บทที่ 3

การเปรียบเทียบ k ประชากรกับประชากรควบคุมสำหรับข้อมูลเซนเซอร์ประเภทที่ 1

3.1 ความนำ

การวิเคราะห์ข้อมูลที่เกี่ยวกับอายุการใช้งาน (life time) หรือเวลาของความล้มเหลว (failure time) เป็นเรื่องที่สำคัญเรื่องหนึ่ง ซึ่งมักจะเกี่ยวข้องกับงานทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์และการแพทย์ ฯลฯ ในการศึกษาถึงความคงทนของเครื่อง-จักรหรือการวิจัยโรคที่เกี่ยวกับมนุษย์ ซึ่งข้อมูลลักษณะดังกล่าวจะเกิดการเซนเซอร์ริง (censoring) อันเนื่องมาจากข้อกำหนดของเวลาและข้อจำกัดอื่น ๆ ของการเก็บรวบรวมข้อมูลแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ

3.1.1 ข้อมูลเซนเซอร์ประเภทที่ 1 (type 1 censored data) เป็นลักษณะของข้อมูลที่กำหนดระยะเวลาของการเกิดเซนเซอร์ริง (censoring) แต่จำนวนครั้งของความล้มเหลวที่เกิดเป็นแบบสุ่ม

3.1.2 ข้อมูลเซนเซอร์ประเภทที่ 2 (type 2 censored data) เป็นลักษณะของข้อมูลที่ต้องกำหนดจำนวนครั้งของความล้มเหลวที่เกิด แต่ระยะเวลาของการเกิดเซนเซอร์ริง (censoring) เป็นแบบสุ่ม

ข้อมูลเซนเซอร์ประเภทที่ 2 (type 2 censored data) มักจะใช้บ่อย ๆ ในการทดลองหรือการวิจัยที่เกี่ยวกับเวลาในการทดสอบ (life testing) ซึ่งในการทดลองแต่ละครั้งจะใช้ขนาดตัวอย่างทั้งหมด n ; n>2 แต่แทนที่จะทำการทดลองอย่างต่อเนื่อง จนกระทั่งขนาดตัวอย่างทั้งหมด n เกิดความล้มเหลว แต่จะหยุดการทดลอง ณ เวลาหนึ่งของการเกิดความล้มเหลวเช่นหยุดเมื่อเกิดความล้มเหลวครั้งที่ r_i สำหรับประชากรที่ i ; $i=0,1,\ldots,k$ ซึ่งการทดลองแบบนี้จะช่วยประหยัดเวลาและเงิน ข้อมูลประเภทนี้จะต้องมีการกำหนดค่า r_i ของประชากร π_i ; $i = 0,1,\ldots,k$ ไว้ล่วงหน้าก่อนที่จะทำการเก็บรวบรวมข้อมูลในที่นี้จะกำหนดให้ขนาดตัวอย่างที่สุ่มจากทุก ๆ ประชากรเท่ากันคือ n แต่จำนวนความล้มเหลวครั้งที่ r_i อาจจะแตกต่างหรือเท่ากันในทุกประชากร การเลือกประชากรที่ดีบางประชากรจากทั้งหมด k ประชากรโดยการเปรียบเทียบ k ประชากรกับประชากรควบคุมของข้อมูลเซนเซอร์ประเภทที่ 2

ที่มีการแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล 2 พารามิเตอร์ จะทำการเปรียบเทียบพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งที่ไม่ทราบค่า โดยการหาช่วงความเชื่อมั่นร่วมของความแตกต่างระหว่างพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งของ k ประชากรกับพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งของประชากรควบคุม ซึ่งข้อมูลมีลักษณะเป็นข้อมูลเซนเซอร์ประเภทที่ 2 (simultaneous confidence interval for all distrances from type 2 censored data) เมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากันแต่ไม่ทราบค่า

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_{r_i}$ เป็นค่าสังเกตที่น้อยที่สุด r_i จากค่าสังเกต n ที่เป็นอิสระต่อกันของประชากรใด ๆ มีฟังก์ชั่นการแจกแจงร่วม (joint probability density) เป็น

