บทที่ 4

การวิเคราะห์สมการของระบบอบแห้ง

การอบแห้งเมล็ดข้าวเปลือกจะเกิดการเปลี่ยนแปลงขึ้นพร้อมกันอย่างต่อเนื่องของอุณหภูมิ, ความชื้นสัมพัทธ์ของลมร้อน และการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ, ปริมาณความชื้นของข้าวเปลือก ซึ่งการเปลี่ยนแปลงนี้เกิดขึ้นตลอดระยะความลึกของเครื่องอบแห้ง

สมการของระบบอบแห้งเป็นสมการที่พัฒนามาจากกฎการสมดุลย์ทางด้านความร้อน (heat balance or energy balance) และกฎการสมดุลย์ทางมวล (mass balance) ซึ่งสมการเหล่านี้ถือเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบอบแห้งที่สร้างขึ้นเพื่อใช้หาคำตอบแทนการทดลอง โดยมีข้อสมมุติฐานดังนี้

4.1 ข้อสมมุติฐาน

1) ไม่คิดว่าปริมาตรของเมล็ดมีค่าลดลงขณะทำการอบแห้ง

2) ไม่มีการนำความร้อนระหว่างเมล็ดพืช

3) ไม่คิดว่ามีเทมเพอร์เรเทอร์แกร์เดียน(temperature gradients) ในแต่ละเมล็ด

4) ไม่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างเครื่องอบแห้งกับสิ่งแวดล้อม ถือว่าผนังเครื่องเป็นอะเดียเบติก (adiabatic)

5) คุณสมบัติทางความร้อนของเมล็ดพืช และของลมร้อน มีค่าคงที่ในช่วงเวลาที่กำลังพิจารณา

6) ไม่เกิดการกลั่นตัวของไอน้ำในอากาศ

7) เป็นสมการที่คิดเพียงมิติเดียว(one-dimension) ในทิศทางของความสูง

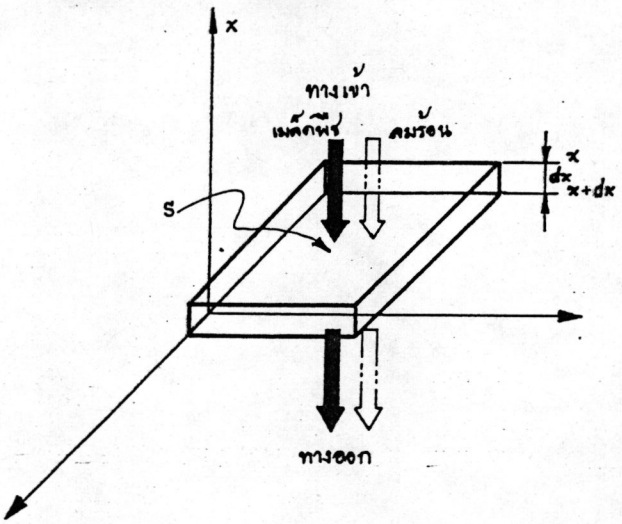
8) อัตราไหลของข้าวเปลือกและของลมร้อนเป็นการไหลในช่องทางที่ปิดรอบ ถือให้อัตราไหลมีค่าคงที่

9) ค่า $\partial T/\partial t$ และ $\partial W/\partial t$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่า $\partial T/\partial x$ และ $\partial W/\partial x$ จึงไม่นำมาคิด

10) สมการการอบแห้งของเมล็ดพืช หรืออัตราการอบแห้ง ($\partial M/\partial t$) และ

ค่าความชื้นสมดุลย์ของเมล็ดพืชรู้ค่าเรียบร้อยแล้ว

4.2 <u>การวิเคราะห์สมการที่ใช้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์</u>



รูป 4.2 พิจารณาชั้นบางที่มีความหนา dx

<u>เมล็ดข้าวเปลือก</u>

ไหลเข้าด้วยอัตราไหล Gp

ความเร็ว Vp

อุณหภูมิของเมล็ดข้าวเปลือก θ

ปริมาณความชื้น M

พื้นที่ผิวจำเพาะของข้าวเปลือก Sa

<u>ลมร้อน</u>

ไหลเข้าด้วยอัตราไหล Ga

ความเร็ว Va

อุณหภูมิ T

อัตราส่วนความชื้น W

การวิเคราะห์สมการทางคณิตศาสตร์ของระบบอบแห้งแบบไหลในทิศทางเดียวกันนี้ จะใช้หลักการของการสมดุลย์ทางพลังงานและการสมดุลย์ทางมวลของเมล็ดพืชและลมร้อน ซึ่งไหลเข้าที่ระนาบ x เข้าสู่ปริมาตร s.dx และไหลออกที่ระนาบ x+dx

