$ และ $(Y_j - \mu_y)^2$ ส่วนกรณีที่ 2 จะคำนวณค่าสถิติจากอันดับของการจัดเรียงค่า $(X_i - \bar{X})^2$ และ $(Y_i - \bar{Y})^2$ ซึ่งจะแยกพิสูจน์ได้ดังนี้

3.1 กรณีที่ 1 สมมติเงื่อนไขเหมือนกรณีของการทดสอบเอฟ ค่าสถิติจะคำนวณจากอันดับของการจัดเรียงค่า $(X_i' - \mu_x)^2$ และ $(Y_j' - \mu_y)^2$ ร่วมกัน

∵ $X_i' = a + \sqrt{b}\, X_i$ และ $Y_j' = c + \sqrt{b}\, Y_j$

ดังนั้น $(X_i' - \mu_x')^2 = (a + \sqrt{b}\, X_i - a - \sqrt{b}\, \mu_x)$

$$= (\sqrt{b}\, X_i - \sqrt{b}\, \mu_x)^2$$

$$= b(X_i - \mu_x)^2$$

ในทำนองเดียวกัน

$$(Y_j' - \mu_y')^2 = b\,(Y_j - \mu_y)^2$$

∴ อันดับของการจัดเรียงระหว่าง $(X_i - \mu_x)^2$ และ $(Y_j - \mu_y)^2$ กับอันดับของการจัดเรียงค่า $b(X_i - \mu_x)^2$ และ $b(Y_j - \mu_y)^2$ มีค่าเท่ากัน ดังนั้นค่าสถิติที่คำนวณได้ไม่ว่าค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนมีค่าเป็นเท่าใดจะมีค่าเท่ากันเสมอ

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.2 กรณีที่ 2 สมมติเงื่อนไขเหมือนกรณี 3.1 ดังนั้นค่าสถิติจะคำนวณจากอันดับของการจัดเรียงค่า $(X'_i - \bar{X}')^2$ และ $(Y_j - \bar{Y}')$

$$\therefore X'_i = a + \sqrt{b}\, X_i \qquad Y_j = c + \sqrt{b}\, Y_j$$

$$(X_i - \bar{X})^2 = (a + \sqrt{b}\, X_i - a - \sqrt{b}\, \bar{X})^2$$

$$= (\sqrt{b}\, X_i - \sqrt{b}\, \bar{X})^2$$

$$= b\,(X_i - \bar{X})^2$$

ในทำนองเดียวกัน

$$(Y'_j - \bar{Y}') \qquad = b(Y_j - \bar{Y})^2$$

$\therefore$ อันดับของค่า $(X_i - \bar{X})^2$ และ $(Y_j - \bar{Y})^2$ กับอันดับของการจัดเรียงค่า $b(X_i - \bar{X})^2$ และ $b(Y_j - \bar{Y})^2$ มีค่าเท่ากัน ดังนั้นค่าสถิติที่คำนวณได้ไม่ว่าค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนมีค่าเท่าใดจะมีค่าเท่ากันเสมอ

<u>ขั้นตอนในการทดลอง</u>

ขั้นตอนในการทดลองแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน คือ

1. การสร้างโปรแกรมย่อย (Subroutine) สำหรับสร้างการแจกแจงตามที่กำหนด พร้อมทั้งตรวจสอบค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ และความโด่งของการแจกแจงที่กำหนด

2. การหาค่าวิกฤติของการทดสอบแบบนอนพาราเมตริก

3. การหาค่าอำนาจการทดสอบและความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ซึ่งรายละเอียดสำหรับแต่ละขั้นตอนเป็นดังนี้

