บทที่ 2
วิธีการวิเคราะห์

2.1 ข้อสมมุติฐานเบื้องต้น

ดังแสดงในรูปที่ 1 (ก) แผ่นวงแหวนซึ่งมีรัศมีที่ขอบใน a และรัศมีที่ขอบนอก b ความหนาเป็น t มีคานขอบทั้งขอบในและขอบนอก และมีแรงกระทำ P เฉพาะที่ขอบนอกเท่านั้น ในการวิเคราะห์จะตั้งสมมุติฐานต่อไปนี้

2.1.1 ข้อสมมุติฐานของแผ่นวงแหวน

ก. แผ่นวงแหวนเป็นแผ่นวงแหวนบาง นั่นคือ b-a มีค่ามากกว่า t มาก

ข. แผ่นวงแหวนเป็นวัสดุที่ไอโซทรอปิค และมีเนื้อเดียวกันโดยสม่ำเสมอ (isotropic and homogeneous material) และเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke's law)

ค. การเคาะเป็นแบบอีลาสติค (elastic buckling) นั่นคือหน่วยแรง (stress) จากแรงวิกฤติมีค่าน้อยกว่าหน่วยแรงที่จุดอีลาสติค (elastic limit)

2.1.2 ข้อสมมุติฐานของคานขอบ

ก. แกนใดแกนหนึ่งของแกนประธานทั้งสองของหน้าตัดคานขอบ (axes of principal moment of inertia) ตั้งฉากกับระนาบกึ่งกลาง (middle plane) ของแผ่นวงแหวน

ข. การถ่ายแรง (transfer of forces) ระหว่างคานกับแผ่นวงแหวนกระทำในระนาบของแกนของคานขอบ

ค. ตัวคานขอบไม่เกิดการเคาะในขณะรับแรงกระทำ

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำกับระยะเคลื่อนของคานขอบ

จากแผ่นวงแหวนเสริมคานขอบ ซึ่งคานขอบวางอยู่บนคมมีด ดังแสดงในรูปที่ 1 (ข) เมื่อพิจารณาแรงกระทำในทิศบวกดังแสดงในรูปที่ 1(ค) จะได้ว่าคานขอบนอกรับแรงอัดสู่ศูนย์กลางในแนวรัศมีมีค่าเท่ากับ $P + N_o$ และคานขอบในได้รับแรงดึงหนีศูนย์กลางใน

แนวรัศมีมีค่าเท่ากับ N_i โดยที่ N_i , N_o เป็นแรงต่อหน่วยความยาวของเส้นรอบวงที่เกิดขึ้นระหว่างคานขอบในและคานขอบนอกกับแผ่นวงแหวนตามลำดับ

จากรูปที่ 2 (ก) แรง N_i ที่กระทำกับคานขอบในรัศมี a จะทำให้เกิดแรงดึงในแกนของคานขอบมีค่า $N_i a$ ดังแสดงในรูปที่ 2 (ข) ดังนั้นจะได้ความเค้น (strain) จากความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเค้น (Hooke's law) ที่คานขอบในดังนี้

$$\epsilon_i = \frac{N_i a}{A_i E_i} \qquad \text{.....................(1 ก)}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับคานขอบซึ่งมีรัศมี b และแรงอัดเข้าสู่ศูนย์กลาง $P + N_o$ จะได้ดังนี้

$$\epsilon_o = -\frac{(P + N_o)b}{A_o E_o} \qquad \text{.....................(1 ข)}$$

โดยที่ ϵ_i, ϵ_o = ความเค้นในแนวเส้นรอบวงของคานขอบในและขอบนอกตามลำดับ มีค่าเป็นบวกเมื่อเป็นความเค้นยืด (tensile strain)

A_i,A_o = พื้นที่หน้าตัดของคานขอบในและคานขอบนอกตามลำดับ

E_i,E_o = โมดูลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity) ของคานขอบในและขอบนอกตามลำดับ

จากรูปที่ 3 เมื่อคานขอบในยืดขยายออกไปสม่ำเสมอ เนื่องจากแรงดึง N_i จากรัศมี a เป็นรัศมีใหม่ซึ่งระยะเคลื่อนที่เพิ่มขึ้นในแนวรัศมีนี้ให้เท่ากับ u_i ดังนั้นความเค้นในแนวเส้นรอบวงที่เกิดขึ้นจะมีความสัมพันธ์กับระยะเคลื่อนดังนี้

$$\epsilon_i = \frac{(a + u_i)d\theta - ad\theta}{ad\theta} = \frac{u_i}{a} \qquad \text{...............(2 ก)}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับคานขอบนอกซึ่งมีรัศมี b ระยะเคลื่อนเท่ากับ u_o จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\epsilon_o = \frac{u_o}{b} \qquad \text{...............(2 ข)}$$

โดยการแทนสมการ (2 ก) และ (2 ค) ลงในสมการ (1 ก) และ (1 ข) ตามลำดับ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง N_i, N_o และ u_i , u_o ดังนี้

$$u_i = \frac{N_i a^2}{A_i E_i} \qquad \text{...............(3 ก)}$$

$$u_o = -\frac{(P+N_o)b^2}{A_o E_o} \qquad \text{...............(3 ข)}$$

2.3 สมการพื้นฐานเพื่อการวิเคราะห์แผ่นวงแหวน

2.3.1 สมการสมดุลย์เมมเบรน (Membrane Equilibrium)