4.2.1 พิจารณาการสมดุลย์ทางพลังงานของลมร้อน

จากกฎการสมดุลย์ของพลังงาน(energy balance) จะได้ พลังงานความร้อนที่ส่งถ่ายออกโดยการพา มีค่าเท่ากับความแตกต่างของพลังงานความร้อนของลมร้อนที่ไหลเข้าและไหลออกจากปริมาตร s.dx บวกกับการเปลี่ยนแปลงของค่าพลังงานความร้อนของลมร้อนที่อยู่ตามรูพรุนระหว่างเมล็ดพืชภายในปริมาตร s.dx

พิจารณาจำนวนปริมาณลมร้อนที่ไหลเข้าและออกจากปริมาตร s.dx จะประกอบไปด้วยอากาศแห้ง(dry air) และไอน้ำ(water vapor) ภายในเวลา dt เมื่อไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด s จะมีค่าเท่ากับ

$$(\rho a.Va + \rho a.Va.W)\ s.dt \qquad (4.1)$$

พลังงานความร้อนของลมร้อนที่ไหลเข้าปริมาตร s.dx ที่ระนาบ x ใด ๆ ในเวลา dt จะมีค่าเท่ากับ

$$(\rho a.Va.Ca + \rho a.Va.Cv.W)\ T.s.dt \qquad (4.2)$$

พลังงานความร้อนของลมร้อนที่ไหลออกจากปริมาตร s.dx ที่ระนาบ x+dx ในเวลา dt จะมีค่าเท่ากับ

$$(\rho a.Va.Ca + \rho a.Va.Cv.W)\left(T + \frac{\partial T}{\partial x}.dx\right) s.dx \qquad (4.3)$$

ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงค่าพลังงานความร้อนของลมร้อนภายในระยะ dx มีค่าเท่ากับ

$$(\rho a.Va.Ca + \rho a.Va.Cv.W)\ s.\frac{\partial T}{\partial x}.dx.dt \qquad (4.4)$$

ขณะเดียวกันลมร้อนจำนวน $\epsilon.\rho a.s.dx$ ซึ่งอยู่ในช่องว่างตามรูพรุนของเมล็ดข้าวเปลือกมีการเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อนเทียบกับเวลา มีค่าเท่ากับ

$$(\rho a.Ca + \rho a.Cv.W)\ \epsilon.s.dx.\frac{\partial T}{\partial t}.dt \qquad (4.5)$$

เมื่อลมร้อนไหลผ่านเมล็ดข้าวเปลือก จะมีการพาความร้อนเข้าสู่ชั้นเมล็ดข้าวเปลือกซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$q = h_c \, Sa \, (T - \theta) \, s.dx.dt \qquad (4.6)$$

<u>โดยสมดุลย์ทางพลังงานความร้อนจะได้</u>

$$-h_c \, Sa \, (T - \theta) \, s.dx.dt = (\rho a.Va.Ca + \rho a.Va.Cv.W) \, s.\frac{\partial T}{\partial x}.dx.dt + (\rho a.Ca + \rho a.Cv.W) \, \epsilon.s.\frac{\partial T}{\partial t}.dx.dt \qquad (4.7)$$

จัดรูปใหม่ได้

$$(\rho a.Ca + \rho a.Cv.W) \, s.dx.dt \left(Va.\frac{\partial T}{\partial x} + \epsilon \cdot \frac{\partial T}{\partial t}\right) = - h_c \, Sa \, (T - \theta) \, s.dx.dt$$

หารตลอดด้วย $s.dx.dt$ และจัดรูปใหม่

$$Va.\frac{\partial T}{\partial x} + \epsilon \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{- h_c \, Sa \, (T - \theta)}{(\rho a.Ca + \rho a.Cv.W)} \qquad (4.8)$$

จากสมมุติฐานข้อ 9) เทอม $\epsilon.\partial T/\partial t$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอม $Va.\partial T/\partial x$ สามารถตัดทิ้งไม่นำมาคิด และ $Ga = Va.\rho a$ ดังนั้นสมการ (4.8) ลดรูปลงเหลือ

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{- h_c \, Sa \, (T - \theta)}{Ga \, (Ca + Cv.W)} \qquad (4.9)$$

4.2.2 <u>พิจารณาการสมดุลย์ของพลังงานความร้อนของข้าวเปลือก</u>

จากกฎการสมดุลย์ของพลังงาน(energy balance) จะได้ พลังงานความร้อนที่เมล็ดพืชได้รับโดยการพา มีค่าเท่ากับค่าของพลังงานความร้อนที่ใช้ในการทำให้เมล็ดพืชมีอุณหภูมิสูงขึ้น บวกกับค่าความร้อนแฝงที่ทำให้ความชื้นในเมล็ดพืชระเหยออกไป บวกกับพลังงาน