1. การสร้างรูปแบบการแจกแจงของประชากรตามที่กำหนด

การสร้างลักษณะการแจกแจงของประชากรทุกรูปแบบ ตามแผนไว้ในแผนการทดลองนั้นใช้โปรแกรมภาษาฟอร์แทรนโฟ (Fortran IV) โดยใช้กับเครื่อง IBM 370/3031 ซึ่งการสร้างลักษณะการแจกแจงแบบต่าง ๆ นั้น จะต้องใช้ตัวเลขสุ่ม (Random Number) ซึ่งมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วง (0, 1) เป็นพื้นฐานในการสร้าง สำหรับโปรแกรมที่ใช้สร้างตัวเลขสุ่มในการวิจัยครั้งนี้ใช้วิธีที่ White และ Schmidt (1975:421) เสนอไว้ ซึ่งรายละเอียดในการสร้างการแจกแจงแบบต่าง ๆ เป็นดังนี้

1.1 การแจกแจงแบบปกติ โปรแกรมย่อยที่ใช้ในการสร้างการแจกแจงแบบปกติในการวิจัยครั้งนี้ใช้วิธีของ Kinderman และ Ramage (1976, 893-896) ซึ่งเป็นวิธีที่สร้างการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น 1 โดยใช้เทคนิค accentance-rejection สำหรับค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนค่าอื่นใช้วิธีแปลงข้อมูลในรูป $X'=EX+(STD)X$ โดย EX และ STD^2 คือค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากร การใช้โปรแกรมย่อยใช้คำสั่ง CALL NORMAL (EX, STD, X) โดย EX และ STD เป็นค่าพารามิเตอร์ซึ่งกำหนดค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรเป็นค่าที่ส่งจากโปรแกรมหลัก (Main Program) ส่วนผลลัพธ์คือค่า X ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย EX และความแปรปรวน STD^2

1.2 การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม โปรแกรมย่อยที่ใช้ในการสร้างการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม ใช้วิธี Inverse Transformation ซึ่งรายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก การใช้โปรแกรมย่อยนี้ใช้คำสั่ง CALL UNIFRM (A, B, X) โดยค่า A และ B เป็นค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดขึ้นเพื่อให้ได้ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนตามที่กำหนด ค่า A และ B จะถูกส่งมาจากโปรแกรมหลัก ส่วนผลลัพธ์ที่ได้คือ X ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วง (A, B) มีค่าเฉลี่ยเป็น $\frac{(A+B)}{2}$ และความแปรปรวนเป็น $\frac{(B-A)^2}{12}$

1.3 การแจกแจงแบบโลจิสติค โปรแกรมย่อยที่ใช้ในการสร้างการแจกแจงแบบโลจิสติค ใช้วิธี Inverse Tranformation ซึ่งรายละเอียดอยู่ในภาคผนวก การใช้โปรแกรมย่อยนี้ใช้คำสั่ง CALL LOGIS (ALPHA, BELTA, X) ค่า ALPHA, BELTA เป็นค่าพารามิเตอร์ ซึ่งกำหนดค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากร เป็นค่าที่ส่งจากโปรแกรมหลัก ผลลัพธ์ที่ได้ คือ X ซึ่งมีการแจกแจงแบบโลจิสติค มีค่าเฉลี่ยเป็น ALPHA และความแปรปรวนเป็น $\frac{1}{3}\pi^2 (BELTA)^2$

1.4 การแจกแจงแบบเบ้ โปรแกรมย่อยที่ใช้ในการสร้างการแจกแจงแบบเบ้นั้นใช้วิธีแปลงข้อมูลของ Ramberg และ Schmeiser ซึ่งเรียกว่า Generalized Lambda Distribution (GLD) ซึ่งเป็นวิธีที่เหมาะสมกับการสร้างข้อมูลที่ไม่สมมาตร และมีโหมด (mode) เพียงโหมดเดียว (Unimodal Asymmetric Distribution) การสร้างการแจกแจงแบบ GLD นั้นใช้การแปลงข้อมูลในลักษณะดังนี้

$$X = \lambda_1 + (P^{\lambda_3} - (1-p)^{\lambda_4})/\lambda_2 \quad ; 0 \leq p \leq 1$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