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i} \; ; \theta, \sigma) = \frac{n!}{(n-r_i)!} \frac{1}{\sigma^{r_i}} \exp\left\{ -\frac{1}{\sigma}\left[\sum_{j=1}^{r_i} (x_k-\theta)+(n-r_i)(x_{r_i}-\theta) \right]\right\}$$

$$; \quad \sigma>0 \; , \; \theta<x_1< x_2< \ldots<x_{r_i}$$

$\therefore$ ฟังก์ชันการแจกแจงร่วม (joint probability density function) ของอายุการใช้งาน $x_{i1} < x_{i2} < \ldots < x_{ir_i}$; $i = 1,2,\ldots,k$ คือ

$$f(x_{i1} \, , x_{i2}, \ldots, x_{ir_i} \; ; \theta, \sigma) = \prod_{i=o}^{k} g(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i} \; ; \theta, \sigma)$$

$$= \prod_{o}^{k} \frac{n!}{(n-r_i)!} \sigma^{-\sum_{i=o}^{k} r_i} \exp\left\{ -\frac{1}{\sigma}\left[\sum_{i=o}^{k} \sum_{u=1}^{r_i} (x_{ij}-\theta_i)+(n-r_i)(x_{ir_i}-\theta_i) \right]\right\}$$

$$; \; \sigma>0 \; , \; \theta<x_{i1}<x_{i2}< \ldots< x_{ir_i}$$

กำหนดให้ $y_i = \min(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i})$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งซึ่ง y_i เป็นตัวสถิติอันดับแรกของข้อมูลเซนเซอร์ประเภทที่ 2 มีค่าสังเกตที่น้อยที่สุด r_i จากประชากร π_i ; $i = 0,1\ldots,k$

ให้ $\hat{\sigma}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุด (UMVUE) ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (พารามิเตอร์แสดงสเกล) σ โดยแบ่งเป็น 2 กรณี

(1) <u>กรณี r_i ไม่เท่ากันในทุก ๆ ประชากร</u>

ตัวประมาณของ σ คือ

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=o}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}(x_{ij}-y_i)+(n-r_i)(x_{ir_i}-y_i)}{\sum_{i=o}^{k}(r_i-1)}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบแกมมาด้วยพารามิเตอร์ $(v,\sigma/v)$ เมื่อ $v = \sum_{i=o}^{k}(r_i-1)$ และ x_{ij} เป็นค่าสังเกตที่ j จากประชากรที่ i ; $j = 1,2,\ldots, r_i$; $i = 0,1,2,\ldots,k$ $2 \leqslant r_i \leqslant n$ และ $u = \hat{\sigma}/\sigma$ มีการแจกแจงแบบแกมมา ด้วยพารามิเตอร์ $(v,1/v)$

(2) <u>กรณี r_i เท่ากันในทุก ๆ ประชากรคือ</u> $r_1=r_2=\ldots= r_k=r$.

ตัวประมาณของ σ คือ

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=o}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}(x_{ij}-y_i)+(n-r)(x_{ir}-y_i)}{(k+1)(r-1)}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบแกมมาด้วยพารามิเตอร์ $(v,\sigma/v)$ เมื่อ $v=(k+1)(r-1)$ และ x_{ij} เป็นค่าสังเกตที่ j จากประชากรที่ i ; $j=1,2,\ldots,r$, $i=0,1,2,\ldots,k$, $2<r<n$ และ $u=\hat{\sigma}/\sigma$ มีการแจกแจงแบบแกมมา ด้วยพารามิเตอร์ $(v,1/v)$

3.2 <u>การหาค่า percentage points ของตัวแปร</u> R_i

การเลือกประชากรที่ดี โดยการเปรียบเทียบกับประชากรควบคุมของข้อมูลชนิดนี้จะนำค่า percentage points ของตัวแปรสุ่ม R_i ซึ่งเป็นค่าคงที่ และจะนำค่าคงที่ไปใช้ในการคำนวณหาช่วงความเชื่อมั่นร่วมของความแตกต่างระหว่าง θ_i กับ θ_o เพื่อการตัดสินใจเลือกประชากรที่ดีกว่าประชากรควบคุม

3.2.1 การคำนวณหาค่า lower percentage points $c_{(n,k,p^*)}$ โดยที่ค่า $c_{(n,k,p^*)}$ จะเป็นค่าที่ทำให้

$$Pr\left[R_i \geq -c_{(n,k,p^*)} \quad , \quad ; i = 1,2,\ldots, k\right] = P^*$$

เมื่อ P^* ($\frac{1}{k+1} < P^* < 1$) เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นร่วมที่กำหนดให้