ความร้อนที่ทำให้ไอน้ำมีอุณหภูมิสูงขึ้น

ค่าพลังงานความร้อนของเมล็ดข้าวเปลือกที่ไหลเข้าสู่ปริมาตร s.dx ที่ระนาบ x ใด ๆ ในเวลา dt มีค่าเท่ากับ

$$(\rho p.Cp.Vp + \rho p.Cw.Vp.M)\ \theta.s.dt \qquad (4.10)$$

เมล็ดพืชที่ไหลออกจากระนาบ x+dx ที่เวลา dt ใด ๆ จะมีพลังงานความร้อนเท่ากับ

$$(\rho p.Cp.Vp + \rho p.Vp.Cw.M)\ (\theta + \frac{\partial\theta}{\partial x}.dx)\ s.dt \qquad (4.11)$$

พลังงานความร้อนที่ทำให้เมล็ดข้าวเปลือกมีอุณหภูมิสูงขึ้น มีค่าเท่ากับ

$$(\rho p.Cp.Vp + \rho p.Vp.Cw.M)\ \frac{\partial\theta}{\partial x}.dx.s.dt \qquad (4.12)$$

จำนวนความชื้นที่ระเหยออกที่เวลา t ใด ๆ มีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของค่าอัตราส่วนความชื้น(humidity ratio) ของลมร้อนที่ไหลผ่านปริมาตร s.dx ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$Ga.\frac{\partial W}{\partial x}.dx.dt \qquad (4.13)$$

ดังนั้นค่าพลังงานความร้อนของการทำให้ความชื้นระเหยออกที่เวลา t ใด ๆ มีค่าเท่ากับ

$$hfg.Ga.\frac{\partial W}{\partial x}.dx.s.dt \qquad (4.14)$$

พลังงานความร้อนที่ใช้ทำให้ไอน้ำ(water vapor) ที่มีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิของเมล็ดพืช θ เปลี่ยนแปลงไปโดยมีอุณหภูมิสูงขึ้นเท่ากับอุณหภูมิของลมร้อน T ที่เวลา t ใด ๆ มีค่าเท่ากับ

$$Cv\ (T - \theta)\ Ga.\frac{\partial W}{\partial x}.dx.s.dt \qquad (4.15)$$

พลังงานความร้อนที่เมล็ดพืชได้รับโดยการพามีค่าเท่ากับ

$$q = h_c \, Sa \, (T - \theta) \, s.dx.dt \qquad (4.16)$$

<u>โดยสมดุลย์ทางพลังงานความร้อนจะได้</u>

$$h_c \, Sa \, (T - \theta) \, s.dx.dt = (\rho p.Cp.Vp + \rho p.Vp.Cw.M) \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot dx.s.dt + hfg.Ga.\frac{\partial W}{\partial x}.dx.s.dt + Cv \, (T - \theta) \, Ga.\frac{\partial W}{\partial x}.dx.s.dt \qquad (4.17)$$

สมการ (4.17) หารตลอดด้วย s.dx.dt และจัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{h_c \, Sa \, (T - \theta)}{Gp \, (Cp + Cw.M)} - \frac{(hfg + Cv \, (T - \theta)) \, Ga.\frac{\partial W}{\partial x}}{Gp \, (Cp + Cw.M)} \qquad (4.18)$$

4.2.3 <u>พิจารณาการสมดุลย์ทางมวลของลมร้อนและเมล็ดข้าวเปลือก</u>

จากกฎการสมดุลย์ทางมวล(mass balance) ได้ว่า ปริมาณความชื้นที่สูญเสียไปของเมล็ดข้าวเปลือก จะมีค่าเท่ากับปริมาณของไอน้ำในอากาศที่ลมร้อนนำเข้าปริมาตร s.dx ที่ระนาบ x ลบด้วยปริมาณที่นำออกที่ระนาบ x+dx บวกด้วยปริมาณที่เปลี่ยนแปลงไปของค่าปริมาณความชื้นของอากาศภายในช่องว่างระหว่างเมล็ด

ปริมาณความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือกที่ไหลเข้าปริมาตร s.dx ที่ระนาบ x ในเวลา dt ใด ๆ มีค่าเท่ากับ

$$Vp.\rho p.s.M.dt \qquad (4.19)$$

ปริมาณความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือกที่ไหลออกจากปริมาตร s.dx ที่ระนาบ x+dx ในเวลา dt ใดๆ มีค่าเท่ากับ

$$Vp.\rho p.s \, (M - \frac{\partial M}{\partial x}.dx) \, dt \qquad (4.20)$$

ดังนั้นปริมาณความชื้นที่สูญเสียไปของเมล็ดข้าวเปลือกขณะที่ไหลออกจากปริมาตร

s.dx ที่ระนาบ x+dx ในเวลา dt จะมีค่าเท่ากับ

$$Vp.\rho p.s.M.dt - Vp.\rho p.s\left(M - \frac{\partial M}{\partial x}.dx\right) dt \qquad (4.21)$$