i 16799975

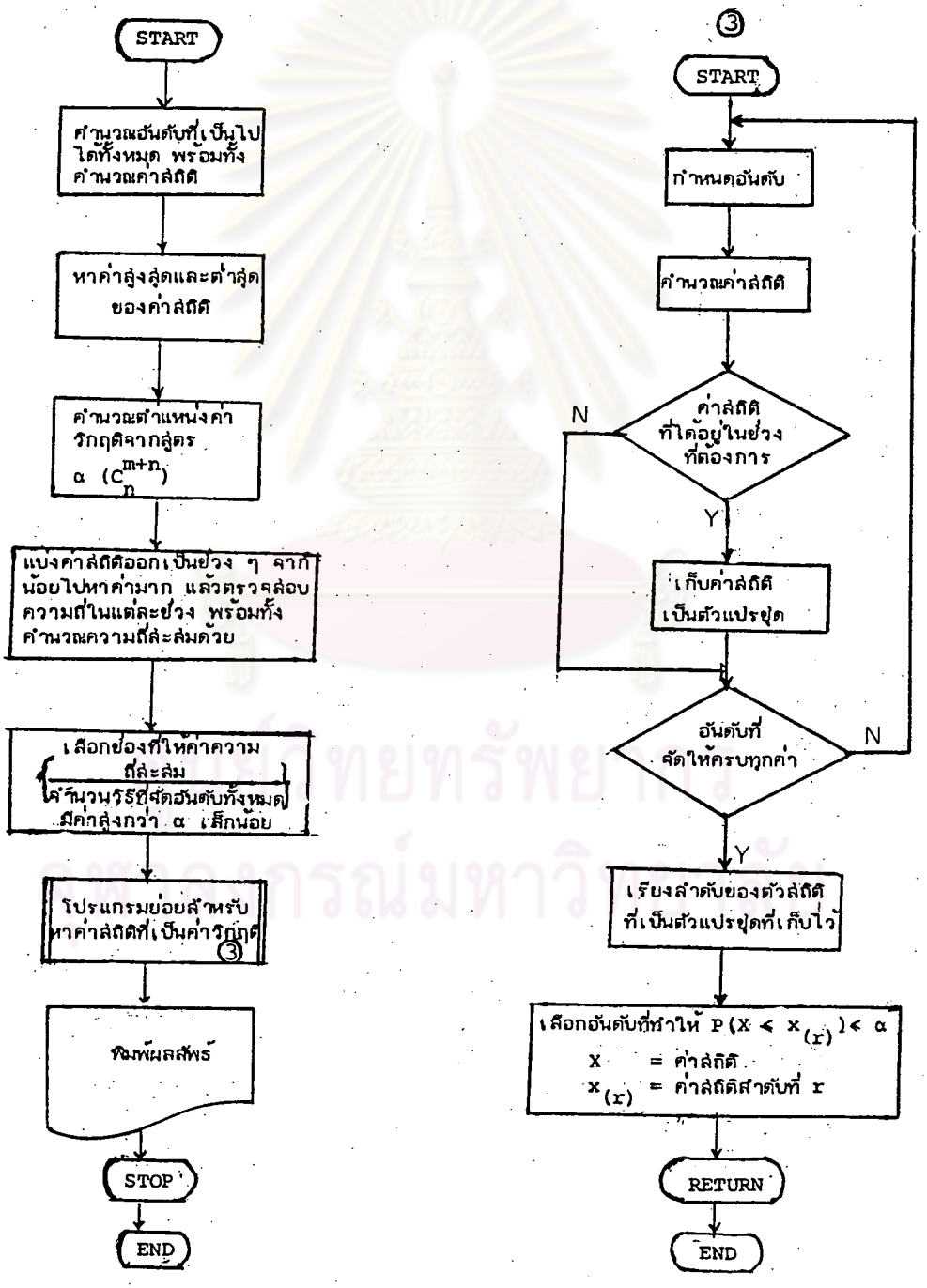
P เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วง (0, 1) ค่า λ_3 และ λ_4 จะเป็นค่าที่กำหนดความเบ้และความโด่ง ในการวิจัยครั้งนี้จะสร้างการแจกแจงแบบ GLD ที่มีความเบ้และความโด่งตามที่ต้องการ โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น 1 ก่อน ในกรณีที่ต้องการค่าเฉลี่ย EX และความแปรปรวน $(STD)^2$ จะใช้วิธีแปลงข้อมูลในรูป Y = EX + (STD)X หรืออาจจะใช้วิธีปรับค่า $\lambda_1 = \lambda_1(0, 1)(STD)+EX$ และ $\lambda_2=\lambda_2(0, 1)/STD$ ซึ่งทั้ง 2 วิธีนี้จะได้ค่าเท่ากัน ในการวิจัยครั้งนี้จะใช้วิธีแรก โดยที่การเรียกใช้โปรแกรมย่อยนี้ใช้คำสั่ง CALL SKEWED (RLMD1, RLMD2, RLMD3, RLMD4, EX, STD, X) ค่า RLMD1, RLMD2, RLMD3 และ RLMD4 เป็นค่าที่ส่งมาจากโปรแกรมหลัก เพื่อจะให้ได้ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ และความโด่งตามที่ต้องการ