ในพิกัดโพลาร์ (polar coordinate) พิจารณาชิ้นส่วนเล็ก ๆ abcd ดังแสดงในรูปที่ 4 (ก) ซึ่งตัดมาจากแผ่นวงแหวนที่มีลักษณะสมมาตรรอบแกน เมื่อถือว่าไม่มีบอดี้ฟอส (body forces) สมการสมดุลย์เมมเบรนในแนวเส้นรอบวงเป็นศูนย์โดยอัตโนมัติ และได้สมการสมดุลย์เมมเบรน[14, 15] ในแนวรัศมีดังนี้

$$N_{r,r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0 \qquad \text{...............(4)}$$

เมื่อเครื่องหมาย $,_r$ หมายถึงอนุพันธ์หรืออนุพันธ์พาร์เชียล (differentiation or partial differentiation) โดยเปรียบเทียบกับตัวแปร r

ที่ซึ่ง N_r = แรงดันในแนวรัศมีต่อหน่วยความยาวเส้นรอบวงของแผ่นวงแหวน

N_θ = แรงดันในแนวเส้นรอบวงต่อหน่วยความยาวเส้นรัศมีของแผ่นวงแหวน

r = รัศมีของแผ่นวงแหวน

N_r และ N_θ จะสอดคล้องกับสมการสมดุลย์ (4) เสมอ ถ้ากำหนดให้อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$N_r = \frac{1}{r}\,\phi_{,r} \qquad \text{...............(5 ก)}$$

$$N_\theta = \phi_{,rr} \qquad \text{...............(5ข)}$$

ฟังก์ชั่น ϕ เรียกว่า สเตรสฟังก์ชั่น (stress function) ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของรัศมี r

2.3.2 สมการความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเค้น

จากทฤษฎีอีลาสติค (theory of elasticity) ตามกฎของฮุคในกรณีปัญหาเป็นแบบเพลนสเตรส (plane stress problem) เมื่อหน่วยแรงในแนวรัศมีและในแนวเส้นรอบวง มีค่าเท่ากับ $\frac{N_r}{t}$ และ $\frac{N_\theta}{t}$ ตามลำดับ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเค้นดังนี้

$$\epsilon_r = \frac{1}{Et}\,(N_r - \nu N_\theta) \qquad \text{...............(6 ก)}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{Et}\,(N_\theta - \nu N_r) \qquad \text{...............(6 ข)}$$

ที่ซึ่ง $\epsilon_r, \epsilon_\theta$ = ความเค้นในแนวรัศมีและในแนวเส้นรอบวงของแผ่นวงแหวน

ν = อัตราส่วนพัวซอง (Poisson's ratio)

E = โมดูลัสยืดหยุ่นของแผ่นวงแหวน

2.3.3 สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับระยะเคลื่อน

เนื่องจากแผ่นวงแหวนรับแรงกระทำในลักษณะสมมาตรรอบแกน ระยะเคลื่อนในแนวเส้นรอบวงจะเป็นศูนย์ และความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับระยะเคลื่อนในแนวรัศมีจะเป็นดังนี้

$$\epsilon_r = u_{r},_r \qquad \text{..............(7 ก)}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \qquad \text{..............(7 ข)}$$

ที่ซึ่ง u_r = ระยะเคลื่อนในแนวรัศมีของแผ่นวงแหวน

2.3.4 สมการแห่งความสอดคล้อง (Compatibility Equation)

เมื่อพิจารณาสมการทั้งหมดซึ่งควบคุมพฤติกรรมของแผ่นวงแหวนอันได้แก่สมการแห่งความสมดุลย์ตามสมการ (4) ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเค้นตามสมการ (6ก) และ (6ข) และสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับระยะเคลื่อนตามสมการ (7ก) และ (7ข) จะเห็นว่ามีตัวแปรทั้งหมด 5 ตัว ในจำนวนสมการที่เท่ากัน ในการแก้ปัญหาจำเป็นจะต้องลดสมการและตัวแปรลงมาเหลือเพียงชุดเดียว ซึ่งกระทำได้โดยตรง เนื่องจากว่าสมการเหล่านี้แสดงความสัมพันธ์กันระหว่างตัวแปรต่าง ๆ สิ่งที่จะต้องคำนึงถึงในการลดจำนวนสมการ และตัวแปรก็คือเงื่อนไขต่าง ๆ ที่จำเป็นเพื่อทำให้ได้คำตอบเดียว (unique) และอาจจะสร้างสมการเพียงชุดเดียวได้หลายประเภท ขึ้นอยู่กับชุดของตัวแปรที่จะเลือกพิจารณาหาคำตอบ ในที่นี้พิจารณาหน่วยแรงเป็นชุดของตัวแปร จากการที่เราเลือกหน่วยแรงเป็นชุดของตัวแปรนี้ เมื่อพิจารณาสมการ (7ก) และ (7ข) จะเห็นว่าสมการทั้งสองมีตัวแปรไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวคือ u_r ดังนั้นจึงจำเป็นจะต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมให้กับความเค้น เพื่อที่จะทำให้แน่ใจได้ว่าคำตอบของ u_r ที่หามาได้จากทั้งสองสมการสามารถปรับให้เป็นคำตอบเดียวกันได้ เงื่อนไขที่ว่านี้ก็คือเงื่อนไขแห่งความสอดคล้อง (compatibility condition) ซึ่งอยู่ในรูปของความเค้นดังนี้

$$r\,\epsilon_{\theta},_r + \epsilon_\theta - \epsilon_r = 0 \qquad \text{.............(8)}$$