จัดรูปสมการใหม่

$$Vp.\rho p.s.\frac{\partial M}{\partial x}.dx.dt \qquad (4.22)$$

ปริมาณของไอน้ำในอากาศที่นำเข้าปริมาตร s.dx ที่ระนาบ x ในเวลา dt มีค่าเท่ากับ

$$Va.\rho a.s.W.dt \qquad (4.23)$$

ปริมาณของไอน้ำในอากาศที่นำออกจากปริมาตร s.dx ที่ระนาบ x+dx ในเวลา dt มีค่าเท่ากับ

$$Va.\rho a.s\left(W + \frac{\partial W}{\partial x}.dx\right) dt \qquad (4.24)$$

ดังนั้นปริมาณของไอน้ำในอากาศที่เปลี่ยนแปลงไปมีค่าเท่ากับ

$$Va.\rho a.s.W.dt - Va.\rho a.s\left(W + \frac{\partial W}{\partial x}.dx\right) dt \qquad (4.25)$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$- Va.\rho a.s.\frac{\partial W}{\partial x}.dx.dt \qquad (4.26)$$

การเปลี่ยนแปลงของค่าอัตราส่วนความชื้น(humidity ratio) ของอากาศภายในช่องว่างระหว่างเมล็ด ภายในเวลา dt มีค่าเท่ากับ

$$\epsilon.s.dx.\rho a.\frac{\partial W}{\partial t}.dt \qquad (4.27)$$

จากกฎการสมดุลย์ทางมวล(mass balance) จะได้

$$Vp.\rho p.s.\frac{\partial M}{\partial x}.dx.dt = - Va.\rho a.s.\frac{\partial W}{\partial x}.dx.dt + \epsilon.s.dx.\rho a.\frac{\partial W}{\partial t}.dt \qquad (4.28)$$

จัดรูปใหม่และหารตลอดด้วย s.dx.dt จะได้

$$Vp.\rho p.\frac{\partial M}{\partial x} = - Va.\rho a.\frac{\partial W}{\partial x} + \epsilon \cdot \rho a.\frac{\partial W}{\partial t} \qquad (4.29)$$

$$Gp.\frac{\partial M}{\partial x} = - Ga.\frac{\partial W}{\partial x} + \epsilon.\rho a.\frac{\partial W}{\partial t} \qquad (4.30)$$

จากข้อสมมุติฐานข้อที่ 9. เทอม $\epsilon \cdot \rho a.\partial W/\partial t$ มีค่าน้อยมาก สามารถตัดทิ้งไม่นำมาคิดได้ ดังนั้นสมการ (4.30) ลดรูปลงเหลือ

$$Gp.\frac{\partial M}{\partial x} = - Ga.\frac{\partial W}{\partial x} \qquad (4.31)$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{Gp}{Ga}.\frac{\partial M}{\partial x} \qquad (4.32)$$

จะเห็นว่าสมการ (4.31) นั้นสามารถสรุปได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าปริมาณความชื้นของอากาศมีค่าเท่ากับอัตราการสูญเสียของค่าปริมาณความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือก ซึ่งค่าอัตราสูญเสียของค่าปริมาณความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือก($\partial M/\partial x$) จะได้พิจารณาในหัวข้อ 4.2.4 ต่อไป

4.2.4 สมการอัตราการอบแห้งในชั้นบาง (thin-layer drying equation)

จากสมมุติฐานข้อที่ 10. สมการที่ใช้แสดงค่าอัตราการอบแห้ง(dM/dt) นี้ต้องรู้ค่าแน่นอนแล้ว ซึ่งได้มีผู้ทำการค้นคว้าและวิจัยไว้เป็นจำนวนมากในเรื่องของการอบแห้งในชั้น

บางและในการศึกษากระบวนการอบแห้งแบบต่อเนื่อง (continuous flow dryer) นั้นได้ใช้สมการการอบแห้งของชั้นบางร่วมในการจำลองแบบ โดยการแบ่งระยะความลึกของระยะอบแห้งออกเป็นชั้นบางหลายชั้น แล้วทำการศึกษาทีละชั้นตามลำดับ

จากการศึกษาของ Thompson (1968,1969) ,ของ Converse (1972) , ของ Anderson (1972) ,ของ Farmar (1972) ,ของ Baugman (1973) ,และของ Brook (1977) ซึ่งได้ทำการศึกษาการอบแห้งข้าวโพดด้วยกรรมวิธีการอบแห้งแบบไหลต่อเนื่อง โดยเฉพาะการอบแห้งแบบไหลทางเดียวกัน นักวิจัยเหล่านี้ยืนยันว่าสามารถใช้สมการการอบแห้งของชั้นบาง(thin-layer equation) ร่วมในการศึกษาการอบแห้งแบบต่อเนื่องได้เป็นอย่างดี

