เอกสารอ้างอิง

1. Galerkin, B.G.."Investigation on Triagular Plate.",Bull.Acad.Sci.Russ., Vol.13, 1919.pp.223-238, and Bull.Polytech.Inst., Vol.8, St.Petersburg, 1919,p.1.

2. Nadai, A.Die Elastishen Platten,Springer, Berlin, 1925,p.178.

3. Woinowsky-Krieger,S."Berechnung der rigsum frei aufliegenden Gleichseitigen Dreiechsplatte.",Ingenieur-Archiv, Vol.4, 1933, p.254.

4. Nadai, A.Z.agnew.Math.Mech., Vol.2,1922.

5. Marcus,H.Die Theorie Elasticher Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, Springer, Berlin, 1932,p.173.

6. Lee,S.L.and Ballesteros, P."Uniformly Loaded Rectangular Plate Supported at the Corners.",Int.J.Mech.Sci.,Vol.2,No.3,1960, pp.206-211.

7. Pan,H.H."Note on the Uniformly Loaded Rectangular Plate Supported at the Corners",Int.J.Mech.Sci., Vol.2, No.4, 1961,pp.313-315.

8. Vijakkhana, C."Corners Supported Equilateral Triangular Plate." AIT Thesis, Bangkok, 1970.

9. Girkmann, K.Flächentragwerke, Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten,Schalen und Fattwerke, Springer, Wien, 1954,p.37.

10. Surasak Poonchainavaskuen."Concentrated and Partially Distributed Loads on a Corner Supported Equilateral Triangular Plate.",Master's Thesis,Department of Mechanical Engineering, Graduate School, Chulalongkorn Univ.,Bangkok, 1978.

แผ่นพื้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารองรับแบบธรรมดา

ในกรณีแผ่นพื้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีที่รองรับแบบธรรมดาตามแนวขอบถูกกระทำด้วยแรงเดี่ยว P ที่จุดศูนย์กลางนั้น วอยนอฟสกี-ครีเกอร์ (Woinowsky-Krieger)(3) ได้หาคำตอบไว้โดยกำหนดให้แผ่นพื้นรูปสี่เหลี่ยมที่มีความกว้าง a ยาวอนันต์และมีที่รองรับแบบธรรมดาที่ขอบทั้งสองข้าง ถูกกระทำด้วยชุดของแรง P ในทิศทางและตำแหน่งดังแสดงในรูปที่ 2 การโก่งของแผ่นพื้นดังกล่าวจะมีลักษณะที่ทำให้เกิดจุดดัดกลับตลอดแนวของเส้นที่ตั้งได้ฉากกับเส้นประที่เชื่อมโยงจุดที่อยู่ชิดกันที่แรง P กระทำ แนวของจุดดัดกลับนี้จะให้ค่าโมเมนต์ดัดและค่าระยะโก่งเป็นศูนย์ ซึ่งเมื่อพิจารณารวมกับขอบด้านยาวของแผ่นพื้นรูปสี่เหลี่ยมแล้วก็จะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีสภาพของขอบเสมือนหนึ่งว่ามีที่รองรับแบบธรรมดาดังรูป

ฉะนั้นจากการรวมฟังก์ชั่นการโก่งที่เป็นผลเนื่องมาจากแรง P ทั้งหมดบนสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ก็จะได้ฟังก์ชั่นการโก่งของแผ่นพื้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารองรับแบบธรรมดาอยู่ในรูปของ

$$w^{s}(x,y)=\frac{Pa^2}{2\pi^3 D}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\right)\cosh\frac{n\pi}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\right)-\frac{n\pi}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\right)\sinh\frac{n\pi}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\right)\right]\frac{\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{a}\left(x+\frac{a}{3}\right)}{n^3\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\right)\cosh\frac{n\pi y}{a}-\frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}\right]\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{a}\left(x+\frac{a}{3}\right)}{n^3\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\right\} \qquad (46)$$

ในเมื่อ $0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}$

และโดยการดิฟเฟอร์เรนชิเอทก็จะหาฟังก์ชั่นของหน่วยต่าง ๆ ได้ในรูปดังนี้

$$M_x^s(x,y)=(1-\nu)\frac{P}{2\pi}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(1+\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\Big)\cosh\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)-\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)\sinh\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)$$

$$+\frac{2\nu}{1-\nu}\cosh\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)\Big]\frac{\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{n\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$-\sum\Big[\Big(1+\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\Big)\cosh\frac{n\pi y}{a}-\frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}+\frac{2\nu}{1-\nu}\cosh\frac{n\pi y}{a}\Big]\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{n\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\Big\} \quad (47)$$

$$M_y^s(x,y)=-(1-\nu)\frac{P}{2\pi}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(1+\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\Big)\cosh\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)-\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)\sinh\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)$$

$$-\frac{2}{1-\nu}\cosh\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)\Big]\frac{\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{n\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(1+\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\Big)\cosh\frac{n\pi y}{a}-\frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}-\frac{2}{1-\nu}\cosh\frac{n\pi y}{a}\Big]\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{n\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\Big\} \quad (48)$$

$$M_{xy}^s(x,y)=-M_{yx}^s(x,y)=-(1-\nu)\frac{P}{2\sqrt{3}}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\sinh\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)-\frac{\sqrt{3}}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)\cosh\frac{n\pi}{a}\Big(\frac{a}{\sqrt{3}}-y\Big)\Big]\frac{\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\sinh\frac{n\pi y}{a}-\frac{\sqrt{3}y}{a}\cosh\frac{n\pi y}{a}\Big]\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\Big\} \quad (49)$$

$$Q_x^s(x,y)=\frac{P}{a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}\cosh\frac{n\pi}{a}(\frac{a}{\sqrt{3}}-y)\cos\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}\cosh\frac{n\pi y}{a}\cos\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\right\} \quad (50)$$

$$Q_y^s(x,y)=-\frac{P}{a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}\sinh\frac{n\pi}{a}(\frac{a}{\sqrt{3}}-y)\sin\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}\sinh\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\right\} \quad (51)$$

$$V_x^s(x,y)=(1-\nu)\frac{P}{2a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3-\nu}{1-\nu}-\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\right)\cosh\frac{n\pi}{a}(\frac{a}{\sqrt{3}}-y)+\frac{n\pi}{a}(\frac{a}{\sqrt{3}}-y)\sinh\frac{n\pi}{a}(\frac{a}{\sqrt{3}}-y)\right]\frac{\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3-\nu}{1-\nu}-\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\right)\cosh\frac{n\pi y}{a}+\frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}\right]\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\right\} \quad (52)$$

และ

$$V_y^s(x,y)=-(1-\nu)\frac{P}{2a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{1-\nu}+\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\right)\sinh\frac{n\pi}{a}(\frac{a}{\sqrt{3}}-y)-\frac{n\pi}{a}(\frac{a}{\sqrt{3}}-y)\cosh\frac{n\pi}{a}(\frac{a}{\sqrt{3}}-y)\right]\frac{\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{1-\nu}+\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\coth\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\right)\sinh\frac{n\pi y}{a}-\frac{n\pi y}{a}\cosh\frac{n\pi y}{a}\right]\frac{\sin\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{a}(x+\frac{a}{3})}{\sinh\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}\right\} \quad (53)$$

ในเมื่อ M_x^S ,M_y^S เป็นโมเมนต์ดัดต่อความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งได้ฉากกับแกน x และ y บนแผ่นพื้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารองรับแบบธรรมดาตามลำดับ, M_{xy},M_{yx} เป็นโมเมนต์บิดต่อความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งได้ฉากกับแกน x และy , Q_x^s,$Q^s{}_y$ เป็นแรงเฉือนต่อความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งได้ฉากกับแกน x และ y , V_x^s,V_y^s เป็น แรงเฉือนเคียร์คอฟต่อความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งได้ฉากกับแกน x และ y

จากคำตอบดังกล่าวจะเห็นได้ว่าโมเมนต์ดัด M_x^S และ M_y^S มีค่าเป็นอนันต์ **(singularity)** ที่จุดที่แรง P กระทำและจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วที่ระยะห่างออกมาเพียงเล็กน้อย และหากจะพิจารณาตามสภาพที่เป็นจริงในทางปฏิบัติแล้วก็จะเห็นว่า แรงเดี่ยว P ที่กล่าวถึงนั้นแท้จริงเป็นแรงที่กระจายบนเนื้อที่เล็ก ๆ ซึ่งอาจจะแทนด้วยวงกลมที่มีรัศมีเล็ก ๆ c วอยนอฟสกี-ครีเกอร์จึงได้ศึกษาพฤติกรรมของแรงที่บริเวณดังกล่าวโดยพิจารณาที่จุด x= c เมื่อ y= 0หรือที่จุดที่อยู่บนแกน x ห่างจากจุดที่แรง P กระทำเป็นระยะ c ในเมื่อ c มีค่าน้อยถ้าเทียบกับ a ซึ่งได้โมเมนต์ดัดมีค่าดังนี้

$$M_x^s(c,0) = \frac{(1+\nu)P}{4\pi}(\ln\frac{a\sqrt{3}}{\pi c}-0.379) - \frac{(1-\nu)P}{8\pi} \qquad (54ก)$$

$$M_y^s(c,0) = \frac{(1+\nu)P}{4}(\ln\frac{a\sqrt{3}}{\pi c}-0.379) + \frac{(1-\nu)P}{8\pi} \qquad (54ข)$$

คำตอบที่ได้จากสมการ (54ก) และ (54ข) เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีของแผ่นพื้นรูปวงกลมรัศมี a_o ที่มีที่รองรับแบบธรรมดาและถูกกระทำด้วยแรง P ซึ่งกระจายบนพื้นที่วงกลมเล็ก ๆ ที่มีรัศมี c ที่จุดศูนย์กลางแล้วจะพบว่า โมเมนต์ในแนวรัศมี M_r และโมเมนต์ในแนวสัมผัส M_t ที่รัศมีเท่ากับ c จะมีค่าดังนี้

$$(M_r)_{r=c} = \frac{(1+\nu)P}{4} \ln\frac{a_o}{c} \qquad (55ก)$$

$$(M_t)_{r=c} = \frac{(1+\nu)P}{4} \ln\frac{a_o}{c} + \frac{(1-\nu)P}{4\pi} \qquad (55ข)$$

จะเห็นได้ว่าเมื่อ c มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ค่าโมเมนต์จากสมการ (54) และ (55) จะมีอัตราการเพิ่มเข้าสู่ค่าอนันต์แบบเดียวกัน คือเป็นแบบฟังก์ชั่นลอการิทึม (logarithmic function) ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $a_o = \frac{a\sqrt{3}}{\pi} e^{-0.379}$ แล้วก็อาจจะถือว่าโมเมนต์ในสมการ (54) เหมือนกับโมเมนต์ในสมการ (55) โดยพฤติกรรม

ท้ายที่สุดเมื่อพิจารณากรณีของแผ่นพื้นรูปวงกลมอีกครั้งหนึ่ง ได้มีผลการวิเคราะห์ในอดีตซึ่งสรุปได้ว่า $M_r = M_t$ ที่จุดศูนย์กลางและมีค่ามากที่สุดโดยเท่ากับผลบวกของ M_r ที่ขอบของแรงกระทำ (r=c) กับ $P/4\pi$ เมื่อเป็นดังนี้ ก็อาจจะสรุปได้ว่า สำหรับกรณีของแผ่นพื้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านั้น ค่าโมเมนต์ดัดที่จุดศูนย์กลางของแรงกระทำ $M_x^s(0,0) = M_y^s(0,0)$และมีค่าเท่ากับ $M_x^s(c,0)$ ในสมการ (54ก) บวกกับ $P/4\pi$ ซึ่งอาจเขียนได้ดังนี้

$$M_x^S(0,0) = M_y^S(0,0) = \frac{(1+\nu)P}{4\pi}(\ln\frac{a\sqrt{3}}{\pi c}+0.121) = \frac{(1+\nu)P}{4\pi}(\ln\frac{a}{c}-0.474) \qquad (56)$$

ซึ่งเมื่อกำหนดค่าอัตราส่วนปัวซอง และ c/a แล้วก็อาจจะคำนวณหาค่าโมเมนต์ดัดที่ขอบและที่จุดศูนย์-กลางของแรงกระทำได้ ทั้งนี้ได้แสดงไว้ด้วยเส้นประดังรูปที่ 3

ภาคผนวก ข

การออกแบบเหล็กเสริมในแผ่นพื้นคอนกรีต

การหาโมเมนต์อีลาสติคในแผ่นพื้นคอนกรีตที่มีเหล็กเสริมสองทางและสามทางนั้น จิตติ วิจักขณา (Vijakkhana)[8] ได้ศึกษาไว้ ซึ่งจะได้นำเสนอเป็นโครงร่างดังนี้:-

โมเมนต์ต้านสำหรับเหล็กเสริมสามทาง (Moment of Resistance for Three-Way Reinforcement)

พิจารณาแผ่นพื้นคอนกรีตเสริมเหล็กที่เสริมเหล็กสามทาง ดังแสดงในรูปที่ 10 โมเมนต์ต้าน M_n^* ในทิศทาง n เขียนได้เป็น

$$M_n^* = M_\alpha^* \cos^2 (\theta-\alpha) + M_\beta^* \cos^2 (\theta-\beta) + M_\gamma^* \cos^2 (\theta-\gamma) \tag{57}$$