2. การหาค่าวิกฤตของการทดสอบแบบนอนพาราเมตริก

การคำนวณหาค่าวิกฤติของการทดสอบแบบนอนพาราเมตริกนั้น ในการวิจัยครั้งนี้จะคำนวณหาค่าวิกฤติในกรณีที่ค่าไม่มีในตาราง และขนาดของกลุ่มตัวอย่างต่างกันมากเช่น (5:15) หรือ (5:20) ซึ่งโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณค่าวิกฤติแบ่งเป็น 2 โปรแกรม คือ โปรแกรมแรกจะใช้คำนวณค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของอันดับ (All possible rank) พร้อมทั้งคำนวณสถิติทดสอบ (test-statistic) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด จากนั้นก็หาค่าสูงสุดและต่ำสุดของค่าสถิติ แล้วคำนวณหาตำแหน่งของค่าวิกฤตจากค่า $\alpha\ (\binom{m+n}{n})$ โดย m และ n เป็นขนาดของตัวอย่างและค่า $\binom{m+n}{n}$ แทนค่า Combination ที่เป็นจำนวนของค่าสถิติทั้งหมด เมื่อทราบตำแหน่งของค่าวิกฤตแล้ว ก็จะแบ่งค่าสถิติจากค่าน้อยที่สุดถึงค่ามากที่สุดออกเป็นช่วง ๆ ตามความเหมาะสม จากนั้นก็หาค่าความถี่ของค่าสถิติในแต่ละช่วง พร้อมทั้งคำนวณค่าความถี่สะสม แล้วพิจารณาดูว่าตำแหน่งของค่าวิกฤตอยู่ในช่วงไหน เมื่อทราบตำแหน่งของค่าวิกฤตทุก ๆ ค่า ว่าอยู่ในช่วงความถี่ไหนแล้ว ก็จะนำผลลัพธ์ไปใช้ในโปรแกรมที่ 2 ซึ่งเป็นโปรแกรมจัดเรียงอันดับของค่าสถิติพร้อมทั้งหาค่าสถิติที่เป็นตำแหน่งของค่าวิกฤตด้วย โดยที่ขั้นตอนในโปรแกรมที่ 2 จะเช็คว่าค่าสถิติอยู่ในช่วงที่กำหนดหรือไม่ ถ้าอยู่ก็จะเก็บค่าสถิตินั้นไว้ ถ้าไม่อยู่ก็ให้ผ่านไปคำนวณค่าสถิติตัวอื่น ๆ จนครบทุกตัว ก็จะได้ค่าสถิติที่อยู่ในช่วงนี้ทุกค่า จากนั้นก็จะเรียงอันดับจากค่าน้อยที่สุดถึงค่าที่มากที่สุด แล้วพิจารณาตำแหน่งที่ค่าความน่าจะเป็นที่ค่าสถิตินั้นน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าของตำแหน่งนั้นมีค่าเท่ากับ α หรือใกล้เคียง α มากที่สุด แต่มีค่าไม่เกิน α ค่าของตำแหน่งนั้นที่จะเป็นค่าวิกฤต