โดยการแทนสมการ (6 ก) และ (6 ข) ลงในสมการ (8) จะได้สมการอยู่ในรูปของแรงดัน N_r, N_θ และเมื่อใช้สมการ (5 ก) และ (5 ข) ซึ่งเป็นสมการของแรงดันที่อยู่ในรูปของสเตรสฟังก์ชั่น และมีความสอดคล้องกับสมการแห่งความสมดุลย์ (4) เข้าช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาทำให้ได้สมการแห่งความสอดคล้องในรูปของสเตรสฟังก์ชั่นดังนี้

$$\phi_{,rrrr} + \frac{2}{r}\phi_{,rrr} - \frac{1}{r^2}\phi_{,rr} + \frac{1}{r^3}\phi_{,r} = 0 \quad \text{.........(9)}$$

สมการที่ (9) นี้ก็คือสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลแบบออยเลอ (Euler's equation) มีค่าตอบทั่วไปคือ

$$\phi = C_o + Pb^2C_1 \ln r + C_2\, r^2 \ln r + C_3\frac{Pr^2}{2} \quad \text{.........(10)}$$

ที่ซึ่ง C_o, C_1, C_2 และ C_3 เป็นตัวคงที่ของอินติเกรต (constants of integration) ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขของความต่อเนื่องระหว่างคาน กับแผ่นวงแหวน แทนค่า ϕ จากสมการ (10) ลงในสมการ (5ก) และ (5ข) จะได้ว่า

$$N_r = \frac{Pb^2C_1}{r^2} + C_2(1 + 2\ln r) + C_3P \quad \text{.........(11ก)}$$

$$N_\theta = \frac{-Pb^2C_1}{r^2} + C_2(3 + 2\ln r) + C_3P \quad \text{.........(11ข)}$$

สมการที่ (11ก) และ (11ข) ที่ได้ก็คือสมการของแรงดันที่เกิดขึ้นในแผ่นวงแหวนนั่นเอง

2.4 สมการระยะเคลื่อนของแผ่นวงแหวน

โดยการแทนค่าแรงดันที่ได้จากสมการ (11ก) และ (11ข) ลงในสมการ (6ก) และ (6ข) จะได้ความเค้น ϵ_r และ ϵ_θ แล้วแทนลงในสมการ (7ก) และ (7ข) ตามลำดับ โดยการอินติเกรตแต่ละสมการจะได้ตามลำดับดังนี้

$$u_r = \frac{1}{Et}\left[-\frac{Pb^2}{r}(1+\nu)C_1 + \left\{ 2(1-\nu)(r \ln r) - (1+\nu)r \right\} C_2 + P(1-\nu)rC_3\right] + C_4$$

$$u_r = \frac{1}{Et}\left[-\frac{Pb^2}{r}(1+\nu)C_1 + \left\{2(1-\nu)(r - \ln r) + (3-\nu)r \right\}C_2 + P(1-\nu)rC_3 \right]$$

ที่ซึ่ง C_4 คือตัวคงที่ของอินติเกรตที่ไม่ขึ้นกับรัศมี r

พิจารณาระยะเคลื่อน u_r จากทั้งสองสมการจะเห็นว่ามันจะปรับให้เป็นคำตอบเดียวกันได้ เมื่อ C_2 และ C_4 ต่างต้องเท่ากับศูนย์ ดังนั้นระยะเคลื่อนของแผ่นวงแหวนที่สอดคล้องกันคือ

$$u_r = \frac{P}{Et}\left[-\frac{b^2}{r}(1+\nu)C_1 + (1-\nu)rC_3\right] \qquad \text{..........(12)}$$

2.5 สมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ P กับแรงดันในแผ่นวงแหวน

จากสมการ (11ก) และ (11ข) เมื่อ $C_2 = 0$ จะได้สมการของแรงดันดังนี้

$$N_r = \left(\frac{b^2C_1}{r^2} + C_3\right)P \qquad \text{..........(13 ก)}$$

$$N_\theta = \left(-\frac{b^2C_1}{r^2} + C_3\right)P \qquad \text{..........(13 ข)}$$

เพื่อที่จะหาค่าคงที่ C_1 และ C_3 จะใช้เงื่อนไขความสมดุลย์ของแรงและความต่อเนื่องระหว่างคานขอบกับแผ่นวงแหวนดังนี้

$$N_r\Big|_{r=a} = N_i \qquad \text{..........(14 ก)}$$

$$N_r\Big|_{r=b} = N_o \qquad \text{..........(14 ข)}$$

$$u_r\Big|_{r=a} = u_i \qquad \text{..........(15 ก)}$$

$$u_r\Big|_{r=b} = u_o \qquad \text{..........(15 ข)}$$

จากเงื่อนไขสมการดังกล่าวนี้ เมื่อแทนด้วยสมการ (3ก), (3ข), (12) และ (13ก) จะได้ดังนี้

$$\left(\frac{b^2C_1}{a^2} + C_3\right)P = N_i$$

$$(C_1 + C_3)P = N_o$$

$$\frac{P}{Et}\left[-\frac{b^2}{a}(1+\nu)C_1 + (1-\nu)aC_3\right] = \frac{N_i a^2}{A_i E_i}$$

$$\frac{P}{Et}\left[-b(1+\nu)C_1 + (1-\nu)bC_3\right] = \frac{-(P+N_o)b^2}{A_o E_o}$$

จากการแก้สมการทั้ง 4 นี้จะได้คำตอบตัวคงที่ C_1 และ C_3 ดังนี้

$$C_1 = \frac{\left\{1 - (1-\nu)\,\alpha_i\right\}\,k^2}{(1-k^2)+\left\{(1-\nu)k^2+(1+\nu)\right\}\alpha_i + \left\{(1+\nu)k^2+(1-\nu)\right\}\alpha_o + (1-\nu^2)(1-k^2)\alpha_i\alpha_o} \quad \ldots(16ก)$$

$$C_3 = \frac{-\left\{1+(1+\nu)\,\alpha_i\right\}}{(1+k^2)+\left\{(1-\nu)k^2+(1+\nu)\right\}\alpha_i + \left\{(1+\nu)k^2+(1-\nu)\right\}\alpha_o + (1-\nu^2)(1-k^2)\alpha_i\alpha_o} \quad \ldots(16ข)$$