3.2.1.1 กรณีที่ r_i เท่ากันในทุก ๆ ประชากร การหาค่า lower percentage points จะเหมือนกับกรณีของข้อมูลทั่วไปเพียงแต่แทนค่า n ด้วย r ; $r \leq n$

3.2.1.2 กรณีที่ r_i ไม่เท่ากันในทุกประชากร

<u>วิธีทำ</u>

$$Pr\left[R_i \geq -c_{(n,k,p^*)} \quad ; i = 1,2,\ldots,k\right]$$

$$Pr\left[\frac{Z_i - Z_o}{n} \geq -c_{(n,k,p^*)} \quad ; i = 1,2,\ldots,k\right]$$

$$Pr\left[Z_i - Z_o \geq -u.\, c_{(n,k,p^*)} \quad ; i = 1,2,\ldots,k\right]$$

$$Pr\left[Z_i \geq Z_o - u.\, c_{(n,k,p^*)} \quad ; i = 1,2,\ldots,k\right]$$

ให้ $c_3 = c_{(n,k,p^*)}$ ซึ่งสามารถคำนวณหาค่าได้จากสมการ

$$Pr\left[Z_i \geq Z_o - u.\, c_3 \quad ; i = 1,2,\ldots,k\right]$$

$$= \int_o^{\infty}\{ \int_o^{c_3 u} f(Z_o)dZ_o + \int_{c_3 u}^{\infty}\left[1-F(Z_o - c_3 u)\right]^k f(Z_o)dZ_o \quad h(u)\, du$$

................(3.1)

เมื่อ

$F(.)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม (cummulative distribution function)

$f(Z_o)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเอกซ์โพเนนเชียลมาตรฐาน (standard exponential random variable)

$h(u)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแกมมา

จาก (1)

$$\int_o^{c_3u} f(Z_o)\, dZ_o = \int_o^{c_3u} e^{-Z_o}\, dZ_o$$

$$= 1 - e^{-c_3u} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2)$$

$$\int_{c_3u}^{\infty} \left[1- F(Z_o-c_3u) \right]^k f(Z_o)\, dZ_o = \int_{c_3u}^{\infty} e^{-k(Z_o-c_3u)} \cdot e^{-Z_o}\, dZ_o$$

$$= - e^{-kc_3u} \int_{c_3u}^{\infty} e^{-Z_o(k+1)}\, d(-Z_o)$$

$$= \frac{1}{k+1} e^{-c_3u} \qquad \ldots\ldots\ldots (3.3)$$

แทนค่าสมการที่ (3.2), (3.3) ในสมการที่ (3.1) มีค่าเท่ากับ

$$= \int_0^\infty \left[(1 - e^{-c_3 u}) + \frac{1}{k+1} e^{-c_3 u} \right] h(u)\, du$$

$$= \int_0^\infty 1 - \frac{k}{k+1} e^{-c_3 u} \quad h(u)\, du$$

$$= \int_0^\infty h(u)\, du - \frac{k}{k+1} \int_0^\infty e^{-c_3 u} \frac{v^v}{\Gamma(v)} u^{v-1} e^{-uv}\, du$$

$$= 1 - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{v^v}{\Gamma(v)} \int_0^\infty u^{v-1} e^{-u(v+c_3)}\, du$$

$$= 1 - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{v^v}{\Gamma(v)} \cdot \frac{1}{(v+c_3)^v} \int_0^\infty A^{v-1} e^{-A}\, dA \quad ; A = u(v+c_3)$$

$$= 1 - \frac{k}{k+1} (1 + \frac{c_3}{v})^{-v}$$

การหาค่า c_3 ทำได้โดยการกำหนดให้

$$Pr \left[R_i \geqslant -c_3 \quad ; i = 1,2,\ldots,k \right] = P^*$$

สำหรับค่า P^* $(1/k+1 < P^* < 1)$, k และ n ที่กำหนดให้ ดังนั้น

$$c_3 = v \left\{ \left[\left(\frac{k+1}{k} \right) (1-P^*) \right]^{-1/v} - 1 \right\} \quad ; \quad v = (k+1)(n-1)$$

3.2.2 การหาค่า upper percentage points $c_{(n,k,P^*)}$ โดยที่ค่า $c_{(n,k,p^*)}$ จะเป็นค่าที่ทำให้

$$Pr \left[R_i < c_{(n,k,P^*)} \quad ; i = 1,2,\ldots,k \right] = P^*$$

เมื่อ P^* $(\frac{1}{k+1} < P^* < 1)$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นร่วมที่กำหนดให้