สำหรับขั้นตอนในการหาค่าวิกฤตสรุปเป็นผังงาน (Flowchart) ได้ดังรูป 3.1

รูป 3.1 แสดงผังงานในการหาค่าวิกฤตของสถิติทดสอบนอนพาราเมตริก

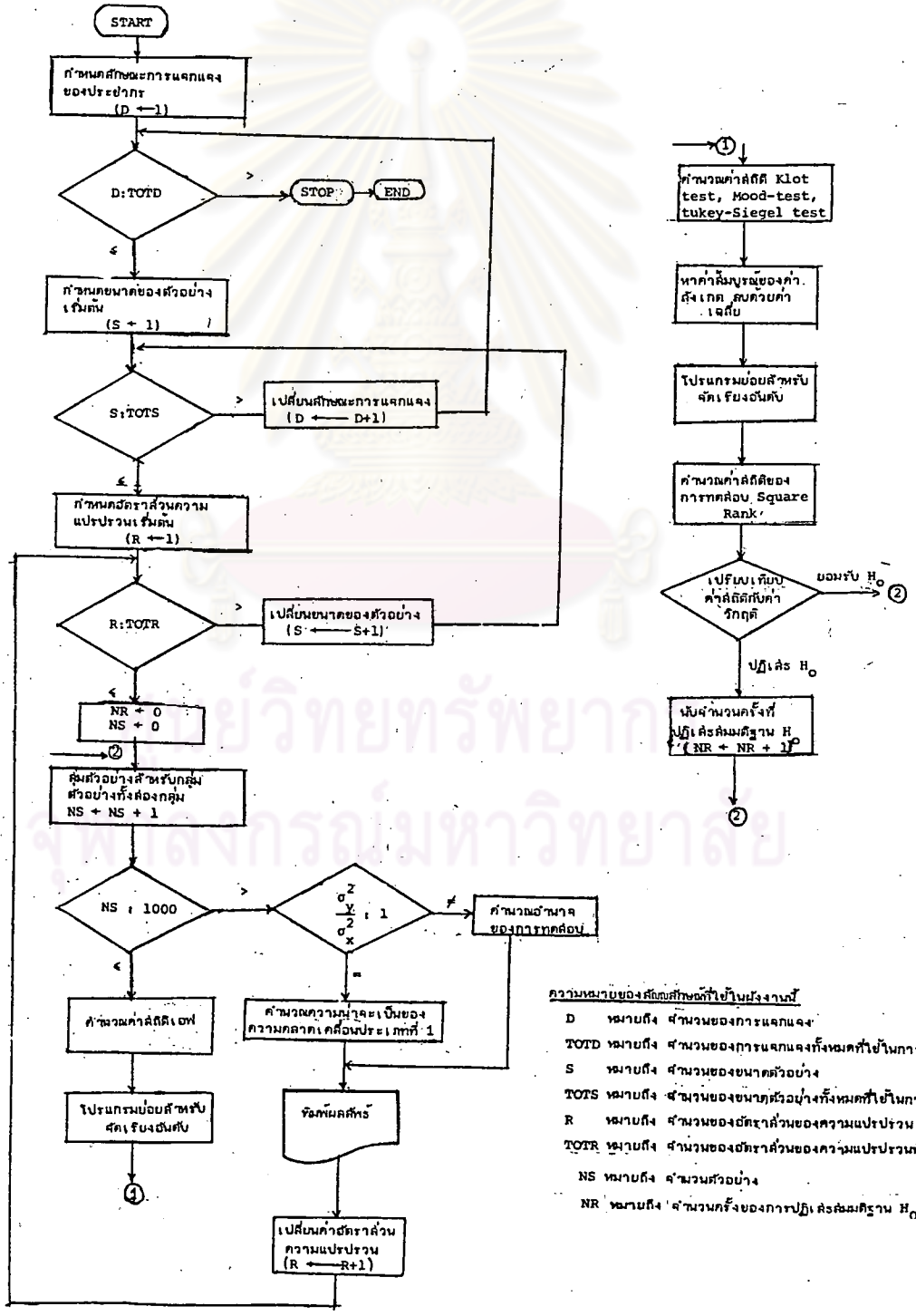


3. การหาค่าอำนาจของการทดสอบและความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