เมื่อ $\alpha_i = \dfrac{A_i E_i}{atE}$

$\alpha_o = \dfrac{A_o E_o}{btE}$

ที่ซึ่ง α_i, α_o = อัตราส่วนของความเกร็งเชิงแกนของคานขอบต่อแผ่นวงแหวนที่ขอบในและขอบนอกตามลำดับ

$k = \dfrac{a}{b}$ = อัตราส่วนของรัศมีขอบในต่อขอบนอกของแผ่นวงแหวน

เมื่อนำค่าคงที่ C_1 และ C_3 แทนลงในสมการ (13ก) และ (13ข) ก็จะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ P กับแรงดันในแผ่นวงแหวน

2.6 สมการควบคุมกลไกของการเคาะ

จากทฤษฎีของแผ่นบาง (theory of plates) เมื่อมีแรงกระทำภายนอกในแนวตั้งฉากกับแผ่น q และแรงในแนวระนาบ N_r และ N_θ กระทำพร้อม ๆ กัน ตัดชิ้นส่วนเล็ก ๆ abcd จากแผ่นวงแหวนมาพิจารณาตามรูปที่ 4 (ก) จะได้สมการสมดุลย์เมมเบรนตามสมการ (4) และจากรูปที่ 4 (ข) เมื่อชิ้นส่วนเล็ก ๆ เกิดการโก่งงอ w จะได้แรงในแนวแกน z ซึ่งกระทำบนด้าน ad และ bc ดังนี้

$$N_r w_{,rr}\, r dr d\theta + \frac{N_r}{r} w_{,r}\, r dr d\theta + N_{r,r}\, w_{,r}\, r dr d\theta$$

และในทำนองเดียวกับแรงในแนวแกน z บนด้าน ab และ dc ดังนี้

$$\frac{N_\theta}{r^2} w_{,\theta\theta}\; r dr d\theta$$

ดังนั้นเมื่อรวมแรงในแนวแกน z ทั้งหมดที่ได้บนด้านทั้งสี่ด้านของชิ้นส่วนเล็ก ๆ abcd จะได้ดังนี้

$$\left(N_r w_{,rr} + \frac{N_r}{r} w_{,r} + N_{r,r} w_{,r} + \frac{N_\theta}{r^2} w_{,\theta\theta}\right) r dr d\theta$$

เมื่อใช้สมการสมดุลย์ (4) โดยการจัดเทอมข้างบนใหม่จะได้แรงในแนวแกน z ทั้งหมดดังนี้

$$\left[N_r w_{,rr} + N_\theta\left(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}\right)\right] r dr d\theta$$

โดยการรวมแรงกระทำภายนอก $qrdrd\theta$ ซึ่งตั้งฉากกับแผ่นบนชิ้นส่วนเล็ก ๆ กับแรงในแนวแกน z ทั้งหมดเข้าด้วยกันและใช้สมการดิฟเฟอร์เรนเชียลของระยะโก่งของแผ่นบาง(16) (differential equation of the deflection surface) สำหรับแรงกระทำตั้งฉากกับแผ่นก็จะได้

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D}\left[q + N_r w_{,rr} + N_\theta \left(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}\right)\right] \quad \ldots\ldots(17)$$

ในกรณีที่แรงกระทำซึ่งตั้งฉากกับแผ่นนี้มีค่า $q = 0$ สมการข้างบนจะลดรูปเป็น

$$D\nabla^4 w - N_r w_{,rr} - N_\theta \left(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(18)$$

เมื่อ $\nabla^2 w = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}$

ที่ซึ่ง w = ระยะโก่งของแผ่นวงแหวน

$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ = ความเกร็งเชิงดัดของแผ่นวงแหวน

จากรูปที่ 1 (ก) ถ้าแผ่นวงแหวนไม่เกิดการโก่งงอจะได้ว่า $w = 0$ ฉะนั้นจะมีเพียงสมการ (13ก) และ (13ข) ซึ่งให้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ P กับแรงดันในแผ่นวงแหวนดังต่อไปนี้

$$N_r^o = \left(\frac{b^2 C_1}{r^2} + C_3\right) P \quad \ldots\ldots\ldots(19\text{ก})$$

$$N_\theta^o = \left(\frac{-b^2 C_1}{r^2} + C_3\right) P \quad \ldots\ldots\ldots(19\text{ข})$$

ให้เครื่องหมาย " o " และ " ' " หมายถึงค่าก่อนที่จะเกิดการโก่งงอและค่าที่เพิ่มขึ้นเล็กน้อยเพื่อให้เกิดการโก่งงอตามลำดับ ฉะนั้นเมื่อแผ่นวงแหวนตามรูปที่ 1 (ก) เริ่มเกิดการโก่งงอจะได้ว่า

$$w = w^o + w' = w' \; ; \; \because w^o = 0$$

$$N_r = N_r^o + N_r'$$

$$N_\theta = N_\theta^o + N_\theta'$$

ดังนั้นแทนค่าสมการข้างบนนี้ลงในสมการ (18) จะได้สมการดิฟเฟอร์เรนเชียลของระยะโก่งของแผ่นวงแหวนดังนี้

$$D\nabla^4 w - (N_r^o + N_r^{'}) w_{,rr} - (N_\theta^o + N_\theta^{'})(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}) = 0 \quad \text{.....} (20)$$