ในเมื่อ M_α^*, M_β^*, M_γ^* เป็นโมเมนต์ต้านในทิศที่ทำมุม α, β, γ กับแกน x ตามลำดับ ซึ่งอาจจะเขียนเป็นรูปของหน่วยแรงในเหล็กเสริมได้ดังนี้

$$M_\alpha^* = A_{s\alpha} \; f_{s\alpha} \; j_\alpha \, d_\alpha \tag{58ก}$$

$$M_\beta^* = A_{s\beta} \; f_{s\beta} \; j_\beta \, d_\beta \tag{58ข}$$

$$M_\gamma^* = A_{s\gamma} \; f_{s\gamma} \; j_\gamma \, d_\gamma \tag{58ค}$$

และ $A_{s\alpha}$, $A_{s\beta}$ และ $A_{s\gamma}$ แทนเนื้อที่ของเหล็กเสริมต่อความกว้างของหน้าตัดของแผ่นพื้น $f_{s\alpha}$, $f_{s\beta}$ $f_{s\gamma}$ แทนหน่วยแรงในเหล็กเสริม d_α, d_β และ d_γ คือระยะระหว่างผิวนอกสุดที่รับแรงอัดกับจุดศูนย์ถ่วงของเหล็กเสริม สำหรับอัตราส่วนของระยะจากจุดศูนย์ถ่วงของแรงอัดถึงจุดศูนย์ถ่วงของแรงดึงต่อความลึก d_α, d_β และ d_γ นั้นแทนด้วย j_α, j_β และ j_γ ค่าทั้งหมดนี้อยู่ในทิศทาง α, β และ γ ตามลำดับ

ถ้าแทนโมเมนต์ที่เกิดขึ้นในทิศทาง α, β, γ ด้วย M_α, M_β, M_γ โดยให้

$$|M_\alpha| > |M_\beta| \,, \qquad |M_\alpha| > |M_\gamma| \tag{59}$$

และกำหนดให้

$$f_{s\alpha} = f_s \qquad (60ก)$$

เมื่อ f_s แทนหน่วยแรงที่ยอมให้ในเหล็กเสริม

ในที่นี้จะตั้งสมมติฐานว่า หน่วยแรงของเหล็กเสริมในทิศทาง α, β, γ เป็นสัดส่วนกับโมเมนต์ที่เกิดขึ้นในทิศทางนั้น ๆ ซึ่งจะได้ว่า

$$f_{s\beta} = f_{s\alpha}\frac{|M_\beta|}{|M_\alpha|} = f_s\frac{|M_\beta|}{|M_\alpha|} \qquad (60ข)$$

$$f_{s\gamma} = f_s\frac{|M_\gamma|}{|M_\alpha|} \qquad (60ค)$$

และแทนสมการ (60) ลงใน (58) จะได้

$$M^*_\alpha = A_{s\alpha}\ f_s\ j_\alpha\ d_\alpha \qquad (61ก)$$

$$M^*_\beta = A_{s\beta}\ f_s\ \frac{|M_\beta|}{|M_\alpha|}\ j_\beta\ d_\beta \qquad (61ข)$$

$$M^*_\gamma = A_{s\gamma}\ f_s\ \frac{|M_\gamma|}{|M_\alpha|}\ j_\gamma\ d_\gamma \qquad (61ค)$$

ณ บริเวณใด ๆ ที่มีโมเมนต์กระทำ (moment field) นอร์มัลโมเมนต์ในทิศทาง n ใด ๆ ซึ่งทำมุม θ กับแกน x จะมีค่าเป็น

$$M_n = M_x\cos^2\theta + M_y\sin^2\theta - 2\,M_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad (62)$$

ในการออกแบบจะต้องให้ค่าของโมเมนต์ต้าน M^*_n ที่ได้จากสมการ (57) มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าของโมเมนต์ M_n ที่ได้จากสมการ (62) เสมอ นั่นก็คือ

$$M^*_n - M_n \geqslant 0 \qquad (63ก)$$

หรือ

$$M^*_\alpha\cos^2(\theta-\alpha) + M^*_\beta\cos^2(\theta-\beta) + M^*_\gamma\cos^2(\theta-\gamma) - M_x\cos^2\theta - M_y\sin^2\theta$$
$$+ 2\,M_{xy}\sin\theta\cos\theta \geqslant 0 \qquad (63ข)$$

หารสมการ (63ข) ด้วย $\cos^2\theta$ และให้ $k = \tan\theta$ และพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $M^*_n = M_n$ สมการ (63) จะกลายเป็น

$$f(k) = M_\alpha^* \sin^2\alpha\ (\cot\alpha + k)^2 + M_\beta^* \sin^2\beta\ (\cot\beta + k)^2 + M_\gamma^* \sin^2\gamma(\cot\gamma + k)^2$$
$$- M_x - M_y k^2 + 2M_{xy} k \quad = \quad 0 \tag{64}$$

ด้านซ้ายมือของสมการ (64) หรือฟังก์ชั่น $f(k)$ จะแทนค่าของโมเมนต์ต้านที่เกินกว่า M_n และ $f(k)$ นี้จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ k มีค่าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\frac{df(k)}{d\theta} = \frac{df(\tan\theta)}{d\tan\theta}\ \frac{d\tan\theta}{d\theta} \quad = \quad \frac{df(k)}{dk}\ \sec^2\theta \ = \ 0$$

เนื่องจาก $\sec^2\theta \neq 0$

$$\frac{df(k)}{dk} \quad = \quad 0 \tag{65}$$

แทนสมการ (64) ลงใน (65) จะได้

$$M_\alpha^* \sin^2\alpha\ (\cot\alpha + k) + M_\beta^* \sin^2\beta\ (\cot\beta + k) + M_\gamma^* \sin^2\gamma\ (\cot\gamma + k)$$
$$- M_y k + M_{xy} \quad = \quad 0 \tag{66}$$

สำหรับค่า f(k) ที่สอดคล้องกับสมการ (65) ซึ่งได้ค่าน้อยที่สุดนั้น จะต้องสอดคล้อง

$$\frac{d^2 f(k)}{dk^2} \quad \geqslant \quad 0 \tag{67ก}$$

ด้วย

แทนสมการ (64) ลงใน (67ก) จะได้

$$M_\alpha^* \sin^2\alpha + M_\beta^* \sin^2\beta + M_\gamma^* \sin^2\gamma - M_y \quad = \quad \Delta \tag{67ข}$$

ในเมื่อ Δ เป็นค่าบวกใด ๆ ซึ่งอาจกำหนดให้มีค่าน้อย ๆ ซึ่งเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้นสมการ (67ข) จะกลายเป็น

$$M_\alpha^* \sin^2\alpha + M_\beta^* \sin^2\beta + M_\gamma^* \sin^2\gamma - M_y \quad = \quad 0 \tag{68}$$

เมื่อแก้สมการ (64), (66) และ (68) เพื่อหา M_α^* , M_β^* และ M_γ^* ก็จะได้

$$M_\alpha^* = \frac{M_x + M_{xy}(\cot\beta + \cot\gamma) + M_y \cot\beta\cot\gamma}{\sin^2\alpha\ (\cot\alpha - \cot\beta)\ (\cot\alpha - \cot\gamma)} \tag{69ก}$$

$$M_{\beta}^{*} = \frac{M_x + M_{xy}(\cot\gamma + \cot\alpha) + M_y \cot\gamma\cot\alpha}{\sin^2\beta(\cot\beta - \cot\gamma)(\cot\beta - \cot\alpha)} \qquad (69ข)$$

$$M_{\gamma}^{*} = \frac{M_x + M_{xy}(\cot\alpha + \cot\beta) + M_y \cot\alpha\cot\beta}{\sin^2\gamma(\cot\gamma - \cot\alpha)(\cot\gamma - \cot\beta)} \qquad (69ค)$$

ซึ่งในการคำนวณออกแบบเหล็กเสริม 3 ทางนั้น ค่าของโมเมนต์ต้านที่ได้จากสมการ (61) จะต้องมีค่ามากกว่าค่าที่ได้จากสมการ (69) เสมอ

ในการใช้สมการ (69) นั้น แม้ว่าในบริเวณที่มีโมเมนต์บวกกระทำจะมีโมเมนต์สำคัญ (principal moments) ทั้งสองมีค่าเป็นบวก แต่โมเมนต์ต้านค่าใดค่าหนึ่งอาจจะมีค่าเป็นลบก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับทิศทางการจัดเหล็กเสริม เครื่องหมายลบนั้นชี้ให้เห็นว่าเหล็กเสริมในทิศทางนั้นไม่จำเป็น หรือไม่ก็จะต้องมีการจัดเหล็กเสริมใหม่ให้เหมาะสมเพื่อจะให้โมเมนต์ต้านในสมการ (69) มีค่าเป็นบวกในทุกทิศทาง

<u>โมเมนต์ต้านสำหรับเหล็กเสริม 2 ทาง</u> (Moment of Resistance for Two-Way Reinforcement)

จากรูปที่ 10 ในกรณีนี้ให้มีเฉพาะ M_{α}^{*} และ M_{β}^{*} และสมการ (64) จะกลายเป็น

$$f(k) = M_{\alpha}^{*}\sin^2\alpha(\cot\alpha + k)^2 + M_{\beta}^{*}\sin^2\beta(\cot\beta + k)^2 - M_x - M_y k^2 + 2M_{xy}k = 0 \qquad (70)$$

แทนสมการ (70) ลงใน (65) และ (67ก) จะได้สมการตามลำดับดังนี้

$$M_{\alpha}^{*}\sin^2\alpha(\cot\alpha + k) + M_{\beta}^{*}\sin^2\beta(\cot\beta + k) - M_y k + M_{xy} = 0 \qquad (71)$$

$$M_{\alpha}^{*}\sin^2\alpha + M_{\beta}^{*}\sin^2\beta - M_y \geqslant 0 \qquad (72)$$

แก้สมการ (70) และ (71) หา M_{α}^{*} และ M_{β}^{*} จะได้

$$M_{\alpha}^{*} = \frac{M_x - kM_y\cot\beta + M_{xy}(\cot\beta - k)}{\sin^2\alpha(\cot\alpha + k)(\cot\alpha - \cot\beta)} \qquad (73ก)$$

$$M_{\beta}^{*} = \frac{M_x - kM_y \cot\alpha + M_{xy}(\cot\alpha - k)}{\sin^2\beta\,(\cot\beta + k)(\cot\beta - \cot\alpha)} \qquad (73ข)$$

ในการคำนวณออกแบบเหล็กเสริมสองทางนั้น โมเมนต์ต้านที่ได้จากสมการ (73) จะต้องสอดคล้องกับสมการ (72) และจะต้องมีค่าน้อยกว่าค่าได้จากสมการ (61ก) และ (61ข) ด้วย แทนสมการ (73) ลงใน (72) จะได้

$$\frac{M_x + M_y \cot\alpha \cot\beta + M_{xy}(\cot\alpha + \cot\beta)}{(\cot\alpha + k)(\cot\beta + k)} \leqslant 0 \qquad (74)$$

ซึ่งในการออกแบบเหล็กเสริมจะต้องเลือกมุม α และ β ให้สอดคล้องกับสมการ (74) เสมอ

จากสมการ (73) จะเห็นได้ว่า M_{α}^{*} และ M_{β}^{*} มีค่าขึ้นอยู่กับค่าของ k ที่สอดคล้องกับสมการ (74) แต่เนื่องจาก M_{α}^{*} และ M_{β}^{*} มีค่าเป็นสัดส่วนโดยประมาณกับ $A_{s\alpha}$ และ $A_{s\beta}$ ตามลำดับ ดังนั้นเทอมของ $(A_{s\alpha} + A_{s\beta})$ จึงแทนได้ด้วยเทอม $(M_{\alpha}^{*} + M_{\beta}^{*})$ ซึ่งจะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ

$$\frac{d}{dk}(M_{\alpha}^{*} + M_{\beta}^{*}) = 0 \qquad (75)$$

แทนสมการ (73) ลงไปใน (75) จะได้

$$k = \pm \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad (76)$$

<u>เหล็กเสริมกันความร้อน 3 ทาง</u> (Three-way Temperature Reinforcement)

จากรูปที่ 10 พื้นที่ของเหล็กเสริมกันความร้อนใน 3 ทิศทางจะต้องสอดคล้องกับ

$$A_{\alpha}\cos^2(\theta-\alpha) + A_{\beta}\cos^2(\theta-\beta) + A_{\gamma}\cos^2(\theta-\gamma) \geqslant A_t \qquad (77)$$

ในเมื่อ A_{α}, A_{β} และ A_{γ} แทนพื้นที่ของเหล็กเสริมกันความร้อนต่อความกว้างของหน้าตัดของแผ่นพื้นที่ตั้งฉากกับทิศทาง α, β และ γ ตามลำดับ และ A_t คือพื้นที่เหล็กเสริมกันความร้อนที่ต้องการ

ถ้าพิจารณาเฉพาะความเท่ากันแล้ว สมการ (77) จะเขียนได้ในรูป

$$A_{\alpha}\cos^2(\theta-\alpha)+A_{\beta}\cos^2(\theta-\beta)+A_{\gamma}\cos^2(\theta-\gamma) = A_t(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \qquad (78)$$

ซึ่งสมการ (78) นี้จะคล้ายกับสมการ (63) ถ้าแทน M_x และ M_y ด้วย A_t และให้ M_{xy} มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นหากพิจารณาหาค่า A_{α}, A_{β} และ A_{γ} ในทำนองเดียวกันกับการหาค่า $A_{s\alpha}$, $A_{s\beta}$ และ $A_{s\gamma}$ ในหัวข้อดังกล่าวแล้วก็จะได้

$$A_\alpha = \frac{1 + \cot\beta \cot\gamma}{\sin^2\alpha(\cot\alpha - \cot\beta)\ (\cot\alpha - \cot\gamma)} A_t \tag{79n}$$

$$A_\beta = \frac{1 + \cot\gamma \cot\alpha}{\sin^2\beta(\cot\beta - \cot\gamma)(\cot\beta - \cot\alpha)} A_t \tag{79u}$$

$$A_\gamma = \frac{1 + \cot\alpha \cot\beta}{\sin^2\gamma(\cot\gamma - \cot\alpha)(\cot\gamma - \cot\beta)} A_t \tag{79n}$$