3.2.2.1 กรณีที่ r_i เท่ากันในทุก ๆ ประชากร การหาค่า upper percentage points จะเหมือนกับกรณีของข้อมูลทั่วไปเพียงแต่แทนค่า n ด้วย $r;r \leq n$

3.2.2.2 กรณี r_i ไม่เท่ากันในทุกประชากร

<u>วิธีทำ</u>

$$\Pr\left[R_i \leq c_{(n,k,p^*)} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,k \right]$$

$$\Pr\left[\frac{Z_i - Z_o}{u} \leq c_{(n,k,p^*)} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,k \right]$$

$$\Pr\left[Z_i - Z_o \leq u \cdot c_{(n,k,p^*)} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,k \right]$$

$$\Pr\left[Z_i \leq Z_o + u \cdot c_{(n,k,p^*)} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,k \right]$$

ให้ $c_4 = c_{(n,k,p^*)}$ ซึ่งสามารถคำนวณหาค่าได้จากสมการ

$$\Pr\left[Z_i \leq Z_o + c_4 u \quad ; \; i = 1,2,\ldots, k \right] = \int_0^\infty \int_0^\infty F^k(Z_o + c_4 u) \, f(Z_o) dZ_o \, h(u) du$$

เมื่อ

$F(.)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม (cummulative distribution function)

$f(Z_o)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเอกซโพเนนเชียลมาตรฐาน (standard exponential random variable)

$h(u)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแกมมา

จาก (3.4)

$$F^{k}\ (Z_o + c_4u) = \left[\int_o^{Z_o+c_4u} f(Z_o)\ dZ_o\right]^{k}$$

$$= \left[1 - e^{-(Z_o-c_4u)}\right]^{k}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i} e^{-i(Z_o+c_4u)}$$

$$\therefore \int_o^{\infty} F^{k}\ (Z_o+c_4u)\ f(Z_o)\ dZ_o$$

$$= \int_o^{\infty}\left\{1 + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i} e^{-i(Z_o+c_4u)}\right\} e^{-Z_o}\ dZ_o$$

$$= \int_o^{\infty} e^{-Z_o}\ dZ_o + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i} e^{-ic_4u} \int_o^{\infty} e^{-Z_o(i+1)}\ dZ_o$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i}}{i+1} \binom{k}{i} e^{-ic_4u} \qquad \text{........(3.5)}$$

แทนค่าสมการที่ (3.5) ในสมการที่ (3.4) มีค่าเท่ากับ

$$\int_o^{\infty}\left[1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i}}{i+1} \binom{k}{i} e^{-ic_4u}\right] h(u)\ du$$

$$= \int_o^{\infty} h(u)\ du + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i}}{i+1} \binom{k}{i} \int_o^{\infty} e^{-ic_4u} \frac{v^{v}}{\Gamma(v)} u^{v-1} e^{-uv}\ du$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i}}{i+1} \binom{k}{i} \frac{v^{v}}{\Gamma(v)} \int_o^{\infty} u^{v-1} e^{-u(v+ic_4)}\ du$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i}}{i+1} \binom{k}{i} \frac{v^{v}}{\Gamma(v)} \frac{1}{(v+ic_4)^{v}} \int_o^{\infty} A^{v-1} e^{-A}\ dA\ ;\ A = u(v+ic_4)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i}}{i+1} \binom{k}{i} \frac{v^{v}}{\Gamma(v)} \cdot \frac{\Gamma(v)}{(v+ic_4)^{v}}$$

$$= \quad 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{k}{i} \left(1 + \frac{ic_4}{v}\right)^{-v}$$

$$= \quad \sum_{i=o}^{k} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{k}{i} \left(1 + \frac{ic_4}{v}\right)^{-v}$$

การหาค่า c_4 ทำได้โดยการกำหนดให้

$$Pr\left[R_i \leqslant c_4 \quad ; i = 1,2,\ldots,k\right] \quad = \quad P^*$$

นั่นคือ

$$\sum_{i=o}^{k} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{k}{i} \left(1 + \frac{ic_4}{v}\right)^{-v} \quad = \quad P^*$$

ดังนั้น c_4 หาได้โดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method)

สำหรับค่า P^* $\left(\frac{1}{k+1} < P^* < 1\right)$, k และ n ที่กำหนดให้

3.3 <u>การหาช่วงความเชื่อมั่นร่วมของพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งสำหรับข้อมูลเซนเซอร์ประเภทที่ 2</u> (Simultaneous confidence intervals of the location parameter for type 2 censored data)