เมื่อ w ในสมการ (20) ก็คือ w' นั่นเอง

เนื่องจากว่าเราพิจารณาการเคาะในช่วงอีลาสติคของแผ่นวงแหวนตามสมมุติฐานข้อ 2.1.1 ค และคานขอบไม่เกิดการเคาะตามสมมุติฐานข้อ 2.1.2 ค ดังนั้นแผ่นวงแหวนจะเกิดการเคาะ กล่าวคือที่จุดวิกฤติเมื่อเพิ่มแรงกระทำแม้เพียงเล็กน้อยก็จะทำให้เกิดการเคาะทันที ฉะนั้นค่าของ $N_r^{'}$ และ $N_\theta^{'}$ อันเนื่องมาจากแรงที่เพิ่มขึ้นเพื่อให้เกิดการเคาะจึงมีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบค่าอื่นในสมการ (20) ดังนั้นจึงสามารถจะละทิ้งค่าเพิ่มขึ้นเล็กน้อยนี้ได้ และสมการก็จะลดรูปลงเหลือดังนี้

$$D\nabla^4 w - N_r^o w_{,rr} - N_\theta^o (\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}) = 0$$

และเมื่อแทนค่า N_r^o และ N_θ^o จากสมการ (19ก) และ (19ข) ลงในสมการข้างบนนี้จะได้ดังนี้

$$D\nabla^4 w - (\frac{b^2 C_1}{r^2} + C_3) P w_{,rr} + (\frac{b^2 C_1}{r^2} - C_3) P (\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}) = 0$$

เมื่อให้

$$\bar{P} = \frac{Pb^2}{D} \quad \text{....} (21)$$

แล้วจัดรูปใหม่จะได้ดังนี้

$$\nabla^4 w + (\frac{b^2 C_1}{r^2} - C_3)\frac{\bar{P}}{b^2} \nabla^2 w - \frac{2C_1 \bar{P}}{r^2} w_{,rr} = 0 \quad \text{....} (22)$$

สมการ (22) นี้เป็นสมการควบคุมกลไกของการเคาะ (governing diffential equation หรือเขียนย่อ ๆ ว่า GDE)

2.7 การหาค่าแรงวิกฤติ

สมการควบคุมกลไกของการเคาะ สมการ (22) ที่ได้เป็นสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลแบบพาร์เชียลอันดับสี่ที่มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามอยู่ในฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระ r การจะหาคำตอบที่แท้จริง (exact solution) ทำได้ยาก ดังนั้นจึงใช้วิธีของกาเลอคินหาคำตอบโดยประมาณดังนี้ สมมุติให้การโก่งงอของแผ่นวงแหวนในขณะเกิดการเคาะอยู่ในรูป

$$w = F(r)\cos(n\theta), \quad n = 0,1,2,\text{........} \quad \text{....} (23)$$

ที่ซึ่ง n เป็นจำนวนคลื่นที่เกิดขึ้นในแนวเส้นรอบวงในขณะเกิดการเคาะ $F(r)$ เป็น

ฟังก์ชั่นของ r ที่ยังไม่รู้ค่าตอบ แทนค่า w ลงในสมการ (22) ก็จะลดรูปของสมการลงเป็นสมการดิฟเฟอร์เรนเชียลแบบธรรมดาอันดับสี่ดังนี้

$$F(r)_{,rrrr} + \frac{2}{r} F(r)_{,rrr} - \left(\frac{C_3\bar{P}}{b^2} + \frac{1 + 2n^2 + C_1\bar{P}}{r^2}\right) F(r)_{,rr}$$

$$-\left(\frac{C_3\bar{P}}{b^2 r} - \frac{1+2n^2+C_1\bar{P}}{r^3}\right)F(r)_{,r} + \left(\frac{n^2C_3\bar{P}}{b^2r^2} + \frac{n^4-n^2C_1\bar{P}-4n^2}{r^4}\right)F(r) = 0 \cdot\cdot(24)$$

ในขั้นตอนต่อไปนี้จะเลือกรูปของ $F(r)$ ดังนี้

$$F(r) = \sum_{j=1,2,3,.....}^{m} \phi_j f_j(r) \qquad ......(25)$$

โดย ϕ_j เป็นตัวคงที่ที่ไม่รู้ค่า และ $f_j(r)$ เป็นฟังก์ชั่นของรัศมี r ที่เมื่อแทนลงในสมการของการโก่งงอ (23) แล้วจะสอดคล้องกับสภาพการรองรับที่ขอบทั้งหมด เงื่อนไขของชุดตัวคงที่ ϕ_j ,$j = 1,2,3,.........,m$ คือ เมื่อแทนค่าลงในสมการควบคุมกลไกของการเคาะ (22) แล้วมีความคลาดเคลื่อนรวมในอาณาบริเวณของแผ่นวงแหวนน้อยที่สุด ซึ่งเงื่อนไขดังกล่าวจะเกิดขึ้นต่อเมื่อ (ดูภาคผนวก ก)

$$\int_a^b \left\{ \text{GDE of } F(r) \right\} . f_i(r)\, dr = 0, \quad i = 1,2,3,.....,m$$

หรือ

$$\sum_{j=1,2,3,..}^{m} \phi_j \int_a^b \left\{ \text{GDE of } f_j(r) \right\} . f_i(r)\, dr = 0, \quad i = 1,2,3,.....,m..(26)$$

ชุดของสมการ (26) นี้ประกอบด้วยสมการ m สมการในตัวไม่รู้ค่า m ตัว แต่เนื่องจากเป็นสมการแบบโฮโมจีเนียส โดยที่เทอมทางขวามือของสมการทุกสมการเป็นศูนย์ ดังนั้นค่าตอบของ ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3,...., ϕ_m จะเป็นศูนย์ทั้งหมด ซึ่งเป็นค่าตอบที่ไม่มีค่าสำคัญ (trivial solution) นั่นคือไม่มีการเคาะเกิดขึ้นเว้นเสียแต่ว่าดีเทอร์มินันท์ (determinant) ของแมทหริกของสัมประสิทธิ์ (coefficient matrix) ของสมการ (26) เป็นศูนย์ ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ทำให้เกิดการเคาะและหาค่าแรงวิกฤติออกมาได้