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างการคำนวณออกแบบองค์อาคาร

เพื่อจะได้นำผลการวิเคราะห์ที่ได้ไปประยุกต์ใช้งานในการคำนวณออกแบบองค์อาคาร จึงจะได้ยกตัวอย่างการคำนวณออกแบบแผ่นพื้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีที่รองรับที่มุมและมีแรงกระทำที่จุดศูนย์กลาง แต่ก่อนอื่นจะได้สรุปสูตรที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณหาปริมาณเหล็กเสริม 3 ทาง และ 2 ทางดังนี้

<u>แบบที่ 1</u> :เมื่อเสริมเหล็กสามทาง

สำหรับเหล็กเสริมสามทางที่มีทิศทางการจัดดังแสดงไว้ในรูปที่11 โดยที่เหล็กเสริมในแนว y, φ และ η ทำมุม $90^\circ, 210^\circ$ และ 330° กับแกน x ตามลำดับ ดังนั้นถ้าแทน $\alpha=90^\circ,\ \beta=210^\circ,\ \gamma=330^\circ$ ลงในสมการ(69) จะได้

$$M_y^* = M_y - \frac{M_x}{3} \qquad (80ก)$$

$$M_\eta^* = \frac{2}{3}(M_x + \sqrt{3}M_{xy}) \qquad (80ข)$$

$$M_\varphi^* = \frac{2}{3}(M_x - \sqrt{3}M_{xy}) \qquad (80ค)$$

ในรูปที่11 จะเห็นได้ว่าเฉพาะที่มุมจะมีเหล็กเสริมเพียงสองทาง ซึ่งอยู่ในแนวที่ขนานกับขอบของแผ่นพื้น เช่นที่มุมที่อยู่บนแกน x จะมีเหล็กในแนว φ และ η เท่านั้น ซึ่งเมื่อแทนค่า $\alpha= 30^\circ,\ \beta =330^\circ$ ลงในสมการ (76) จะได้ k=0 และจากสมการ(73) และ (74) จะได้

$$M_\eta^* = \frac{2}{3}(M_x + \sqrt{3}M_{xy}) \qquad (81ก)$$

$$M_\varphi^* = \frac{2}{3}(M_x - \sqrt{3}M_{xy}) \qquad (81ข)$$

$$\frac{M_x}{3} - M_y \geqslant 0 \qquad (82)$$

โมเมนต์ต้านในสมการ(81) นั้นสามารถนำไปใช้ในการคำนวณออกแบบเหล็กเสริมสำหรับบริเวณที่มี

หน่วยแรงสอดคล้องกับสมการ (82) ได้

จากการที่ความหนาของแผ่นพื้นคอนกรีตจะต้องลึกเนื่องจากที่มุมมีค่าโมเมนต์บิดสูง ดังนั้นเหล็กเสริมกันความร้อนจะถูกแบ่งครึ่งให้กับด้านล่างและด้านบนของแผ่นพื้น โดยใช้ค่า

$$A_t = 0.0025\frac{h}{2} \tag{83}$$

เมื่อ h คือความหนาของแผ่นพื้นคอนกรีต

ซึ่งในกรณีนี้ซึ่งมีการจัดเหล็กเสริมดังแสดงไว้ในรูปที่ 11 นั้น จากสมการ (79)จะได้

$$A_y = A_\eta = A_\varphi = 0.0025\frac{h}{3} \tag{84}$$

สมการ (84) นี้สามารถใช้ในการคำนวณออกแบบเหล็กเสริมกันความร้อนสำหรับด้านบนและด้านล่างในแผ่นพื้นคอนกรีตเสริมเหล็กได้

<u>แบบที่ 2</u> : เมื่อเสริมเหล็กสองทาง

แผ่นพื้นที่เสริมเหล็กสองทางที่มีการจัดในทิศที่ตั้งได้ฉากซึ่งกันและกันดังแสดงไว้ในรูปที่ 12 และมีทิศขนานกับแกน x และ y นั้น ถ้าแทนค่า $\alpha = 0^\circ, \beta = 90^\circ$ ลงในสมการ (73), (74) และ (76) จะได้

$$M_x^* = M_x - kM_{xy} \tag{85ก}$$

$$M_y^* = M_y - \frac{M_{xy}}{k} \tag{85ข}$$

$$\frac{M_{xy}}{k} \leqslant 0 \tag{86}$$

และ

$$k = \pm 1 \tag{87}$$

จากสมการ(87) และเงื่อนไขตามสมการ (86) แล้ว ซึ่งถ้าพิจารณาสมการ (85) ก็จะต้องกลายเป็น

$$M_x^* = M_x + |M_{xy}| \tag{88ก}$$

$$M_y^* = M_y + |M_{xy}| \tag{88ข}$$

สำหรับเหล็กเสริมกันความร้อนที่มีการจัดดังรูปที่ 13 นั้น จะมีค่าเท่ากับกับสมการ (83) หรือ

$$A_x = A_y = 0.0025\frac{h}{2} \tag{89}$$

<u>โมเมนต์ต้านของหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็ก</u>

จากรูปที่ 13 ซึ่งแสดงหน้าตัดในทิศทางเหล็กเสริมใด ๆ ψ

$$f_{c\psi} = \frac{f_{s\psi}(k_{\psi}d_{\psi})}{m(d_{\psi}-k_{\psi}d_{\psi})} \tag{90ก}$$

$$C_{\psi} = \frac{f_{s\psi}(k_{\psi}d_{\psi})^2}{2m(d_{\psi}-k_{\psi}d_{\psi})} \tag{90ข}$$

$$j_{\psi}d_{\psi} = d_{\psi} - \frac{k_{\psi}d_{\psi}}{3} \tag{90ค}$$

$$M^*_{\psi} = C_{\psi}j_{\psi}d_{\psi} = \frac{f_{s\psi}(k_{\psi}d_{\psi})^2}{2m(d_{\psi}-k_{\psi}d_{\psi})}\left(d_{\psi} - \frac{k_{\psi}d_{\psi}}{3}\right) \tag{90ง}$$

ในเมื่อ $f_{c\psi}$ แทนหน่วยแรงอัดของคอนกรีตที่ริมสุดของหน้าตัด, $f_{s\psi}$ แทนหน่วยแรงในเหล็กเสริมซึ่งมีค่าตามสมมติฐานดังในสมการ(60), C_{ψ} คือแรงอัดในคอนกรีตต่อหน่วยความยาวของหน้าตัดของแผ่นพื้น, k_{ψ} คือ อัตราส่วนของระยะระหว่างผิวนอกสุดที่มีแรงอัดกับแกนสะเทินต่อความลึกประสิทธิผล d_{ψ}, และ m คือ อัตราส่วนโมดูลัสยืดหยุ่นระหว่างเหล็กเสริมกับคอนกรีต ซึ่งเมื่อได้กำหนดแนวของเหล็กเสริมและหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในเหล็กเสริมในทิศนั้นตามสมการ(60) ตลอดจนความหนาของแผ่นพื้น (h) แล้วก็จะหาค่าโมเมนต์ต้านในทิศนั้น ๆ ได้ตามสมการ(90ง)

<u>ตัวอย่าง</u>: ออกแบบฐานรากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารองรับด้วยเสาเข็ม 3 ต้นที่มุมซึ่งมีระยะห่างกันเท่ากับ 1.38 เมตร กำหนดให้มีน้ำหนักบรรทุก P กระทำที่จุดศูนย์กลางมีค่าเท่ากับ 100 ตัน $f'_c = 240$ กก./ซม^2, $f_s = 1400$ กก./ซม^2, $m=9$ และ $\nu=0.20$

1. <u>การคำนวณความหนาของหน้าตัด</u>

ดังได้สรุปไว้ในตอนท้ายของบทที่ 3 ค่าโมเมนต์บิดที่มุมจะเป็นตัวกำหนดความหนาของแผ่นพื้น ซึ่งเมื่อพิจารณาที่มุม ($x=2a/3$ $y=0.0$) ในรูปที่ 11 แล้วจะได้

$$M_x=0.260P, \ M_y=-0.120P \ , \ M_{xy}=0.0$$

ค่าหน่วยแรงเหล่านี้จะให้โมเมนต์บิดสูงสุด M_{nt} มีค่าเท่ากับ

$$M_{nt} = \frac{1}{2}(M_x-M_y)=\frac{1}{2}(0.260+0.120)P$$

$$=0.190P =19000 \text{ kg-m/m}$$

และแรงเฉือนมากสุด τ_{nt} ในแผ่นพื้นคอนกรีตมีค่า

$$\tau_{nt}= \frac{6M_{nt}}{h^2} = \frac{(6)(19000)}{h^2} \tag{91}$$

ทดลองใช้ $h=1.20m$ ดังนั้น

$$\tau_{nt}=\frac{(6)(19000)}{(120)^2}= 7.92 < 0.53\sqrt{f'_c} \text{ หรือ } 8.21 \text{ kg/cm}^2$$

ฉะนั้นจะใช้ความหนาของฐานรากนี้เท่ากับ 1.20 เมตร

2. <u>การคำนวณเหล็กเสริมในฐานราก</u>

การคำนวณเหล็กเสริมนี้จะแบ่งตามลักษณะการจัดเหล็กเสริมตามรูปที่ 11 และ 12 ดังนี้

2.1 <u>แบบที่ 1</u> เสริมเหล็ก 3 ทาง

เหล็กเสริมกันความร้อนสำหรับฐานรากหนา 1.20 เมตรนี้ ตามสมการ (84) จะได้ว่าปริมาณเหล็กเสริมที่ด้านบนและด้านล่างของแผ่นพื้นมีค่าเป็น

$$A_y= A_\eta = A_\varphi =(0.0025)(120)/3= 10 \text{ cm}^2/\text{m}$$

เพราะฉะนั้นจะต้องเสริมเหล็กในแต่ละด้านของแผ่นพื้นอย่างน้อยเท่ากับเหล็กเสริมกันความร้อนเป็น

ปริมาณ $10 cm^2/m$ ในทิศ y η และ φ

จากรูปที่ 11 บริเวณส่วนกลางของแผ่นพื้นที่ล้อมรอบด้วยเส้นประและขอบซึ่งโมเมนต์ที่เกิดขึ้นไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังในสมการ (82) ดังนั้นบริเวณดังกล่าวนี้จะต้องเสริมเหล็กสามทางตามปริมาณโมเมนต์ที่ต้องการดังในสมการ (80) สำหรับบริเวณที่อยู่นอกขอบเขตนี้จะเสริมเหล็กสองทางตามปริมาณโมเมนต์ที่ต้องการดังในสมการ (81)

ในการคำนวณเหล็กเสริมนี้จะพิจารณาเป็นช่วง ๆ ซึ่งแบ่งจำนวนช่วงตามขนาดและลักษณะของแผ่นพื้นดังรูปและคำนวณหาปริมาณเหล็กเสริมได้ดังนี้ :-

ในการเสริมเหล็กสามทิศทางนั้น จะให้คอนกรีตหุ้มหนา 7.5 ซม.

ดังนั้นความลึกประสิทธิผลเฉลี่ยสมมติให้เป็น $d = 120-7.5-2.5-1.25$

$$= 108.75 \quad cm$$

<u>ช่วงระหว่างจุดที่ 6-5</u>

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นเฉลี่ยในช่วงนี้มีค่า : $M_x=0.065P$, $M_y=0.355P$, $M_{xy}=0.0$ แทนลงในสมการ (80) และจากสมการ (58) จะได้

$$M_y^* = A_{sy}f_{sy}j_yd = (M_y-\frac{M_x}{3}) = 0.333P$$

$$= 33300 \text{ kg-m/m} \tag{92ก}$$

$$M_\eta^* = M_\varphi^* = A_{s\eta}f_{s\eta}j_\eta d = A_{s\varphi}f_{s\varphi}j_\varphi d = \frac{2}{3}M_x = 0.043P$$

$$= 4300 \text{ kg-m/m} \tag{92ข}$$

หาโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในทิศ η และ φ โดยการtransformation จะได้

$$M_\eta = M_\varphi = M_x\cos^2 30^\circ + M_y\cos^2 60^\circ = 0.137 P$$

เนื่องจาก $M_y > M_\eta$ และ $M_y > M_\varphi$ ดังนั้นจากสมการ (59) และ (60) จะได้ว่า

$$f_{sy} = f_s = 1400 \quad kg/cm^2$$

$$f_{s\eta} = f_{s\varphi} = f_s\frac{M_\eta}{M_y} = 540 \text{ kg/cm}^2$$

และจากสมการ (92) จะได้

$$A_{sy} = \frac{(33300)(100)}{1400 j_y d} \tag{93ก}$$

$$A_{s\eta} = A_{s\varphi} = \frac{(4300)(100)}{540 j_{\eta} d} \tag{93ข}$$

จากสมการ (90) จะได้

$k_y d = 19.30$ cm หรือ $j_y d = 102.32$ cm

$k_{\eta} d = k_{\varphi} d = 11.60$ cm หรือ $j_{\eta} d = j_{\varphi} d = 104.88$ cm