ต่อมา Walker L.P.(1978) ได้ทำการศึกษาการอบแห้งข้าวเปลือกชนิดเมล็ดสั้นด้วยการอบแห้งแบบไหลทางเดียวกัน และได้ใช้สมการการอบแห้งของชั้นบางร่วมในการศึกษาเช่นเดียวกัน หลังจากนั้น Zahed (1982) ได้ทำการศึกษากับข้าวเปลือกชนิดเมล็ดยาวปานกลาง ซึ่งทั้งสองได้สรุปว่าสามารถใช้สมการการอบแห้งของชั้นบางในการศึกษาการอบแห้งแบบไหลต่อเนื่องได้

4.2.4.1 <u>หลักการศึกษาการอบแห้งของเมล็ดพืช</u>

การอบแห้งเมล็ดพืชมีขบวนการเกิดขึ้นสองอย่างด้วยกัน คือ การส่งถ่ายพลังงานความร้อนจากลมร้อนไปยังเมล็ดพืช และการส่งถ่ายมวลความชื้นจากเมล็ดพืชสู่ลมร้อน ซึ่งในการอบแห้งแบบไหลทางเดียวกัน(concurrent flow dryer) ขบวนการทั้งสองนี้เกิดขึ้นพร้อมกันในทิศทางเดียวกัน โดยการส่งถ่ายพลังงานความร้อนจะทำให้น้ำในเมล็ดพืชระเหยออก และทำให้เมล็ดพืชมีอุณหภูมิสูงขึ้น

ในการศึกษาการอบแห้งเมล็ดพืชที่มีความลึกมาก จะแบ่งชั้นความลึกออกเป็นชั้นบางหลายชั้น และเพื่อให้ได้คำตอบที่แม่นยำมักแบ่งชั้นให้มีความหนาเท่ากับความหนาของเมล็ดพืช (single layer drying)

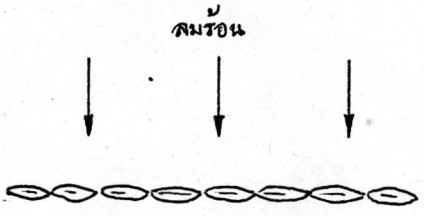
<u>ในการศึกษาได้ตั้งข้อสมมุติฐานดังนี้</u>

1. เมล็ดพืชมีเนื้อเป็นเนื้อเดียวกันตลอด (homogeneous,iso-

tropic) และมีรูปทรงทางเรขาคณิตที่สมดุลย์(symmetrical)

2. ไม่มีความแตกต่างของอุณหภูมิภายในเมล็ดพืช

3. ไม่มีความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างเมล็ดที่อยู่ ณ.ชั้นเดียวกัน



รูป 4.2.4.1 ลักษณะของชั้นบางที่มีความหนาเท่ากับความหนาของเมล็ดพืช 1 เมล็ด

จากการศึกษาการส่งถ่ายมวลความชื้นจากเมล็ดพืชสู่ลมร้อน พบว่าเป็นไปตามสมการการแพร่กระจายทางมวล(diffusion equation) ซึ่ง Crank (1964) ได้จัดรูปสมการการแพร่กระจายเป็นสมการที่มีค่าโคออดิเนท(coordinate) เป็นแผ่นเรียบ(slab) ทรงกระบอก(cylindical) และทรงกลม(sphere) สมการของ Crank ถือว่าเป็นสมการทางทฤษฎีที่ให้คำตอบได้ดีที่สุด แต่เนื่องจากมีความยากลำบากในการหาคำตอบ ต่อมาจึงได้มีผู้ทำการศึกษาการอบแห้งได้ปรับปรุงโดยใช้เฉพาะเทอมแรกของคำตอบของ Crank เท่านั้น และหาค่าคงที่ที่ได้จากการทดลองมาประกอบในสมการ ซึ่งจัดเป็นสมการกึ่งทฤษฎี และมีบางท่านที่ตั้งสมการขึ้นใหม่โดยใช้ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง สมการที่ได้ถือเป็นสมการที่ได้จากการทดลอง ซึ่งสมการการอบแห้งทั้งสมการทางทฤษฎี กึ่งทฤษฎี และจากการทดลอง สามารถให้คำตอบได้ใกล้เคียงกัน

4.2.4.2 <u>สมการทางทฤษฎี</u>

Crank (1957) ได้ให้คำตอบของสมการที่ Hukill (1954) ได้ตั้งขึ้นไว้ โดย Crank ได้จัดรูปสมการเป็นสมการที่มีค่าโคออดิเนท (coordinate) เป็นแผ่นเรียบ (slab) ทรงกระบอก (cylindical) และทรงกลม (sphere) ซึ่งมีรูปสมการดังนี้

สมการการแพร่กระจายของแผ่นเรียบ

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \qquad (4.33)$$

สมการการแพร่กระจายของวัตถุทรงกระบอก

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[D\, r \frac{\partial M}{\partial r}\right] \qquad (4.34)$$

สมการการแพร่กระจายของวัตถุทรงกลม

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D\left[\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial M}{\partial r}\right] \qquad (4.35)$$