2.8 รูปร่างของการโก่งงอ (Shape Function)

ในการศึกษาครั้งนี้จะสมมุติฟังก์ชั่น $f_j(r)$ ให้อยู่ในรูป

$$f_j(r) = \frac{1}{j^4} \left\{ \frac{1}{\pi} \sin j\pi \left(\frac{r-a}{b-a}\right) + A_j\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^3 + B_j\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2 + F_j\left(\frac{r-a}{b-a}\right) + H_j \right\} ..(27)$$

เมื่อ $j = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots,m$

ซึ่งได้มาจากการเลียนแบบรูปร่างของการโก่งงอของคานเมื่อรับแรงกระทำที่กระจายในรูปของฟังก์ชั่น $\sin j\pi(\frac{r-a}{b-a})$ โดยที่ A_j, B_j, F_j และ H_j เป็นตัวคงที่ที่ยังไม่รู้ค่า ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับสภาพการรองรับที่ขอบ

2.9 เงื่อนไขของสภาพการรองรับ (Boundary Conditions)

พิจารณารูปที่5 (ก) ให้ s เป็นจุดใด ๆ บนหน้าตัดคานขอบมีระยะห่างตั้งฉากจากแกนสะเทิน nn เป็น z_1, จุดG เป็นจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัดคาน และแขน sG ทำมุมกับเส้นดิ่งเป็นมุม ω_1 เมื่อคานขอบได้รับโมเมนต์ดัด ให้จุด s เคลื่อนที่ไปอยู่ที่จุด s' ซึ่งมีระยะห่างตั้งฉากจากแกนสะเทินเป็น z_2 แขน s'G ทำมุมกับเส้นดิ่งเป็นมุม ω_2 ดังนั้นมุมที่เปลี่ยนจากมุม ω_1 ไปเป็นมุม ω_2 ถ้ามุมที่เปลี่ยนไปเป็นมุมเล็ก ๆ ω ระยะ z_1 และ z_2 จะเกือบเท่ากัน กล่าวคือ z_1 และ z_2 เท่ากับ z แล้วระยะเคลื่อนที่ระหว่าง s กับ s' ในแนวรัศมีของคานขอบจะเป็น ωz ซึ่งจะก่อให้เกิดความเค้นในแนวเส้นรอบวงมีค่าเท่ากับ $\frac{\omega z}{R}$ จากความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงที่ตั้งฉากกับหน้าตัดของคานขอบที่ระยะ z จากแกนสะเทินกับความเค้น จะได้ดังนี้

$$\sigma = \frac{E\omega z}{R} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

ที่ซึ่ง σ = หน่วยแรงที่ตั้งฉากกับหน้าตัดของคานขอบ

R = รัศมีของคานขอบวัดจากจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัดคาน

E = โมดูลัสยืดหยุ่นของคานขอบ

ดังนั้น โมเมนต์ดัดบนหน้าตัดคานจะหาได้จากการอินติเกรต ผลคูณของหน่วยแรงที่กระทำต่อเนื้อที่เล็ก ๆ dA กับระยะ z ดังนี้

$$M = \int_{Area} \sigma z\, dA = \frac{E\omega}{R}\int_{Area} z^2 dA$$

หรือ
$$M = \frac{EI\omega}{R}$$

หรือ
$$\omega = \frac{MR}{EI} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(28\text{ ก})$$

ที่ซึ่ง I = โมเมนต์เฉื่อยบนหน้าตัดคานขอบ

ถ้าใช้สมการ (28ก) กับคานขอบในและขอบนอกตามลำดับจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและมุมเอียงของเส้นดิ่ง ω บนหน้าตัดคานดังนี้

$$\omega_i = \frac{M_i a}{E_i I_i} \qquad \text{.................(29ก)}$$

$$\omega_o = \frac{M_o b}{E_o I_o} \qquad \text{.................(29ข)}$$

ที่ซึ่ง M_i, M_o = โมเมนต์ดัดบนหน้าตัดคานขอบในและขอบนอกตามลำดับ

จากรูปที่ 5 (ข) พิจารณาสมดุลย์ของแรงคู่ควบที่กระทำต่อชิ้นส่วนของคานขอบรัศมี b ที่ซึ่ง $M_r|_{r=b}$ เป็นโมเมนต์ดัดที่ขอบของแผ่นวงแหวน จะได้ดังนี้

$$M_r\Big|_{r=b} = -\frac{M_o}{b} \qquad \text{.................(30ก)}$$

ในทำนองเดียวกันที่ขอบในรัศมี a จะได้ดังนี้

$$M_r\Big|_{r=a} = \frac{M_i}{a} \qquad \text{.................(30ข)}$$

พิจารณาความต่อเนื่องระหว่างแผ่นวงแหวนกับคานขอบตามรูปที่ 1 (ก) เมื่อแผ่นวงแหวนเกิดการเคาะค่าความลาดเอียงของแผ่นวงแหวนจะเท่ากับมุมเอียงของเส้นดิ่งของคานขอบดังนี้

$$w_{,r}\Big|_{r=a} = -\omega_i \qquad \text{.................(31ก)}$$

$$w_{,r}\Big|_{r=b} = -\omega_o \qquad \text{.................(31ข)}$$

โดยการแทนสมการ (29ก), (29ข), (30ก) และ (30ข) ลงในสมการ (31ก) และ (31ข) จะได้ดังนี้

$$-\frac{E_i I_i}{a^2}(w_{,r})\Big|_{r=a} = M_r\Big|_{r=a}$$

$$\frac{E_o I_o}{b^2}(w_{,r})\Big|_{r=b} = M_r\Big|_{r=b}$$

จากสมการทั้งสองสามารถเขียนให้อยู่ในรูปใหม่ดังนี้

$$-\frac{D}{a}\,\chi_i(w_{,r})\Big|_{r=a} = M_r\Big|_{r=a} \qquad \text{.................(32ก)}$$

$$\frac{D}{b}\,\chi_o(w_{,r})\Big|_{r=b} = M_r\Big|_{r=b} \qquad \text{.................(32ข)}$$