แทนลงในสมการ (93) จะได้

$A_{sy} = 23.25\ cm^2/m$

$A_{s\eta} = A_{s\varphi} = 7.59\ cm^2/m$

<u>ช่วงระหว่างจุดที่ 5-4</u>

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นเฉลี่ยในช่วงนี้มีค่า: $M_x = 0.240P$,$M_y = 0.380P$,$M_{xy} = 0.0$ แทนลงในสมการ (80) และจากสมการ (58) จะได้

$$M_y^* = A_{sy} f_{sy} j_y d = (M_y - \frac{M_x}{3}) = 0.300P$$

$$= 30000\ \text{kg-m/m} \tag{94ก}$$

$$M_{\eta}^* = M_{\varphi}^* = A_{s\eta} f_{s\eta} j_{\eta} d = A_{s\varphi} f_{s\varphi} j_{\varphi} d = \frac{2}{3} M_x = 0.160P$$

$$= 16000\ \text{kg-m/m} \tag{94ข}$$

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นในทิศทาง η และ φ โดยการtransformation มีค่า

$$M_{\eta} = M_{\varphi} = M_x \cos^2 30^{\circ} + M_y \cos^2 60^{\circ} = 0.275P$$

เนื่องจาก $M_y > M_{\eta}$ และ $M_y > M_{\varphi}$ ดังนั้นจากสมการ (59) และ (60) จะได้ว่า

$f_s = 1400\ kg/cm^2$

$f_{s\eta} = f_{s\varphi} = f_s \frac{M_{\eta}}{M_y} = 1013\ kg/cm^2$

จากสมการ (94) จะได้ว่า

$$A_{sy} = \frac{(30000)(100)}{1400 j_y d} \tag{95ก}$$

$$A_{s\eta} = A_{s\varphi} = \frac{(16000)(100)}{1013 j_{\eta} d} \tag{95ข}$$

จากสมการ (90) จะได้

$$k_y d = 18.40 \text{ cm} \quad \text{หรือ} \quad j_y d = 102.62 \text{ cm}$$

$$k_\eta d = k_\varphi d = 16.0 \text{ cm} \quad \text{หรือ} \quad j_\eta d = j_\varphi d = 103.42 \text{ cm}$$

แทนค่าลงในสมการ (95)

$$A_{sy} = 20.88 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{s\eta} = A_{s\varphi} = 15.27 \text{ cm}^2/\text{m}$$

ช่วงระหว่างจุดที่ 4-3

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นตรงกึ่งกลางระหว่างช่วงนี้มีค่า M_x=0.320P , M_y=0.300P , M_{xy}=0.0 แทนค่าลงในสมการ (80) และจากสมการ (58) จะได้ว่า

$$M_y^* = A_{sy} f_{sy} j_y d = (M_y - \frac{M_x}{3}) = 0.193P \qquad (96ก)$$

$$= 19300 \text{ kg-m/m}$$

$$M_\eta^* = M_\varphi^* = A_{s\eta} f_{s\eta} j_\eta d = A_{s\varphi} f_{s\varphi} j_\varphi d = \frac{2}{3} M_x = 0.213P \qquad (96ข)$$

$$= 21300 \text{ kg-m/m}$$

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นในทิศ η และ φ มีค่า

$$M_\eta = M_\varphi = M_x \cos^2 30^\circ + M_y \cos^2 60^\circ = 0.315P$$

เนื่องจาก $M_\eta > M_y$ และ $M_\varphi > M_y$ ดังนั้นจากสมการ (59) และ (60) จะได้ว่า

$$f_{s\eta} = f_{s\varphi} = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{sy} = f_s \frac{M_y}{M_\eta} = 1333 \text{ kg/cm}^2$$

แทนค่าในสมการ (96ก) จะได้

$$A_{sy} = \frac{(19300)(100)}{1333 j_y d} \qquad (97)$$

จากสมการ (90) จะได้

$$k_y d = 15.32 \text{ cm} \quad \text{หรือ} \quad j_y d = 103.64 \text{ cm}$$

แทนลงในสมการ (97) จะได้

$$A_{sy} = 13.97 \text{ cm}^2/\text{m}$$

<u>ช่วงระหว่างจุดที่ 3-2</u>

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นตรงจุดกึ่งกลางของช่วงนี้: M_x=0.280P, M_y=0.120P, M_{xy}=0 แทนค่าในสมการ (80) และจากสมการ (58) จะได้

$$M_y^* = A_{sy}f_{sy}j_yd = (M_y - \frac{M_x}{3}) = 0.027P$$

$$= 2700 \ \text{kg-m/m} \qquad (98\text{ก})$$

$$M_\eta^* = M_\varphi^* = A_{s\eta}f_{s\eta}j_\eta d = \frac{2}{3}M_x = 0.187P$$

$$= 18700 \ \text{kg-m/m} \qquad (98\text{ข})$$

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นในทิศ η และ φ มีค่า

$$M_\eta = M_\varphi = M_x\cos^2 30^\circ + M_y\cos^2 60^\circ = 0.240P$$

ซึ่ง $M_\eta > M_y$ และ $M_\varphi > M_y$ ดังนั้นจากสมการ (59) และ (60) จะได้ว่า

$$f_{s\eta} = f_{s\varphi} = 1400 \ \text{kg/cm}^2$$

$$f_{sy} = f_s\frac{M_y}{M} = 700 \ \text{kg/cm}^2$$

แทนค่าในสมการ (98ค) จะได้

$$A_{sy} = \frac{(2700)(100)}{700j_yd} \qquad (99)$$

จากสมการ (90) จะได้

$$k_yd = 8.10 \ \text{cm} \qquad j_yd = 106.05 \ \text{cm}$$

แทนในสมการ (99) จะได้

$$A_{sy} = 3.64 \ \text{cm}^2/\text{m}$$

<u>สรุปการจัดเหล็กเสริม</u>

จากที่ได้คำนวณหา A_{sy} ในช่วงต่าง ๆ มาแล้วนั้นพอที่จะสรุปการจัดเหล็กเสริมในทิศ y ซึ่งเป็นทิศทางหนึ่งในจำนวนสามทิศทาง ได้ดังนี้

ช่วง จุด-จุด	ระยะ m.	A_{sy} cm^2/m	A_{sy} cm^2		A_t cm^2	เหล็กเสริมที่ใช้
6-5	0.20	23.25	4.65	>	2.00	1-∅ 25mm
5-4	0.20	20.88	4.17	>	2.00	1-∅ 25mm
4-3	0.20	13.99	2.79	>	2.00	1-∅ 19mm
3-2	0.20	3.64	0.728	<	2.00	1-∅ 16mm

การจัดเหล็กเสริมได้แสดงไว้ดังรูปที่ 14

ตรวจสอบโมเมนต์ต้าน

จากการจัดเหล็กเสริมล่างดังรูปที่ 14 นั้น และจากรูปที่ 11 จะเห็นได้ว่าที่จุด 2 มีเหล็กเสริมเพียงสองทางคือในทิศ η และ φ ซึ่งขนานกับขอบของฐานราก ทั้งนี้ปริมาณเหล็กเสริมดังกล่าวที่จุดนี้จะมีค่าเท่ากับปริมาณเหล็กเสริมในทิศ y ที่จุด 5 โดยถือว่าไม่มีการลดเหล็กเสริม
ดังนั้นที่จุด 2 นี้จะได้ว่า

$$A_{sy} = 0$$

$$A_{s\eta} = A_{s\varphi} = 24.55 \text{ cm}^2/\text{m} \ (\phi 25\text{mm} @ 0.20)$$

แต่โมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่จุดนี้มีค่า: $M_x=0.275P$, $M_y=0.060P$, $M_{xy}=0.0$ ซึ่งมีค่าสอดคล้องกับสมการ (82)
จากสมการ (81) จะได้

$$M^*_\eta = M^*_\varphi = \frac{2}{3}M_x = 0.183P = 18300 \text{ kg-m/m}$$

และจากสมการ (58) จะได้ว่า

$$A_{s\eta} = A_{s\varphi} = \frac{(18300)(100)}{1400 j_\eta d} \qquad (100)$$

จากสมการ (90) จะได้ $k_\eta d = 14.60$ หรือ $j_\varphi d = j_\eta d = 103.88$ cm

$$A_{s\eta} = A_{s\varphi} = 12.58 \text{ cm}^2/\text{m}$$ ซึ่งน้อยกว่า $24.55 \text{ cm}^2/\text{m}$

ดังนั้นการเสริมเหล็กดังกล่าวจะสามารถรับโมเมนต์ที่เกิดขึ้นได้

เหล็กเสริมรับโมเมนต์ลบ

พิจารณาจุดที่ 1 ($x=2a/3$, $y=0.0$) ซึ่งโมเมนต์ที่เกิดขึ้นมีค่า: $M_x=0.260P$, $M_y=-0.120P$, $M_{xy}=0.0$

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นในทิศ η และ φ มีค่า

$$M_\eta = M_\varphi = M_x\cos^2 30^\circ + M_y\cos^2 60^\circ = 0.165P$$

เพราะว่า $|M_\eta| > |M_y|$ และ $|M_\varphi| > |M_y|$ ดังนั้นจากสมการ (59) และ (60) จึงให้

$$f_{s\eta} = f_{s\varphi} = 1400 \quad kg/cm^2$$

และ

$$f_{sy} = f_s\frac{|M_y|}{|M_\eta|} = 1018 \ kg/cm^2$$

จากสมการ (58) และ (80) จะได้

$$\bar{A}_{sy} = \frac{(12000)(100)}{1018 j_y d} \tag{101}$$

จากสมการ (90) จะได้ $k_y d=13.80$ หรือ $j_y d=104.15$ cm ซึ่งเมื่อแทนลงในสมการ (101) แล้วจะได้

$$\bar{A}_{sy} = 11.32 > 10 \ cm^2/m \text{ (เหล็กเสริมกันความร้อน)}$$

ดังนั้นจึงเสริมเหล็กรับโมเมนต์ลบที่มุมด้วยปริมาณไม่น้อยกว่า $11.32 \ cm^2/m$ หรือ Ø 19mm @ 0.25 สำหรับรายละเอียดการจัดเหล็กเสริมบนและเหล็กล่างนั้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 14

2.2 แบบที่ 2 เสริมเหล็ก 2 ทาง

การเสริมเหล็ก 2 ทางดังรูปที่ 12 ซึ่งมีเหล็กเสริมขนานกับแกน x และ y นั้น ความหนาของฐานราก $h=1.20m$ ดังนั้นความลึกประสิทธิผลเฉลี่ยสมมติเป็น $d=120-7.5-2.5 = 110$ cm เหล็กเสริมกันความร้อนสำหรับฐานรากหนา 1.20 m ตามสมการ (89) มีค่า

$$A_x = A_y = (0.0025)(120)/2 = 15 \ cm^2/m$$

ดังนั้นจะต้องเสริมเหล็กในแต่ละด้านของแผ่นพื้นอย่างน้อยเท่ากับเหล็กเสริมกันความร้อนด้วยปริมาณ $15 cm^2/m$ ในทิศ x และ y

ในการคำนวณหาปริมาณเหล็กเสริมนั้น จะได้พิจารณาเป็นช่วง ๆ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 12 ดังนี้:-

ช่วงระหว่างจุดที่ 6-4

จากรูปที่ 7ก และ 12จะเห็นได้ว่าโมเมนต์ดัด M_y มีค่าแปรเปลี่ยนไม่มากนัก ดังนั้นในการคำนวณหาเหล็กเสริมในทิศ y จึงจะใช้โมเมนต์เฉลี่ยในช่วงนี้ซึ่งมีค่าดังนี้

$$M_x = 0.204P,\ M_y = 0.389P,\ M_{xy} = 0.0$$

แทนค่าในสมการ (88) และจากสมการ (58) จะได้ว่า

$$M_x^* = A_{sx} f_{sx} j_x d = M_x = 0.204P = 20400 \text{ kg-m/m}$$

$$M_y^* = A_{sy} f_{sy} j_y d = M_y = 0.389P$$

$$= 38900 \text{ kg-m/m}$$

หรือ

$$A_{sy} = \frac{(20400)(100)}{1400 j_x d} \quad (102ก)$$

$$A_{sy} = \frac{(38900)(100)}{1499 j_y d} \quad (102ข)$$

จากสมการ (90) จะได้ว่า

$$k_x d = 15.50 \text{ cm หรือ } j_x d = 104.83 \text{ cm}$$

$$k_y d = 20.65 \text{ cm หรือ } j_y d = 103.12 \text{ cm}$$

แทนค่าในสมการ (102) จะได้

$$A_{sx} = 13.90 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{sy} = 26.95 \text{ cm}^2/\text{m}$$

ช่วงระหว่างจุดที่ 4-3

จากรูปที่ 7ก และ 12 จะเห็นได้ว่าโมเมนต์ดัด M_y มีค่าลดลงค่อนข้างคงที่ ส่วน M_x นั้นแปรเปลี่ยนไปดังรูป ดังนั้นจึงพิจารณาใช้โมเมนต์เฉลี่ยภายในช่วงมาใช้ในการหาเหล็กเสริม นั้นคือ

$$M_x = 0.344P,\ M_y = 0.30P,\ M_{xy} = 0.0$$

แทนค่าในสมการ (88) และจากสมการ (58) จะได้

$$M_x^* = A_{sx} f_{sx} j_x d = M_x = 0.344P$$

$$= 34400 \text{ kg-m/m}$$

$$M_y^* = A_{sy} f_{sy} j_y d = M_y = 0.304P$$

$$30400 \text{ kg-m/m}$$

หรือ

$$A_{sx} = \frac{(34400)(100)}{1400 j_x d} \tag{103ค}$$

$$A_{sy} = \frac{(30400)(100)}{1400 j_y d} \tag{103ข}$$

จากสมการ (90) จะได้ว่า

$k_x d = 19.70$ cm หรือ $j_x d = 103.43$ cm

$k_y d = 18.57$ cm หรือ $j_y d = 103.81$ cm

แทนค่าในสมการ (103) จะได้

$$A_{sx} = 23.76 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{sy} = 20.92 \text{ cm}^2/\text{m}$$