เมื่อสร้างลักษณะการแจกแจงของประชากรได้ตามต้องการและคำนวณค่าวิกฤติของสถิติทดสอบได้แล้ว ขั้นต่อไปคือการทดลองเพื่อหาค่าของอำนาจของการทดสอบและความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เริ่มจาก(1)การกำหนดขนาดของตัวอย่างที่ต้องการศึกษา ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวนและลักษณะการแจกแจงของประชากร จากนั้นก็จะใช้คำสั่งสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่ต้องการศึกษาทั้ง 2 กลุ่ม(2) เมื่อได้กลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มแล้วจะคำนวณค่าสถิติของสถิติทดสอบทั้งหมด คือ การทดสอบเอฟ (F test) ซึ่งจะต้องหาความแปรปรวนของตัวอย่างทั้งสองกลุ่มแล้วนำค่าความแปรปรวนมาหารกัน ก็จะได้ค่าสถิติทดสอบ สำหรับการทดสอบแบบนอนพาราเมตริก คือ การทดสอบคล้อทซ์ (Klotz test)(3) การทดสอบมูด (Mood test) และการทดสอบทูกี้-ซีเกล (Tukey-Siegel test) จะต้องจัดเรียงอันดับร่วมกันกับของค่าสังเกตจากตัวอย่างสุ่มทั้งสองกลุ่ม เมื่อได้ค่าอันดับแล้วก็จะนำอันดับที่ได้มาคำนวณค่าสถิติโดยจะใช้อันดับของค่าสังเกตในกลุ่มที่มีจำนวนตัวอย่างน้อยกว่า ในกรณีที่ขนาดของตัวอย่างที่ใช้ทั้งสองกลุ่มเท่ากัน จะใช้อันดับของค่าสังเกตจากกลุ่มใดก็ได้ สำหรับการทดสอบสแควร์แรงค์ (squared ranks test) จะต้องนำค่าสังเกตของตัวอย่างสุ่มทั้งสองกลุ่มมาลบด้วยค่าเฉลี่ย แล้วหาค่าสัมบูรณ์ (absolute) ของทุก ๆ ค่า แล้วนำค่าสัมบูรณ์ที่ได้มาเรียงอันดับร่วมกัน แล้วนำอันดับของกลุ่มที่มีค่าสังเกตน้อยมาคำนวณค่าสถิติ ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเท่ากันจะใช้ค่าสถิติจากอันดับของกลุ่มใดก็ได้ เมื่อคำนวณค่าสถิติครบทุกสถิติทดสอบแล้ว ก็จะนำค่าสถิติมาเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต(α)เพื่อจะได้ตัดสินใจว่าจะปฏิเสธหรือยอมรับสมมติฐาน H_o ในกรณีที่ปฏิเสธสมมติฐาน H_o ให้นับจำนวนครั้งที่ปฏิเสธด้วย จากนั้นก็ย้อนกลับไปสุ่มตัวอย่างชุดใหม่ จนกระทั่งครบ 1000 ครั้ง แล้วคำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่ออัตราส่วนความแปรปรวนมีค่าเป็น 1 หรือค่าอำนาจการทดสอบเมื่ออัตราส่วนความแปรปรวนไม่เท่ากับ 1 จากนั้นก็จะเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความแปรปรวนจนกระทั่งครบทุกค่าตามที่ต้องการ โดยในแต่ละค่าของอัตราส่วนความแปรปรวนจะสุ่มตัวอย่างซ้ำ ๆ กัน 1000 ครั้ง เมื่ออัตราส่วนความแปรปรวนครบทุกค่าแล้ว ขั้นต่อไปจะเปลี่ยนขนาดของตัวอย่างจนครบทุกรูปแบบที่ต้องการศึกษา ในแต่ละขนาดตัวอย่างจะคำนวณค่าอำนาจการทดสอบครบทุก ๆ ค่าของอัตราส่วนความแปรปรวน เมื่อขนาดของตัวอย่างครบรูปแบบแล้ว ขั้นต่อไปก็จะเปลี่ยนลักษณะการแจกแจงของประชากรจนครบทุกการแจกแจง โดยแต่ละการแจกแจงของประชากรจะใช้ขนาดของตัวอย่างครบทุกรูปแบบ