เมื่อ
$$\chi_i = \frac{E_i I_i}{aD}$$
$$\chi_o = \frac{E_o I_o}{bD}$$

ที่ซึ่ง χ_i, χ_o = อัตราส่วนของความเกร็งเชิงดัดของคานขอบต่อแผ่นวงแหวนที่ขอบใน และขอบนอกตามลำดับ

จากทฤษฎีของแผ่นบาง โมเมนต์ดัด M_r ในแผ่นบางซึ่งอยู่ในพิกัดโพลาร์ สามารถแสดงอยู่ในรูปความสัมพันธ์กับระยะโก่งงอ w ของแผ่นวงแหวนดังนี้

$$M_r\Big|_{r=a} = -D\left(w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} + \frac{\nu}{r^2} w_{,\theta\theta}\right)\Big|_{r=a}$$
$$M_r\Big|_{r=b} = -D\left(w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} + \frac{\nu}{r^2} w_{,\theta\theta}\right)\Big|_{r=b}$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าโมเมนต์ดัด M_r จากสมการข้างบนลงในสมการ (32ก) และ (32ข) จะได้ดังนี้คือ

$$\frac{\chi_i}{a}(w_{,r})\Big|_{r=a} = \left(w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} + \frac{\nu}{r^2} w_{,\theta\theta}\right)\Big|_{r=a} \quad \ldots. (33)$$

$$-\frac{\chi_o}{b}(w_{,r})\Big|_{r=b} = \left(w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} + \frac{\nu}{r^2} w_{,\theta\theta}\right)\Big|_{r=b} \quad \ldots. (34)$$

สมการ (33) และ (34) เป็นสมการเงื่อนไขแห่งความต่อเนื่องของความลาดเอียงระหว่างแผ่นวงแหวนกับคานขอบ เงื่อนไขอีกสองประการที่การโก่งงอของแผ่นวงแหวนจะต้องมีความสอดคล้อง คือ ระยะโก่งงอ w ที่ขอบในและขอบนอกของแผ่นวงแหวนเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$w\Big|_{r=a} = 0 \quad \ldots. (35)$$

$$w\Big|_{r=b} = 0 \quad \ldots. (36)$$

2.10 คำตอบของแรงวิกฤติ

โดยการพิจารณาแทน $f_j(r)$ จากสมการ (27) ลงในสมการการโก่งงอของแผ่นวงแหวนดังสมการ (25) และ (23) จะได้สมการการโก่งงอซึ่งเมื่อนำไปแทนลงในสมการ (33), (34), (35) และ (36) และแก้สมการหาค่าตัวคงที่ที่ไม่ทราบค่า

A_j, B_j, F_j และ H_j จะได้คำตอบดังนี้

$$A_j = \left[-(\nu - X_i)(\nu + X_o)(1-k)^2(\cos j\pi + 1) - 2(\nu - X_i)(1-k) + 2(\nu + X_o)(1-k)k\cos j\pi\right] \cdot \frac{j}{T} \quad \ldots\ldots(37)$$

$$B_j = \left[(\nu - X_i)(\nu + X_o)(1-k)^2(\cos j\pi + 2) + 6(\nu - X_i)(1-k)\right] \cdot \frac{j}{T} \quad \ldots\ldots(38)$$

$$F_j = \left[-(\nu - X_i)(\nu + X_o)(1-k)^2 - 4(\nu - X_i)(1-k) - 2(\nu + X_o)(1-k)k\cos j\pi\right] \cdot \frac{j}{T} \quad \ldots\ldots(39)$$

$$H_j = 0$$

เมื่อ $T = (\nu - X_i)(\nu + X_o)(1-k)^2 + 4(\nu - X_i)(1-k) - 4(\nu + X_o)(1-k)k - 12k \quad \ldots\ldots(40)$

เมื่อนำค่า A_j, B_j, F_j, และ H_j ที่หาได้ข้างบนแทนลงในสมการ (27) ก็จะได้คำตอบของ $f_j(r)$ ซึ่งเมื่อนำไปใช้ในสมการ (25) และ (23) จะได้ฟังก์ชั่นของการโก่งงอ w มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดที่ขอบของแผ่นวงแหวน

ในการคำนวณครั้งนี้จะใช้ชุดของค่า A_j, B_j, F_j เพียงชุดเดียวคือให้ $j=1$ เท่านั้น ดังนั้นค่า A_j, B_j และ F_j จะลดรูปลงเหลือดังนี้

$$A_1 = -\left\{(\nu - X_i) + (\nu + X_o)k\right\} \cdot 2\frac{(1-k)}{T} \quad \ldots\ldots(41)$$

$$B_1 = \left\{6 + (\nu + X_o)(1-k)\right\} \cdot \frac{(\nu - X_i)(1-k)}{T} \quad \ldots\ldots(42)$$

$$F_1 = -\left\{(\nu - X_i)(\nu + X_o)(1-k) + 4(\nu - X_i) - 2(\nu + X_o)k\right\} \cdot \frac{(1-k)}{T} \quad \ldots\ldots(43)$$