ช่วงระหว่างจุดที่ 3-2

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นในช่วงนี้มีค่า $M_x = 0.280P$, $M_y = 0.120P$, $M_{xy} = 0.0$

จากสมการ (58) และ (88) จะได้

$$A_{sx} = \frac{(28000)(100)}{1400 j_x d} \qquad (104ก)$$

$$A_{sy} = \frac{(12000)(100)}{1400 j_y d} \qquad (104ข)$$

จากสมการ (90) จะได้

$k_x d = 17.95$ cm หรือ $j_x d = 104.02$ cm

$k_y d = 11.90$ cm หรือ $j_y d = 106.03$ cm

แทนค่าในสมการ (104) จะได้

$$A_{sx} = 19.23 \ cm^2/m$$

$$A_{sy} = 8.08 \ cm^2/m$$

พิจารณาที่จุดที่ 8

ในการพิจารณาลดปริมาณเหล็กเสริมในทิศ x นั้นจะได้พิจารณาที่จุดที่ 8 ซึ่งอยู่ห่างจากแกน x เป็นระยะ $\sqrt{3}a/8$ ดังรูปที่ 12 สำหรับการคำนวณหาปริมาณเหล็กเสริมนั้น ทำโดยพิจารณาที่จุดกึ่งกลางของช่วงระหว่างจุดที่ 3-2 ซึ่งให้ผลเหมือนกัน ทั้งนี้โดยคิดในทิศที่ทำมุม 60° และ 30° กับแกน x เพื่อหาปริมาณเหล็กเสริมที่จุดที่ 8 ในทิศ x และ y ตามลำดับนั่นคือ

$$A_{sx} = 19.23\cos^2 60^\circ + 8.08\cos^2 30^\circ = 10.87 \ cm^2/m$$

$$A_{sy} = 19.23\cos^2 30^\circ + 8.08\cos^2 60^\circ = 16.44 \ cm^2/m$$

สรุปการจัดเหล็กเสริม

จากที่ได้คำนวณหา A_{sx} และ A_{sy} ในช่วงต่าง ๆ นั้นพอที่จะสรุปการจัดเหล็กเสริมได้ดังนี้

ช่วง	ระยะ	A_{sx}		A_{sy}		A_t	เหล็กเสริมที่ใช้	
จุด-จุด	m	cm^2/m	cm^2	cm^2/m	cm^2	cm^2	ทิศ x	ทิศ y
6-4	0.40	13.90	5.56	26.95	10.78	6.0		3-ø19mm
4-3	0.20	23.76	4.75	20.92	4.18	3.0	ø25mm@0.20	1-ø25mm
3-2	0.20	19.23	3.85	8.08	1.62	3.0		1-ø19mm
จุดที่8	-	10.87	-	16.44	-		ø19mm@0.20	

การจัดเหล็กเสริมได้แสดงไว้ดังรูปที่ 15

<u>ตรวจสอบโมเมนต์ที่จุด 7</u>

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นมีค่า $M_x=0.0$, $M_y=0.160P$, $M_{xy}=0.167P$

จากการเสริมเหล็กในทิศทาง y ตามที่ได้สรุปไว้ เมื่อไม่ได้มีการลดเหล็กเสริมดังรูปที่ 15 นั้นจะได้ว่า ที่จุดที่มุมนี้โมเมนต์ต้านมีค่า

$$M_y^* = 0.389P$$

แต่ที่จุดนี้จะต้องเสริมเหล็กให้มีโมเมนต์ต้านสอดคล้องกับสมการ (88) และมีค่า

$$M_y^* = M_y + M_{xy}$$

$$= (0.160+0.167)P = 0.327P < 0.389P$$

ดังนั้นเหล็กเสริมในทิศทาง y รับโมเมนต์ที่เกิดขึ้นได้

สำหรับการเสริมเหล็กในทิศทาง x

$$M_x^* = A_{sx}f_{sx}j_xd = M_{xy} = 0.167P$$

$$= 16700 \text{ kg-m/m}$$

หรือ

$$A_{sx} = \frac{(16700)(100)}{1400j_xd} \tag{105}$$

จากสมการ (90) จะได้ว่า $k_x d=14.00$ หรือ $j_x d=105.30$ cm

แทนในสมการ (105) จะได้

$$A_{sx} = 11.33 \text{ cm}^2/\text{m} < 15 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (เหล็กเสริมกันความร้อน)}$$

ดังนั้นเสริมเหล็กในทิศ x อย่างน้อยเป็นปริมาณ $15\text{cm}^2/\text{m}$ หรือ ∅ 19mm @ 0.20

<u>เหล็กเสริมต้านโมเมนต์ลบ</u>

พิจารณาที่จุดที่ 1 โมเมนต์ที่เกิดขึ้นมีค่า

$$M_x = 0.260P,\ M_y = -0.120P,\ M_{xy} = 0.0$$

เนื่องจาก M_y เป็นโมเมนต์ลบสำคัญ ดังนั้นจากสมการ (58) และ (88) จะได้ว่า

$$M_y^* = A_{sy} f_{sy} j_y d = M_y = -12000 \text{ kg-m/m}$$

หรือ

$$A_{sy}^- = \frac{(12000)(100)}{1400 j_y d} \qquad (106)$$

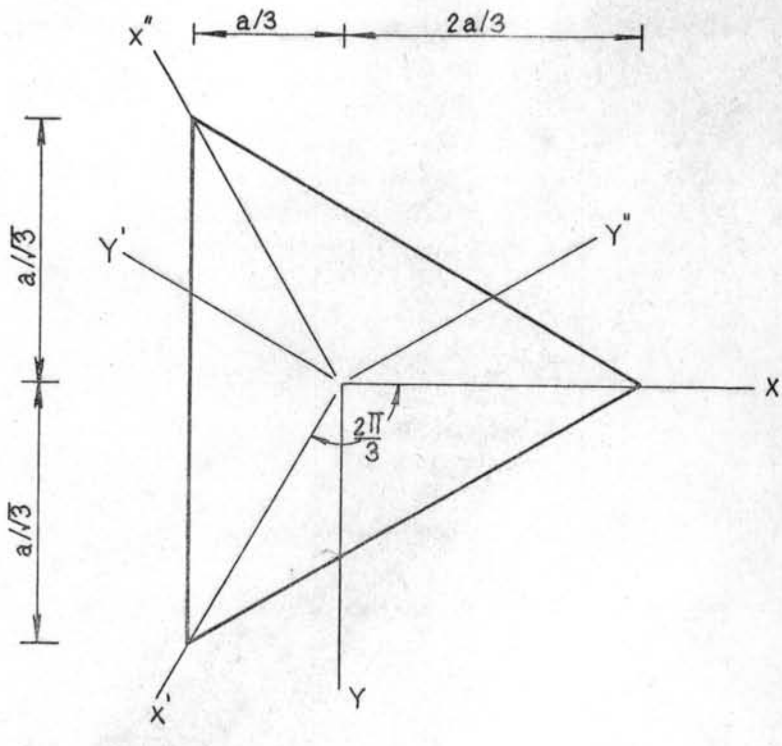
จากสมการ (90) จะได้ $k_y d=11.90$ cm หรือ $j_y d=106.03$ cm แทนค่าในสมการ (106)จะได้

$$A_{sy}^- = 8.08 < 15 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (เหล็กเสริมกันความร้อน)}$$

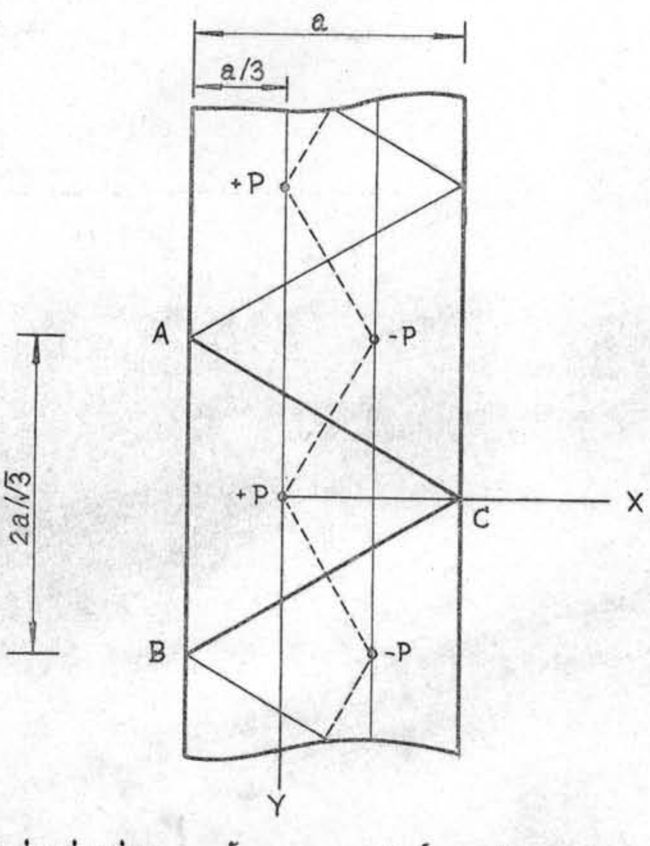
ดังนั้นจึงอาจเสริมเหล็กบนในทิศทาง y เพื่อต้านโมเมนต์ลบด้วยปริมาณ $15\text{cm}^2/\text{m}$

∅19 mm @ 0.20

สำหรับรายละเอียดในการจัดเหล็กเสริมนั้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 15