Crank ได้ทำการศึกษาอบแห้งเมล็ดข้าวโพด โดยสมมุติให้เมล็ดข้าวโพดมีรูปทรงเป็นทรงกระบอก และทรงกลม Crank พบว่าสมการการแพร่กระจายของวัตถุทรงกลมให้คำตอบได้ดีเมื่อเทียบผลกับการทดลอง คำตอบของสมการ (4.35) ซึ่งมีสภาวะเงื่อนไข (boundary condition) ดังนี้คือ

$$\partial M/\partial r = 0 \quad , \quad r = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$M = Mo \quad , \quad 0 < r < R \quad , \quad t = 0$$

$$M = Me \quad , \quad r = R \quad , \quad t > 0$$

คำตอบของ Crank (1964) ทางทฤษฎี

$$\frac{M - Me}{Mo - Me} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \frac{-D\pi^2 n^2 t}{r^2} \qquad (4.36)$$

เมื่อ

D - ค่า ส.ป.ส.การฟุ้งกระจายทางมวล (diffusion coefficient) $m^2/hr.$ ค่า D ได้จากตาราง 3.1 หน้า 16

r - รัศมีสมมุติของเมล็ดพืช (m)

$r = 3.L.W.K / 2(LW+WK+LK)$

L,W,K - ความยาว,ความกว้าง,ความหนา ของเมล็ดพืชตามลำดับ (m)

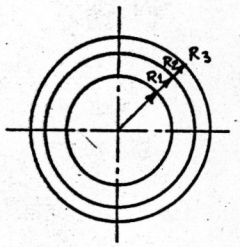
t - เวลาในการอบแห้ง (hr.)

M - ค่าปริมาณความชื้น ณ.ตำแหน่งใดๆ (จุดทศนิยม มาตรฐานแห้ง)

Mo - ค่าปริมาณความชื้นเบื้องต้น (จุดทศนิยม มาตรฐานแห้ง)

Me - ค่าปริมาณความชื้นสมดุลย์ (จุดทศนิยม มาตรฐานแห้ง)

Steffe (1979) ได้พัฒนาสร้างสมการของ Crank โดยคิดละเอียดขึ้น กล่าวคือสร้างสมการการอบแห้งของเมล็ดข้าวสาร (endosperm material) , เมล็ดข้าวกล้อง (brown rice) , และเมล็ดข้าวเปลือก (rough rice) โดยคิดเป็นว่าเมล็ดข้าวมีรูปทรงเป็นวัตถุทรงกลม ที่มีโครงสร้างเป็น 3 ชั้น ประกอบไปด้วยชั้นในเป็นเนื้อข้าวสาร ชั้นที่สองเป็นรำ และชั้นที่สามเป็นแกลบ ดังรูป 4.2.4.2



R1 - รัศมีสมมุติของข้าวสาร (m)

R2 - รัศมีสมมุติของข้าวกล้อง (m)

R3 - รัศมีสมมุติของข้าวเปลือก (m)

สมการของ Steffe มีรูปสมการดังนี้

$$\frac{\partial M}{\partial t} = Dm \left[\frac{\partial^2 M}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial M}{\partial r} \right] \qquad (4.37)$$

$$m = 1,2,3$$

$M = Me \ , \ r = R3 \ , \ t > \emptyset$

$M = Mo \ , \ \emptyset < r < R1 \ , \ t = \emptyset$

$M = Mo \ , \ R1 < r < R2 \ , \ t = \emptyset$

$M = Mo \ , \ R2 < r < R3 \ , \ t = \emptyset$

เมื่อ

D1 - ค่า ส.ป.ส.การพุ้งกระจายความชื้นของเนื้อข้าวสาร ($m^2/hr.$)

D2 - ค่า ส.ป.ส.การพุ้งกระจายความชื้นของเนื้อรำ ($m^2/hr.$)

D3 - ค่า ส.ป.ส.การพุ้งกระจายความชื้นของแกลบ ($m^2/hr.$)

ค่า D1,D2,D3 จากตาราง 3.1 หน้า 16

4.2.4.3 สมการกึ่งทฤษฎี

สมการกึ่งทฤษฎีเป็นสมการที่ใช้เฉพาะเทอมแรกของสมการคำตอบของ Crank (1964) ในการหาค่าอัตราการอบแห้ง (dM/dt) ในการศึกษาการอบแห้งของชั้นบาง เพื่อลดความยุ่งยาก สมการของ Crank เมื่อคิดเฉพาะเทอมแรกมีรูปสมการดังนี้ คือ

$$\frac{M - Me}{Mo - Me} = \frac{6}{\pi^2} \exp \frac{-\pi^2 D t}{r^2} \qquad (4.38)$$

ให้ $k = \pi^2 D / r^2$, $A = 6/\pi^2$

สมการ (4.38) เปลี่ยนรูปมาเป็น

$$\frac{M - Me}{Mo - Me} = A \exp(-k t) \qquad (4.39)$$

โดยสมการ (4.39) นี้เมื่อนำผลไปเทียบกับผลที่ได้จากการทดลอง ซึ่งจากการศึกษาของ Brook , Bakker Arkema และ Hall (1973) ในการอบแห้งข้าวโพด พบว่าให้ค่าผิดพลาดไป 5 % จากคำตอบของ Chu และ Hustrulid (1968) ที่ใช้สมการคำตอบของ Crank คือสมการ (4.36) ซึ่งเป็นสมการเต็มรูป

นอกจากนี้ยังมีผู้วิจัยอีกหลายท่าน เช่น Simmond (1953) , Hustrulid และ Flikke (1959) , Allen (1960) , Henderson และ Pabis (1961) , Boyce (1965) ที่ได้ใช้สมการลักษณะเช่นเดียวกับสมการ (4.39) ในการทดลองอบแห้ง โดยปรับสมการให้เข้ากับการทดลอง ดังนี้

$$MR = A \exp(-k t) \qquad (4.40)$$

เมื่อ

k , A - เป็นค่าคงที่ที่ได้จากการทดลอง

Sharaf - Elden et al (1979) ได้ใช้สมการในรูปกึ่งทฤษฎีที่มีพื้นฐานมาจากNewton's Law of cooling ซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$dM/dt = -k(M - Me) \qquad (4.41)$$

สมการ (4.41) เมื่อทำการแยกตัวแปร (seperation of variable) แล้วอินทิเกรต (upon integrating) ทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{M - Me}{Mo - Me} = \exp(-k\,t) \qquad (4.42)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (4.42) มีรูปสมการเช่นเดียวกับสมการ (4.39) ที่คิดเฉพาะเทอมแรกของสมการที่ Crank ได้ให้คำตอบไว้

4.2.4.4 <u>สมการที่ได้จากการทดลอง</u>

เนื่องจากสมการทางทฤษฎีมีความยุ่งยากในการใช้ โดยเฉพาะเมื่อไม่ทราบค่า ส.ป.ส.การพุ้งกระจายทางมวลของเมล็ดพืช จึงได้มีนักวิจัยหลายท่านที่ได้ใช้การทดลองเป็นหลัก แล้วตั้งสมการให้สอดคล้องกับผลการทดลอง โดยพยายามใช้รูปแบบของสมการตามรูปแบบของสมการกึ่งทฤษฎี ซึ่งพอจะสรุปได้ ดังนี้

1. Page (1949) ได้พัฒนาสร้างสมการการอบแห้งของชั้นบางจากข้อมูลที่ได้ในการทดลองอบแห้งข้าวโพด ได้สมการดังนี้

$$MR = \exp(-P_1\, t^{P_2}) \qquad (4.43)$$

ซึ่ง Page พบว่า ค่า P_2 เป็นฟังก์ชั่นของค่าความชื้นสัมพัทธ์ สมการที่ Page สร้างขึ้นนี้ต่อมาได้มีผู้วิจัยมากมายที่นำไปใช้ในการวิจัยของตน โดยทำการทดลองและหาค่า P_1 , P_2 เช่น VanRest และ Issace (1966) , Flood <u>et al</u> (1972) , Agrawal และ Singh (1978) , Missa และ Brooker (1978) เป็นต้น ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป

2. Agrawal และ Singh (1978) ได้นำสมการของ Page (1949) มาใช้กับการทดลองของตน โดยทำการทดลองอบแห้งข้าวเปลือกในช่วงอุณหภูมิ 32 - 51 $^{\circ}$ C สมการของAgrawal และ Singh มีรูปสมการ ดังนี้

$$MR = \exp(-x\, t^{y}) \qquad (4.44)$$

เมื่อ

$x = 0.002958 - 0.44565\ RH + 0.01215\ T$

$y = 0.13365 + 1.93653\ (RH) - 1.77431\ (RH)^2 + 0.009468\ T$

RH - ค่าความชื้นสัมพัทธ์

T - อุณหภูมิของลมร้อน $^{\circ}$ C

ต่อมา Bakshi และ Singh (1979) ได้หาค่า x , y โดยนำข้อมูลการทดลองของ Steffe (1979) ที่ทำการทดลองอบแห้งข้าวเปลือกชนิดเมล็ดสั้น ซึ่งแสดงไว้ในตาราง 4.1 ดังนี้

ตาราง 4.1 สมการการอบแห้งของชั้นบาง (ข้าวเปลือกชนิดเมล็ดสั้น) ข้อมูลจาก Steffe (1979)