การหาขอบเขตความเชื่อมั่นบน (upper confidence limits) และขอบเขตความเชื่อมั่นล่าง (lower confidence limits) ของตัวแปร R_i ; $i = 1,2,\ldots,k$

เมื่อ $R_i = n\left[(y_i - \theta_i) - (y_o - \theta_o)\right] / \hat{\sigma}$

และ $\hat{\sigma}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีความแปรปรวนต่ำสุด (UMVUE) ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ

3.3.1 การหาขอบเขตความเชื่อมั่นล่างของความแตกต่างระหว่าง θ_i กับ θ_o ; $i = 1,2,\ldots, k$ ที่ทำให้ความน่าจะเป็นมีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นร่วม (P^*) ที่กำหนดคือ

$$Pr\left[\theta_i - \theta_o \geq y_i - y_o - c_4 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{n} \quad ; i = 1,2,\ldots,k\right] = P^*$$

ซึ่งขอบเขตความเชื่อมั่นล่างของความแตกต่างระหว่าง θ_i กับ θ_o คือ

$$y_i - y_o - c_4 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{n} \quad ; i = 1,2,\ldots,k$$

3.3.2 การหาขอบเขตความเชื่อมั่นบนของความแตกต่างระหว่าง θ_i กับ θ_o $i = 1,2,\ldots,k$ ที่ทำให้ความน่าจะเป็นมีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นร่วม (P^*) ที่กำหนดคือ

$$Pr\left[\theta_i - \theta_o \leq y_i - y_o + c_3 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{n} \quad ; i = 1,2,\ldots,k\right] = P^*$$

ซึ่งขอบเขตความเชื่อมั่นบนของความแตกต่างระหว่าง θ_i กับ θ_o คือ

$$y_i - y_o + c_3 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{n} \quad ; i = 1,2,\ldots,k$$

3.4 <u>การเลือกประชากรที่ดีกว่าประชากรควบคุมของข้อมูลเซ็นเซอร์ประเภทที่ 2</u>

(On selection population better than a control population)

ในการเลือกประชากรที่ดีโดยการเปรียบเทียบ k ประชากรกับประชากรควบคุมของข้อมูลเซ็นเซอร์ประเภทที่ 2 จะพิจารณาเซ็ทของความเป็นไปได้ของการตัดสินใจเลือกที่มี k+1 วิธีการซึ่งจะเป็นไปตามวิธีการ (procedure) A คือ

A_o : การเลือกประชากรควบคุม π_o เป็นประชากรที่ดี

A_i : การเลือกประชากรที่ $i = 1,2,...,k$ ถ้ามีประชากร i เพียงประชากรเดียว ที่ดีกว่าประชากรควบคุม

A_{ij} : การเลือกประชากรที่ i และ ประชากรที่ j ; $i \neq j$ $(i,j=1,2,...,k)$ ถ้ามีประชากรที่ i และประชากรที่ j เพียง 2 ประชากรที่ดีกว่าประชากรควบคุม โดยไม่เรียงลำดับ

: :

$A_{1,2,...,k}$: การเลือกประชากรทั้งหมด k ประชากร ถ้าทุก ๆ ประชากรที่ดีกว่าประชากรควบคุม

3.4.1 เกณฑ์ที่นำมาใช้ในการตัดสินใจเลือกประชากรที่มีค่าพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งมากกว่าค่าพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งของประชากรควบคุม ว่าเป็นประชากรที่ดีโดยการพิจารณาจากขอบเขตความเชื่อมั่นล่างคือ

จาก $\theta_i - \theta_o \geqslant y_i - y_o - c_4 . \hat{\sigma}/n$

ซึ่งประชากรที่ i ; $i=1,2,...,k$ จะมีค่าพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งมากกว่าค่าพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งของประชากรควบคุมคือ $\theta_i > \theta_o$ ก็ต่อเมื่อ $y_i - y_o \geqslant c_4 . \hat{\sigma}/n$

ดังนั้นเกณฑ์การตัดสินใจเลือกจะเป็นดังนี้

(1) ยอมรับว่าประชากรควบคุมเป็นประชากรที่ดี (A_o) ก็ต่อเมื่อ $y_i - y_o < c_4 . \hat{\sigma}/n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ i ; $i = 1,2,...,k$

