

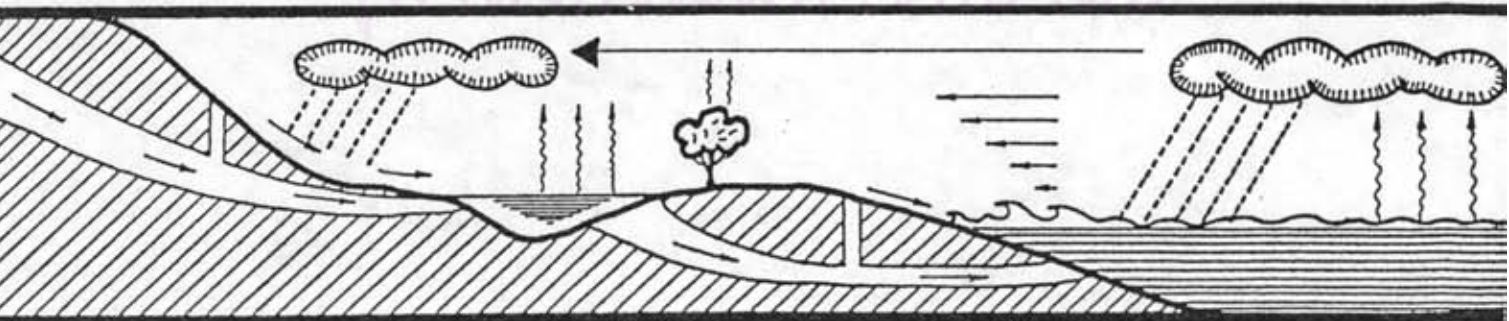
บทที่ 2.

ทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษา



ศูนย์วิทยพัทธยากร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





บทที่ 2
ทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษา

ทฤษฎีที่ใช้ในการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อใช้วิเคราะห์สภาพน้ำท่วมที่ราบลุ่มนี้ และแก้ปัญหาที่ต้องจำลองสภาพทางกายภาพที่เป็นจริง โดยวิธีการเชิงตัวเลข ปัญหาสภาพน้ำท่วมที่ราบลุ่ม (Flood Plain) นั้นเป็นแบบสองทิศทาง โดยมี 3 ตัวแปรอิสระ คือ ค่าอัตราไหลสองทิศทาง และค่าระดับน้ำ ตัวแปรดังกล่าวจะแปรเปลี่ยนตามแกน x, y และแกนเวลา t อีกด้วย ในการแก้สมการโดยวิธีเชิงตัวเลขนั้น ยังต้องอาศัยข้อมูลประกอบ คือ เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ตามแกน x, y และเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา สภาพการไหลของน้ำท่วมที่ราบลุ่มนี้จะเป็นแบบการไหลไม่คงที่เปลี่ยนแปลงน้อย (gradually varied unsteady flow) ในบทนี้จะสรุปทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ได้แก่ สมการพื้นฐานที่ใช้เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต สมการสำหรับอาคารบังคับน้ำต่างๆ เทคนิคการจำลองโดยวิธี Bidimensional Model สมการ finite-difference ที่ใช้ รวมทั้งวิธีการแก้สมการ finite-difference ในแต่ละช่วงเวลาการคำนวณ เพื่อให้ได้คำตอบที่ต้องการต่อไป

2.1 สมการพื้นฐาน

สมการพื้นฐาน (fundamental equation) ที่ใช้อธิบายการไหลในทางน้ำเปิดแบบไม่คงที่นั้น SAINT VENANT (1871) ได้นำมาเผยแพร่ครั้งแรก จนเป็นที่นิยมอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน สมการพื้นฐานนี้ประกอบด้วย สมการต่อเนื่อง (continuity equation) และสมการโมเมนตัม (momentum equation) การไหลของน้ำท่วมที่ราบลุ่มนี้ เป็นแบบสองทิศทาง ฉะนั้น สมการโมเมนตัมที่ใช้จะมีสองสมการ คือ สมการโมเมนตัมทางแกน x และสมการโมเมนตัมทางแกน y สมมติฐานบางประการที่ใช้ในการศึกษาการไหลแบบไม่คงที่ ในที่นี้เพื่อสรุปได้ดังนี้

- 1) ความดันที่จุดใด ๆ เป็นความดันสถิตย (hydrostatic pressure)
- 2) พลังงานที่สูญเสีย เนื่องจากความเสียด (friction loss) คิดเหมือนกรณีการไหลแบบคงที่ได้ และแทนได้ด้วยสมการของ Manning
- 3) การกระจายความเร็วสม่ำเสมอในหน้าตัดการไหล โดยกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของพลังงาน (energy coefficient) เท่ากับ 1
- 4) ความหนาแน่นของน้ำมีค่าคงที่
- 5) ความลาดเอียงของทางน้ำน้อย ($\tan \theta \sim 0$)
- 6) ความเร็วจากอัตราไหลเพิ่ม (surcharge) เช่น ฝน และการระเหย ไม่มีผลต่อความเร็วในลำน้ำ
- 7) สภาพดินมีลักษณะอิ่มน้ำ (saturated soil) ไม่มีอิทธิพลของการซึมน้ำลงดิน

(infiltration)

ภายใต้สมมติฐานดังกล่าว สมการพื้นฐานทั้งสามที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาน้ำท่วมในที่ราบลุ่มมีรายละเอียดแสดงดังต่อไปนี้

2.1.1 สมการต่อเนื่อง (Continuity Equation)

สมการต่อเนื่องมาจากกฎการคงตัวของมวลสาร จากรูปที่ 2-1 เมื่อพิจารณาปริมาตรควบคุม (control volume, C.V.) จะได้ว่า ผลต่างของมวลสารที่ผ่านเข้าและออกจากปริมาตรควบคุมเท่ากับ อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลสารในปริมาตรควบคุม ดังนั้นสมการต่อเนื่อง สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out} + (r-e) \Delta X \Delta Y = \frac{\partial h}{\partial t} \Delta X \Delta Y \quad \dots\dots\dots (2-1)$$

เมื่อ $\Sigma Q_{in} =$ ผลรวมของอัตราไหลเข้าสู่ปริมาตรควบคุมทางแกน x และ y

$$= (Q_{in})_x + (Q_{in})_y \quad \dots\dots\dots (2-2)$$

และ $\Sigma Q_{out} =$ ผลรวมของอัตราไหลออกจากปริมาตรควบคุมทางแกน x และ y

$$= (Q_{out})_x + (Q_{out})_y \quad \dots\dots\dots (2-3)$$

ในทันที $(Q_{in})_x = (U_x - \frac{\partial U_x \Delta X}{\partial X} \frac{\Delta X}{2})(h - \frac{\partial h \Delta X}{\partial X} \frac{\Delta X}{2}) \Delta Y \quad \dots\dots\dots (2-4)$

$$(Q_{in})_y = (U_y - \frac{\partial U_y \Delta Y}{\partial Y} \frac{\Delta Y}{2})(h - \frac{\partial h \Delta Y}{\partial Y} \frac{\Delta Y}{2}) \Delta X \quad \dots\dots\dots (2-5)$$

$$(Q_{out})_x = (U_x + \frac{\partial U_x \Delta X}{\partial X} \frac{\Delta X}{2})(h + \frac{\partial h \Delta X}{\partial X} \frac{\Delta X}{2}) \Delta Y \quad \dots\dots\dots (2-6)$$

$$(Q_{out})_y = (U_y + \frac{\partial U_y \Delta Y}{\partial Y} \frac{\Delta Y}{2})(h + \frac{\partial h \Delta Y}{\partial Y} \frac{\Delta Y}{2}) \Delta X \quad \dots\dots\dots (2-7)$$

เมื่อ $\Delta X =$ ความยาวของปริมาตรควบคุมทางแกน x

$\Delta Y =$ ความยาวของปริมาตรควบคุมทางแกน y

$U_x =$ ความเร็วการไหลทางแกน x

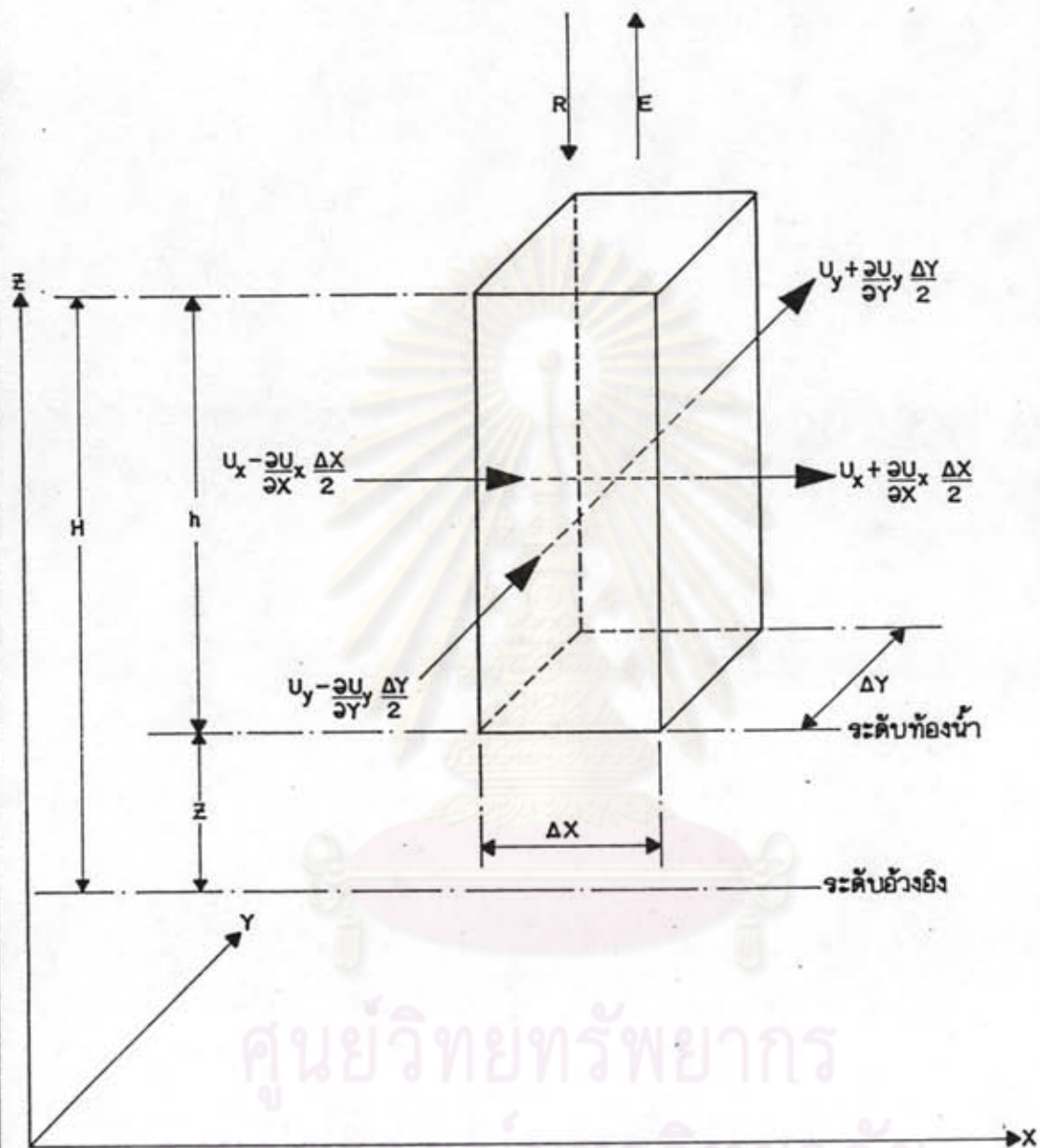
$U_y =$ ความเร็วการไหลทางแกน y

$r =$ ปริมาณฝนตกต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

$e =$ ปริมาณการระเหยของน้ำต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ผิวน้ำเปิด

$h =$ ความลึกการไหล

แทนค่าสมการที่ 2-2 ถึงสมการที่ 2-7 ลงในสมการที่ 2-1



รูปที่ 2-1 ปริมาตรควบคุม 3 มิติ

$$\begin{aligned} & (U_x - \frac{\partial U_x}{\partial X} \frac{\Delta X}{2})(h - \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\Delta X}{2})\Delta Y + (U_y - \frac{\partial U_y}{\partial Y} \frac{\Delta Y}{2})(h - \frac{\partial h}{\partial Y} \frac{\Delta Y}{2})\Delta X \\ & - (U_x + \frac{\partial U_x}{\partial X} \frac{\Delta X}{2})(h + \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\Delta X}{2})\Delta Y - (U_y + \frac{\partial U_y}{\partial Y} \frac{\Delta Y}{2})(h + \frac{\partial h}{\partial Y} \frac{\Delta Y}{2})\Delta X \\ & + (r - e)\Delta X\Delta Y = \frac{\partial h}{\partial t}\Delta X\Delta Y \end{aligned} \dots\dots\dots(2-8)$$

$$- \frac{\partial(U_x h)}{\partial X}\Delta X\Delta Y - \frac{\partial(U_y h)}{\partial Y}\Delta X\Delta Y + (r - e)\Delta X\Delta Y = \frac{\partial h}{\partial t}\Delta X\Delta Y \dots\dots\dots(2-9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(U_x h)}{\partial X} + \frac{\partial(U_y h)}{\partial Y} - r + e = 0 \dots\dots\dots(2-10)$$

$$H = h + z \dots\dots\dots(2-11)$$

เมื่อ z = ระดับท้องน้ำจากระดับอ้างอิง

H = ระดับน้ำจากระดับอ้างอิง

เมื่อ differentiate สมการที่ 2-11 ตามตัวแปร t จะได้

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + 0 \dots\dots\dots(2-12)$$

แทนค่าสมการที่ 2-12 ลงในสมการที่ 2-10 จะได้

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(U_x h)}{\partial X} + \frac{\partial(U_y h)}{\partial Y} - r + e = 0 \dots\dots\dots(2-13)$$

2.1.2 สมการโมเมนตัม (Momentum Equation)

กฎการคงตัวของ โมเมนตัม กล่าวไว้ว่า อัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเข้าออกสุทธิที่ผิวหน้าควบคุม รวมกับผลรวมของแรงภายนอกที่กระทำต่อมวลสาร จะเท่ากับ อัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมในปริมาตรควบคุม ในที่นี้จะขอกล่าวแยกตามแกน x และ แกน y (รูปที่ 2-1) ดังนี้

2.1.2.1 สมการโมเมนตัมทางแกน x (Momentum Equation in x direction)

จากกฎการคงตัวของ โมเมนตัม เมื่อใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมทางแกน x จะได้

ก. อัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเข้าออกสุทธิที่ผิวหน้าควบคุม

= โมเมนตัมเข้ามวลสาร - โมเมนตัมออกจากมวลสาร

ดังนั้น โมเมนตัมเข้า = โมเมนตัมเข้าเนื่องจาก U_x + โมเมนตัมเข้าเนื่องจาก U_y

$$= \rho \left[U_x(U_x h) - \frac{\partial}{\partial X} [U_x(U_x h)] \frac{\Delta X}{2} \right] + \rho \left[U_y(U_x h) - \frac{\partial}{\partial Y} [U_y(U_x h)] \frac{\Delta Y}{2} \right] \dots\dots\dots(2-14)$$

และ โมเมนต์ออกมา = โมเมนต์ออกมาเนื่องจาก U_x + โมเมนต์ออกมาเนื่องจาก U_y

$$= \rho \left[U_x(U_x h) + \frac{\partial}{\partial X} [U_x(U_x h)] \frac{\Delta X}{2} \right] + \rho \left[U_y(U_x h) + \frac{\partial}{\partial Y} [U_y(U_x h)] \frac{\Delta Y}{2} \right] \dots\dots\dots(2-15)$$

ข. แรงกระทำภายนอก นิยามมาจากแรงดังต่อไปนี้

1) แรงเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (gravity force)

$$F_g = \rho g h \Delta X \sin \theta_x = \rho g h S_x \Delta X \dots\dots\dots(2-16)$$

2) แรงเนื่องจากความดันสถิต (hydrostatic force)

$$F_p = \int_0^h \rho dZ = \rho g \int_0^h (h-Z) dZ = \frac{1}{2} \rho g h^2 \dots\dots\dots(2-17)$$

3) แรงเสียดทาน เมื่อ S_{fx} เท่ากับ friction slope และ $U_x = \frac{1}{n} R_x^{2/3} S_{fx}^{1/2}$

จะได้

$$F_s = \rho h g S_{fx} \Delta X \dots\dots\dots(2-18)$$

ค. อัตราเปลี่ยนแปลง โมเมนต์ในปริมาตรควบคุม

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\rho U_x h) \Delta X \dots\dots\dots(2-19)$$

- เมื่อ
- ρ = ความหนาแน่นของน้ำ
 - p = ความดันสถิตของน้ำ
 - g = ความเร่งของโลก
 - S_x = ความลาดเอียงของท้องน้ำทางแกน x
 - S_{fx} = friction slope ทางแกน x
 - n = สปส. ความหยาบผิวของ Manning
 - R_x = รัศมีชลศาสตร์ (hydraulic radius) ทางแกน x

แทนค่าสมการที่ 2-14 ถึงสมการที่ 2-19 ลงในกฎการคงตัวของโมเมนต์ จะได้

$$\begin{aligned}
& \rho \left[U_x^2 h - \frac{\partial}{\partial x} (U_x^2 h) \frac{\Delta X}{2} \right] + \rho \left[U_x U_y h - \frac{\partial}{\partial y} (U_x U_y h) \frac{\Delta Y}{2} \right] \\
& - \rho \left[U_x^2 h + \frac{\partial}{\partial x} (U_x^2 h) \frac{\Delta X}{2} \right] - \rho \left[U_x U_y h + \frac{\partial}{\partial y} (U_x U_y h) \frac{\Delta Y}{2} \right] \\
& + \rho g h S_x \Delta X + \frac{1}{2} \rho g \left[(h^2 - \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\Delta X}{2}) - (h^2 + \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{\Delta X}{2}) \right] + \rho g h S_{fx} \Delta X \\
& = \frac{\partial}{\partial t} (\rho U_x h) \Delta X \quad \dots \dots \dots (2-20)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_x h) + \frac{\partial}{\partial x} (U_x^2 h) + \frac{\partial}{\partial y} (U_x U_y h) + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x} (h^2) - g h (S_x - S_{fx}) \quad \dots \dots \dots (2-21)$$

จากการกระจายเทอมในสมการที่ 2-21 และใช้ความสัมพันธ์จากสมการต่อเนื่องคูณด้วย U_x และหารด้วย h จะได้

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g (S_x - S_{fx}) \quad \dots \dots \dots (2-22)$$

ในการศึกษาครั้งนี้ ใช้การจำลองโดยวิธี cell และ link โดยกำหนดสมมติฐานให้การกระจายความเร็วสม่ำเสมอทั่วทั้งหน้าตัดการไหลในทางแกน x

เพราะฉะนั้นเทอม $\frac{\partial U_x}{\partial y}$ จะเท่ากับ 0 และ สมการที่ 2-22 จะเปลี่ยนเป็น

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g (S_x - S_{fx}) \quad \dots \dots \dots (2-23)$$

จะได้ สมการโมเมนต์ทางแกน x เป็นแบบ one dimensional

จากสมการ $U_x = \frac{Q_x}{A_x}$ และ differentiate ตามตัวแปร t จะได้

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{1}{A_x} \frac{\partial Q_x}{\partial t} - \frac{Q_x}{A_x^2} \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (2-24)$$

เมื่อคูณสมการที่ 2-10 ด้วย T_x และ นิยามาเฉพาะแกน x จะได้

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0 \quad \dots \dots \dots (2-25)$$

เมื่อ $Q_x =$ อัตราไหลทางแกน x

$A_x =$ พื้นที่หน้าตัดการไหลทางแกน x

$T_x =$ ความกว้างของหน้าตัดการไหลทางแกน x

แทนค่าสมการที่ 2-25 ลงในสมการที่ 2-24 จะได้

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{1}{A_x} \frac{\partial Q_x}{\partial t} + \frac{Q_x}{A_x^2} \frac{\partial Q_x}{\partial X} \quad \dots\dots\dots(2-26)$$

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial X} = \frac{Q_x}{A_x^2} \frac{\partial Q_x}{\partial X} - \frac{Q_x^2}{A_x^3} \frac{\partial A_x}{\partial X} \quad \dots\dots\dots(2-27)$$

แทนค่าสมการที่ 2-26 และสมการที่ 2-27 ลงในสมการที่ 2-23

$$\frac{1}{A_x} \frac{\partial Q_x}{\partial t} + \frac{2Q_x}{A_x^2} \frac{\partial Q_x}{\partial X} - \frac{Q_x^2}{A_x^3} \frac{\partial A_x}{\partial X} + g \left(\frac{\partial h}{\partial X} - S_x \right) + g S_{fx} = 0 \quad \dots\dots\dots(2-28)$$

คูณสมการที่ 2-28 ด้วย A_x จะได้

$$\frac{\partial Q_x}{\partial t} + \frac{2Q_x}{A_x} \frac{\partial Q_x}{\partial X} - \frac{Q_x^2}{A_x^2} \frac{\partial A_x}{\partial X} + g A_x \frac{\partial h}{\partial X} + g A_x S_{fx} = 0 \quad \dots\dots\dots(2-29)$$

คิด friction slope จากสูตรของ Manning

$$S_{fx} = \frac{n^2 \cdot Q_x |Q_x|}{A_x^2 R_x^{4/3}}$$

แทนค่า S_{fx} ในสมการที่ 2-29 จะได้

$$\frac{\partial Q_x}{\partial t} + \frac{2Q_x}{A_x} \frac{\partial Q_x}{\partial X} - \frac{Q_x^2}{A_x^2} \frac{\partial A_x}{\partial X} + g A_x \frac{\partial h}{\partial X} + \frac{g n^2}{A_x R_x^{4/3}} Q_x |Q_x| = 0 \quad \dots\dots\dots(2-30)$$

2.1.2.2 สมการโมเมนตัมทางแกน y (Momentum Equation in y direction)

จากกฎการคงตัวของโมเมนตัมเมื่อใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมทางแกน y จะได้

ก. อัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเข้าออกสุทธิที่ผิวหน้าควบคุม

= โมเมนตัมเข้ามวลสาร - โมเมนตัมออกจากมวลสาร

ดังนั้น โมเมนตัมเข้า = โมเมนตัมเข้าเนื่องจาก U_y + โมเมนตัมเข้าเนื่องจาก U_x

$$= \rho \left[U_y (U_y h) - \frac{\partial}{\partial Y} [U_y (U_y h)] \frac{\Delta Y}{2} \right] + \rho \left[U_x (U_y h) - \frac{\partial}{\partial X} [U_x (U_y h)] \frac{\Delta X}{2} \right] \quad \dots\dots\dots(2-31)$$

และ โมเมนตัมออก = โมเมนตัมออกเนื่องจาก U_y + โมเมนตัมออกเนื่องจาก U_x

$$= \rho \left[U_y (U_y h) + \frac{\partial}{\partial Y} [U_y (U_y h)] \frac{\Delta Y}{2} \right] + \rho \left[U_x (U_y h) + \frac{\partial}{\partial X} [U_x (U_y h)] \frac{\Delta X}{2} \right] \quad \dots\dots\dots(2-32)$$

ข. แรงกระทำภายนอก พิจารณาจากแรงดังต่อไปนี้

1) แรงเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (gravity force)

$$F_g = \rho g h \Delta Y \sin \theta_y = \rho g h S_y \Delta Y \dots\dots\dots(2-33)$$

2) แรงเนื่องจากความดันสถิต (hydrostatic force)

$$F_p = \int_0^h \rho dz = \rho g \int_0^h (h-z) dz = \frac{1}{2} \rho g h^2 \dots\dots\dots(2-34)$$

3) แรงเสียดทาน เมื่อ S_{fy} เท่ากับ friction slope และ $U_y = \frac{1}{n} R_y^{2/3} S_{fy}^{1/2}$

จะได้

$$F_s = \rho h g S_{fy} \Delta Y \dots\dots\dots(2-35)$$

ค. อัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนต์ในปริมาตรควบคุม

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\rho U_y h) \Delta Y \dots\dots\dots(2-36)$$

เมื่อ S_y = ความลาดเอียงของท้องน้ำทางแกน y

S_{fy} = friction slope ทางแกน y

R_y = รัศมีชลศาสตร์ (hydraulic radius) ทางแกน y

แทนค่าสมการที่ 2-31 ถึงสมการที่ 2-36 ลงในกฎการคงตัวของโมเมนต์ จะได้

$$\begin{aligned} & \rho \left[U_y^2 h - \frac{\partial}{\partial Y} (U_y^2 h) \frac{\Delta Y}{2} \right] + \rho \left[U_x U_y h - \frac{\partial}{\partial X} (U_x U_y h) \frac{\Delta X}{2} \right] \\ & - \rho \left[U_y^2 h + \frac{\partial}{\partial Y} (U_y^2 h) \frac{\Delta Y}{2} \right] - \rho \left[U_x U_y h + \frac{\partial}{\partial X} (U_x U_y h) \frac{\Delta X}{2} \right] \\ & + \rho g h S_y \Delta Y + \frac{1}{2} \rho g \left[(h^2 - \frac{\partial h^2}{\partial Y} \frac{\Delta Y}{2}) - (h^2 + \frac{\partial h^2}{\partial Y} \frac{\Delta Y}{2}) \right] + \rho g h S_{fy} \Delta Y \\ & = \frac{\partial}{\partial t} (\rho U_y h) \Delta Y \dots\dots\dots(2-37) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_y h) + \frac{\partial}{\partial Y} (U_y^2 h) + \frac{\partial}{\partial X} (U_x U_y h) + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial Y} (h^2) = g h (S_y - S_{fy}) \dots\dots\dots(2-38)$$

จากการกระจายเทอมในสมการที่ 2-38 และใช้ความสัมพันธ์จากสมการต่อเนื่องด้วย U_y และ

หารด้วย h จะได้

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial Y} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial X} + g \frac{\partial h}{\partial Y} = g (S_y - S_{fy}) \quad \dots\dots (2-39)$$

การจำลองโดยวิธี cell และ link กำหนดสมมติฐานให้การกระจายความเร็วสม่ำเสมอทั่วทั้งหน้าตัดการไหลในทางแกน y
 เพราะฉะนั้นเทอม $\frac{\partial U_y}{\partial X}$ จะเท่ากับ 0 และ สมการที่ 2-39 จะเปลี่ยนเป็น

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial Y} + g \frac{\partial h}{\partial Y} = g (S_y - S_{fy}) \quad \dots\dots (2-40)$$

จะได้ สมการโมเมนต์ทางแกน y เป็นแบบ one dimensional

จากสมการ $U_y = \frac{Q_y}{A_y}$ และ differentiate ตามตัวแปร t จะได้

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} = \frac{1}{A_y} \frac{\partial Q_y}{\partial t} - \frac{Q_y}{A_y^2} \frac{\partial A_y}{\partial t} \quad \dots\dots (2-41)$$

เมื่อคูณสมการที่ 2-10 ด้วย I_y และ นิยามเฉพาะแกน y จะได้

$$\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial Q_y}{\partial Y} = 0 \quad \dots\dots (2-42)$$

เมื่อ $Q_y =$ อัตราไหลทางแกน y

$A_y =$ พื้นที่หน้าตัดการไหลทางแกน y

$I_y =$ ความกว้างของหน้าตัดการไหลทางแกน y

แทนค่าสมการที่ 2-42 ลงในสมการที่ 2-41

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} = \frac{1}{A_y} \frac{\partial Q_y}{\partial t} + \frac{Q_y}{A_y^2} \frac{\partial Q_y}{\partial Y} \quad \dots\dots (2-43)$$

$$U_y \frac{\partial U_y}{\partial Y} = \frac{Q_y}{A_y^2} \frac{\partial Q_y}{\partial Y} - \frac{Q_y^2}{A_y^3} \frac{\partial A_y}{\partial Y} \quad \dots\dots (2-44)$$

แทนค่าสมการที่ 2-43 และสมการที่ 2-44 ลงในสมการที่ 2-40

$$\frac{1}{A_y} \frac{\partial Q_y}{\partial t} + \frac{2Q_y}{A_y^2} \frac{\partial Q_y}{\partial Y} - \frac{Q_y^2}{A_y^3} \frac{\partial A_y}{\partial Y} + g \left(\frac{\partial h}{\partial Y} - S_y \right) + g S_{fy} = 0 \quad \dots\dots (2-45)$$

คูณสมการที่ 2-45 ด้วย A_y จะได้

$$\frac{\partial Q_y}{\partial t} + \frac{2Q_y}{A_y} \frac{\partial Q_y}{\partial Y} - \frac{Q_y^2}{A_y^2} \frac{\partial A_y}{\partial Y} + gA_y \frac{\partial H}{\partial Y} + gA_y S_{fy} = 0 \dots\dots\dots(2-46)$$

คิด friction slope จากสูตรของ Manning

$$S_{fy} = \frac{n^2}{A_y^2 R_y^{4/3}} Q_y |Q_y|$$

แทนค่า S_{fy} ในสมการที่ 2-46 จะได้

$$\frac{\partial Q_y}{\partial t} + \frac{2Q_y}{A_y} \frac{\partial Q_y}{\partial Y} - \frac{Q_y^2}{A_y^2} \frac{\partial A_y}{\partial Y} + gA_y \frac{\partial H}{\partial Y} + \frac{gn^2}{A_y R_y^{4/3}} Q_y |Q_y| = 0 \dots\dots\dots(2-47)$$

2.2 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต (Initial Condition and Boundary Condition)

ในการแก้สมการพื้นฐานของการไหลโดยอาศัยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขนั้น จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขตให้ เพื่อใช้ในการคำนวณ เงื่อนไขดังกล่าวอาจจะได้จากการวัดในสนามหรือกำหนดค่าที่เหมาะสมขึ้น เงื่อนไขเริ่มต้นแสดงได้ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_x^* (t = 0) \\ Q_y &= Q_y^* (t = 0) \\ H &= H^* (t = 0) \end{aligned} \dots\dots\dots(2-48)$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในการคำนวณ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ส่วน คือ

- 1) ขอบเขตด้านที่กำหนดด้วยระดับน้ำ (Water Level Condition) ได้แก่ ด้านขอบเขตเปิด (Open Boundary) ซึ่งอาจหมายถึง ขอบเขตแม่น้ำ (River Boundary) และ ขอบเขตชายฝั่ง (Coastal Boundary) ในกรณีที่รู้ค่าของระดับน้ำที่ขอบเขตนั้น ๆ ซึ่งกำหนดให้เป็นขอบเขต S_H โดยที่เงื่อนไขขอบเขต คือ

$$H(t)|_{S_H} = H^*(t) \dots\dots\dots(2-49)$$

โดยที่ $H^*(t)$ เป็นค่าที่กำหนดให้

- 2) ขอบเขตด้านที่กำหนดด้วยอัตราไหล (Inflow Condition) ได้แก่ ด้านขอบเขตเปิด (Open Boundary) ซึ่งอาจหมายถึง ขอบเขตที่มีน้ำหลากจากภูเขา ในกรณีที่รู้ค่าของอัตราไหลที่ไหลเข้าหรือออกจากขอบเขต ซึ่งกำหนดให้เป็นขอบเขต S_Q เงื่อนไขขอบเขต คือ

$$\begin{aligned} Q_x(t)|_{S_Q} &= Q_x^*(t) \\ Q_y(t)|_{S_Q} &= Q_y^*(t) \end{aligned} \dots\dots\dots(2-50)$$

โดยที่ $Q_x^*(t)$ และ $Q_y^*(t)$ เป็นค่าที่กำหนดให้

2.3 สมการสำหรับอาคารบังคับน้ำ

ลักษณะการไหลในทางน้ำเปิด (open channel) นอกจากจะเป็นแบบลำน้ำ (river) หรือคลอง (Klong) แล้ว ในสภาพจริงของทางน้ำ ภายในที่ราบลุ่มอันประกอบด้วยอาคารบังคับน้ำต่าง ๆ เช่น สถานีสูบน้ำ ประตูระบายน้ำ ฝาย และท่อลอด เป็นต้น เมื่อมีอาคารบังคับน้ำ จะทำให้สถานการณ์การไหลเปลี่ยนไป ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะและขนาดของอาคารบังคับน้ำนั้น สูตรเอมไพริคัล (empirical formular) ที่ใช้อธิบายการไหลผ่านอาคารบังคับน้ำต่าง ๆ มีดังต่อไปนี้

1) สมการสำหรับประตูระบายน้ำ (ดูรูปที่ 2-2)

$$Q = C_d B D \sqrt{2g(H_1 - H_2)} \quad \dots\dots(2-51)$$

เมื่อ Q = อัตราไหล, ลบ.ม./ว.

C_d = สัมประสิทธิ์การระบายน้ำของประตูระบายน้ำ (coefficient of discharge)

B = ความกว้างของประตูระบายน้ำ, ม.

D = ความสูงของช่องเปิดของประตูระบายน้ำ, ม.

g = ความเร่งของโลก = 9.81 ม./ว²

H_1, H_2 = ระดับน้ำด้านต้นน้ำ และท้ายน้ำ ตามลำดับ, ม.

2) สมการสำหรับสถานีสูบน้ำ (ดูรูปที่ 2-2)

$$Q = P_c \quad \dots\dots(2-52)$$

เมื่อ P_c = อัตราไหลคงที่ของเครื่องสูบน้ำ, ลบ.ม./ว.

3) สมการสำหรับฝายสันกว้าง (ดูรูปที่ 2-3)

สมการการไหลของฝายสันกว้างที่ใช้ขึ้นอยู่กับลักษณะการไหล ดังต่อไปนี้

3.1 ถ้า $H_{1,j} - H_w < 2/3(H_{1-1,j} - H_w)$ การไหลเป็นแบบ free

$$Q = C_w B_w H_1 \sqrt{2gH_1} \quad \dots\dots(2-53)$$

3.2 ถ้า $H_{1,j} - H_w > 2/3(H_{1-1,j} - H_w)$ การไหลเป็นแบบ submerged

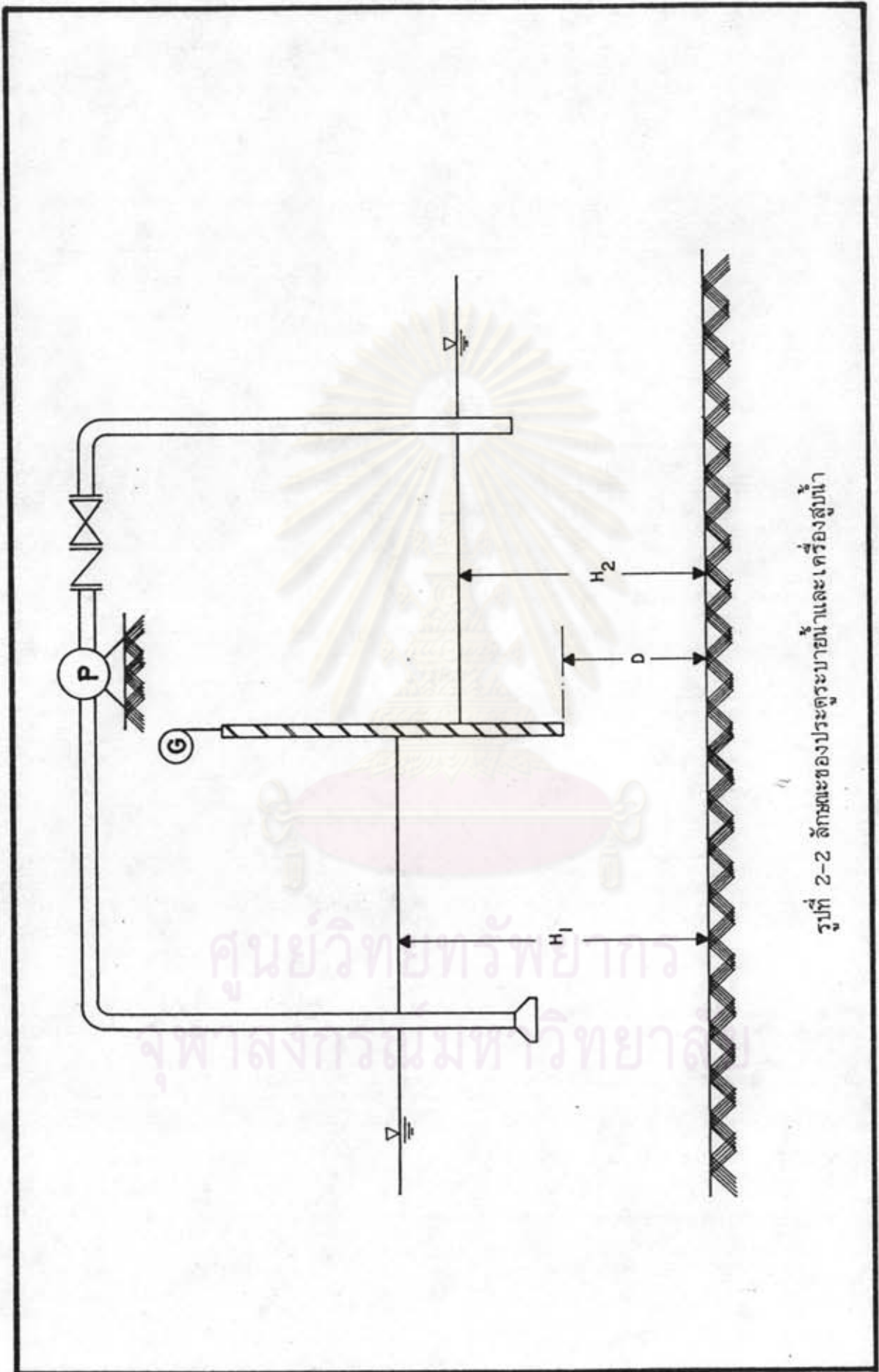
$$Q = C_w B_w H_2 \sqrt{2g(H_1 - H_2)} \quad \dots\dots(2-54)$$

เมื่อ C_w = สัมประสิทธิ์การระบายน้ำของฝายสันกว้าง (coefficient of discharge)

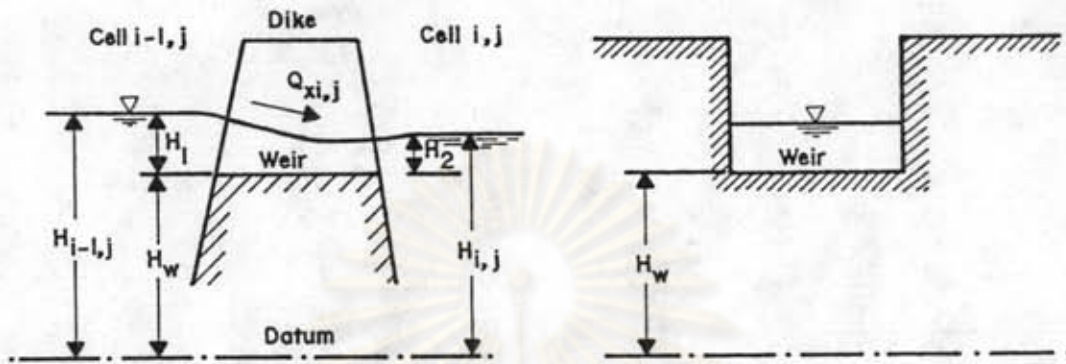
B_w = ความกว้างของสันฝาย, ม.

H_w = ระดับของสันฝาย, ม.

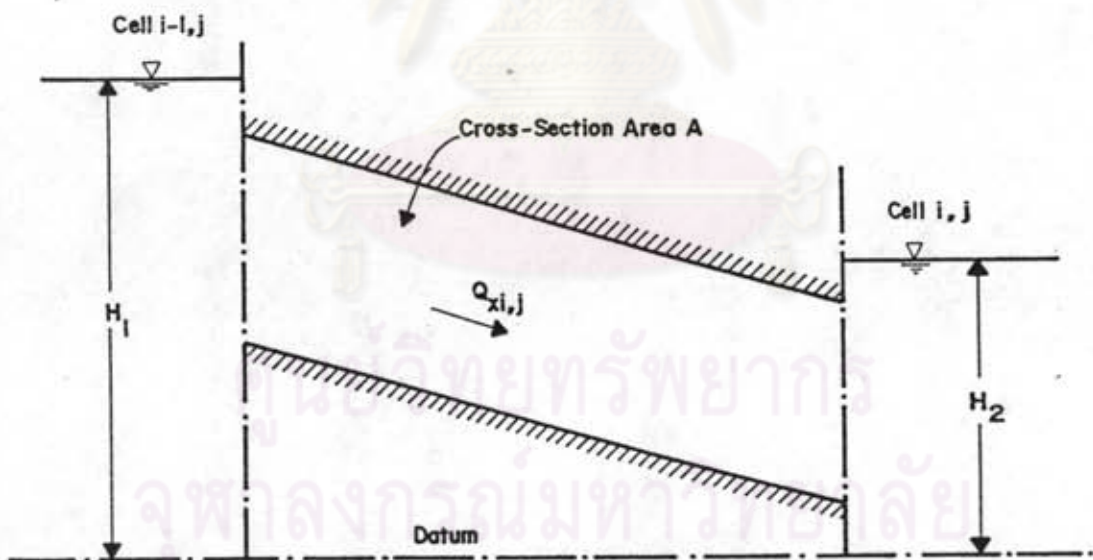
H_1, H_2 = ความลึกของน้ำเหนือระดับของสันฝายด้านต้นน้ำและท้ายน้ำตามลำดับ, ม.



รูปที่ 2-2 ลักษณะของประตูระบายน้ำและเครื่องสูบน้ำ



รูปที่ 2-3 ลักษณะของฝายสันกว้าง



รูปที่ 2-4 ลักษณะของท่อลอด

4) สมการสำหรับท่อลอด (ดูรูปที่ 2-4)

$$Q = C_c A_c \sqrt{2g(H_1 - H_2)} \quad \dots\dots\dots(2-55)$$

เมื่อ C_c = สัมประสิทธิ์การระบายน้ำของท่อลอด (coefficient of discharge)

A_c = พื้นที่หน้าตัด, m^2 .

H_1, H_2 = ระดับน้ำด้านต้นน้ำและท้ายน้ำ ตามลำดับ, m .

2.4 เทคนิคการจำลอง โดยวิธี Bi-Dimensional Model

วิธีการนี้พัฒนาขึ้นโดย DE VRIES, et al (1965) โดยแบ่งพื้นที่ศึกษาออกเป็นแบบโครงข่าย (mesh net work) ขึ้นอยู่กับลักษณะภูมิประเทศต่าง ๆ เช่น โครงข่ายของถนน คลอง และระบบระบายน้ำต่าง ๆ พื้นที่ถูกแบ่งออกเป็นส่วน ๆ เรียกว่า cell ซึ่งสามารถกำหนดแต่ละ cell ด้วยหมายเลข (i,j) และทางน้ำที่เชื่อมต่อระหว่าง cell เรียกว่า link ด้วยหมายเลข (i,j) เช่นกัน ดังรูปที่ 2-5 คุณสมบัติทางชลศาสตร์จะถูกสมมติว่าเหมือนกันตลอดในแต่ละ cell ดังนั้น ผลของการเก็บกัก (storage) และการส่งผ่านมวล (mass transfer) จำลองไว้ที่ cell ซึ่งจะแทนด้วยสมการต่อเนื่อง ส่วนผลของแรงเสียดทานชลศาสตร์ (hydraulic frictional effects) และความเฉื่อย (inertial effects) จำลองไว้ที่ link ด้วยสมการโมเมนต์ทั้งแกน x และ แกน y ดังรูปที่ 2-6 รูปที่ 2-7 แสดงการจำลองโดยวิธี control volume ของ cell เพื่อใช้ในสมการต่อเนื่อง และรูปที่ 2-8 แสดงการจำลองโดยวิธี River link type ของ link เพื่อใช้ในสมการโมเมนต์ ส่วนรูปที่ 2-9 แสดงระดับน้ำ และอัตราไหลที่ cell และ link

สมมติฐานของการจำลองวิธี Bi-Dimensional Model

1) ผิวน้ำแต่ละ cell อยู่แนวราบ ขณะคำนวณ storage ที่ cell

2) ระดับน้ำแต่ละ cell พิจารณาตรงศูนย์กลางของ cell

สมการต่อเนื่องและสมการโมเมนต์ อธิบายการเปลี่ยนแปลงของ ระดับน้ำและอัตราไหลที่ เวลาและตำแหน่งใด ๆ เทคนิคการจำลอง Bi-Dimensional สามารถเปลี่ยนสมการที่ 2-13 สมการที่ 2-30 และ สมการที่ 2-47 ได้ดังนี้

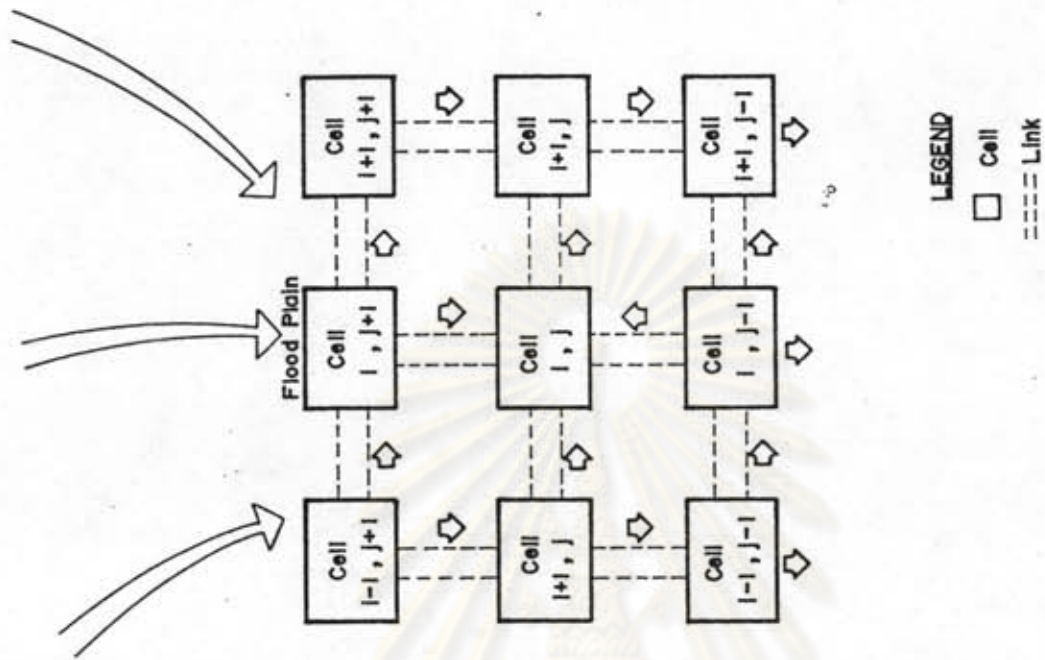
จากสมการ Continuity คือ สมการที่ 2-1 และ สมการที่ 2-13 จะได้

$$F \frac{dH}{dt} = \Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out} + R - E \quad \dots\dots\dots(2-56)$$

เมื่อ ΣQ_{in} = ผลรวมของอัตราไหลทุกชนิดที่เข้า cell

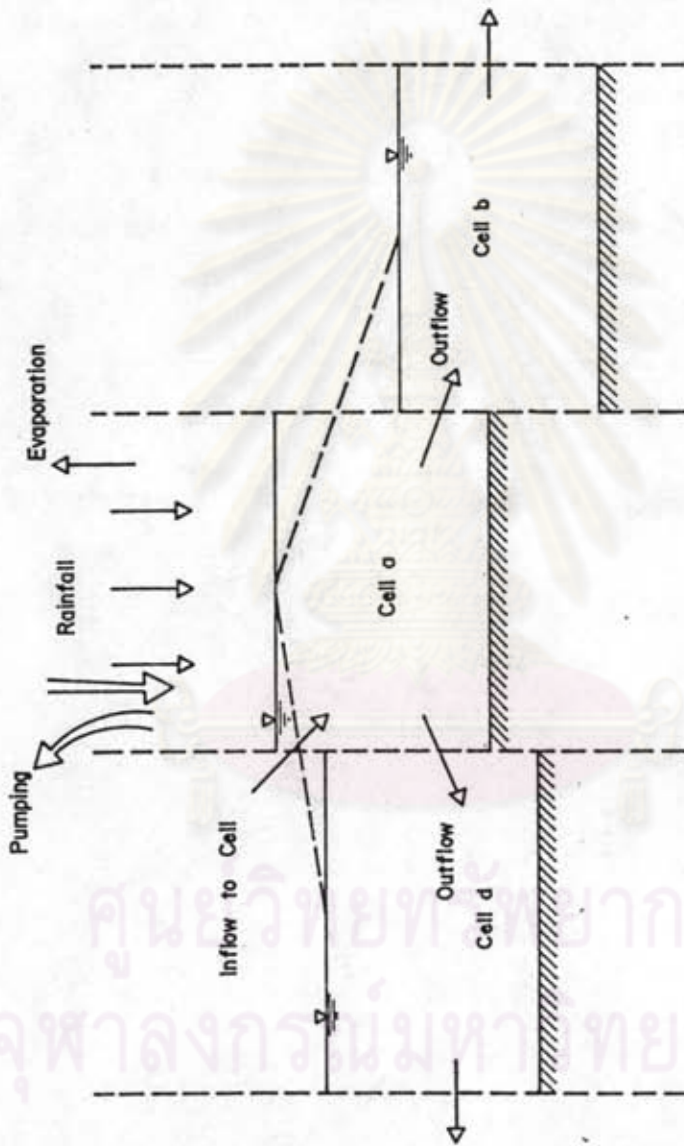
ΣQ_{out} = ผลรวมของอัตราไหลทุกชนิดที่ออกจาก cell

F = พื้นที่ผิวหน้าเปิดของ cell



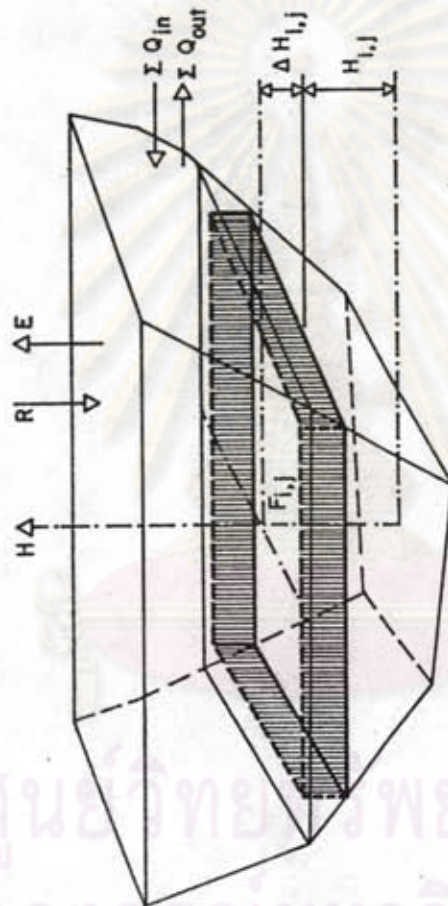
Cell $i-1, j+1$	Cell $i, j+1$	Cell $i+1, j+1$
Cell $i-1, j$	Cell $H_{i,j}$	Cell $i+1, j$
Cell $i-1, j-1$	Cell $Q_{y,i,j}$	Cell $i+1, j-1$

รูปที่ 2-5 ภาพแสดงการไหล 2 มิติ



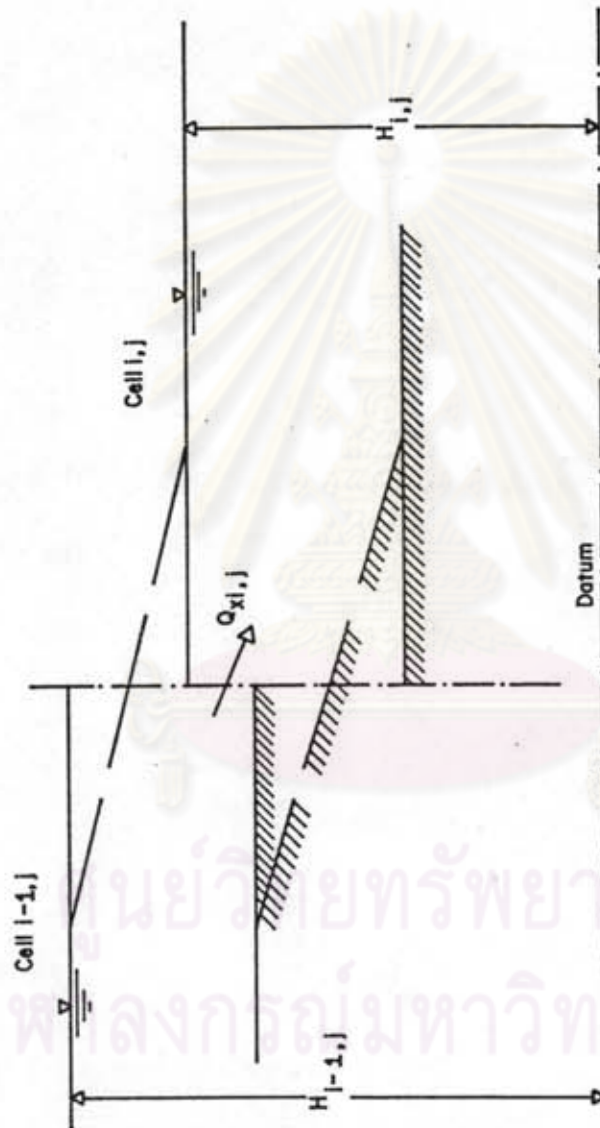
รูปที่ 2-6 เทคนิคจำลองการไหล 2 ทิศทาง

ศูนย์วิทยเทคโนโลยี
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

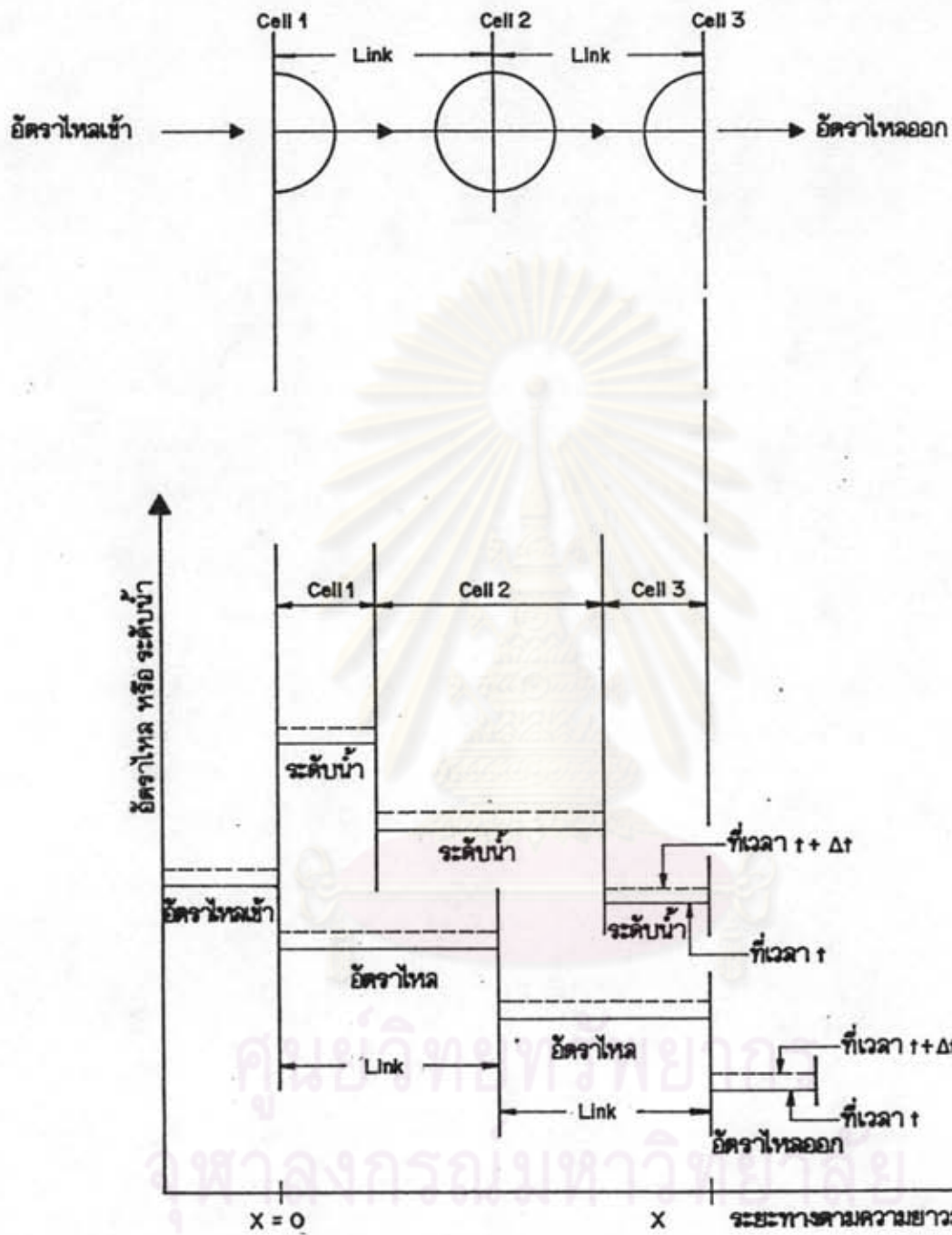


รูปที่ 2-7 เทคนิคการจำลองสมการต่อเนื่อง

ศูนย์วิจัยสุขภาพ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2-8 เทคนิคการจำลองสมการโรเมนเต็ม



รูปที่ 2-9 สมมุติฐานในการแทนค่าระดับน้ำและอัตราไหลตามเวลา

- R = ปริมาณฝนใน cell นั้นๆ ต่อหนึ่งหน่วยเวลา
E = ปริมาณการระเหยของน้ำใน cell นั้น ๆ ต่อหนึ่งหน่วยเวลา

สมการ Momentum ทางแกน x คือ สมการที่ 2-30 จะได้

ค่า derivative ที่เวลา t แต่ละเทอมเปลี่ยนได้ ดังนี้

$$\frac{dQ_x}{dX} = - \frac{T_{xi,j}}{2} \left[\left(\frac{\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out}}{F} \right)_{i-1,j} + \left(\frac{\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out}}{F} \right)_{i,j} \right]$$

$$\frac{dA_x}{dX} = \frac{T_{xi,j}}{X_{i,j}} (H_{i,j} - H_{i-1,j}) - \frac{T_{xi,j}}{X_{i,j}} (Z_{i,j} - Z_{i-1,j})$$

$$\frac{dH}{dX} = \frac{H_{i,j} - H_{i-1,j}}{X_{i,j}}$$

โดยที่ subscript i-1,j หมายถึง cell ด้านซ้ายของ link ที่พิจารณา
subscript i,j หมายถึง cell ด้านขวาของ link ที่พิจารณา

และ $X_{i,j}$ = ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางเซลล์ของ cell i-1,j และ cell i,j
แทนค่าแต่ละเทอมลงในสมการที่ 2-30 จะได้

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{gA_{xi,j}}{X_{i,j}} \frac{Q_{xi,j}}{gA_{xi,j}^2} \frac{T_{xi,j}}{X_{i,j}} \left[\left(\frac{\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out}}{F} \right)_{i-1,j} + \left(\frac{\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out}}{F} \right)_{i,j} \right]$$

$$- \frac{(1 - Q_{xi,j}^2 T_{xi,j}) (H_{i,j} - H_{i-1,j})}{gA_{xi,j}^3} - \frac{Q_{xi,j}^2 T_{xi,j} (Z_{i,j} - Z_{i-1,j})}{gA_{xi,j}^3} - \frac{n^2 X_{i,j} Q_{xi,j} |Q_{xi,j}|}{A_{xi,j}^2 R_{xi,j}^{4/3}} \dots (2-57)$$

สมการ Momentum ทางแกน y คือ สมการที่ 2-47 จะได้

ค่า derivative ที่เวลา t แต่ละเทอมเปลี่ยนได้ ดังนี้

$$\frac{dQ_y}{dY} = - \frac{T_{yi,j}}{2} \left[\left(\frac{\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out}}{F} \right)_{i,j-1} + \left(\frac{\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out}}{F} \right)_{i,j} \right]$$

$$\frac{dA_y}{dY} = \frac{T_{yi,j}}{Y_{i,j}} (H_{i,j} - H_{i,j-1}) - \frac{T_{yi,j}}{Y_{i,j}} (Z_{i,j} - Z_{i,j-1})$$

$$\frac{dH}{dY} = \frac{H_{i,j} - H_{i,j-1}}{Y_{i,j}}$$

โดยที่ subscript i,j-1 หมายถึง cell ด้านซ้ายของ link ที่พิจารณา
subscript i,j หมายถึง cell ด้านขวาของ link ที่พิจารณา

และ $Y_{i,j}$ = ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางเซลล์ของ cell i,j-1 และ cell i,j

แทนค่าแต่ละเทอมลงในสมการที่ 2-47 จะได้

$$\frac{dQ_y}{dt} = \frac{gA_{y,i,j}}{Y_{i,j}} \frac{Q_{y,i,j}}{gA_{y,i,j}^2} \frac{Y_{i,j}}{T_{y,i,j}} \left[\left(\frac{I_{Q_{in}} - I_{Q_{out}}}{F} \right)_{i,j-1} + \left(\frac{I_{Q_{in}} - I_{Q_{out}}}{F} \right)_{i,j} \right]$$

$$- \frac{(1 - Q_{y,i,j}^2 T_{y,i,j})}{gA_{y,i,j}^3} (H_{i,j} - H_{i,j-1}) - \frac{Q_{y,i,j}^2 T_{y,i,j}}{gA_{y,i,j}^3} (Z_{i,j} - Z_{i,j-1}) - \frac{n^2 Y_{i,j}}{A_{y,i,j}^2 R_{y,i,j}^{4/3}} |Q_{y,i,j}| \dots (2-58)$$

2.5 สมการ finite-difference

วิธีการจำลองสภาพโดยแบบจำลองนี้ ใช้สมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย (partial differential) ดังที่แสดงไว้ในสมการพื้นฐาน การแก้สมการเหล่านี้ไม่สามารถคำนวณคำตอบโดยตรง จำเป็นต้องใช้สมมติฐานบางประการ และเทคนิคการคำนวณคำตอบโดยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) การศึกษานี้เลือกใช้วิธี finite-difference (FDM) วิธี finite-difference เป็นวิธีหนึ่งที่สามารถหาคำตอบได้ โดยการแบ่งการคำนวณออกเป็นตอนๆ (discretization) แล้วเริ่มคำนวณจากจุดเริ่มต้น ซึ่งทราบค่าแล้ว (initial condition) ต่อจากนั้นจะคำนวณที่ค่าถัดไปเรื่อยๆทีละน้อย

การคำนวณโดยวิธี finite-difference แบ่งเป็นวิธีใหญ่ ๆ ได้ 2 แบบ คือ แบบ explicit scheme และแบบ implicit scheme ในการคำนวณแบบ explicit scheme ค่าที่ mesh ถัดไปเป็นฟังก์ชันของค่าเริ่มต้น หรือ ค่าตอบจากการคำนวณ step ก่อน และค่าที่ขอบเขตเท่านั้นจึงสามารถคำนวณค่าที่ mesh ถัดไปได้ทันที ส่วนการคำนวณแบบ implicit scheme ค่าที่ mesh ถัดไปเป็นฟังก์ชันของค่าเริ่มต้น ค่าที่ขอบเขต และค่าใน mesh เดียวกันที่ตำแหน่งข้างเคียงและในเวลาเดียวกันด้วย การคำนวณจำต้องคำนวณโดยวิธีคำนวณซ้ำ (iteration) หรือ โดย linearizing เทอมที่เป็น non-linear แล้วหาคำตอบโดยการแก้สมการเชิงเส้นพร้อมกัน

สมการ Continuity และ Momentum สามารถคำนวณหาอัตราการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลา Δt โดยประมาณจากค่า derivative ที่เวลา t และเวลา $t + \Delta t$ ดังนี้

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = (1 - \theta) \left. \frac{dH}{dt} \right|_t + \theta \left. \frac{dH}{dt} \right|_{t+\Delta t} \dots (2-59)$$

$$\frac{\Delta Q_x}{\Delta t} = (1 - \theta) \left. \frac{dQ_x}{dt} \right|_t + \theta \left. \frac{dQ_x}{dt} \right|_{t + \Delta t} \dots (2-60)$$

$$\frac{\Delta Q_y}{\Delta t} = (1 - \theta) \left. \frac{dQ_y}{dt} \right|_t + \theta \left. \frac{dQ_y}{dt} \right|_{t + \Delta t} \dots (2-61)$$

เมื่อ ΔH = การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำในเวลา Δt

$\Delta Q_x, \Delta Q_y$ = การเปลี่ยนแปลงของอัตราไหลทางแกน x และแกน y ในเวลา Δt

$t, t + \Delta t$ = Subscript แทนเวลาที่เริ่มต้นและสิ้นสุด

θ = weighting coefficient $0 \leq \theta \leq 1$

= 0 (explicit method)

= 1 (fully implicit method)

= 0.5 (Crank-Nicolson Implicit Method)

= 0.55 VREUGDENHIL (1968) แนะนำเพื่อให้เกิด Numerical Stability และความถูกต้องในการคำนวณ

สมการ Continuity (สำหรับ cell i, j)

$$F \frac{\Delta H}{\Delta t} = I Q_{in} - I Q_{out} + \theta I \Delta Q_{in} - \theta I \Delta Q_{out} + R - E \quad \dots \dots \dots (2-62)$$

$$F \frac{\Delta H}{\Delta t} - \theta I \Delta Q_{in} + \theta I \Delta Q_{out} = I Q_{in} - I Q_{out} + R - E \quad \dots \dots \dots (2-63)$$

สมการ Momentum ทางแกน x (สำหรับ link i, j)

$$\Delta H_{i-1,j} \alpha_{xi,j} + \Delta H_{i,j} (-\alpha_{xi,j}) + \Delta Q_{xi,j} \beta_{xi,j} + \left(\frac{\theta Q_{xi,j} T_{xi,j} I \Delta Q_{in}}{A_{xi,j} F} \right)_{i-1,j} - \left(\frac{\theta Q_{xi,j} T_{xi,j} I \Delta Q_{out}}{A_{xi,j} F} \right)_{i,j} = \gamma_{xi,j} \quad \dots \dots \dots (2-64)$$

$$\alpha_{xi,j} = \frac{\theta g A_{xi,j} (1 - \frac{Q_{xi,j}^2 T_{xi,j}}{g A_{xi,j}^3})}{X_{i,j}}$$

$$\beta_{xi,j} = \frac{\theta T_{xi,j}}{A_{xi,j}} \left[\left(\frac{I Q_{in} - I Q_{out} - Q_{xi,j}}{F} \right) + \left(\frac{I Q_{in} - I Q_{out} + Q_{xi,j}}{F} \right)_{i,j} \right] + \frac{2\theta Q_{xi,j} T_{xi,j}}{X_{i,j} A_{xi,j}^2} (H_{i,j} - H_{i-1,j}) - (Z_{i,j} - Z_{i-1,j}) - \frac{2\theta g n^2 |Q_{xi,j}|}{A_{xi,j} R_{i,j}^{4/3}} - \frac{1}{\Delta t}$$

$$\gamma_{xi,j} = - \frac{g A_{xi,j}}{X_{i,j}} \left[\frac{Q_{xi,j} X_{i,j} T_{xi,j}}{g A_{xi,j}^2} \left[\left(\frac{I Q_{in} - I Q_{out}}{F} \right)_{i-1,j} + \left(\frac{I Q_{in} - I Q_{out}}{F} \right)_{i,j} \right] - \left(1 - \frac{Q_{xi,j}^2 T_{xi,j}}{g A_{xi,j}^3} \right) (H_{i,j} - H_{i-1,j}) - \frac{Q_{xi,j}^2 T_{xi,j}}{g A_{xi,j}^3} (Z_{i,j} - Z_{i-1,j}) - \frac{n^2 X_{i,j} Q_{xi,j} |Q_{xi,j}|}{A_{xi,j}^2 R_{i,j}^{4/3}} \right]$$

สมการ Momentum ทางแกน y (สำหรับ link i,j)

$$\Delta H_{i,j-1} \alpha_{yi,j} + \Delta H_{i,j} (-\alpha_{yi,j}) + \Delta Q_{yi,j} \beta_{yi,j} + \left(\frac{\theta Q_{yi,j} T_{yi,j} \Sigma \Delta Q_{in}}{A_{yi,j} F} \right)_{i,j-1} - \left(\frac{\theta Q_{yi,j} T_{yi,j} \Sigma \Delta Q_{out}}{A_{yi,j} F} \right)_{i,j} = \gamma_{yi,j} \quad \dots\dots (2-65)$$

$$\text{เมื่อ } \alpha_{yi,j} = \frac{\theta g A_{yi,j} (1 - \frac{Q_{yi,j}^2 F_{yi,j}}{g A_{yi,j}^3})}{Y_{i,j}}$$

$$\beta_{yi,j} = \frac{\theta T_{yi,j}}{A_{yi,j}} \left[\left(\frac{\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out} - Q_{yi,j}}{F} \right)_{i,j-1} + \left(\frac{\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out} + Q_{yi,j}}{F} \right)_{i,j} \right] + \frac{2\theta Q_{yi,j} T_{yi,j} (H_{i,j} - H_{i,j-1}) - (Z_{i,j} - Z_{i,j-1})}{Y_{i,j} A_{yi,j}^2} - \frac{2\theta g n^2 |Q_{yi,j}|}{A_{yi,j} R_{i,j}^{4/3}} \frac{1}{\Delta t}$$

$$\gamma_{yi,j} = - \frac{g A_{yi,j}}{Y_{i,j}} \left[\frac{Q_{yi,j} Y_{i,j} T_{yi,j}}{g A_{yi,j}^2} \left[\left(\frac{\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out}}{F} \right)_{i,j-1} + \left(\frac{\Sigma Q_{in} - \Sigma Q_{out}}{F} \right)_{i,j} \right] - \frac{(1 - \frac{Q_{yi,j}^2 T_{yi,j}}{g A_{yi,j}^3}) (H_{i,j} - H_{i,j-1})}{g A_{yi,j}^3} - \frac{Q_{yi,j}^2 T_{yi,j} (Z_{i,j} - Z_{i,j-1})}{g A_{yi,j}^3} - \frac{n^2 Y_{i,j} Q_{yi,j} |Q_{yi,j}|}{A_{yi,j}^2 R_{i,j}^{4/3}} \right]$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ที่มาของสมการที่ 2-63 สมการที่ 2-64 และ สมการที่ 2-65 แสดงในภาคผนวก ก

สมการที่ 2-63 คือสมการ finite-difference ของสมการ Continuity สำหรับ cell i,j สมการที่ 2-64 คือสมการ finite-difference ของสมการ Momentum ทางแกน x สำหรับ link i,j และสมการที่ 2-65 คือสมการ finite-difference ของสมการ Momentum ทางแกน y สำหรับ link i,j

2.6 สมการ finite-difference สำหรับอาคารบังคับน้ำ

สมการ finite-difference ในหัวข้อที่ 2.5 เป็นสมการหลักสำหรับการจำลองการไหลในทางน้ำเปิด (open channel) แบบลำน้ำ (river) หรือคลอง (klong) ในแบบจำลอง Bi-dimensional ที่สร้างขึ้นนี้ ได้บรรจุส่วนที่จะจำลองสภาพที่มีอาคารบังคับน้ำต่าง ๆ ไว้ ดังที่ได้แสดงรายละเอียดของสูตรเอมไพริคัลของอาคารบังคับน้ำต่าง ๆ ในหัวข้อที่ 2.3 ฉะนั้นแบบจำลองจึงสามารถประยุกต์ใช้กับอาคารบังคับน้ำได้อย่างสะดวก โดยแทนสมการ finite-difference ของอาคารบังคับน้ำที่ต้องการ ลงในสมการโมเมนต์ตามทางแกน x หรือ ทางแกน y การเปลี่ยนสูตรเอมไพริคัลเป็นสมการ finite-difference ทำได้โดยแทนความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} Q &= Q + \theta \Delta Q \\ H_1 &= H_1 + \theta \Delta H_1 \\ H_2 &= H_2 + \theta \Delta H_2 \end{aligned} \dots\dots\dots (2-66)$$

ลงในสูตรเอมไพริคัลของอาคารบังคับน้ำนั้น ๆ จะได้สมการ finite-difference ที่ต้องการ รายละเอียดของสมการ finite-difference สำหรับอาคารบังคับน้ำต่าง ๆ มีดังต่อไปนี้

1) สมการสำหรับประตูระบายน้ำ และสถานีสูบน้ำ

ในแบบจำลองนี้ สามารถกำหนดให้มีทั้งประตูระบายน้ำ และสถานีสูบน้ำตั้งอยู่ที่เดียวกัน หรือมีเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งก็ได้ (รูปที่ 2-2) โดยกำหนดให้เครื่องสูบน้ำเป็นชนิดที่มีอัตราไหลคงที่ ดังนั้น สมการ finite-difference สำหรับประตูระบายน้ำ และสถานีสูบน้ำ ในกรณีต่าง ๆ มีดังต่อไปนี้

1.1 กรณีประตูระบายน้ำเปิด และเครื่องสูบน้ำปิด เมื่อแทนค่าสมการที่ 2-66 ลงในสมการที่ 2-51 จะได้

$$Q + \theta \Delta Q = C_{\#} B_{\#} D \sqrt{2g(H_1 + \theta \Delta H_1 - H_2 - \theta \Delta H_2)} \dots\dots\dots (2-67)$$

$$\theta \Delta H_1 - \theta \Delta H_2 - \frac{\theta |Q| \Delta Q}{g C_{\#}^2 B_{\#}^2 D^2} = \frac{Q^2}{2g C_{\#}^2 B_{\#}^2 D^2} - H_1 + H_2 \dots\dots\dots (2-68)$$

1.2 กรณีประตูระบายน้ำเปิด และเครื่องสูบน้ำเปิด เมื่อรวมอัตราไหลของประตูระบายน้ำ (สมการที่ 2-51) กับ อัตราไหลของเครื่องสูบน้ำ (สมการที่ 2-52) จะได้

$$Q = C_{\#} B_{\#} D \sqrt{2g(H_1 - H_2)} + P_c \dots\dots\dots (2-69)$$

เมื่อแทนสมการที่ 2-66 ลงในสมการที่ 2-69 จะได้

$$Q + \theta \Delta Q = C_{\#} B_{\#} D \sqrt{2g(H_1 + \theta \Delta H_1 - H_2 - \theta \Delta H_2)} + P_c \dots\dots\dots (2-70)$$

$$\theta \Delta H_1 - \theta \Delta H_2 - \frac{\theta |Q - P_c| \Delta Q}{g C_{\#}^2 B_{\#}^2 D^2} = \frac{(Q - P_c)^2}{2g C_{\#}^2 B_{\#}^2 D^2} - H_1 + H_2 \dots\dots\dots (2-71)$$

1.3 กรณีประตุน้ำเปิด และเครื่องสูบน้ำเปิด เมื่อแทนสมการที่ 2-66 ลงในสมการที่ 2-69 จะได้

$$Q + \theta \Delta Q = P_c \quad \dots\dots\dots (2-72)$$

$$\theta \Delta Q = 0 \quad \dots\dots\dots (2-73)$$

2) สมการสำหรับฝายสันกว้าง

สมการการไหลของฝายสันกว้าง (รูปที่ 2-3) ในกรณีต่าง ๆ เมื่อเขียนเป็นสมการ finite-difference จะมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 ถ้า $H_{1,j} - H_2 < 2/3(H_{1-1,j} - H_u)$ ซึ่งการไหลเป็นแบบ free เมื่อแทนค่าสมการที่ 2-66 ลงในสมการที่ 2-53 จะได้

$$Q + \theta \Delta Q = C_u B_u (H_1 + \theta \Delta H_1) \sqrt{2g(H_1 + \theta \Delta H_1)} \quad \dots\dots\dots (2-74)$$

$$3\theta H_1^2 \Delta H_1 - \frac{\theta |Q| \Delta Q}{g C_u^2 B_u^2} = \frac{Q^2}{2g C_u^2 B_u^2} - H_1^3 \quad \dots\dots\dots (2-75)$$

2.2 ถ้า $H_{1,j} - H_u > 2/3(H_{1-1,j} - H_u)$ ซึ่งการไหลเป็นแบบ submerged เมื่อแทนสมการที่ 2-66 ลงในสมการที่ 2-54 จะได้

$$Q + \theta \Delta Q = C_u B_u (H_2 + \theta \Delta H_2) \sqrt{2g(H_1 + \theta \Delta H_1 - H_2 - \theta \Delta H_2)} \quad \dots\dots\dots (2-76)$$

$$\theta H_2^2 \Delta H_1 - \theta (3H_2^2 - 2H_1 H_2) \Delta H_2 - \frac{\theta |Q| \Delta Q}{g C_u^2 B_u^2} = \frac{Q^2}{2g C_u^2 B_u^2} - H_1 H_2^2 + H_2^3 \quad \dots\dots\dots (2-77)$$

3) สมการสำหรับท่อลอด

ท่อลอดมีลักษณะการไหลดังรูปที่ 2-4 และ มีความสัมพันธ์ดังสมการที่ 2-55 จากความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถเขียนในรูปสมการ finite-difference ได้ โดยแทนค่าสมการที่ 2-66 ลงในสมการที่ 2-55 จะได้

$$Q + \theta \Delta Q = C_c A_c \sqrt{2g(H_1 + \theta \Delta H_1 - H_2 - \theta \Delta H_2)} \quad \dots\dots\dots (2-78)$$

$$\theta \Delta H_1 - \theta \Delta H_2 - \frac{\theta |Q| \Delta Q}{g C_c^2 A_c^2} = \frac{Q^2}{2g C_c^2 A_c^2} - H_1 + H_2 \quad \dots\dots\dots (2-79)$$

2.7 สมการ finite-difference สำหรับทางน้ำที่กำหนดค่าอัตราไหล

นอกจากประเภทของทางน้ำที่มีลักษณะการไหลเป็นแบบลำนํ้า หรือ มีอาคารบังคับนํ้าแบบต่าง ๆ แล้ว การไหลของทางน้ำแบบที่สามารถรู้ค่าอัตราไหลที่กำหนดให้ที่เวลาต่าง ๆ ก็มียุ่หลาย

กรณี ซึ่งสามารถกำหนดความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการ finite-difference ได้โดยมีรายละเอียด ขึ้นอยู่กับประเภทของทางน้ำ ดังต่อไปนี้

1) สมการสำหรับขอบเขตปิด

ทางน้ำแบบนั้น ถือว่า ไม่มีการไหล หรือ อัตราไหลที่เวลาต่าง ๆ มีค่าเป็นศูนย์ เกิดขึ้นในกรณีต่าง ๆ เช่น พื้นที่อยู่ติดกับถนน หรือ คลองส่งน้ำ ประตูระบายน้ำและเครื่องสูบน้ำอยู่ในสภาพปิด หรือ ไม่มีการไหลล้นข้ามสันฝาย เป็นต้น รายละเอียดของสมการ finite-difference มีดังนี้

$$Q = Q_c^*(t) = 0 \quad \dots\dots(2-80)$$

$$Q + \Delta Q = Q_c^*(t + \Delta t) = 0 \quad \dots\dots(2-81)$$

เมื่อ $Q_c^*(t) =$ อัตราไหลที่กำหนดให้ของขอบเขตปิดที่เวลา t

$Q_c^*(t + \Delta t) =$ อัตราไหลที่กำหนดให้ของขอบเขตปิดที่เวลา $t + \Delta t$

$$\Delta Q = 0 \quad \dots\dots(2-82)$$

2) สมการสำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่เป็นอัตราไหลที่กำหนดให้

ในกรณีที่สามารถรู้ค่าอัตราไหลที่เวลาต่าง ๆ ที่ไหลผ่านทางน้ำเข้ามาในขอบเขตของพื้นที่ เช่น อัตราไหลของน้ำหลากจากภูเขา เป็นต้น ก็สามารถกำหนดความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการ finite-difference ได้ดังนี้

จากสมการที่ 2-50 จะได้ $Q = Q_b^*(t) \quad \dots\dots(2-83)$

$$Q + \Delta Q = Q_b^*(t + \Delta t) \quad \dots\dots(2-84)$$

เมื่อ $Q_b^*(t) =$ อัตราไหลที่กำหนดให้ของเงื่อนไขขอบเขตที่เวลา t

$Q_b^*(t + \Delta t) =$ อัตราไหลที่กำหนดให้ของเงื่อนไขขอบเขตที่เวลา $t + \Delta t$

$$\Delta Q = Q_b^*(t + \Delta t) - Q_b^*(t) \quad \dots\dots(2-85)$$

3) สมการสำหรับทางน้ำที่ควบคุมโดยอัตราไหลมากที่สุดที่กำหนดให้

ในกรณีที่ต้องการควบคุมอัตราไหลผ่านทางน้ำบางประเภท เช่น ประตูระบายน้ำ โดยที่สามารถกำหนดอัตราไหลมากที่สุดที่เวลาต่าง ๆ ได้นี้ สามารถกำหนดความสัมพันธ์ในรูปของสมการ finite-difference ได้ดังนี้

$$Q = Q_m^*(t) \quad \dots\dots(2-86)$$

$$Q + \Delta Q = Q_m^*(t + \Delta t) \quad \dots\dots(2-87)$$

เมื่อ $Q_m^*(t) =$ อัตราไหลมากที่สุดที่กำหนดให้ของที่เวลา t

$Q_m^*(t + \Delta t) =$ อัตราไหลมากที่สุดที่กำหนดให้ของที่เวลา $t + \Delta t$

$$\Delta Q = Q_m^*(t + \Delta t) - Q_m^*(t) \quad \dots\dots(2-88)$$

2.8 การแก้สมการ finite-difference

สมการ finite-difference ในหัวข้อที่ 2.5 ถึงหัวข้อที่ 2.7 เป็นสมการคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ของสภาพการไหลของโครงข่ายภายในที่รวบรวมได้ ดังที่กล่าวมาข้างต้นแล้วว่า สมการ finite-difference ที่ใช้เป็นชนิด implicit จึงไม่สามารถคำนวณการเปลี่ยนแปลงที่จุดต่าง ๆ โดยตรงได้ การคำนวณค่าที่ตำแหน่งใด ๆ จะเป็น function ของค่าที่ cell และ link ที่เวลา t และ $t + \Delta t$ ด้วย ดังนั้น การคำนวณค่าต่าง ๆ ที่เวลาถัดไปจะต้องทำการแก้สมการเชิงเส้นพร้อมกัน (simultaneous linear equation) ทุก cell และทุก link ภายในโครงข่าย และคำนวณเช่นนี้เรื่อยไปจนสิ้นสุดระยะเวลาที่ต้องการ

เมื่อแทนค่าสมการที่ 2-63 สำหรับ 1 cell สมการที่ 2-64 หรือ สมการ finite difference ของอาคารบังคับน้ำต่าง ๆ ในหัวข้อที่ 2.6 หรือสมการ finite-difference ของทางน้ำที่กำหนดค่าอัตราไหลในหัวข้อที่ 2.7 สำหรับ n link ทางแกน x และแทนค่าสมการที่ 2-65 หรือ สมการ finite-difference ของอาคารบังคับน้ำต่าง ๆ ในหัวข้อที่ 2.6 หรือสมการ finite-difference ของทางน้ำที่กำหนดค่าอัตราไหลในหัวข้อที่ 2.7 สำหรับ m link ทางแกน y จะมีรูปแบบทั่วไป ซึ่งมีตัวแปร $\Delta H_1 - \Delta H_l$, $\Delta Q_{x1} - \Delta Q_{xm}$ และ $\Delta Q_{y1} - \Delta Q_{yn}$ ดังนี้

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{cccccc}
 C_{1,1} & \Delta H_1 + \dots + C_{1,l} & \Delta H_1 + C_{1,l+1} & \Delta Q_{x1} + \dots + C_{1,l+m} & \Delta Q_{xm} + C_{1,l+m+1} & \Delta Q_{y1} + \dots + C_{1,l+m+n} & \Delta Q_{yn} = D_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 C_{1,1} & \Delta H_1 + \dots + C_{1,l} & \Delta H_1 + C_{1,l+1} & \Delta Q_{x1} + \dots + C_{1,l+m} & \Delta Q_{xm} + C_{1,l+m+1} & \Delta Q_{y1} + \dots + C_{1,l+m+n} & \Delta Q_{yn} = D_1 \\
 \hline
 C_{1+1,1} & \Delta H_1 + \dots + C_{1+1,l} & \Delta H_1 + C_{1+1,l+1} & \Delta Q_{x1} + \dots + C_{1+1,l+m} & \Delta Q_{xm} + C_{1+1,l+m+1} & \Delta Q_{y1} + \dots + C_{1+1,l+m+n} & \Delta Q_{yn} = D_{1+1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 C_{1+m,1} & \Delta H_1 + \dots + C_{1+m,l} & \Delta H_1 + C_{1+m,l+1} & \Delta Q_{x1} + \dots + C_{1+m,l+m} & \Delta Q_{xm} + C_{1+m,l+m+1} & \Delta Q_{y1} + \dots + C_{1+m,l+m+n} & \Delta Q_{yn} = D_{1+m} \\
 \hline
 C_{1+m+1,1} & \Delta H_1 + \dots + C_{1+m+1,l} & \Delta H_1 + C_{1+m+1,l+1} & \Delta Q_{x1} + \dots + C_{1+m+1,l+m} & \Delta Q_{xm} + C_{1+m+1,l+m+1} & \Delta Q_{y1} + \dots + C_{1+m+1,l+m+n} & \Delta Q_{yn} = D_{1+m+1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 C_{1+m+n,1} & \Delta H_1 + \dots + C_{1+m+n,l} & \Delta H_1 + C_{1+m+n,l+1} & \Delta Q_{x1} + \dots + C_{1+m+n,l+m} & \Delta Q_{xm} + C_{1+m+n,l+m+1} & \Delta Q_{y1} + \dots + C_{1+m+n,l+m+n} & \Delta Q_{yn} = D_{1+m+n}
 \end{array}
 \end{array}$$

หรือเขียนในรูป Matrix ดังนี้

$$\begin{array}{l}
 [C]_{1+m+n \times 1+m+n} \{X\}_{1+m+n \times 1} = \{D\}_{1+m+n \times 1} \\
 \{X\}_{1+m+n \times 1} = [C]_{1+m+n \times 1+m+n}^{-1} \{D\}_{1+m+n \times 1} \quad \dots (2-89)
 \end{array}$$

ดังนั้น ในแต่ละ time step สามารถจัดรูปได้ตั้งสมการที่ 2-89 และหาคำตอบได้โดยการแก้สมการ Simultaneous โดยวิธีกำจัดตัวแบบเกาส์ (Gaussian Elimination Method)