$(M - Me)/(Mo - Me) = \exp(-x\, t^{y})$	
ลักษณะเมล็ดข้าว	ค่า x และ y
ข้าวเปลือก	$x = 0.744982 + 0.0002615\ T - 0.0003335\ RH$
	$y = 0.094070 + 0.005984\ T - 0.0113465\ RH$
ข้าวกล้อง	$x = 0.438957 + 0.0002748\ T - 0.0006705\ RH$
	$y = 0.093302 + 0.0072720\ T - 0.0155184\ RH$
ข้าวนึ่ง (ข้าวเปลือก)	$x = 0.503265 + 0.0002734\ T - 0.0001760\ RH$
	$y = 0.064445 + 0.0046369\ T - 0.0147194\ RH$
ข้าวนึ่ง (ข้าวกล้อง)	$x = 0.016538 + 0.0001737\ T - 0.0064722\ RH$
	$y = 0.776610 + 0.0014173\ T - 0.0736700\ RH$

T - อุณหภูมิของลมร้อน $^{\circ}$ C (40.0 - 55.0 $^{\circ}$ C)

RH - ความชื้นสัมพัทธ์ (จุดทศนิยม) , t - เวลาอบแห้ง (hr.)

3. Henderson (1968) ได้สร้างสมการการอบแห้งของชั้นบาง จากการทดลองอบแห้งข้าวเปลือกชนิดเมล็ดสั้น มีรูปสมการดังนี้

$$MR = 0.65 \exp[-0.22\, t^{(-0.22t)}] \qquad (4.45)$$

4. Chancellor (1968) ได้ทำการทดลองอบแห้งข้าวเปลือกพันธุ์ต่าง ๆ กัน ช่วงอุณหภูมิตั้งแต่ 38 - 71 $^{\circ}$ C และได้สร้างสมการจากการทดลอง ดังนี้

$$MR = 0.75 \exp(-G\, t) + 0.1111 \exp(-G\, t) \qquad (4.46)$$

เมื่อ

$G = 8860 \exp(-6147/T_{abs})$

T_{abs} - อุณหภูมิสมบูรณ์ ($^{\circ}$ R)

5. Wang และ Singh (1978) ได้ทำการทดลองอบแห้งข้าวเปลือกชนิดเมล็ดยาวปานกลาง โดยทำการศึกษาการอบแห้งของชั้นบางในช่วงอุณหภูมิ 40 - 55 $^{\circ}$ C ความชื้นสัมพัทธ์อยู่ในช่วง 25 - 95 % และได้สร้างสมการการอบแห้งชั้นบางของข้าวเปลือกขึ้น 4 สมการ ดังนี้

5.1 สมการที่อยู่ในรูปของสมการดอทดราติก (quadratic) ลักษณะเหมือนกับสมการของ Thompson et al (1968) ที่ใช้กับการอบแห้งข้าวโพด

$$MR = 1.0 + X\, tm + Y\, tm^2 \qquad (4.47)$$

เมื่อ

$X = - 0.001308\, T^{0.4687}\, RH^{(-0.3187)}$

$Y = 0.00006625\, T^{0.03408}\, RH^{(-0.4842)}$

tm - เวลาในการอบแห้ง (นาที)

RH - ความชื้นสัมพัทธ์ (จุดทศนิยม)

5.2 สมการการอบแห้งของชั้นบางของเมล็ดข้าวเปลือกที่มีสมการอยู่ในรูปสมการของ Page (1949)

$$MR = \exp[-x (tm^{y})] \qquad (4.48)$$

เมื่อ

$x = 0.01579 + 0.0001746\ T - 0.01413\ RH$

$y = 0.6545 + 0.002425\ T + 0.07867\ RH$

tm - เวลาในการอบแห้ง (นาที)

5.3 สมการการอบแห้งของชั้นบางของเมล็ดข้าวเปลือกที่มีการอ้างอิงสมการการแพร่กระจาย (diffusion model)

$$MR = x\ [\exp(-y\ tm)] \qquad (4.49)$$

เมื่อ

$x = 0.96 - 0.00008826\ T + 0.02324\ RH$

$y = 0.002814 + 0.0001267\ T - 0.003620\ RH$

tm - เวลาในการอบแห้ง (นาที)

5.4 สมการการอบแห้งของชั้นบางของเมล็ดข้าวเปลือกที่อยู่ในรูปของคำตอบของ Crank (1964) ซึ่ง Wang และ Singh ใช้เฉพาะเทอมแรก ซึ่งได้รูปสมการดังนี้

$$\frac{M - Me}{Mo - Me} = \frac{6}{\pi^2} \exp\left[\frac{-D\pi^2 t}{r^2}\right] \qquad (4.50)$$

เมื่อ

$D = 1.6377\ \mathrm{Exp}\ (-4151./Tabs)$

$r = 0.18$ cm

t - เวลา (นาที)

ในการศึกษานี้จะใช้สมการของ Wang และ Singh คือ สมการที่ (4.47), สมการที่ (4.48), สมการที่ (4.49) และสมการที่ (4.50) โดยจะทำการเปรียบเทียบผลการจำลองแบบของทั้งสี่สมการกับผลการทดลอง ว่าสมการใดให้คำตอบที่ดีมีความสอดคล้องกับผลการทดลองมากที่สุด