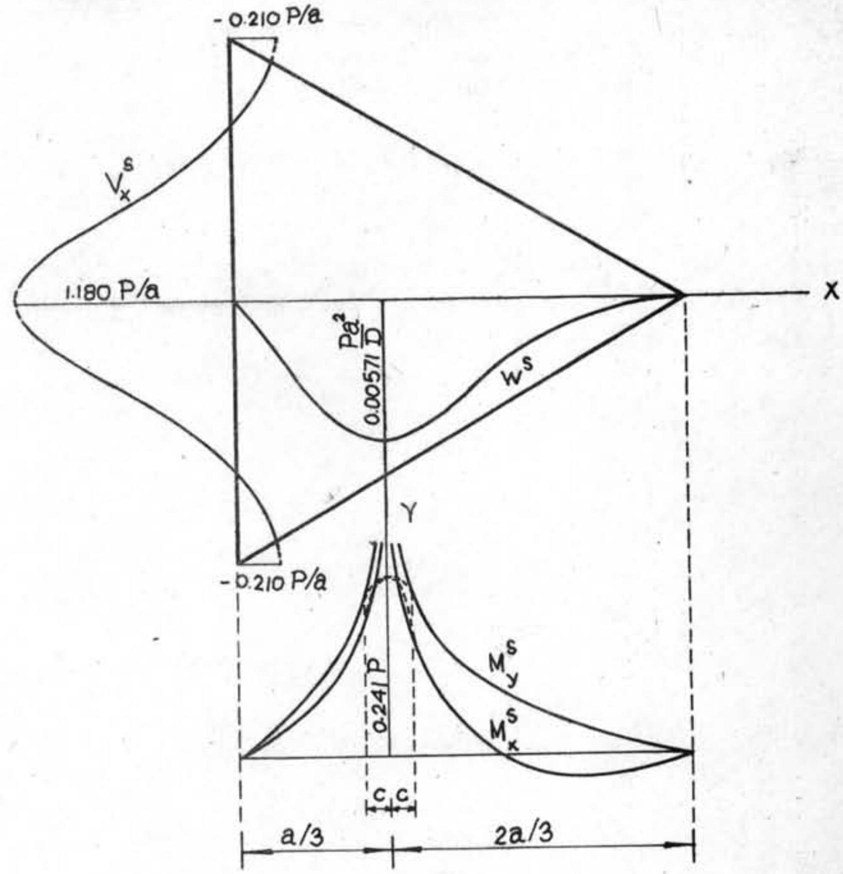


รูปที่ 1 . แผ่นพื้นสามเหลี่ยมด้านเท่าและระบบแกน

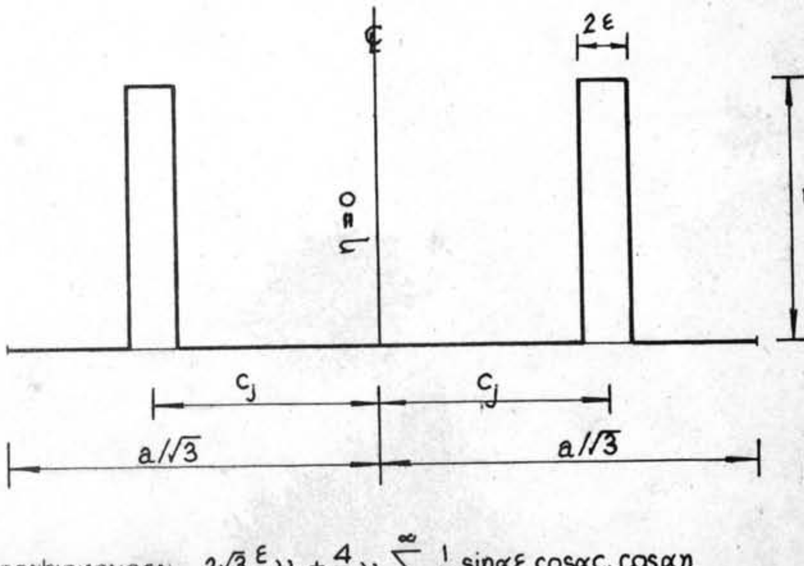


รูปที่ 2 . แผ่นพื้นสี่เหลี่ยมที่มีความกว้าง a ยาวอนันต์ รองรับแบบ

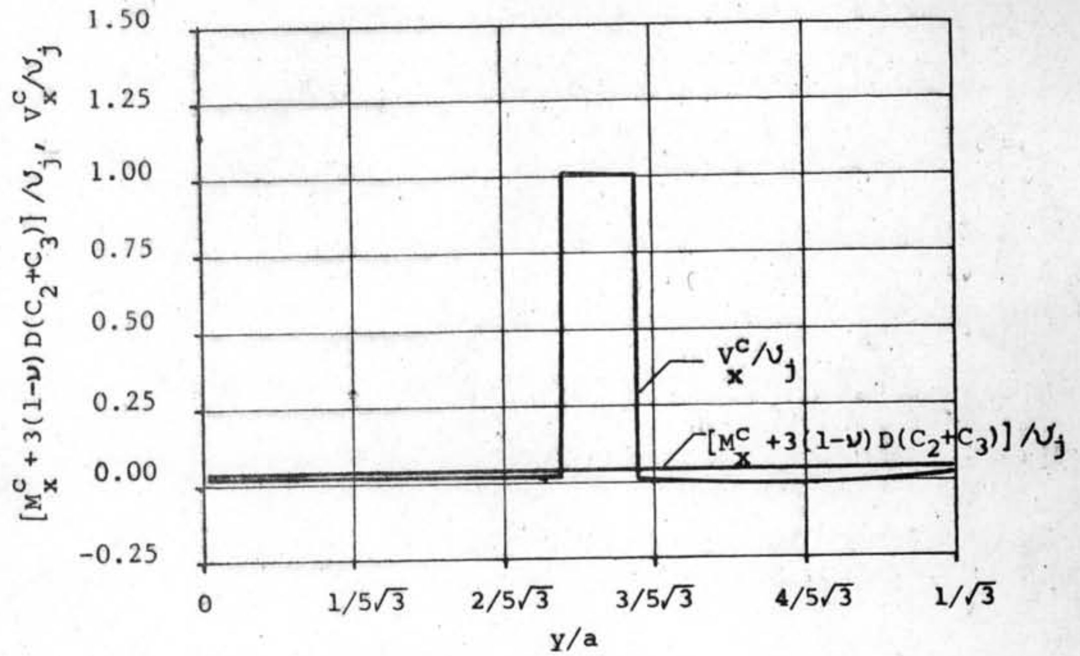
ธรรมดาถูกกระทำด้วยระบบแรง P



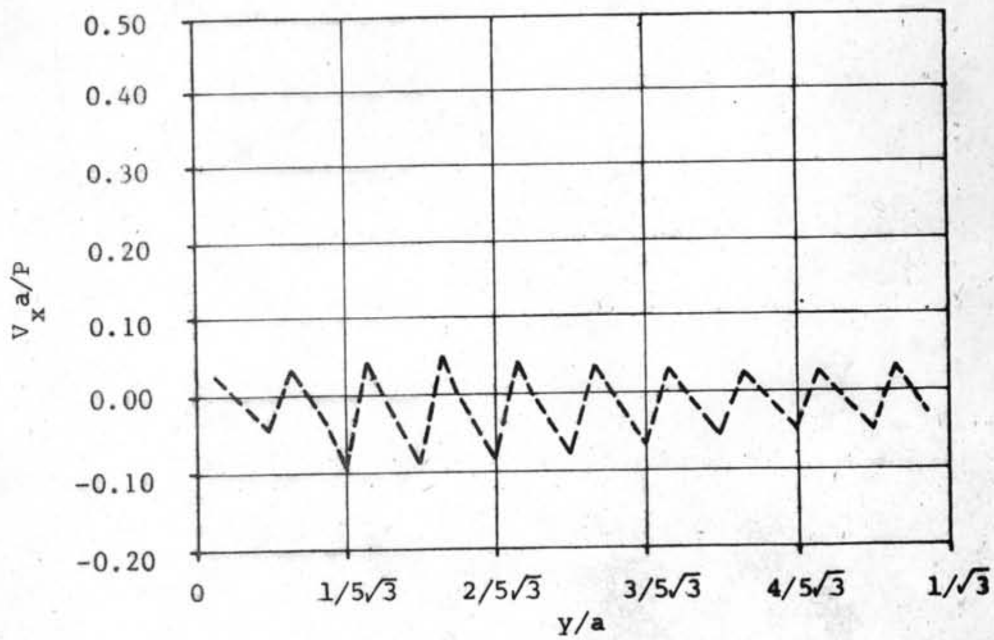
รูปที่ 3. ค่าระยะโก่ง โมเมนต์ดัดและ แรงเฉือนเคียร์คอฟ ของ แผ่นพื้นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารองรับแบบธรรมดา ถูกกระทำด้วย แรงเดี่ยว P เมื่อกำหนดให้ ν = 0.20และ c/a = 0.05



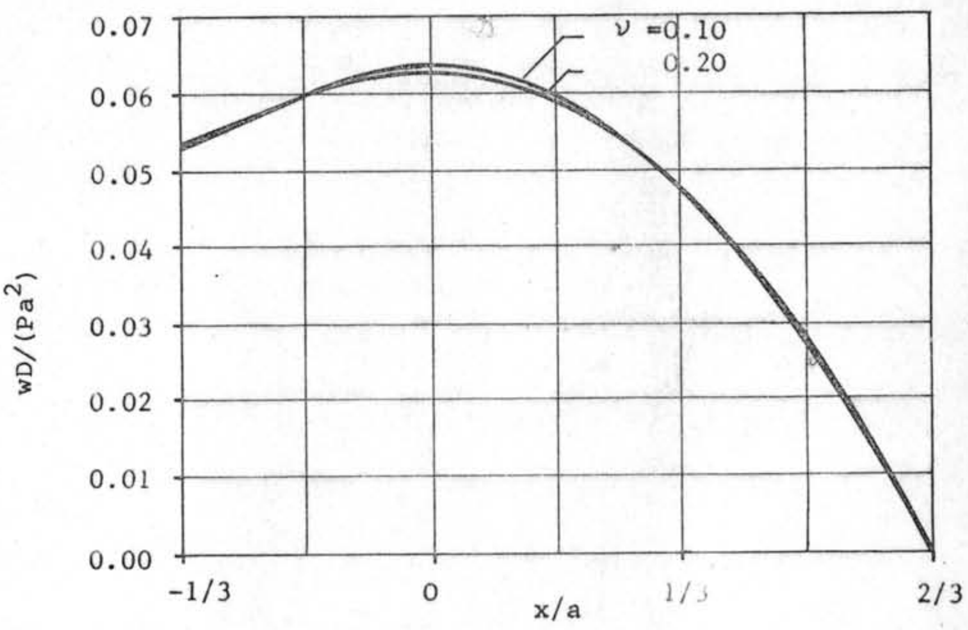
รูปที่ 4ก. กราฟของอนุกรม $2\sqrt{3}\frac{\varepsilon}{a}\upsilon_j + \frac{4}{\pi}\upsilon_j\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\alpha\varepsilon\cos\alpha c_j\cos\alpha\eta$



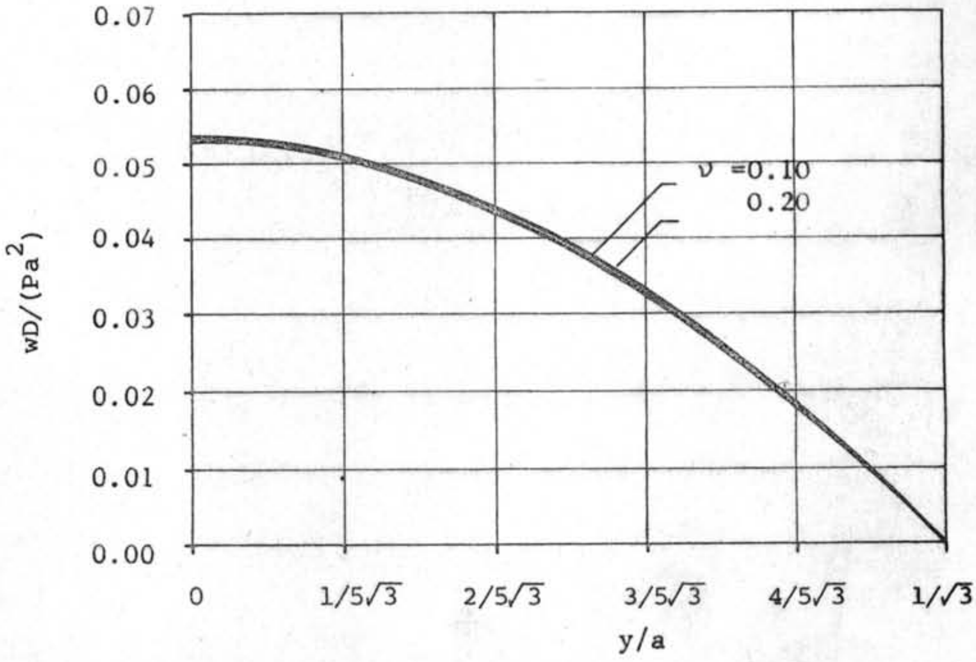
รูปที่ 4ข. กราฟแสดงลักษณะการกระจายของโมเมนต์ดัด M_x^c และ
แรงเฉือนเคียร์คอฟ V_x^c ตามแนวขอบ (x/a = -1/3)
เนื่องจาก υ_j (ν = 0.20 , ϵ = 0.03a, c_j = 0.30a)



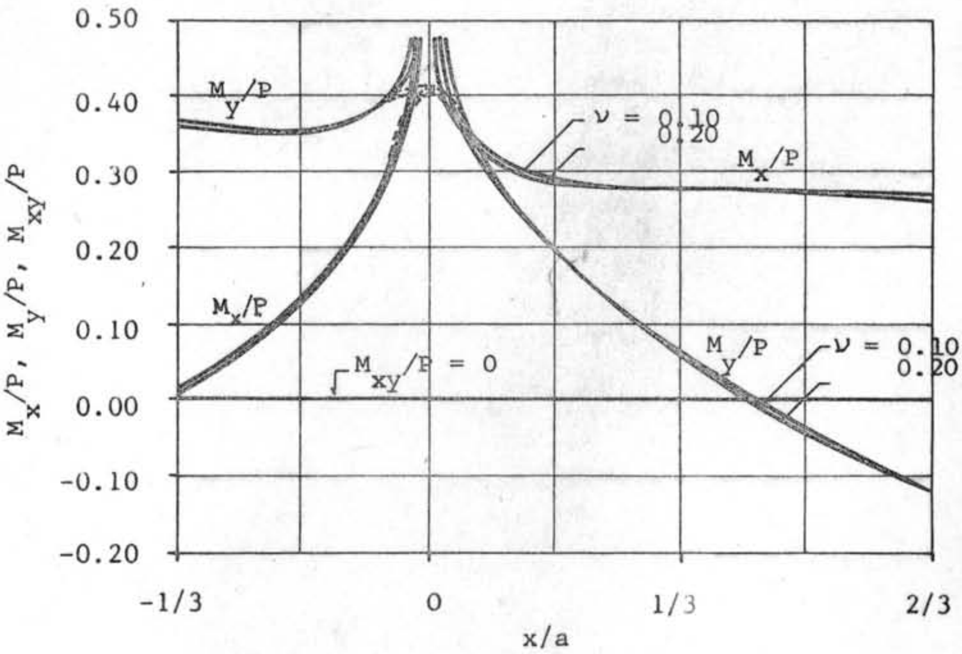
รูปที่ 5. กราฟแสดง แรงเฉือนเคียร์คอฟ V_x ตามแนวขอบ
(x/a=-1/3) ซึ่งคลาดเคลื่อนจากสภาพของขอบที่แท้จริง (V_x = o)



รูปที่ 6ก. กราฟแสดงค่าระยะโก่ง w ตามแนวแกน x/a (y/a = 0)

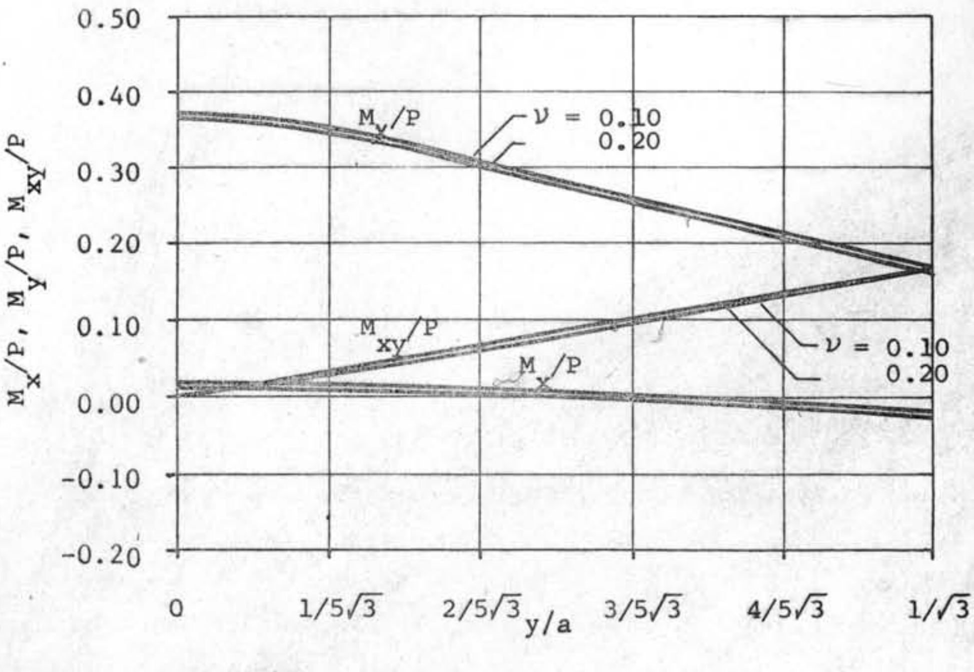


รูปที่ 6ข. กราฟแสดงค่าระยะโก่ง w ตามแนวขอบ (x/a = -1/3)