(2) ยอมรับว่าประชากรที่ i ; $i = 1,2,...,k$ ประชากรเดียวที่ดีกว่าประชากรควบคุม (A_i) ก็ต่อเมื่อ $y_i - y_o \geqslant c_4 . \hat{\sigma}/n$ และ $y_j - y_o < c_4 . \hat{\sigma}/n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $i \neq j$; $i,j = 1,2,...,k$

(3) ยอมรับว่าประชากรที่ i และ ประชากรที่ j ; $i \neq j$ $(i,j = 1,2,\ldots,k)$ ดีกว่าประชากรควบคุม โดยไม่เรียงลำดับ (A_{ij}) ก็ต่อเมื่อ $y_i - y_o \geqslant c_4 \cdot \hat{\sigma}/n$, $y_j - y_o \geqslant c_4 \cdot \hat{\sigma}/n$ และ $y_l - y_o < c_4 \cdot \hat{\sigma}/n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $l \neq i$ หรือ j ; $i,j,\ l=1,2,\ldots,k$

:

:

(k+1 ยอมรับว่าประชากรทั้งหมด k ประชากรดีกว่าประชากรควบคุม $(A_{1,2,\ldots,k})$

ต่อเมื่อ $y_i - y_o \geqslant c_4 \cdot \hat{\sigma}/n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ i ; $i=1,2\ \ldots,k$

โดยที่ c_4 ได้จากการกำหนดให้

$$\Pr\left[R_i \leqslant c_4 \ ;\ i = 1,2,\ldots,k\right] = P^*$$

เมื่อ P^* เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นร่วมที่กำหนดให้

3.4.2 เกณฑ์ที่นำมาใช้ในการตัดสินใจเลือกประชากรที่มีค่าพารามิเตอร์แสดงตำตำแหน่งน้อยกว่าค่าพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งของประชากรควบคุม ว่าเป็นประชากรที่ดีโดยการพิจารณาจากขอบเขตความเชื่อมั่นบนคือ

$$\text{จาก} \quad \theta_i - \theta_o \leqslant y_i - y_o + c_3 \cdot \hat{\sigma}/n$$

ซึ่งประชากรที่ i ; $i=1,2,\ldots,k$ จะมีค่าพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งน้อยกว่าค่าพารามิเตอร์แสดงตำแหน่งของประชากรควบคุมคือ $\theta_i < \theta_o$ ก็ต่อเมื่อ $y_i - y_o \leqslant -c_3 \cdot \hat{\sigma}/n$

ดังนั้นเกณฑ์การตัดสินใจเลือกจะเป็นดังนี้

(1) ยอมรับว่าประชากรควบคุมเป็นประชากรที่ดี (A_o) ก็ต่อเมื่อ $y_i - y_o > -c_3 \cdot \hat{\sigma}/n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ i ; $i = 1,2,\ldots,k$

(2) ยอมรับว่าประชากรที่ i ; $i=1,2,\ldots,k$ ประชากรเดียวที่ดีกว่าประชากรควบคุม (A_i) ก็ต่อเมื่อ $y_i - y_o \leqslant -c_3 \cdot \hat{\sigma}/n$ และ $y_j - y_o > -c_3 \cdot \hat{\sigma}/n$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ $i \neq j$; $i, j = 1,2,\ldots,k$

(3) ยอมรับว่าประชากรที่ i และ ประชากรที่ j ; $i \neq j$ $(i,j = 1,2,\ldots,k)$ ดีกว่าประชากรควบคุมโดยไม่เรียงลำดับ (A_{ij}) ก็ต่อเมื่อ $y_i - y_o \leqslant - c_3 \cdot \hat{\sigma}/n$, $y_j - y_o < - c_3 \cdot \hat{\sigma}/n$ และ $y_l - y_o > - c_3 \cdot \hat{\sigma}/n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $l \neq l$ หรือ j ; $i,j,l = 1,2,\ldots,k$

:

:

(k+1) ยอมรับว่าประชากรทั้งหมด k ประชากรดีกว่าประชากรควบคุม $(A_{1,2,\ldots,k})$ ต่อเมื่อ $y_i - y_o \leqslant - c_3 \cdot \hat{\sigma}/n$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ i ; $i=1,2,\ldots,k$

โดยที่ c_3 ได้จากการกำหนดให้

$$Pr\left[R_i \geqslant - c_3 \; ; \; i = 1,2,\ldots,k\right] = P^*$$

เมื่อ P^* เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นร่วมที่กำหนดให้