บทที่ 2

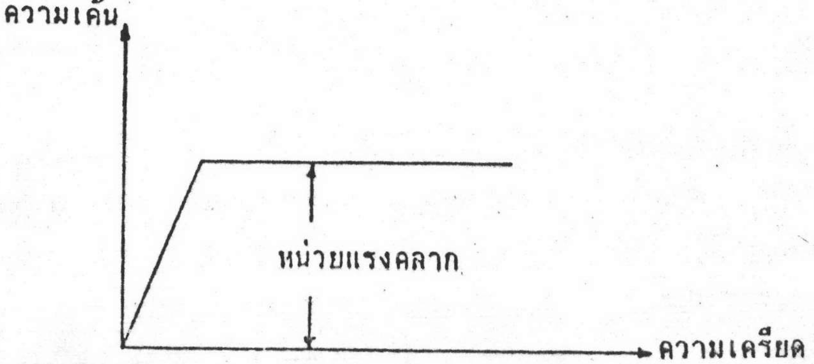
การคำนวณออกแบบโครงสร้างแบบน้ำหนักน้อยที่สุด

2.1 ความนำ

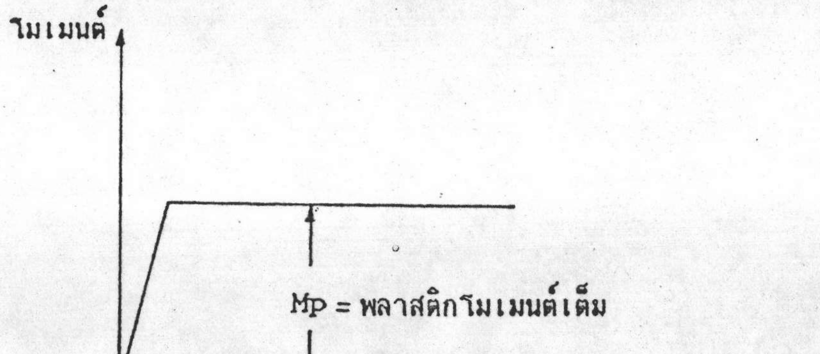
การออกคำนวณแบบโครงสร้างในสมัยปัจจุบันนี้ ยึดหลักการวิเคราะห์ด้วยวิธีอีลาสติก หรือวิธีพลาสติก การวิเคราะห์แบบพลาสติกนั้นไม่สามารถแทนด้วยการวิเคราะห์แบบอีลาสติกได้แต่จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับน้ำหนักพังทะลายและรูปแบบของการพังทะลาย ส่วนวิธีทางอีลาสติกจะศึกษาส่วนสำคัญของการรับแรงอยู่ของโครงสร้าง โดยเฉพาะด้านการให้บริการของโครงสร้างที่ออกแบบ แต่อย่างไรถ้าน้ำหนักเพิ่มขึ้นจนกระทั่งถึงจุดคลาก โครงสร้างจะมีการเปลี่ยนรูปไปอยู่ในลักษณะอีลาสติกและพลาสติก ถ้าเกิดจุดหมุนพลาสติกมากพอก็จะเกิดกลไกการวิบัติ ด้วยเหตุนี้วัตถุประสงค์หลักของวิเคราะห์แบบพลาสติกเพื่อหาน้ำหนักพังทะลายของโครงสร้าง เมื่อเรารู้ว่าชิ้นส่วนของโครงสร้างสามารถรับแรงได้เท่าใด การคำนวณออกแบบโดยการวิเคราะห์แบบพลาสติกนี้ก็มีการยอมรับกันเพิ่มมากขึ้น และเป็นที่ยอมรับของมาตรฐานการปฏิบัติของหลายสถาบัน

2.2 การวิเคราะห์แบบพลาสติก

วัสดุของชิ้นส่วนสมมุติให้มีการเปลี่ยนรูปไปเมื่อรับแรง ดังรูปที่ 2.1 ค่าความเค้นและความเครียด ในรูปที่ 2.1 นั้น เป็นสัดส่วนกันจนกระทั่งถึงจุดหน่วยแรงคลาก เมื่อถึงจุดนี้ค่าความเครียดเพิ่มขึ้นโดยที่ไม่เพิ่มความเค้นและ เช่นกันในชิ้นส่วนที่มีการรับโมเมนต์ดัดความสัมพันธ์ดังรูปที่ 2.2 ระหว่างค่าโมเมนต์ดัดและความโค้ง ค่าความโค้งและโมเมนต์ดัดจะเป็นสัดส่วนกันจนกระทั่งถึงจุดพลาสติกโมเมนต์เต็ม และที่จุดนี้จุดหมุนพลาสติก จะเกิดขึ้นซึ่งจะเกิดการหมุนขึ้นที่จุดนี้โดยที่ไม่มีการเพิ่มค่าโมเมนต์ดัด การหมุนที่หน้าตัดนี้ก่อนค่าพลาสติกโมเมนต์จะพิจารณาว่ามีค่าน้อยและสมการสมดุลย์สามารถนำมาใช้คำนวณได้ในโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนรูปไป โดยทั่วไปวิธีที่ใช้วิเคราะห์แบบพลาสติกนี้จะมีอยู่ 2 วิธี คือ



รูปที่ 2.1 ไอดีลไลซ์ความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด



รูปที่ 2.2 ไอดีลไลซ์ความสัมพันธ์ของโมเมนต์และความโค้ง

2.2.1 วิธีคิเนมาติก

น้ำหนักบรรทุกพังทลายของโครงสร้างสามารถคำนวณได้ จากสมการของงานภายนอกและงานภายในในระหว่างเกิดการเคลื่อนที่เสมือนของกลไกการวิบัติ พิจารณาโอกาสเกิดกลไกการวิบัติ i จะมีสมการสมดุลย์

$$U_i = \lambda_i e_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.1)$$

โดยที่ e_i = งานภายนอกเกิดจากแรงกระทำ

λ_i = ตัวคูณ คิเนมาติก

U_i = พลังงานรวมที่เกิดขึ้นที่จุดหมุนพลาสติก สามารถเขียนได้

$$U_i = \sum_{j=1}^{J} M_{pj}\theta_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.2)$$

โดยที่ θ_{ij} = การหมุนของจุดหมุนพลาสติก

M_{pj} = พลาสติกโมเมนต์

J = จำนวนหน้าตัดวิกฤต หรือจำนวนจุดที่มีโอกาสเกิดจุดหมุนพลาสติก

ตามทฤษฎีของคิเนมาติก ในการวิเคราะห์แบบพลาสติก ค่าตัวคูณน้ำหนัก λ และผลรวมของรูปแบบการพังทะลายของโครงสร้างสอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\lambda &= \min(\lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)\\ &= \min\left(\frac{U_i}{e_i}\right)\\ &= \min\left(\sum_{j=1}^{J} M_{pj}\frac{\theta_{ij}}{e_i}\right) \qquad (i=1,2,\ldots,p)\end{aligned}$$

โดยที่ p คือจำนวนโอกาสทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการเกิดกลไกการวิบัติโดยที่สามารถแสดงให้เห็นว่า กลไกที่เป็นไปได้ทั้งหมดของโครงสร้างสามารถสร้างขึ้นมาได้โดย การรวมกันของ m กลไกวิบัติอิสระ ดังนั้นจำนวนของ m มีค่า

$$m = J-NR \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

โดยที่ NR = จำนวนของตัวเกิน

2.2.2 วิธีสถิตย์

ตามวิธีสถิตย์ ของทฤษฎีการวิเคราะห์แบบพลาสติก ค่าโมเมนต์ที่พังทะลายจะมีค่าสอดคล้องกันกับค่าตัวคูณน้ำหนักที่มีค่ามากที่สุด

$$\lambda = \max(\lambda_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$

จำนวนของความสมดุลย์และเงื่อนไขจุดคลาก จะมีค่าไม่จำกัด เมื่อพิจารณาเฉพาะโมเมนต์ที่จุดต่างๆ $M_j (j=1,\ldots,J)$ ของโครงสร้าง ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่กระทำ ดังนั้น m สมการสมดุลย์ และเงื่อนไขจุดคลาก สำหรับทุกๆหน้าตัดวิกฤตสอดคล้องปัญหาของน้ำหนักบรรทุกพังทะลายภายใต้อัตราส่วนการเพิ่มแรงสามารถเขียนเป็นสมการได้

หาค่า λ และ $M_j (j=1,\ldots,J)$ ภายใต้

$$\lambda \quad \text{มากที่สุด} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.6)$$

$$\sum_{j=1}^{J} C_k M_j = \lambda C_k \qquad k = 1,\ldots,m \quad \ldots\ldots (2.7)$$

$$-M_{pj} \leq M_j \leq M_{pj} \qquad j = 1,\ldots,J \quad \ldots\ldots (2.8)$$

จำนวนของสมการสมดุลย์อิสระคือ $m = J-NR$ และ C_{kj} จะคงที่จากกำหนดการเชิงเส้นจำนวนของตัวแปร ($J+1$) และมีขอบเขตจำกัด ($2J+m$) ถ้า M_j รู้จำนวนของอสมการจะเท่ากับ J และจำนวนของขอบเขตจำกัดลดลงเป็น $J+m$

จากสมการทางสถิตย์และคิเนมาติก ของวิธีการวิเคราะห์แบบพลาสติกภายใต้อัตราส่วนแรงจะมีค่าน้ำหนักบรรทุกพังทะลายที่เท่ากัน คุณสมบัตินี้เรียกเป็นทฤษฎียูนิกซ์เนส ของวิธีพลาสติก

ผลของการวิเคราะห์แบบพลาสติกนี้จะต้องสอดคล้องเงื่อนไขอยู่ 3 ประการ คือ

1. สภาวะกลไกวิบัติ โครงสร้างจะเกิดการวิบัติเมื่อน้ำหนักบรรทุกมีค่าเท่ากับน้ำหนักบรรทุกประลัย

2. สภาวะสมดุลย์

3. สภาวะพลาสติกโมเมนต์ โมเมนต์ที่ส่วนใดๆ ในโครงสร้างจะมีค่าน้อยกว่าหรืออย่างมากมีค่าเท่ากับ พลาสติกโมเมนต์

2.3 <u>สมมุติฐาน</u>

2.3.1 จุดหมุนพลาสติกเกิดที่หน้าตัดวิกฤต ซึ่งจะต้องมีความสามารถในการยืดได้โดยไม่จำกัด

2.3.2 สมการสมดุลย์คำนวนจากโครงสร้างที่ไม่เปลี่ยนรูปทรงทางเรขาคณิต

2.3.4 ข้อจำกัด จะเกี่ยวกับค่าโมเมนต์ที่จุดคลาก ซึ่งโดยทั่วไปจะเท่ากับพลาสติกโมเมนต์

2.3.5 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ได้แสดงถึงน้ำหนักนั้น จะขึ้นกับผลรวมของค่าพลาสติกโมเมนต์และความยาว

2.3.6 โครงสร้างและแรงอยู่ในระนาบเดียวกัน

2.3.7 ชิ้นส่วนทุกชิ้นส่วนของโครงสร้าง สมมาตรรอบแกนที่อยู่บนระนาบของโครงสร้าง

2.3.8 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด สมมุติให้เป็นวัสดุลักษณะอีลาสติกพลาสติกโดยสมบูรณ์

2.3.9 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด สำหรับชิ้นส่วนรับแรงอัดเหมือนกับชิ้นส่วนรับแรงดึง

2.3.10 ไม่คำนึงถึงผลของแรงแนวแกน

2.3.11 ไม่คำนึงถึงค่าแรงเฉือน

2.3.12 ค่าเสถียรภาพที่จุดต่างๆ จะไม่เกิดก่อนโครงสร้างจะถึงสภาวะพลาสติก

2.3.13 การโก่งเดาะด้านข้างจะไม่เกิด

2.3.14 จุดต่อจะต้องออกแบบให้มีความต่อเนื่อง ดังนั้นจุดหมุนพลาสติกสามารถเกิดที่จุดต่อได้

2.3.15 การล้าจะไม่เกิดปัญหา

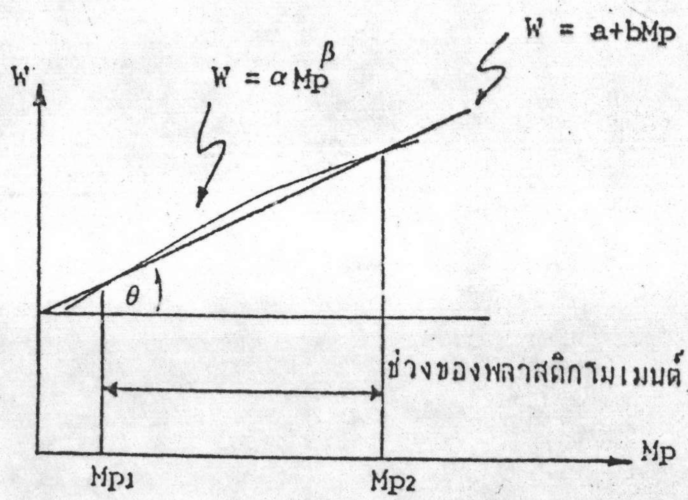
2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างพลาสติกโมเมนต์ (Mp) และน้ำหนักของชิ้นส่วน

โดยทั่วไปแล้วสมมุติฐานในการออกแบบอย่างเหมาะสุด คือการต่อเนื่องของหน้าตัด ซึ่งสามารถหาได้จากหน้าตัดมาตรฐาน โดยที่กำหนดให้

Mp = ความสามารถการรับพลาสติกโมเมนต์ของชิ้นส่วน

W = น้ำหนักต่อหน่วยความยาวของชิ้นส่วน

ถ้าสมมุติว่าหน้าตัดเหล็กมาตรฐานที่สามารถหาได้ มีช่วงหน้าตัดต่อเนื่องกันตลอดเรา สามารถแสดงเป็นจุดต่าง ๆ ได้ในช่วงเหล่านี้เราจะพบได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่าง W และ Mp จะมีลักษณะไร้เส้น ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ความสัมพันธ์ของน้ำหนักต่อหน่วยความยาวของชิ้นส่วนและค่าพลาสติกโมเมนต์

สามารถจะเขียนความสัมพันธ์ เป็นสมการ

$$W = \alpha M_p^{\beta} \quad . . . . (2.9)$$

โดยที่ α, β จะขึ้นกับรูปทรงทางเรขาคณิตของหน้าตัดของชิ้นส่วนจากสมการที่ (9) จะแสดงให้เห็นถึงขั้นตอนการคำนวณหาเพื่อให้ได้น้ำหนักน้อยที่สุดเป็นปัญหาของ กำหนดการไร้เส้น แต่อย่างไรก็ตามถ้าพิจารณาในช่วงค่าของ Mp ที่ใช้ในการคำนวณออกแบบแล้วจะให้ค่าน้ำหนัก W ในสมการ(9) สามารถแทนค่าประมาณด้วยสมการเส้นตรงดังสมการ

$$W = a+bM_p \quad . . . . (2.10)$$

ค่าคงที่ a และ b ต้องหาจากช่วงของ Mp ที่ช่วงใด ๆ

ถ้าหน้าตัดที่พิจารณาที่ค่าพลาสติกโมเมนต์ (Mp) ในช่วง M_{p1} และ M_{p2} และค่า M_{p2} มีค่ามากว่า $0.5M_{p1}$ ค่าคลาดเคลื่อนจากการใช้สมการเชิงเส้นในสมการ(10) ประมาณ 1%

โดยอาศัยผลที่ได้จากสมการ (10) ค่าน้ำหนักตามขั้นตอนหาน้ำหนักน้อยที่สุดจะเป็น กำหนดการเชิงเส้นได้ซึ่งเราสามารถแก้ปัญหาได้เร็วกว่าการใช้กำหนดการไร้เส้น สำหรับชิ้นส่วนใดๆ สมการ (10) สามารถเขียนได้

$$W_i = a+bM_{pi} \quad . . . . (2.11)$$

ถ้าเราให้ความยาวชิ้นส่วน i เท่ากับ L_i แล้วน้ำหนักทั้งหมดของโครงสร้างหนึ่งโครงสร้างใดที่มีชิ้นส่วน n ชิ้นสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันได้คือ

$$W = \sum_{i=1}^{n} aLi + \sum_{i=1}^{n} bMpiLi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . (2.12)$$

เนื่องจากนิพจน์แรกและค่า b เป็นค่าคงที่และจะไม่มีผลในขั้นตอนหาน้ำหนักน้อยที่สุด เราสามารถที่จะหาค่าฟังก์ชันน้ำหนักประสิทธิผลดังสมการ

$$W^* = \sum_{i=1}^{n} MpiLi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (2.13)$$

สามารถทำสมการที่ (5) ให้ไม่มีหน่วยได้โดยกำหนด

$$Mi = Mpi/PL \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2.14)$$

โดยที่ค่า P และ L คือค่าตัวแปรเสริมของน้ำหนักบรรทุก และความยาว

$$W^* = WL/PL^2 = \sum_{i=1}^{n} mi(Li/L) \quad . \; . \; . \; . \; (2.15)$$

เพราะฉนั้นเราสามารถที่จะกำหนดขั้นตอนการหาน้ำหนักที่น้อยที่สุดได้โดยหาค่า Mpi ให้สอดคล้อง

ก.ค่าของ M(x) จะต้องอยู่ในสภาวะสมดุลย์กับน้ำหนักบรรทุกภายนอก

ข. $\left|M(x)\right| \leq Mpi(x)$

ค. Mpi(i=1,...,n) จะให้ค่า W^* น้อยที่สุด