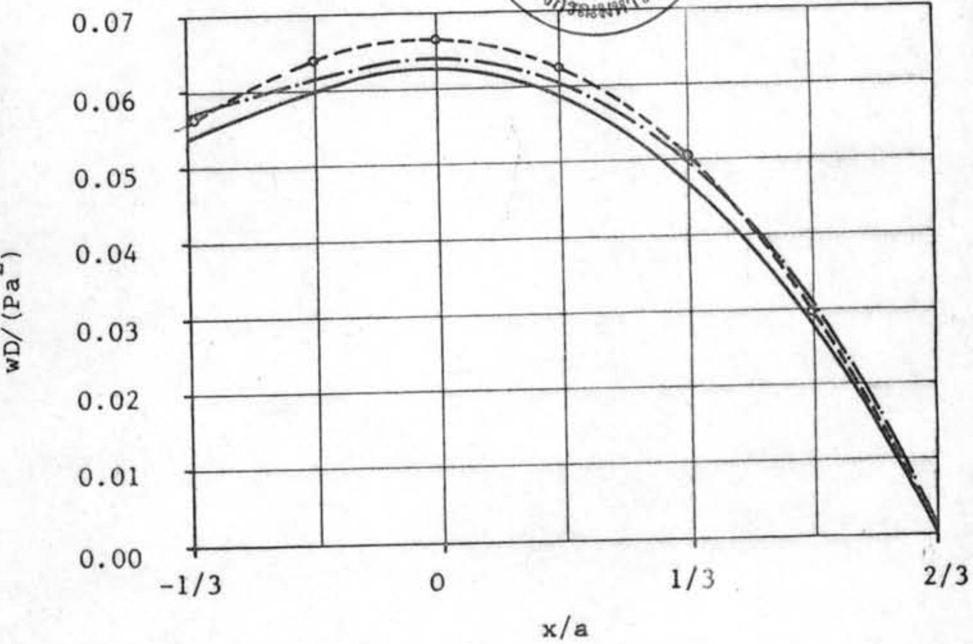
รูปที่ 7ก. กราฟแสดงค่าโมเมนต์ M_x,M_y และ M_{xy} ตามแนวแกน x/a

(y/a = 0) กำหนดให้ c/a = 0.05



รูปที่ 7ข. กราฟแสดงค่าโมเมนต์ M_x,M_y และ M_{xy} ตามแนวขอบ

(x/a = -1/3)



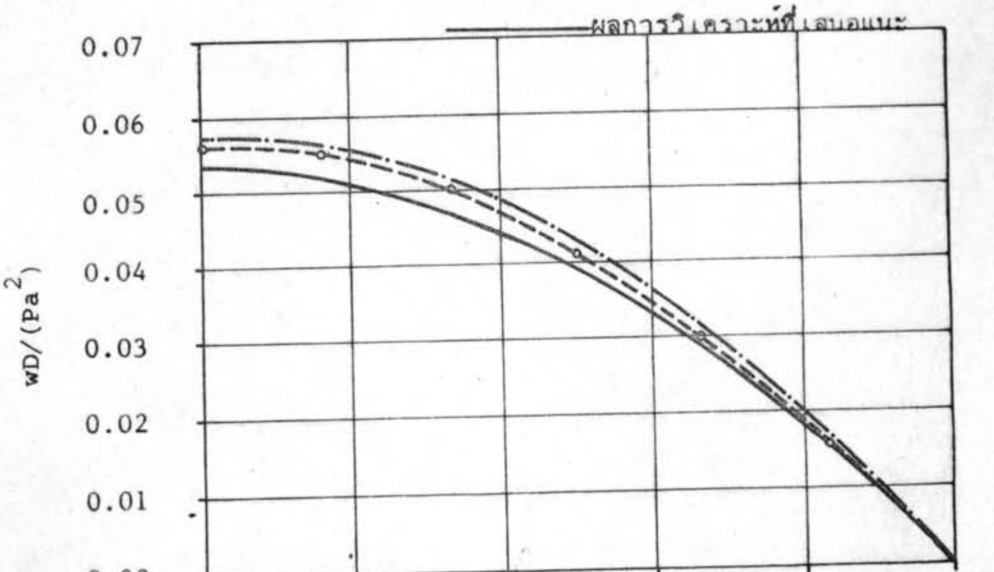
รูปที่ 8ก. กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าระยะโก่ง w ตามแนวแกน x/a

$(y/a = 0)$

-ผลจากการทดลอง

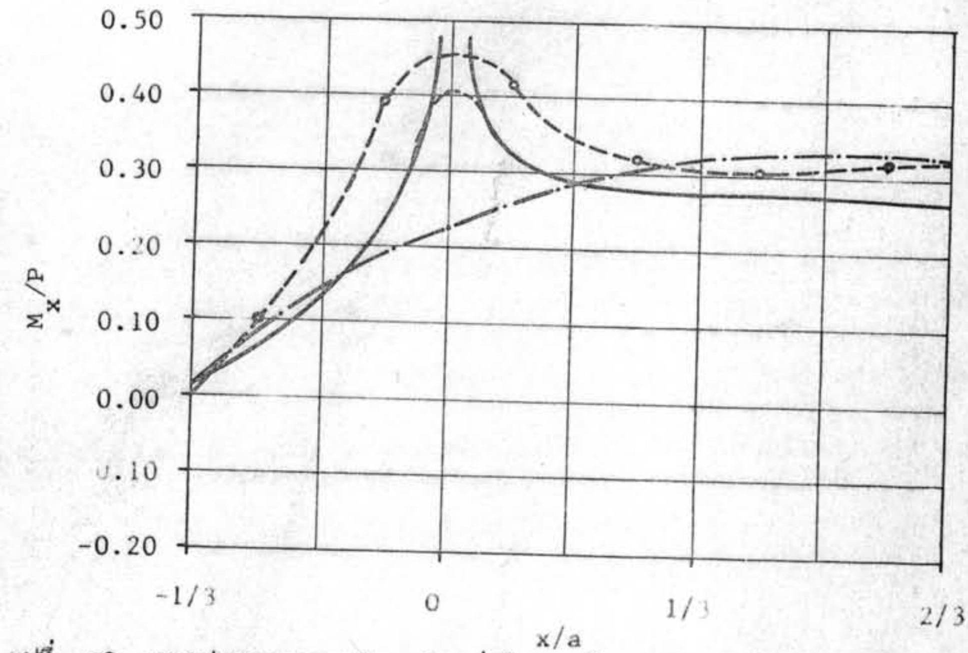
-ผลวิเคราะห์โดยสุรศักดิ์ พูลชัยนาวาสกุล (10)

-ผลการวิเคราะห์ที่เสนอแนะ



รูปที่ 8ข. กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าระยะโก่ง w ตามแนวขอบ

$(x/a = -1/3)$

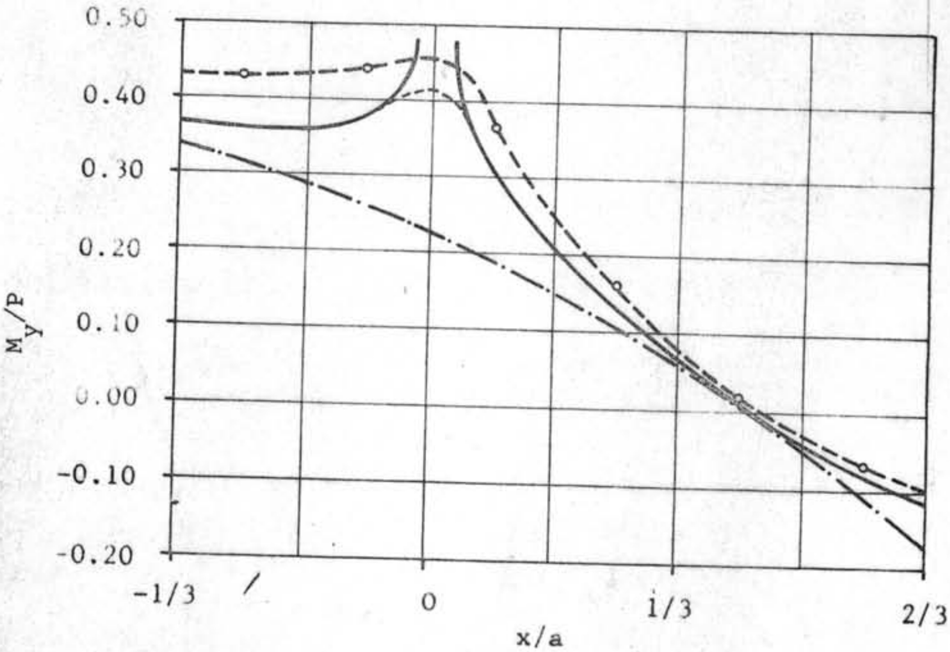


รูปที่ 9ก. กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์ดัด M_x ตามแนวแกน x/a (y/a = 0)

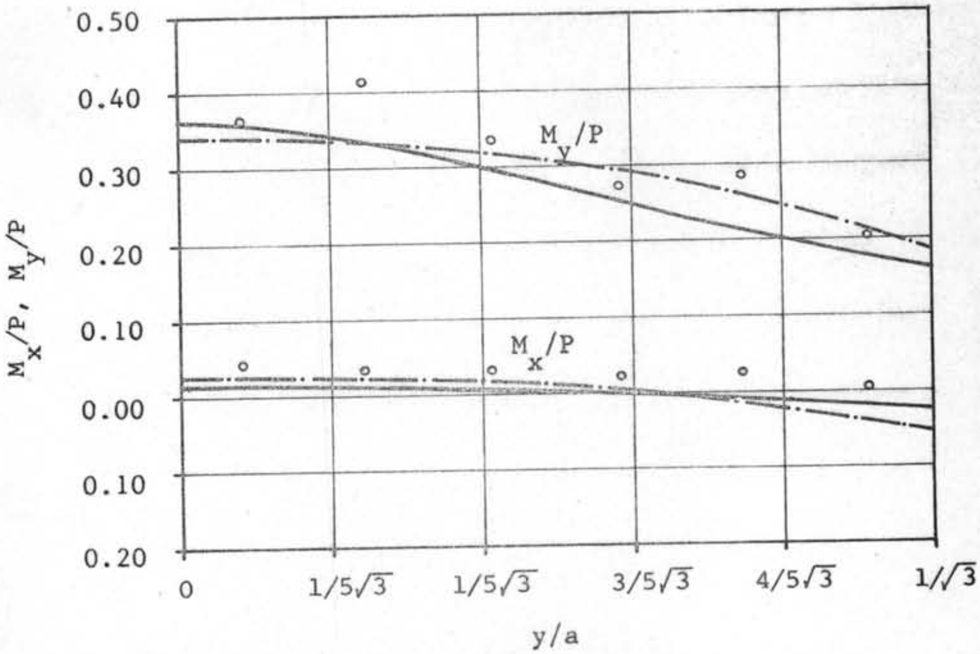
ผลจากการทดลอง

ผลวิเคราะห์โดยสุรศักดิ์ พูลชัยนาวาสกุล (10)

ผลการวิเคราะห์ที่เสนอแนะ



รูปที่ 9ข. กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์ดัด M_y ตามแนวแกน x/a (y/a = 0)



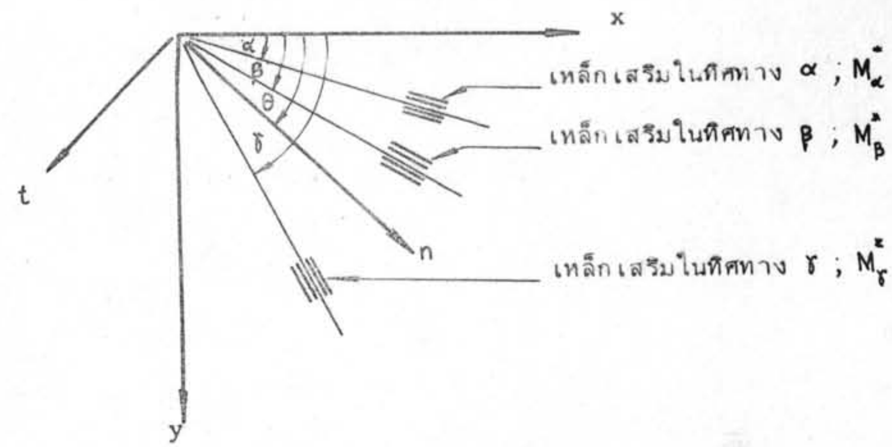
รูปที่ 9ค กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์ดัด M_x และ M_y

ตามแนวขอบ ($x/a = -1/3$)