แต่ละขนาดของตัวอย่างจะคำนวณความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจของการทดสอบจนครบทุกค่าของอัตราส่วนความแปรปรวนที่ต้องการศึกษา ซึ่งสรุปเป็นผังงานได้ดังรูป 3.2

รูป 3.2 แสดงผังงานสำหรับการหาค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจของการทดสอบ 5 วิธี



ความหมายของสัญลักษณ์ที่ใช้ในผังงานนี้

D	หมายถึง	จำนวนของการแจกแจง
TOTD	หมายถึง	จำนวนของการแจกแจงทั้งหมดที่ใช้ในการศึกษา
S	หมายถึง	จำนวนของขนาดตัวอย่าง
TOTS	หมายถึง	จำนวนของขนาดตัวอย่างทั้งหมดที่ใช้ในการศึกษา
R	หมายถึง	จำนวนของอัตราส่วนของความแปรปรวน
TOTR	หมายถึง	จำนวนของอัตราส่วนของความแปรปรวนทั้งหมดที่ใช้ในการศึกษา
NS	หมายถึง	จำนวนตัวอย่าง
NR	หมายถึง	จำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐาน H_0

โปรแกรมที่ใช้ในการวิจัย

โปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยทั้งหมดเขียนด้วยภาษาฟอร์แทรน IV โดยใช้กับเครื่อง IBM 370/3031 โดยลักษณะของโปรแกรมแบ่งเป็น 3 ลักษณะ ดังตาราง 3.2 สำหรับโปรแกรมที่ใช้คำนวณอำนาจของการทดสอบและความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในโปรแกรมหนึ่ง ๆ จะคำนวณทุก ๆ ค่าของอัตราส่วนความแปรปรวนและขนาดของตัวอย่าง 1 ขนาดเท่านั้น

ตารางที่ 3.3 แสดงลักษณะของโปรแกรมทั้งหมดที่ใช้ในการวิจัย

ลำดับที่ของโปรแกรม	ลักษณะการทำงาน	โปรแกรมย่อยที่เรียกใช้
1	หาค่าวิกฤตของสถิติทดสอบแบบนอนพาราเมตริก คือ การทดสอบคลัฟซ์ การทดสอบมูด และการทดสอบสแควร์แรงค์ เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 5:20 และ 5:15	โปรแกรมจัดเรียงอันดับ
2	คำนวณค่าอำนาจของการทดสอบ หรือความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบ 5 วิธี เมื่ออัตราส่วนความแปรปรวนเป็น 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ และ $\frac{1}{8}$ และขนาดของตัวอย่างเป็น (5:10) (5:15) (5:20) (10:15) (10:10) (10:15) และ (20:20) โดยที่รูปแบบการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติ แบบยูนิฟอร์ม และแบบโลจิสติก	โปรแกรมสร้างตัวเลขสุ่ม โปรแกรมสร้างลักษณะการแจกแจงของประชากร โปรแกรมจัดเรียงอันดับของค่าสังเกต
3	คำนวณค่าอำนาจของการทดสอบเอฟและการทดสอบสแควร์แรงค์ เมื่อลักษณะการแจกแจงมีรูปแบบที่เบ้ โดยศึกษาเมื่อขนาดตัวอย่างและอัตราส่วนความแปรปรวนเหมือนโปรแกรมที่ 3	โปรแกรมสร้างตัวเลขสุ่ม โปรแกรมสร้างลักษณะการแจกแจงของประชากร โปรแกรมจัดเรียงอันดับของค่าสังเกต

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย