บทที่ 3

ตัวอย่างการหาค่าออปติมัมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้น

ความนำ

ในบทนี้ กล่าวถึงผลของการหาค่าออปติมัมและการวิเคราะห์ผลของการหาค่าออปติมัมตามวิธีการที่ได้เสนอมาแล้วในบทที่ 2 โดยยกตัวอย่างการหาค่าออปติมัมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้นขึ้นมาเพื่อใช้ในการหาค่าออปติมัม ซึ่งคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ 486DX2-66 และแบ่งการหาค่าออปติมัมออกเป็น 3 ส่วนดังนี้คือ

1. การหาค่าออปติมัมและการวิเคราะห์ผลของการหาค่าออปติมัมเมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

2. เส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมและการวิเคราะห์เส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัม โดยที่ค่า μ = 0.8 และค่า λ = 0.01 โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

3. สมรรถนะในการคำนวณหาค่าออปติมัมและการวิเคราะห์สมรรถนะในการคำนวณหาค่าออปติมัม โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ตัวอย่างที่ (3.1) การหาค่าออปติมัมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้น

จงหา $\mathbf{x} \in \Re^2$ สำหรับ Quadratic Programming Problem ซึ่งทำให้

$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{C}^T\mathbf{x}$ มีค่าต่ำสุด โดยที่ $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{B}$

ซึ่ง $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -12 \\ -10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

หรือ $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B} \leq \mathbf{0}$

$$g_1(\mathbf{x}) = 5x_1 + x_2 \leq 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -5x_1 + x_2 - 10 \leq 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 - 10 \leq 0$$

วิธีทำ

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{C}^T\mathbf{x}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ -10 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - 12x_1 + x_1x_2 - 10x_2 + x_2^2$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left\{\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{C}^T\mathbf{x}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 - 12 \\ x_1 + 2x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

จากนั้นหาคำตอบโดยใช้ **P4** ของวิธี Steepest Descent และหาคำตอบโดยใช้ **P4** ของวิธี Conjugate Gradient โดยค่าออปติมัมที่แท้จริงคือ -16.41 และจุดออปติมัมที่แท้จริง $\mathbf{x}^* = \left[-\frac{19}{22} \quad \frac{95}{22}\right]^T$ ซึ่งเป็นจุดต่ำสุดจุดเดียวสำหรับปัญหานี้

การหาค่าออปติมัมเมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆ

ในส่วนนี้ได้ทำการหาค่าออปติมัมเมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆ ซึ่งทำการหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) การหาค่าออปติมัมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้น โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient ซึ่งผลของการหาค่าออปติมัมแสดงในรูปของตาราง ดังนี้คือ

ตารางที่ 3.1 ตารางแสดงผลการหาจุดออปติมัม เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของจุดออปติมัม จำนวนรอบ และเวลาที่ใช้ในการหาค่าออปติมัม เมื่อค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau}$ = 0.01 และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ตารางที่ 3.2 ตารางแสดงผลการหาค่าออปติมัม เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของค่าออปติมัม จำนวนรอบ และเวลาที่ใช้ในการหาค่าออปติมัม เมื่อค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau}$ = 0.01 และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ตารางที่ 3.3 ตารางแสดงผลการหาจุดออปติมัม เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของจุดออปติมัม จำนวนรอบ และเวลาที่ใช้ในการหาค่าออปติมัม เมื่อค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau}$ = 0.05 และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ตารางที่ 3.4 ตารางแสดงผลการหาค่าออปติมัม เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของค่าออปติมัม จำนวนรอบ และเวลาที่ใช้ในการหาค่าออปติมัม เมื่อค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau}$ = 0.05 และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ตารางที่ 3.5 ตารางแสดงผลการหาจุดออปติมัม เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของจุดออปติมัม จำนวนรอบ และเวลาที่ใช้ในการหาค่าออปติมัม เมื่อค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau}$ = 0.1 และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ตารางที่ 3.6 ตารางแสดงผลการหาค่าออปติมัม เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของค่าออปติมัม จำนวนรอบ และเวลาที่ใช้ในการหาค่าออปติมัม เมื่อค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau}$ = 0.1 และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ตารางที่ 3.1 ผลการหาจุดออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ $T/\tau = 0.01$ และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	(x_1^*, x_2^*)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)
		Calculated	% error			Calculated	% error		
0.1	-0.864 , 4.318	-0.832 , 4.159	3.663 , 3.686	4760	0.837	-0.86 , 4.299	0.421 , 0.444	1569	0.669
0.2	-0.864 , 4.318	-0.863 , 4.315	0.074 , 0.074	4915	2.323	-0.865 , 4.325	0.158 , 0.158	1565	0.929
0.3	-0.864 , 4.318	-0.864 , 4.318	0.042 , 0.004	3765	3.476	-0.83 , 4.142	3.895 , 4.08	463	0.292
0.4	-0.864 , 4.318	-0.864 , 4.321	0.042 , 0.065	4121	5.167	-0.849 , 4.243	1.695 , 1.741	464	0.332
0.5	-0.864 , 4.318	-0.862 , 4.312	0.189 , 0.143	1988	3.998	-0.866 , 4.331	0.274 , 0.297	846	0.649
0.6	-0.864 , 4.318	-0.864 , 4.318	0.042 , 0.004	1925	4.45	-0.839 , 4.167	2.853 , 3.501	286	0.251
0.7	-0.864 , 4.318	-0.86 , 4.3	0.421 , 0.421	1325	3.267	-0.864 , 4.313	0.042 , 0.12	396	0.337
0.8	-0.864 , 4.318	-0.863 , 4.317	0.074 , 0.027	1450	4.848	-0.867 , 4.335	0.389 , 0.389	591	0.503
0.9	-0.864 , 4.318	-0.845 , 4.217	2.158 , 2.343	788	2.126	-0.863 , 4.299	0.074 , 0.444	282	0.248
1	-0.864 , 4.318	-0.843 , 4.216	2.389 , 2.366	725	2.234	-0.844 , 4.205	2.274 , 2.621	155	0.136
1.1	-0.864 , 4.318	-0.865 , 4.325	0.158 , 0.158	1717	6.774	-0.869 , 4.326	0.621 , 0.181	208	0.12
1.2	-0.864 , 4.318	-0.865 , 4.327	0.158 , 0.204	1464	6.223	-0.863 , 4.291	0.074 , 0.629	130	0.043
1.3	-0.864 , 4.318	-0.866 , 4.328	0.274 , 0.227	2520	10.876	-0.875 , 4.262	1.316 , 1.301	103	0.037
1.4	-0.864 , 4.318	-0.862 , 4.309	0.189 , 0.213	837	3.547	-0.835 , 4.127	3.316 , 4.427	80	0.033
1.5	-0.864 , 4.318	-0.855 , 4.271	1 , 1.093	654	2.636	-0.859 , 4.147	0.537 , 3.964	74	0.018
1.6	-0.864 , 4.318	-0.866 , 4.33	0.274 , 0.274	1636	8.95	-0.894 , 4.197	3.516 , 2.806	74	0.026
1.7	-0.864 , 4.318	-0.84 , 4.197	2.737 , 2.806	491	2.267	-0.809 , 4.031	6.326 , 6.651	55	0.012
1.8	-0.864 , 4.318	-0.865 , 4.325	0.158 , 0.158	871	4.459	-0.815 , 4.03	5.632 , 6.674	49	0.022
1.9	-0.864 , 4.318	-0.866 , 4.332	0.274 , 0.32	1043	5.646	-0.888 , 4.433	2.821 , 2.659	62	0.026
2	-0.864 , 4.318	-0.862 , 4.308	0.189 , 0.236	656	3.567	-0.87 , 4.348	0.737 , 0.691	967	0.117
2.1	-0.864 , 4.318	-0.863 , 4.312	0.074 , 0.143	660	3.771	-0.872 , 4.319	0.968 , 0.019	477	0.406
2.2	-0.864 , 4.318	-0.866 , 4.33	0.274 , 0.274	1368	8.181	-0.788 , 3.915	8.758 , 9.337	94	0.098
2.3	-0.864 , 4.318	-0.809 , 3.915	6.326 , 9.337	285	1.77	-0.877 , 4.262	1.547 , 1.301	58	0.045
2.4	-0.864 , 4.318	-0.868 , 4.34	0.505 , 0.505	1127	6.688	-0.909 , 4.316	5.253 , 0.051	58	0.045
2.5	-0.864 , 4.318	-0.861 , 4.306	0.305 , 0.282	556	3.179	-0.911 , 4.48	5.484 , 3.747	28	0.032
2.6	-0.864 , 4.318	-0.868 , 4.339	0.505 , 0.482	976	5.432	-0.65 , 2.095	24.737 , 51.484	41	0.004
2.7	-0.864 , 4.318	-0.859 , 4.289	0.537 , 0.676	490	2.599	-0.8 , 3.449	7.368 , 20.128	38	0.003

ตารางที่ 3.1(ต่อ) ผลการหาจุดออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ $T/\tau = 0.01$ และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	(x_1^*, x_2^*)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)
		Calculated	% error			Calculated	% error		
2.8	-0.864 , 4.318	-0.868 , 4.342	0.505 , 0.552	1180	6.03	-0.805 , 3.461	6.789 , 19.851	38	0.004
2.9	-0.864 , 4.318	-0.845 , 4.222	2.158 , 2.227	385	1.893	-0.807 , 3.468	6.558 , 19.688	38	0.003
3	-0.864 , 4.318	-0.867 , 4.336	0.389 , 0.413	688	3.27	-0.805 , 3.47	6.789 , 19.642	38	0.004
3.1	-0.864 , 4.318	-0.868 , 4.339	0.505 , 0.482	691	3.17	-0.801 , 3.466	7.253 , 19.735	38	0.003
3.2	-0.864 , 4.318	-0.868 , 4.338	0.505 , 0.459	702	3.066	-0.794 , 3.457	8.063 , 19.943	38	0.003
3.3	-0.864 , 4.318	-0.866 , 4.326	0.274 , 0.181	551	2.345	-0.763 , 3.71	11.653 , 14.084	112	0.011
3.4	-0.864 , 4.318	-0.868 , 4.342	0.505 , 0.552	936	3.855	-0.293 , 1.419	66.074 , 67.139	9	0.001
3.5	-0.864 , 4.318	-0.868 , 4.339	0.505 , 0.482	593	2.379	-0.308 , 1.453	64.337 , 66.352	9	0.001
3.6	-0.864 , 4.318	-0.861 , 4.305	0.305 , 0.305	452	1.752	-0.653 , 3.161	24.389 , 26.798	102	0.009
3.7	-0.864 , 4.318	-0.87 , 4.35	0.737 , 0.737	876	3.297	-0.338 , 1.522	60.863 , 64.754	9	0.001
3.8	-0.864 , 4.318	-0.868 , 4.341	0.505 , 0.528	613	2.222	-0.352 , 1.556	59.242 , 63.966	9	0.001
3.9	-0.864 , 4.318	-0.87 , 4.35	0.737 , 0.737	1058	3.748	-0.367 , 1.591	57.505 , 63.156	9	0.001
4	-0.864 , 4.318	-0.866 , 4.331	0.274 , 0.297	510	1.738	-0.381 , 1.626	55.884 , 62.345	9	0.001
4.1	-0.864 , 4.318	-0.87 , 4.349	0.737 , 0.714	723	2.385	-0.395 , 1.66	54.263 , 61.558	9	0.001
4.2	-0.864 , 4.318	-0.87 , 4.35	0.737 , 0.737	1295	4.165	-0.408 , 1.695	52.758 , 60.747	9	0.001
4.3	-0.864 , 4.318	-0.859 , 4.29	0.537 , 0.653	391	1.214	-0.422 , 1.73	51.137 , 59.937	9	0.001
4.4	-0.864 , 4.318	-0.864 , 4.312	0.042 , 0.143	429	1.308	-0.435 , 1.765	49.632 , 59.126	9	0.001

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 3.2 ผลการหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ $T/\tau = 0.01$ และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE $f(x_1^*, x_2^*)$	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
		Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)
		Calculated	% error			Calculated	% error		
0.1	-16.41	-16.385	0.1495	4760	0.837	-16.407	0.0156	1569	0.669
0.2	-16.41	-16.409	0.0001	4915	2.323	-16.409	0.0002	1565	0.929
0.3	-16.41	-16.405	0.0271	3765	3.476	-16.364	0.2754	463	0.292
0.4	-16.41	-16.411	0.0135	4121	5.167	-16.4	0.0575	464	0.332
0.5	-16.41	-16.414	0.0269	1988	3.998	-16.411	0.0127	846	0.649
0.6	-16.41	-16.405	0.0271	1925	4.45	-16.326	0.504	286	0.251
0.7	-16.41	-16.409	0.0018	1325	3.267	-16.393	0.0952	396	0.337
0.8	-16.41	-16.414	0.0271	1450	4.848	-16.409	0.0015	591	0.503
0.9	-16.41	-16.382	0.1637	788	2.126	-16.373	0.2193	282	0.248
1	-16.41	-16.402	0.0424	725	2.234	-16.364	0.2728	155	0.136
1.1	-16.41	-16.409	0.0002	1717	6.774	-16.367	0.2584	208	0.12
1.2	-16.41	-16.413	0.0267	1464	6.223	-16.355	0.3302	130	0.043
1.3	-16.41	-16.405	0.0277	2520	10.876	-16.153	1.5585	103	0.037
1.4	-16.41	-16.407	0.014	837	3.547	-16.269	0.8509	80	0.033
1.5	-16.41	-16.398	0.0663	654	2.636	-16.051	2.1829	74	0.018
1.6	-16.41	-16.409	0.0007	1636	8.95	-15.781	3.8287	74	0.026
1.7	-16.41	-16.389	0.1196	491	2.267	-16.305	0.6334	55	0.012
1.8	-16.41	-16.409	0.0002	871	4.459	-16.235	1.0603	49	0.022
1.9	-16.41	-16.413	0.0261	1043	5.646	-16.382	0.1655	62	0.026
2	-16.41	-16.405	0.0277	656	3.567	-16.404	0.0319	967	0.117
2.1	-16.41	-16.402	0.0409	660	3.771	-16.318	0.5573	477	0.406
2.2	-16.41	-16.409	0.0007	1368	8.181	-16.21	1.2139	94	0.098
2.3	-16.41	-15.973	2.6573	285	1.77	-16.131	1.6955	58	0.045
2.4	-16.41	-16.409	0.0026	1127	6.688	-15.895	3.134	58	0.045
2.5	-16.41	-16.411	0.0128	556	3.179	-16.219	1.1582	28	0.032
2.6	-16.41	-16.406	0.0159	976	5.432	-9.278	43.4598	41	0.004
2.7	-16.41	-16.395	0.0861	490	2.599	-14.474	11.7952	38	0.003

ตารางที่ 3.2(ต่อ) ผลการหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ $T/\tau = 0.01$ และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	$f(x_1^*, x_2^*)$	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา
		Calculated	% error		(วินาที)	Calculated	% error		(วินาที)
2.8	-16.41	-16.413	0.0241	1180	6.03	-14.462	11.8688	38	0.004
2.9	-16.41	-16.394	0.0904	385	1.893	-14.465	11.8467	38	0.003
3	-16.41	-16.411	0.0119	688	3.27	-14.496	11.6563	38	0.004
3.1	-16.41	-16.406	0.0159	691	3.17	-14.528	11.4643	38	0.003
3.2	-16.41	-16.404	0.0292	702	3.066	-14.575	11.1765	38	0.003
3.3	-16.41	-16.4	0.0546	551	2.345	-15.846	3.4298	112	0.011
3.4	-16.41	-16.413	0.0241	936	3.855	-8.905	45.7343	9	0.001
3.5	-16.41	-16.406	0.0159	593	2.379	-8.981	45.2707	9	0.001
3.6	-16.41	-16.409	0.0009	452	1.752	-14.993	8.6275	102	0.009
3.7	-16.41	-16.408	0.0054	876	3.297	-9.133	44.339	9	0.001
3.8	-16.41	-16.411	0.0108	613	2.222	-9.215	43.8435	9	0.001
3.9	-16.41	-16.408	0.0054	1058	3.748	-9.289	43.3897	9	0.001
4	-16.41	-16.411	0.0127	510	1.738	-9.373	42.8773	9	0.001
4.1	-16.41	-16.406	0.0187	723	2.385	-9.448	42.4219	9	0.001
4.2	-16.41	-16.408	0.0054	1295	4.165	-9.54	41.8639	9	0.001
4.3	-16.41	-16.397	0.0722	391	1.214	-9.617	41.3923	9	0.001
4.4	-16.41	-16.391	0.1088	429	1.308	-9.704	40.8614	9	0.001

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 3.3 ผลการหาจุดออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ T/τ = 0.05 และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	(x_1^*, x_2^*)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)
		Calculated	% error			Calculated	% error		
0.1	-0.864 , 4.318	-0.864 , 4.317	0.042 , 0.027	1831	0.312	-0.872 , 4.361	0.968 , 0.992	489	0.175
0.2	-0.864 , 4.318	-0.856 , 4.274	0.884 , 1.023	639	0.174	-0.864 , 3.963	0.042 , 8.225	90	0.037
0.3	-0.864 , 4.318	-0.864 , 4.302	0.042 , 0.375	512	0.211	-0.875 , 4.271	1.316 , 1.093	109	0.051
0.4	-0.864 , 4.318	-0.843 , 4.208	2.389 , 2.552	280	0.169	-0.777 , 3.365	10.032 , 22.074	34	0.017
0.5	-0.864 , 4.318	-0.867 , 4.335	0.389 , 0.389	544	0.463	-0.921 , 3.259	6.642 , 24.528	26	0.01
0.6	-0.864 , 4.318	-0.865 , 4.308	0.158 , 0.236	265	0.291	-0.773 , 3.864	10.495 , 10.518	71	0.031
0.7	-0.864 , 4.318	-0.861 , 4.297	0.305 , 0.491	226	0.31	-0.819 , 3.886	5.168 , 10.008	44	0.023
0.8	-0.864 , 4.318	-0.868 , 4.341	0.505 , 0.528	222	0.36	-0.812 , 3.845	5.979 , 10.958	24	0.011
0.9	-0.864 , 4.318	-0.863 , 4.31	0.074 , 0.189	192	0.364	-0.707 , 3.508	18.137 , 18.762	68	0.043
1	-0.864 , 4.318	-0.831 , 4.12	3.779 , 4.589	115	0.228	-0.73 , 3.585	15.474 , 16.979	68	0.037
1.1	-0.864 , 4.318	-0.864 , 4.315	0.042 , 0.074	179	0.462	-0.771 , 3.807	10.726 , 11.838	16	0.008
1.2	-0.864 , 4.318	-0.849 , 3.712	1.695 , 14.038	69	0.129	-0.826 , 3.999	4.358 , 7.392	222	0.11
1.3	-0.864 , 4.318	-0.835 , 4.158	3.316 , 3.709	128	0.338	-0.821 , 4.052	4.937 , 6.164	3262	3.048
1.4	-0.864 , 4.318	-0.85 , 4.199	1.579 , 2.76	237	0.677	-0.899 , 4.072	4.095 , 5.701	32	0.003
1.5	-0.864 , 4.318	-0.816 , 4.082	5.516 , 5.469	232	0.72	-0.878 , 4.128	1.663 , 4.404	427	0.042
1.6	-0.864 , 4.318	-0.863 , 4.06	0.074 , 5.979	78	0.268	-0.915 , 3.995	5.947 , 7.484	53	0.005
1.7	-0.864 , 4.318	-0.787 , 3.933	8.874 , 8.92	462	1.511	-0.656 , 3.089	24.042 , 28.465	38	0.003
1.8	-0.864 , 4.318	-0.81 , 4.042	6.211 , 6.396	82	0.306	0 , 0	100 , 100	0	0
1.9	-0.864 , 4.318	-0.79 , 3.94	8.526 , 8.758	146	0.505	-0.594 , 2.606	31.221 , 39.651	23	0.002
2	-0.864 , 4.318	-0.775 , 3.817	10.263 , 11.606	90	0.314	-0.951 , 3.592	10.116 , 16.817	32	0.003
2.1	-0.864 , 4.318	-0.806 , 4.009	6.674 , 7.16	196	0.738	-0.285 , 1.095	67 , 74.642	46	0.004
2.2	-0.864 , 4.318	-0.805 , 4.01	6.789 , 7.137	61	0.241	-0.249 , 0.706	71.168 , 83.651	4	0
2.3	-0.864 , 4.318	-0.806 , 3.913	6.674 , 9.383	55	0.197	-0.308 , 0.696	64.337 , 83.882	4	0
2.4	-0.864 , 4.318	-0.834 , 3.667	3.432 , 15.08	44	0.154	-0.367 , 0.686	57.505 , 84.114	4	0
2.5	-0.864 , 4.318	-0.823 , 3.362	4.705 , 22.143	35	0.18	-0.426 , 0.676	50.674 , 84.345	4	0
2.6	-0.864 , 4.318	-0.914 , 3.275	5.832 , 24.158	33	0.145	-0.485 , 0.667	43.842 , 84.554	4	0
2.7	-0.864 , 4.318	-0.925 , 3.041	7.105 , 29.577	28	0.106	-0.075 , 0.365	91.316 , 91.547	2	0

ตารางที่ 3.3(ต่อ) ผลการหาจุดออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ $T/\tau = 0.05$ และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	(x_1^*, x_2^*)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)
		Calculated	% error			Calculated	% error		
2.8	-0.864 , 4.318	-0.996 , 2.92	15.326 , 32.379	26	0.088	-0.1 , 0.36	88.421 , 91.663	2	0
2.9	-0.864 , 4.318	-0.636 , 3.181	26.358 , 26.335	122	0.476	-0.125 , 0.355	85.526 , 91.779	2	0
3	-0.864 , 4.318	-0.62 , 3.055	28.211 , 29.253	113	0.431	-0.15 , 0.35	82.632 , 91.895	2	0
3.1	-0.864 , 4.318	-0.623 , 3.052	27.863 , 29.322	164	0.635	-0.175 , 0.345	79.737 , 92.011	2	0
3.2	-0.864 , 4.318	-0.667 , 3.281	22.768 , 24.019	36	0.135	-0.2 , 0.34	76.842 , 92.126	2	0
3.3	-0.864 , 4.318	-0.642 , 3.16	25.663 , 26.821	54	0.222	-0.225 , 0.335	73.947 , 92.242	2	0
3.4	-0.864 , 4.318	-0.638 , 3.172	26.126 , 26.543	123	0.439	-0.25 , 0.33	71.053 , 92.358	2	0
3.5	-0.864 , 4.318	-0.67 , 3.259	22.421 , 24.528	308	0.787	0 , 0	100 , 100	0	0
3.6	-0.864 , 4.318	-0.663 , 3.283	23.232 , 23.973	27	0.093	0 , 0	100 , 100	0	0
3.7	-0.864 , 4.318	-0.66 , 3.17	23.579 , 26.589	25	0.078	-0.895 , 1.411	3.632 , 67.324	28	0.002
3.8	-0.864 , 4.318	-0.599 , 2.98	30.642 , 30.989	37	0.135	0 , 0	100 , 100	0	0
3.9	-0.864 , 4.318	-0.601 , 2.829	30.411 , 34.486	317	1.281	0 , 0	100 , 100	0	0
4	-0.864 , 4.318	-0.618 , 2.936	28.442 , 32.008	21	0.036	0 , 0	100 , 100	0	0
4.1	-0.864 , 4.318	-0.669 , 3.174	22.537 , 26.497	24	0.049	0 , 0	100 , 100	0	0
4.2	-0.864 , 4.318	-0.647 , 3.043	25.084 , 29.531	22	0.053	0 , 0	100 , 100	0	0
4.3	-0.864 , 4.318	-0.616 , 2.728	28.674 , 36.825	340	0.813	0 , 0	100 , 100	0	0
4.4	-0.864 , 4.318	-0.517 , 2.562	40.137 , 40.669	142	0.402	0 , 0	100 , 100	0	0

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

117358504

ตารางที่ 3.4 ผลการหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ T/τ = 0.05 และ และ μ ต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	$f(x_1^*, x_2^*)$	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา
		Calculated	% error		(วินาที)	Calculated	% error		(วินาที)
0.1	-16.41	-16.402	0.0407	1831	0.312	-16.41	0.0037	489	0.175
0.2	-16.41	-16.394	0.092	639	0.174	-15.488	5.6153	90	0.037
0.3	-16.41	-16.369	0.246	512	0.211	-16.174	1.43	109	0.051
0.4	-16.41	-16.383	0.1603	280	0.169	-14.41	12.1833	34	0.017
0.5	-16.41	-16.409	0.0015	544	0.463	-12.222	25.517	26	0.01
0.6	-16.41	-16.371	0.2315	265	0.291	-16.225	1.1199	71	0.031
0.7	-16.41	-16.391	0.1111	226	0.31	-15.772	3.8818	44	0.023
0.8	-16.41	-16.411	0.0108	222	0.36	-15.725	4.1664	24	0.011
0.9	-16.41	-16.398	0.0682	192	0.364	-15.77	3.8923	68	0.043
1	-16.41	-16.296	0.688	115	0.228	-15.789	3.7788	68	0.037
1.1	-16.41	-16.398	0.0679	179	0.462	-16.071	2.06	16	0.008
1.2	-16.41	-14.863	9.4225	69	0.129	-16.025	2.343	222	0.11
1.3	-16.41	-16.349	0.3692	128	0.338	-16.228	1.1042	3262	3.048
1.4	-16.41	-16.283	0.7712	237	0.677	-15.395	6.1792	32	0.003
1.5	-16.41	-16.364	0.2719	232	0.72	-15.786	3.7958	427	0.042
1.6	-16.41	-15.775	3.8664	78	0.268	-14.991	8.6424	53	0.005
1.7	-16.41	-16.274	0.823	462	1.511	-14.642	10.7702	38	0.003
1.8	-16.41	-16.324	0.5182	82	0.306	0	100	0	0
1.9	-16.41	-16.261	0.9037	146	0.505	-12.983	20.8789	23	0.002
2	-16.41	-16.057	2.143	90	0.314	-13.213	19.4792	32	0.003
2.1	-16.41	-16.278	0.7995	196	0.738	-6.481	60.506	46	0.004
2.2	-16.41	-16.292	0.7142	61	0.241	-3.625	77.9064	4	0
2.3	-16.41	-16.001	2.4868	55	0.197	-2.804	82.9105	4	0
2.4	-16.41	-14.882	9.3047	44	0.154	-1.968	88.0079	4	0
2.5	-16.41	-13.853	15.5759	35	0.18	-1.116	93.1986	4	0
2.6	-16.41	-12.379	24.5605	33	0.145	-0.258	98.4268	4	0
2.7	-16.41	-11.164	31.9646	28	0.106	-2.633	83.9546	2	0

ตารางที่ 3.4(ต่อ) ผลการหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ $T/\tau = 0.05$ และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	$f(x_1^*, x_2^*)$	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)
		Calculated	% error			Calculated	% error		
2.8	-16.41	-9.646	41.2162	26	0.088	-2.286	86.0663	2	0
2.9	-16.41	-15.273	6.9213	122	0.476	-1.937	88.195	2	0
3	-16.41	-14.902	9.1828	113	0.431	-1.585	90.3407	2	0
3.1	-16.41	-14.854	9.4744	164	0.635	-1.23	92.5035	2	0
3.2	-16.41	-15.34	6.5171	36	0.135	-0.872	94.6834	2	0
3.3	-16.41	-15.115	7.8877	54	0.222	-0.512	96.8804	2	0
3.4	-16.41	-15.212	7.2949	123	0.439	-0.149	99.0944	2	0
3.5	-16.41	-15.215	7.2791	308	0.787	0	100	0	0
3.6	-16.41	-15.393	6.1898	27	0.093	0	100	0	0
3.7	-16.41	-14.952	8.8792	25	0.078	-1.04	93.6628	28	0.002
3.8	-16.41	-14.799	9.8121	37	0.135	0	100	0	0
3.9	-16.41	-14.053	14.361	317	1.281	0	100	0	0
4	-16.41	-14.375	12.3991	21	0.036	0	100	0	0
4.1	-16.41	-14.866	9.4038	24	0.049	0	100	0	0
4.2	-16.41	-14.538	11.4043	22	0.053	0	100	0	0
4.3	-16.41	-13.368	18.5357	340	0.813	0	100	0	0
4.4	-16.41	-13.642	16.8624	142	0.402	0	100	0	0

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 3.5 ผลการหาจุดออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ $T/\tau = 0.1$ และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	(x_1^*, x_2^*)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)
		Calculated	% error			Calculated	% error		
0.1	-0.864 , 4.318	-0.857 , 4.266	0.768 , 1.208	567	0.077	-0.76 , 3.62	12 , 16.168	50	0.015
0.2	-0.864 , 4.318	-0.849 , 4.245	1.695 , 1.695	272	0.067	-0.85 , 4.048	1.579 , 6.257	41	0.021
0.3	-0.864 , 4.318	-0.844 , 4.22	2.274 , 2.274	173	0.066	-0.704 , 3.505	18.484 , 18.832	264	0.073
0.4	-0.864 , 4.318	-0.873 , 4.362	1.084 , 1.015	239	0.138	-0.858 , 4.121	0.653 , 4.566	4771	2.412
0.5	-0.864 , 4.318	-0.859 , 4.278	0.537 , 0.931	125	0.096	-0.795 , 3.965	7.947 , 8.179	1051	0.474
0.6	-0.864 , 4.318	-0.825 , 3.655	4.474 , 15.358	53	0.036	-0.855 , 4.265	1 , 1.232	2560	0.825
0.7	-0.864 , 4.318	-0.851 , 4.248	1.463 , 1.625	87	0.095	-1.029 , 4.67	19.147 , 8.147	244	0.174
0.8	-0.864 , 4.318	-0.764 , 3.515	11.537 , 18.6	38	0.037	-0.938 , 4.515	8.611 , 4.558	19	0.002
0.9	-0.864 , 4.318	-0.798 , 3.966	7.6 , 8.156	73	0.09	-0.952 , 4.192	10.232 , 2.922	52	0.005
1	-0.864 , 4.318	-0.755 , 3.741	12.579 , 13.366	100	0.137	-0.3 , 0.7	65.263 , 83.789	3	0
1.1	-0.864 , 4.318	-0.797 , 3.921	7.716 , 9.198	41	0.063	-0.45 , 0.67	47.895 , 84.484	3	0
1.2	-0.864 , 4.318	-0.832 , 3.668	3.663 , 15.057	32	0.047	0 , 0	100 , 100	0	0
1.3	-0.864 , 4.318	-0.934 , 3.344	8.147 , 22.56	25	0.045	-0.659 , 2.734	23.695 , 36.686	21	0.002
1.4	-0.864 , 4.318	-0.971 , 2.864	12.432 , 33.676	18	0.023	-1.012 , 4.612	17.179 , 6.804	34	0.003
1.5	-0.864 , 4.318	-0.645 , 3.164	25.316 , 26.728	25	0.041	0 , 0	100 , 100	0	0
1.6	-0.864 , 4.318	-0.722 , 3.558	16.4 , 17.604	110	0.202	0 , 0	100 , 100	0	0
1.7	-0.864 , 4.318	-0.75 , 3.614	13.158 , 16.307	24	0.04	0 , 0	100 , 100	0	0
1.8	-0.864 , 4.318	-0.703 , 3.213	18.6 , 25.594	18	0.031	0 , 0	100 , 100	0	0
1.9	-0.864 , 4.318	-0.562 , 2.701	34.926 , 37.451	68	0.116	0 , 0	100 , 100	0	0
2	-0.864 , 4.318	-0.658 , 3.275	23.811 , 24.158	28	0.052	0 , 0	100 , 100	0	0
2.1	-0.864 , 4.318	-0.625 , 3.082	27.632 , 28.627	59	0.102	0 , 0	100 , 100	0	0
2.2	-0.864 , 4.318	-0.686 , 3.352	20.568 , 22.375	58	0.126	0 , 0	100 , 100	0	0
2.3	-0.864 , 4.318	-0.771 , 3.816	10.726 , 11.629	24	0.069	0 , 0	100 , 100	0	0
2.4	-0.864 , 4.318	-0.764 , 3.527	11.537 , 18.322	19	0.055	0 , 0	100 , 100	0	0
2.5	-0.864 , 4.318	-0.835 , 3.373	3.316 , 21.888	17	0.084	0 , 0	100 , 100	0	0
2.6	-0.864 , 4.318	-0.959 , 3.376	11.042 , 21.819	17	0.066	0 , 0	100 , 100	0	0
2.7	-0.864 , 4.318	-0.854 , 2.869	1.116 , 33.56	12	0.044	-0.15 , 0.73	82.632 , 83.095	2	0

ตารางที่ 3.5(ต่อ) ผลการหาจุดออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ $T/\tau = 0.1$ และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	(x_1^*, x_2^*)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)
		Calculated	% error			Calculated	% error		
2.8	-0.864 , 4.318	-0.971 , 2.864	12.432 , 33.676	12	0.038	-0.2 , 0.72	76.842 , 83.326	2	0
2.9	-0.864 , 4.318	-1.087 , 2.859	25.863 , 33.792	12	0.035	-0.25 , 0.71	71.053 , 83.558	2	0
3	-0.864 , 4.318	-1.081 , 2.558	25.168 , 40.762	10	0.023	-0.3 , 0.7	65.263 , 83.789	2	0
3.1	-0.864 , 4.318	-1.194 , 2.55	38.253 , 40.947	10	0.025	-0.35 , 0.69	59.474 , 84.021	2	0
3.2	-0.864 , 4.318	-1.307 , 2.542	51.337 , 41.133	10	0.024	-0.4 , 0.68	53.684 , 84.253	2	0
3.3	-0.864 , 4.318	-1.253 , 2.174	45.084 , 49.655	8	0.017	-0.45 , 0.67	47.895 , 84.484	2	0
3.4	-0.864 , 4.318	-0.866 , 1.238	0.274 , 71.331	4	0.007	0 , 0	100 , 100	0	0
3.5	-0.864 , 4.318	0 , 0	100 , 100	0	0	0 , 0	100 , 100	0	0
3.6	-0.864 , 4.318	0 , 0	100 , 100	0	0	0 , 0	100 , 100	0	0
3.7	-0.864 , 4.318	0 , 0	100 , 100	0	0	0 , 0	100 , 100	0	0
3.8	-0.864 , 4.318	0 , 0	100 , 100	0	0	0 , 0	100 , 100	0	0
3.9	-0.864 , 4.318	0 , 0	100 , 100	0	0	0 , 0	100 , 100	0	0
4	-0.864 , 4.318	0 , 0	100 , 100	0	0	0 , 0	100 , 100	0	0
4.1	-0.864 , 4.318	0 , 0	100 , 100	0	0	0 , 0	100 , 100	0	0
4.2	-0.864 , 4.318	0 , 0	100 , 100	0	0	0 , 0	100 , 100	0	0
4.3	-0.864 , 4.318	0 , 0	100 , 100	0	0	0 , 0	100 , 100	0	0
4.4	-0.864 , 4.318	0 , 0	100 , 100	0	0	0 , 0	100 , 100	0	0

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 3.6 ผลการหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ $T/\tau = 0.1$ และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	$f(x_1^*, x_2^*)$	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)
		Calculated	% error			Calculated	% error		
0.1	-16.41	-16.364	0.2729	567	0.077	-15.5716	5.0953	50	0.015
0.2	-16.41	-16.404	0.0287	272	0.067	-15.8895	3.1695	41	0.021
0.3	-16.41	-16.401	0.0517	173	0.066	-15.7933	3.7363	264	0.073
0.4	-16.41	-16.401	0.051	239	0.138	-15.9949	2.5053	4771	2.412
0.5	-16.41	-16.37	0.2397	125	0.096	-16.2769	0.8111	1051	0.474
0.6	-16.41	-14.945	8.9218	53	0.036	-16.3843	0.1468	2560	0.825
0.7	-16.41	-16.389	0.1216	87	0.095	-15.2308	7.1612	244	0.174
0.8	-16.41	-15.145	7.7046	38	0.037	-15.9842	2.615	19	0.002
0.9	-16.41	-16.246	0.9933	73	0.09	-15.1013	7.9778	52	0.005
1	-16.41	-16.039	2.2534	100	0.137	-2.94	82.0831	3	0
1.1	-16.41	-16.126	1.7229	41	0.063	-0.7476	95.4416	3	0
1.2	-16.41	-14.909	9.1412	32	0.047	0	100	0	0
1.3	-16.41	-12.428	24.26	25	0.045	-12.8904	21.4399	21	0.002
1.4	-16.41	-9.681	41.0036	18	0.023	-15.3245	6.5945	34	0.003
1.5	-16.41	-15.098	7.991	25	0.041	0	100	0	0
1.6	-16.41	-15.783	3.8159	110	0.202	0	100	0	0
1.7	-16.41	-15.665	4.5376	24	0.04	0	100	0	0
1.8	-16.41	-14.641	10.7754	18	0.031	0	100	0	0
1.9	-16.41	-13.857	15.5537	68	0.116	0	100	0	0
2	-16.41	-15.417	6.0436	28	0.052	0	100	0	0
2.1	-16.41	-14.966	8.7928	59	0.102	0	100	0	0
2.2	-16.41	-15.41	6.0864	58	0.126	0	100	0	0
2.3	-16.41	-16.099	1.8873	24	0.069	0	100	0	0
2.4	-16.41	-15.19	7.4324	19	0.055	0	100	0	0
2.5	-16.41	-13.755	16.1753	17	0.084	0	100	0	0
2.6	-16.41	-12.253	25.3289	17	0.066	0	100	0	0
2.7	-16.41	-11.202	31.7309	12	0.044	-5.0316	69.3341	2	0

ตารางที่ 3.6(ต่อ) ผลการหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) เมื่อค่า λ หรือ $T/\tau = 0.1$ และ μ มีค่าต่างๆ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ค่า μ	TRUE VALUE	STEEPEST DESCENT METHOD				CONJUGATE GRADIENT METHOD			
	$f(x_1^*, x_2^*)$	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$		จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)
		Calculated	% error			Calculated	% error		
2.8	-16.41	-9.681	41.0036	12	0.038	-4.3456	73.5147	2	0
2.9	-16.41	-8.117	50.5353	12	0.035	-3.6484	77.7684	2	0
3	-16.41	-6.493	60.4322	10	0.023	-2.94	82.0831	2	0
3.1	-16.41	-4.863	70.3644	10	0.025	-2.2204	86.4709	2	0
3.2	-16.41	-3.18	80.6197	10	0.024	-1.4896	90.9197	2	0
3.3	-16.41	-1.562	90.4825	8	0.017	-0.7476	95.4416	2	0
3.4	-16.41	-0.028	99.8321	4	0.007	0	100	0	0
3.5	-16.41	0	100	0	0	0	100	0	0
3.6	-16.41	0	100	0	0	0	100	0	0
3.7	-16.41	0	100	0	0	0	100	0	0
3.8	-16.41	0	100	0	0	0	100	0	0
3.9	-16.41	0	100	0	0	0	100	0	0
4	-16.41	0	100	0	0	0	100	0	0
4.1	-16.41	0	100	0	0	0	100	0	0
4.2	-16.41	0	100	0	0	0	100	0	0
4.3	-16.41	0	100	0	0	0	100	0	0
4.4	-16.41	0	100	0	0	0	100	0	0

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากผลของการหาค่าออปติมัมในตารางที่ 3.1-3.6 สามารถนำมาแสดงในรูปกราฟดังต่อไปนี้คือ

รูปที่ 3.1 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่า Cost function เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Steepest Descent

รูปที่ 3.2 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่า Cost function เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Conjugate Gradient

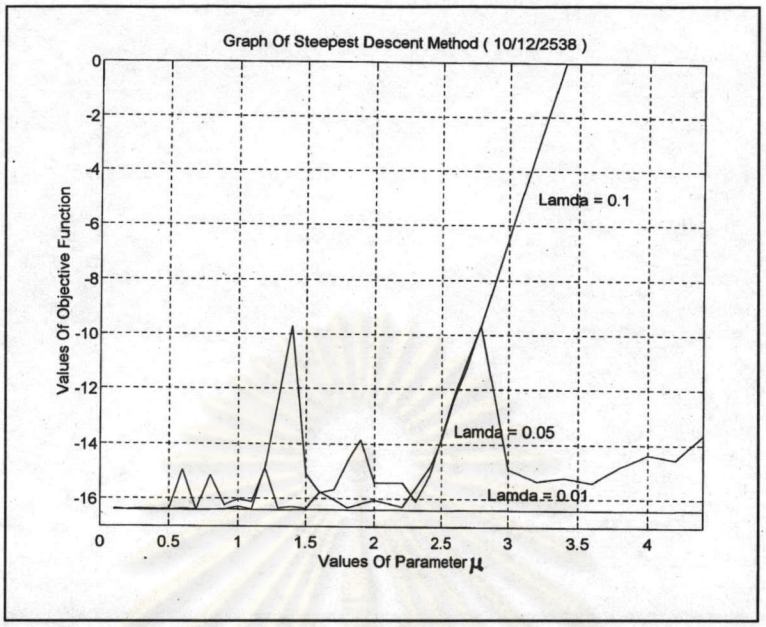
รูปที่ 3.3 กราฟแสดงการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ Cost function เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Steepest Descent

รูปที่ 3.4 กราฟแสดงการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ Cost function เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Conjugate Gradient

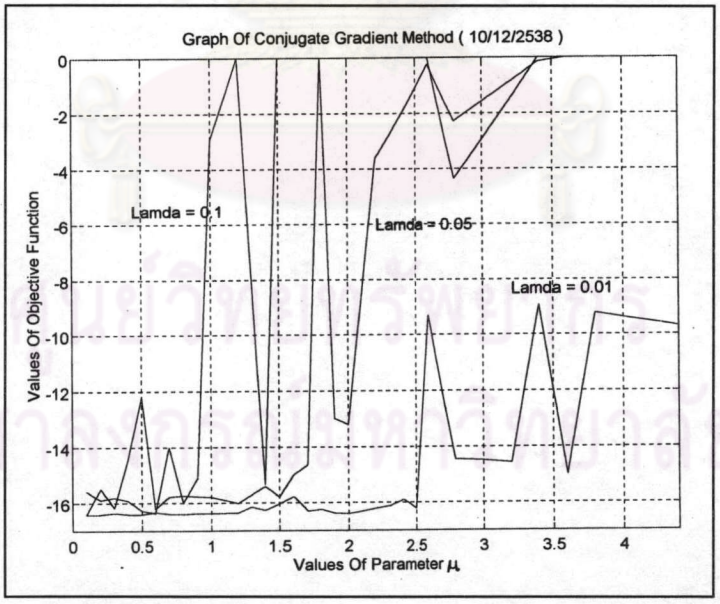
รูปที่ 3.5 กราฟแสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาค่าออปติมัม เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Steepest Descent

รูปที่ 3.6 กราฟแสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาค่าออปติมัม เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Conjugate Gradient

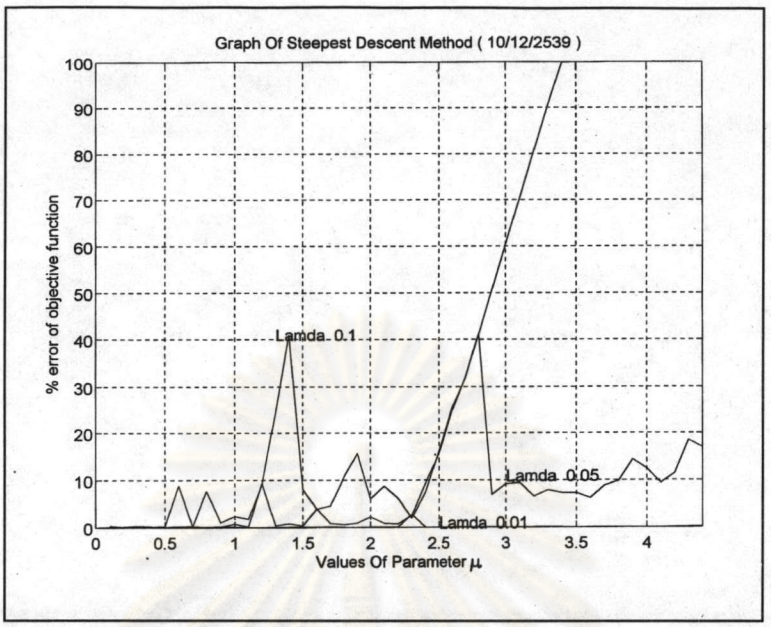
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



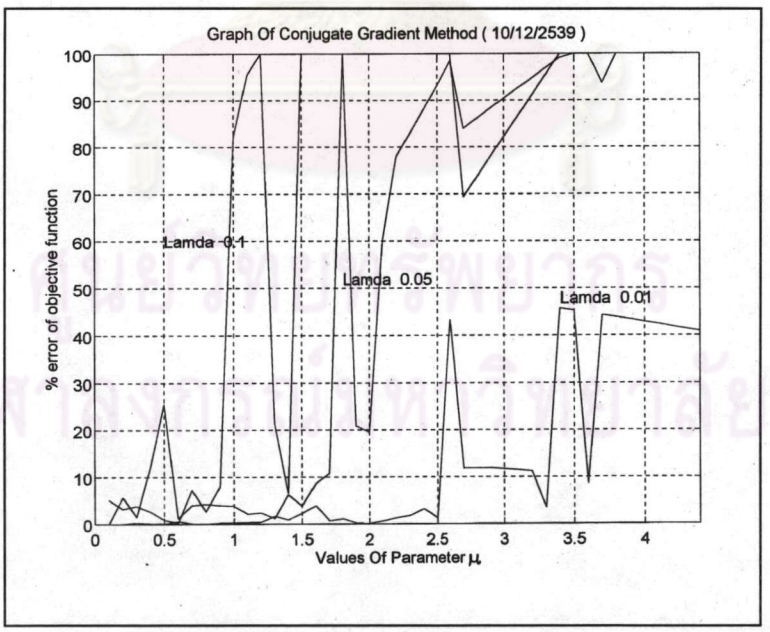
รูปที่ 3.1 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่า Cost function เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Steepest Descent ในตัวอย่างที่ (3.1)



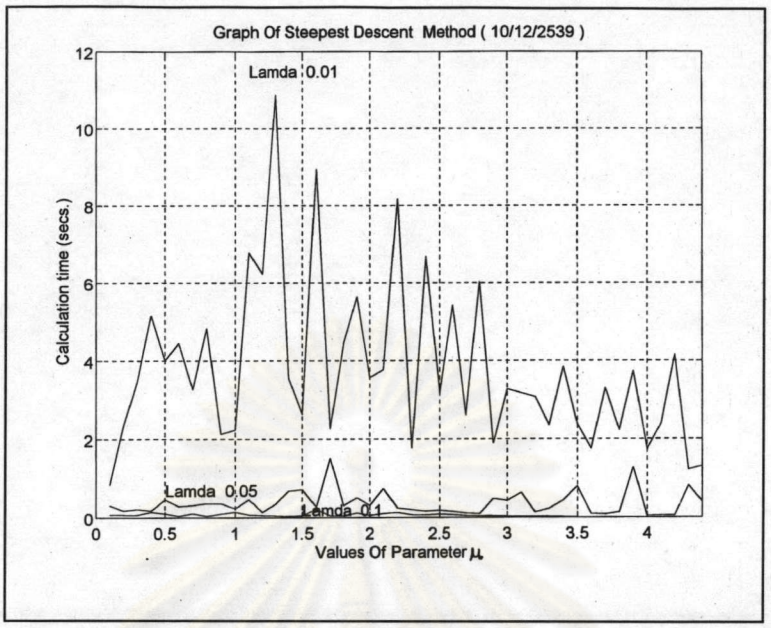
รูปที่ 3.2 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่า Cost function เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Conjugate Gradient ในตัวอย่างที่ (3.1)



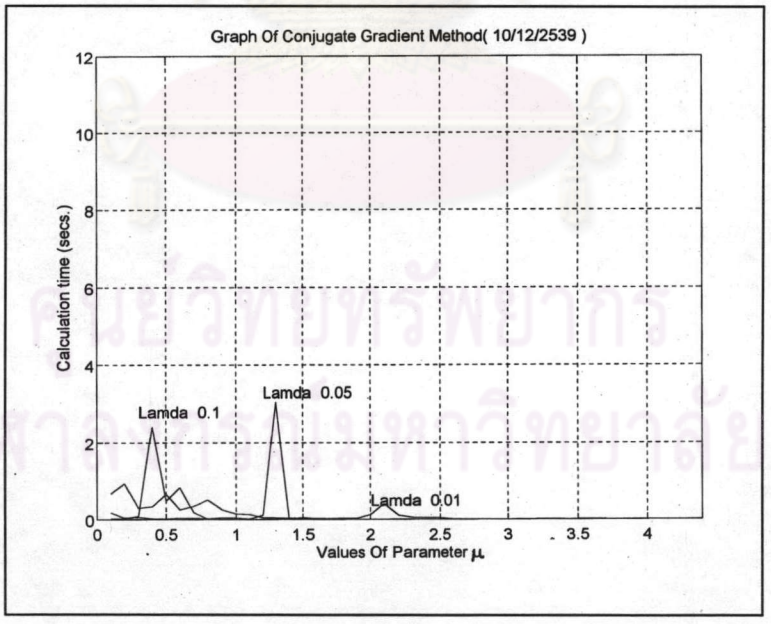
รูปที่ 3.3 กราฟแสดงการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ Cost function เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Steepest Descent ในตัวอย่างที่ (3.1)



รูปที่ 3.4 กราฟแสดงการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ Cost function เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Conjugate Gradient ในตัวอย่างที่ (3.1)



รูปที่ 3.5 กราฟแสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาค่าออปติมัม เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Steepest Descent ในตัวอย่างที่ (3.1)



รูปที่ 3.6 กราฟแสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาค่าออปติมัม เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆของวิธี Conjugate Gradient ในตัวอย่างที่ (3.1)

การวิเคราะห์ผลของการหาค่าออปติมัมเมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่าง ๆ

จากผลของการหาค่าออปติมัมซึ่งได้แสดงดังตารางที่ 3.1-3.6 และในการหาค่าออปติมัมนี้มีการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์คือ μ และ λ โดยให้ μ มีค่าเพิ่มขึ้นต่างๆกัน ส่วน λ มีค่าเป็น 0.01, 0.05 และ 0.1 ตามลำดับ และเพื่อสะดวกต่อการวิเคราะห์ผลของการหาค่าออปติมัมจึงนำข้อมูลจากตารางดังกล่าวข้างต้นมาสร้างเป็นกราฟดังแสดงในรูปที่ 3.1-3.6

จากรูปที่ 3.1 แสดงการเปรียบเทียบค่า Cost function ของวิธี Steepest Descent เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆ พบว่าเมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01 ค่าออปติมัมที่หาได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าออปติมัมจริงในทุกๆค่า μ และเมื่อค่า λ เท่ากับ 0.05 และ0.1 ค่าออปติมัมที่หาได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าออปติมัมจริงในบางค่า μ และไม่สามารถหาค่าออปติมัมได้ในบางค่า μ

จากรูปที่ 3.2 แสดงการเปรียบเทียบค่า Cost function ของวิธี Conjugate Gradient เมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01, 0.05 และ 0.1 และ μ มีค่าต่างๆ พบว่าเมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01 ค่าออปติมัมที่หาได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าออปติมัมจริงที่ค่า μ ไม่เกิน 2.5 และเมื่อค่า λ เท่ากับ 0.05 และ 0.1 ค่าออปติมัมที่หาได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าออปติมัมจริงในบางค่า μ และไม่สามารถหาค่าออปติมัมได้ในบางค่า μ

จากรูปที่ 3.3 แสดงการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ Cost function ของวิธี Steepest Descent และรูปที่ 3.4 แสดงการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของ Cost function ของวิธี Conjugate Gradient พบว่าเมื่อค่า λ เท่ากับ 0.05 และ 0.1 ค่าออปติมัมที่หาได้มีความผิดพลาดจากค่าออปติมัมจริงมากกว่าเมื่อค่า λ เท่ากับ 0.01

จากรูปที่ 3.5 แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณของวิธี Steepest Descent และรูปที่ 3.6 แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณของ Cost function ของวิธี Conjugate Gradient พบว่าเมื่อค่า λ เพิ่มขึ้นมีผลให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณหาค่าออปติมัมมีแนวโน้มลดลง และยังพบว่าในวิธี Conjugate Gradient ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธี Steepest Descent

จากผลของการหาค่าออปติมัมดังตารางที่ 3.1-3.6 และรูปกราฟแสดงการเปรียบเทียบในรูปที่ 3.1-3.6 พบว่าค่าพารามิเตอร์ μ และค่าพารามิเตอร์ λ มีผลต่อการหาค่าออปติมัม ซึ่งถ้าค่าพารามิเตอร์มีค่ามาก อาจทำให้ไม่สามารถหาค่าออปติมัมได้หรืออาจหาค่าออปติมัมได้แต่มี

ความผิดพลาดสูง แต่ถ้าค่าพารามิเตอร์มีค่าน้อยเกินไปมีผลให้เวลาที่ใช้ในการหาค่าออปติมัมมากขึ้น

เส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัม

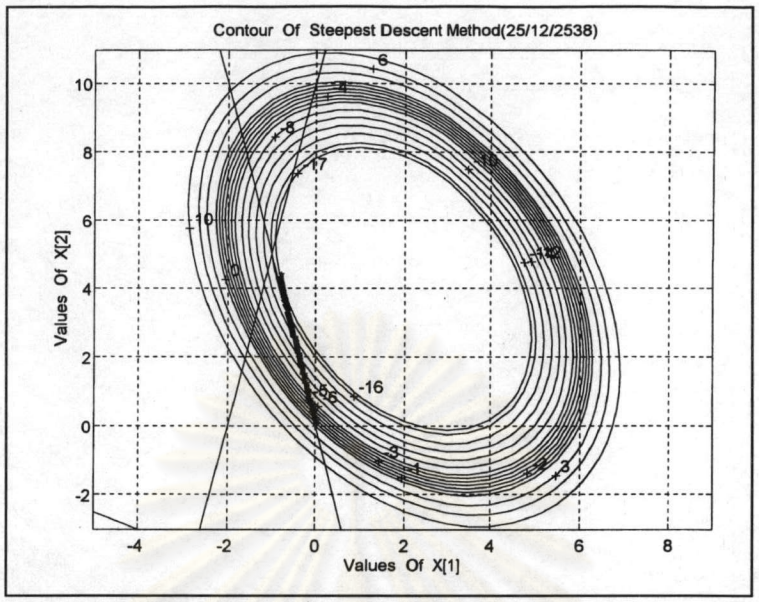
ในส่วนนี้ ได้แสดงเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมที่ค่าพารามิเตอร์ μ เท่ากับ 0.8 และค่าพารามิเตอร์ λ เท่ากับ 0.01 ซึ่งจากการหาค่าออปติมัมในตัวอย่างนี้พบว่าเป็นค่าที่ดีของทั้งวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient

ตัวอย่างที่ (3.1) เป็นการหาค่าออปติมัมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้น โดยค่าออปติมัมคือ -16.41 และจุดออปติมัม $\mathbf{x}^* = \left[-\frac{19}{22} \quad \frac{95}{22}\right]^T$ ซึ่งเป็นจุดต่ำสุดจุดเดียวสำหรับปัญหานี้ นอกจากนี้ยังพบว่าจุดออปติมัม $\mathbf{x}^* \in \Delta_1$ ดังแสดงในรูปต่อไปนี้คือ

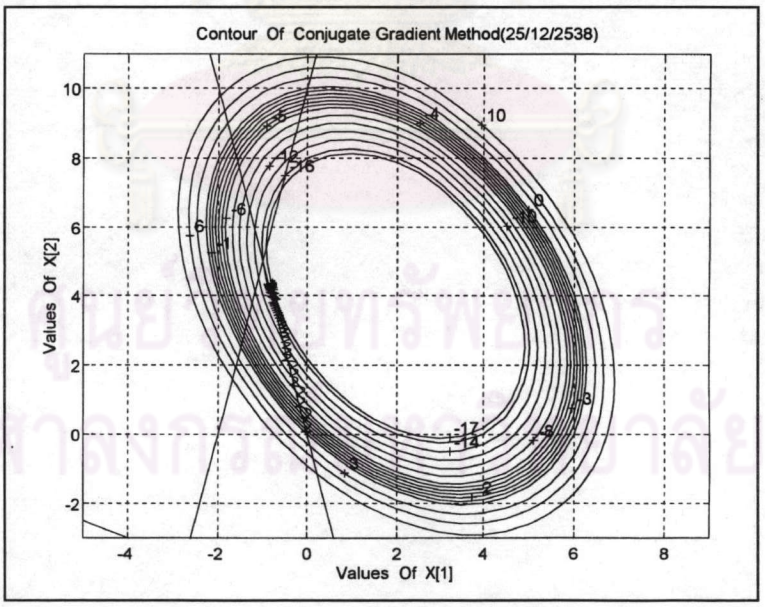
รูปที่ 3.7 และ 3.9 กราฟแสดงเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) ของวิธี Steepest Descent ที่ค่า μ = 0.8 และค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau}$ = 0.01

รูปที่ 3.8 และ 3.10 กราฟแสดงเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) ของวิธี Conjugate Gradient ที่ค่า μ = 0.8 และค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau}$ = 0.01

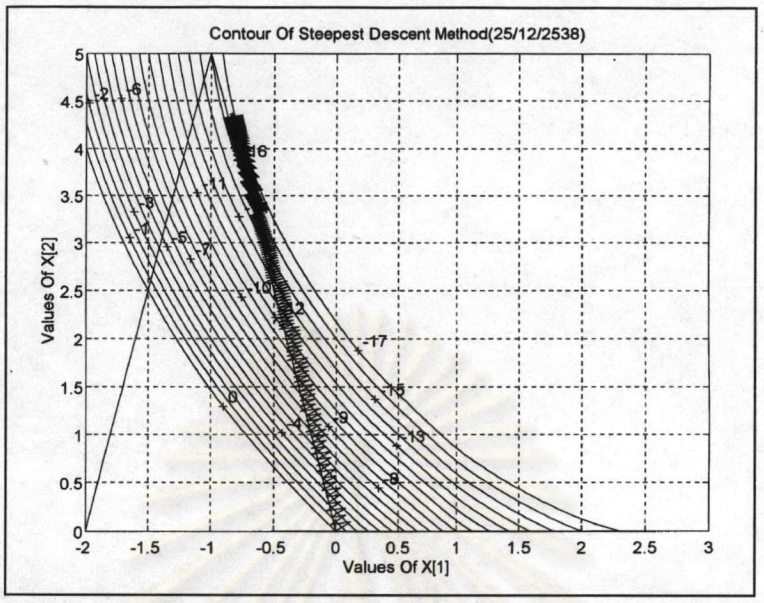
ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



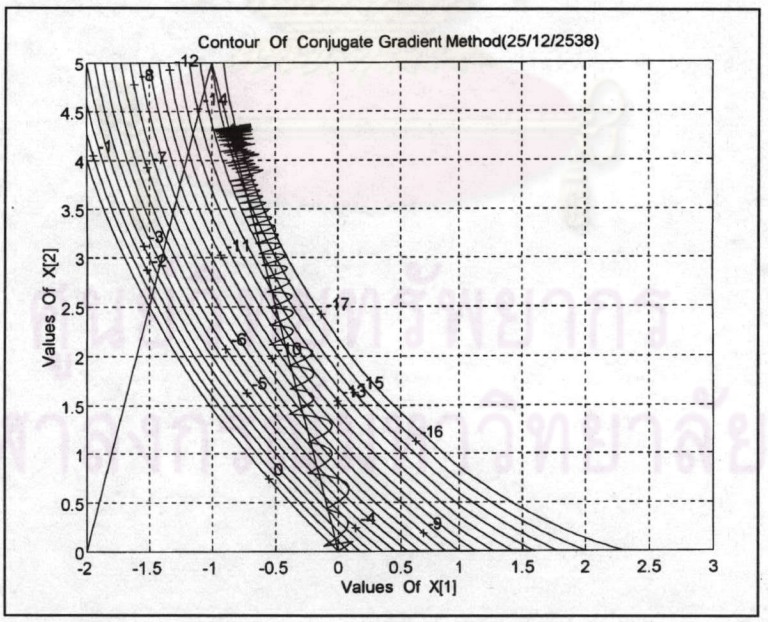
รูปที่ 3.7 กราฟแสดงเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) โดยวิธี Steepest Descent ที่ค่า $\mu = 0.8$ และค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau} = 0.01$



รูปที่ 3.8 กราฟแสดงเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) โดยวิธี Conjugate Gradient ที่ค่า $\mu = 0.8$ และค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau} = 0.01$



รูปที่ 3.9 กราฟแสดงเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) โดยวิธี Steepest Descent ที่ค่า $\mu = 0.8$ และค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau} = 0.01$



รูปที่ 3.10 กราฟแสดงเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) โดยวิธี Conjugate Gradient ที่ค่า $\mu = 0.8$ และค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau} = 0.01$

การวิเคราะห์เส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัม

จากเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมในตัวอย่างที่ (3.1) ซึ่งเป็นการหาค่าออปติมัมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้น พบว่าเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมของวิธี Steepest Descent จะเคลื่อนที่ (Slide) ไปตามสมการเงื่อนไขที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 3.7 และ 3.9 ซึ่งจากตัวอย่างสังเกตได้ว่า ระยะห่างของแต่ละจุดค่อนข้างคงที่ และเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วสม่ำเสมอ แต่เมื่อเริ่มเข้าใกล้จุดออปติมัมจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่ช้าลงมาก ส่วนเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมของวิธี Conjugate Gradient จะเคลื่อนที่ไปตามสมการเงื่อนไขที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 3.8 และ 3.10 ซึ่งจากตัวอย่างสังเกตได้ว่า ระยะห่างของแต่ละจุดไม่เท่ากัน และในช่วงเริ่มต้นจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราที่เร็วมาก และเมื่อเริ่มเข้าใกล้จุดออปติมัมจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่ช้าลง

จากการเปรียบเทียบเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient พบว่าเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมของวิธี Conjugate Gradient นั้นเคลื่อนที่เร็วกว่าเส้นทางการลู่เข้าหาค่าออปติมัมของวิธี Steepest Descent

สมรรถนะในการคำนวณหาค่าออปติมัม

ในส่วนนี้ แสดงถึงความผิดพลาดของ State $\mathbf{x}$ ความผิดพลาดของ Cost Function จำนวนรอบในการหาค่าออปติมัม และเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาค่าออปติมัม ในที่นี้ได้ยกตัวอย่างที่ (3.1) การหาค่าออปติมัมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้น ซึ่งเขียนและ Run โปรแกรมด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ 486DX2-66 โดยทำการเปรียบเทียบระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient ที่ค่า μ เท่ากับ 0.8 และค่า λ หรือ $\frac{T}{\tau}$ เท่ากับ 0.01 ดังแสดงในตารางที่ 3.7

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 3.7 การเปรียบเทียบสมรรถนะระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient ในตัวอย่างที่ (3.1)

		Steepest Descent Method	Conjugate Gradient Method
State $\mathbf{x}$ (x_1^*, x_2^*)	True Value	-0.864 , 4.318	-0.864 , 4.318
	Calculated	-0.863 , 4.317	-0.867 , 4.335
	% error	0.074 , 0.027	0.389, 0.389
Cost Function $f(x_1^*, x_2^*)$	True Value	-16.41	-16.41
	Calculated	-16.413544	-16.408842
	% error	0.027138006	0.001516842
จำนวนรอบ		1450	591
เวลา (วินาที)	จากจุดเริ่มต้น	4.848	0.503
	ต่อรอบ	0.0033434	0.0008511

การวิเคราะห์สมรรถนะในการคำนวณหาค่าออปติมัม

จากผลของการหาค่าออปติมัมในตารางที่ 3.7 ของตัวอย่างที่ (3.1) การหาค่าออปติมัมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้น ซึ่งจากการเปรียบเทียบสมรรถนะระหว่างวิธี Steepest Descent และวิธี Conjugate Gradient พบว่าจากวิธี Steepest Descent ความผิดพลาดของ cost function จำนวนรอบและเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาค่าออปติมัมมากกว่าวิธี Conjugate Gradient แต่ความผิดพลาดของ state $\mathbf{x}$ ในวิธี Steepest Descent น้อยกว่าในวิธี Conjugate Gradient

จากตารางที่ 3.7 ของตัวอย่างการหาค่าออปติมัมแบบมีเงื่อนไขเชิงเส้น พบว่าเวลาที่ใช้ในการคำนวณต่อรอบของวิธี Steepest Descent มากกว่าของวิธี Conjugate Gradient ประมาณ 4 เท่าตัว และเนื่องจาก step size ของวิธี Steepest Descent มีขนาดเล็กเมื่อเปรียบเทียบกับ step size ของวิธี Conjugate Gradient ดังนั้นจึงมีผลให้จำนวนรอบในการคำนวณหาค่าออปติมัมของวิธี Steepest Descent มากกว่าของวิธี Conjugate Gradient ซึ่งทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณหาค่าออปติมัมของวิธี Steepest Descent มากกว่าของวิธี Conjugate Gradient