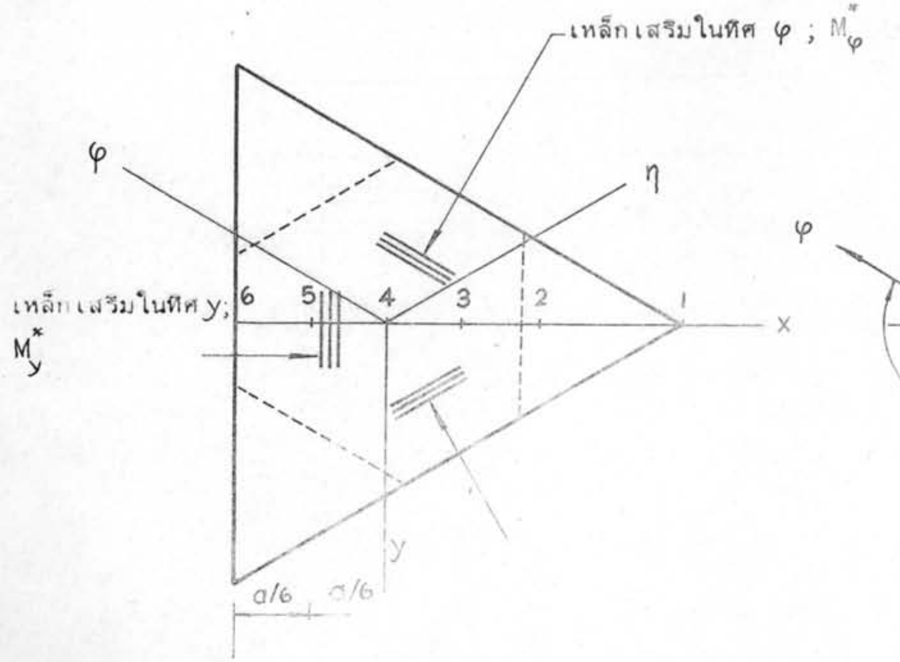
o ผลจากการทดลอง

—.—.— ผลวิเคราะห์โดยสุรศักดิ์ พูลชัยนาวาสกุล (10)

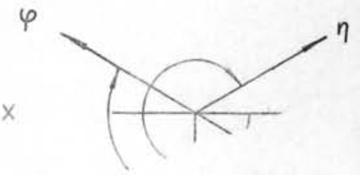
——— ผลการวิเคราะห์ที่เสนอแนะ



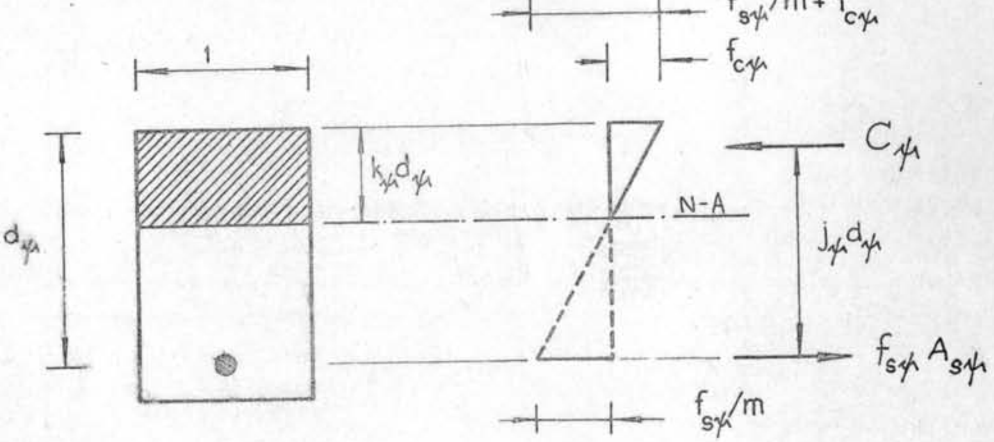
รูปที่ 10. เหล็กเสริมสามทิศทาง



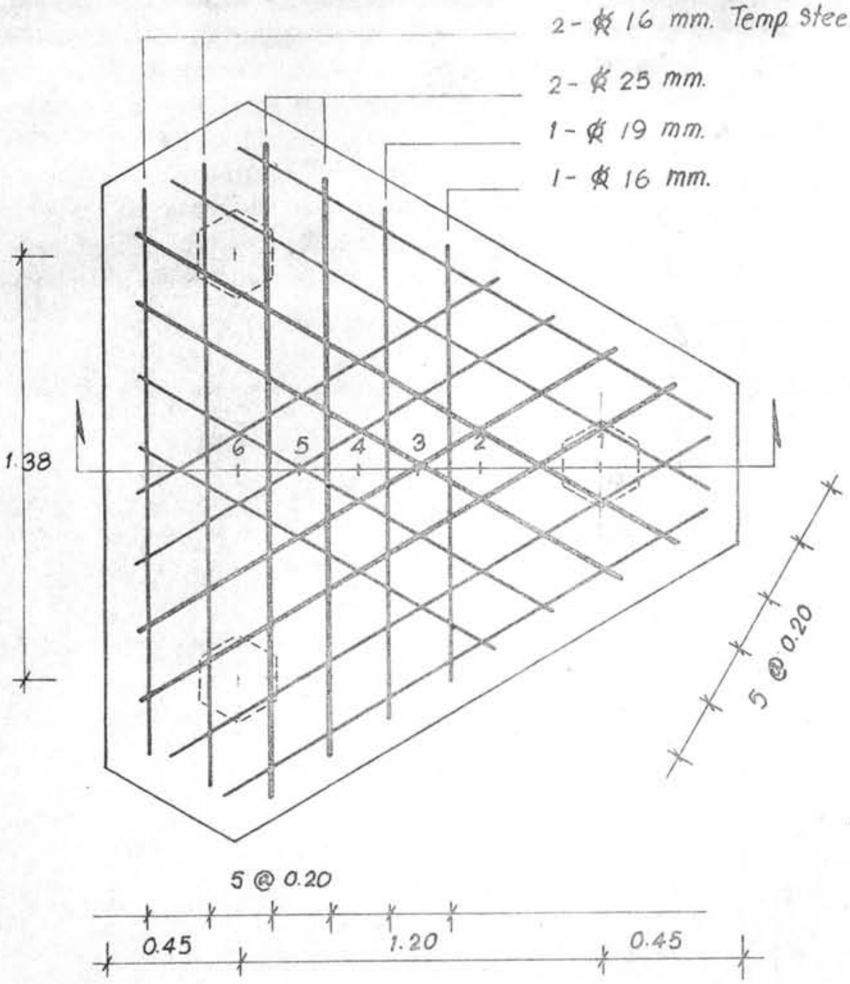
เหล็กเสริมในทิศ φ ; M^*_φ
φ
η
เหล็กเสริมในทิศ y;
M^*_y
6
5
4
3
2
1
x
y
a/6
a/6



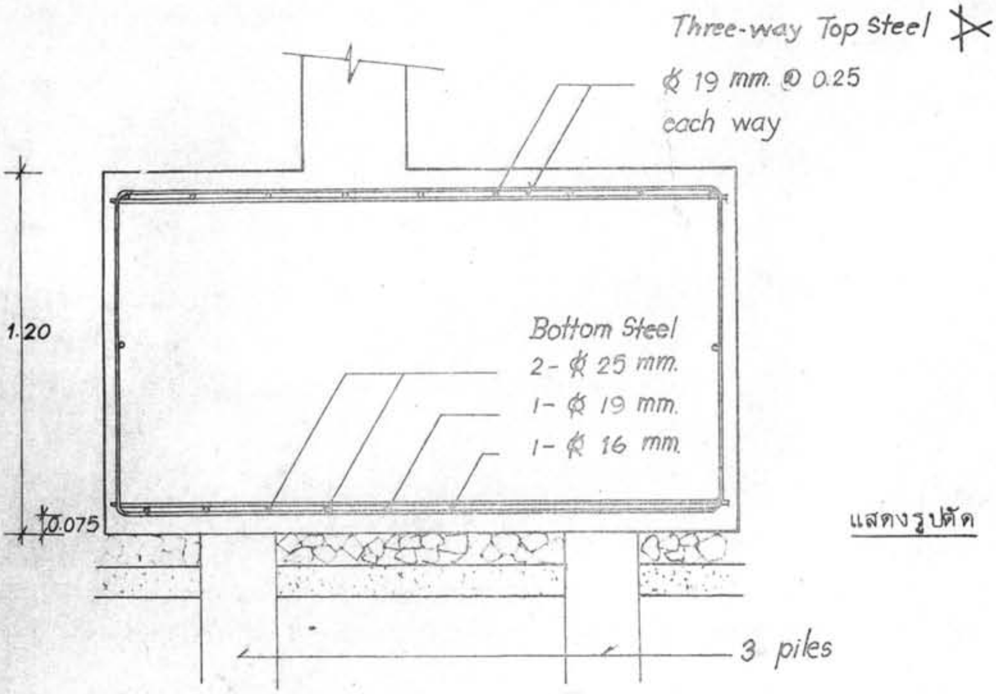
φ
η



รูปที่ 13 สามเหลี่ยมของแรงสำหรับหน้าตัดลึก

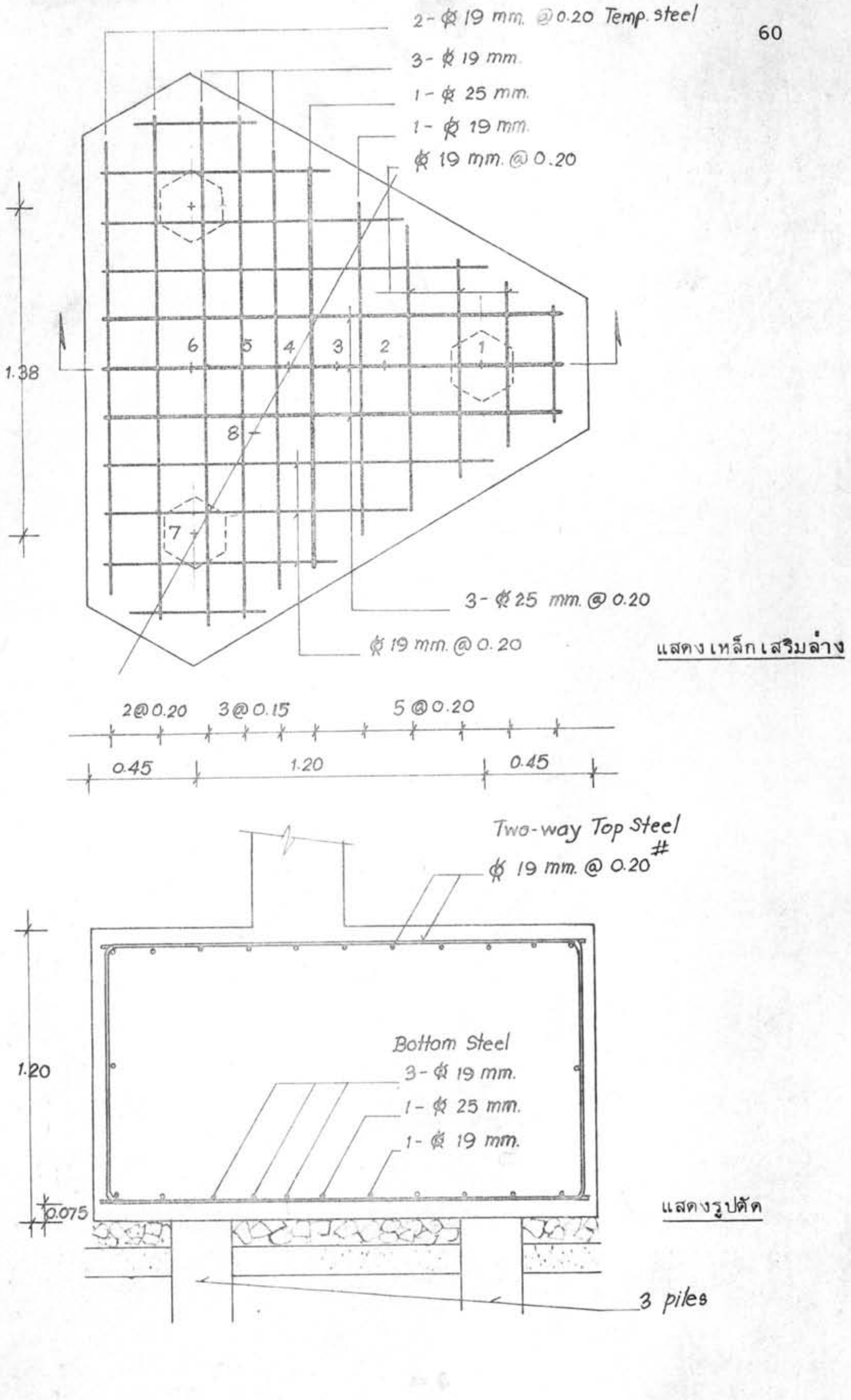


แสดงเหล็กเสริมล่าง



แสดงรูปตัด

รูปที่ 14 รายละเอียดการเสริมเหล็กสามทางสำหรับฐานรากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รองรับด้วยเสาเข็ม 3 ต้นที่มุม



รูปที่ 15 รายละเอียดการเสริมเหล็กสองทางสำหรับฐานรากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รองรับด้วยเสาเข็ม 3 ต้นที่มุม

ประวัติผู้เขียน

นายประณต สุริยะ เกิดเมื่อวันที่ 26 สิงหาคม 2495 ที่จังหวัดหนองคาย สำเร็จปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา จากจุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2517 ปัจจุบันปฏิบัติราชการในตำแหน่งนักวิชาการขนส่ง ประจำสำนักงานคณะกรรมการจัดระบบการจราจรทางบก สำนักนโยบายและแผนมหาดไทย กระทรวงมหาดไทย.