และสมการ (27) เมื่อ $j = 1$ จะลดรูปลงเหลือดังนี้คือ

$$f_1(r) = \frac{1}{\pi}\sin\pi\left(\frac{r-a}{b-a}\right) + A_1\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^3 + B_1\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2 + F_1\left(\frac{r-a}{b-a}\right) \quad \ldots\ldots(44)$$

หรือจัดตัวแปรรัศมี r ให้อยู่ในรูปตัวแปรใหม่คือ $r = b\rho$ จะได้ $f_1(r)$ ใหม่ดังนี้

$$f_1(b\rho) = \frac{1}{\pi}\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) + A_1\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3 + B_1\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2 + F_1\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) \quad \ldots\ldots(45)$$

เมื่อนำค่า $f_1(b\rho)$ จากสมการ (45) แทนลงในสมการ (25) ที่ซึ่งให้ $j = 1$ จะได้ค่า $F(b\rho)$ และเมื่อนำค่า $F(b\rho)$ และอนุพันธ์ของมันเทียบกับตัวแปร ρ ไปแทนในสมการ (24) ซึ่งได้เปลี่ยนตัวแปรรัศมี r ให้อยู่ในรูปของตัวแปร ρ แล้ว จะได้สมการควบคุมกลไกของการเดาะในรูปของตัวแปรใหม่ดังนี้

$$\frac{\psi_1}{b^4}\left[\frac{\pi^3}{(1-k)^4}\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + \frac{2}{\rho}\left\{\frac{-\pi^2}{(1-k)^3}\cos\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + \frac{6A_1}{(1-k)^2}\right\}\right.$$

$$-\left\{C_3\overline{P} + \frac{1+2n^2+C_1\overline{P}}{\rho^2}\right\}\left\{\frac{-\pi}{(1-k)^2}\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + \frac{6A_1(\rho-k)}{(1-k)^3} + \frac{2B_1}{(1-k)^2}\right\}$$

$$-\left\{\frac{C_3\overline{P}}{\rho} - \frac{1+2n^2+C_1\overline{P}}{\rho^3}\right\}\left\{\frac{1}{(1-k)}\cos\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + \frac{3A_1(\rho-k)^2}{(1-k)^3} + \frac{2B_1(\rho-k)}{(1-k)^2} + \frac{F_1}{(1-k)}\right\}$$

$$\left.+\left\{\frac{n^2C_3\overline{P}}{\rho^2} + \frac{n^4-n^2C_1\overline{P}-4n^2}{\rho^4}\right\}\left\{\frac{1}{\pi}\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + A_1(\frac{\rho-k}{1-k})^3 + B_1(\frac{\rho-k}{1-k})^2 + F_1(\frac{\rho-k}{1-k})\right\}\right] = 0 \quad ..(46)$$

เมื่อแทนสมการ (46) ลงไปในเงื่อนไขของกาเลอคินตามสมการ (26) โดยให้ $\iota = 1$ เท่านั้นจะได้ว่า

$$\frac{\psi_1}{b^4}\int_k^1\left[\frac{\pi^3}{(1-k)^4}\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + \frac{2}{\rho}\left\{\frac{-\pi^2}{(1-k)^3}\cos\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + \frac{6A_1}{(1-k)^3}\right\}\right.$$

$$-\left\{C_3\overline{P} + \frac{1+2n^2+C_1\overline{P}}{\rho^2}\right\}\left\{\frac{-\pi}{(1-k)^2}\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + \frac{6A_1(\rho-k)}{(1-k)^3} + \frac{2B_1}{(1-k)^2}\right\}$$

$$-\left\{\frac{C_3\overline{P}}{\rho} - \frac{1+2n^2+C_1\overline{P}}{\rho^3}\right\}\left\{\frac{1}{1-k}\cos\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + \frac{3A_1(\rho-k)^2}{(1-k)^3} + \frac{2B_1(\rho-k)}{(1-k)^2} + \frac{F_1}{(1-k)}\right\}$$

$$\left.+\left\{\frac{n^2C_3\overline{P}}{\rho^2} + \frac{n^4-n^2C_1\overline{P}-4n^2}{\rho^4}\right\}\left\{\frac{1}{\pi}\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + A_1(\frac{\rho-k}{1-k})^3 + B_1(\frac{\rho-k}{1-k})^2 + F_1(\frac{\rho-k}{1-k})\right\}\right]$$

$$\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + A_1(\frac{\rho-k}{1-k})^3 + B_1(\frac{\rho-k}{1-k})^2 + F_1(\frac{\rho-k}{1-k})\right] b\,d\rho = 0 \quad ......(47)$$

หรือโดยการกระจายเทอมต่าง ๆ ก็จะได้

$$\psi_1\int_k^1\left[\frac{\pi^2}{(1-k)^4}\sin^2\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + \frac{\pi^3}{(1-k)^4}\left\{A_1(\frac{\rho-k}{1-k})^3\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) + B_1(\frac{\rho-k}{1-k})^2\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k})\right.\right.$$

$$\left.+F_1(\frac{\rho-k}{1-k})\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k})\right\} - \frac{2\pi}{(1-k)^3}\frac{1}{\rho}\sin\pi(\frac{\rho-k}{1-k})\cos\pi(\frac{\rho-k}{1-k}) - \frac{2\pi^2}{(1-k)^3}\left\{\frac{A_1}{\rho}(\frac{\rho-k}{1-k})^3\cos\pi(\frac{\rho-k}{1-k})\right.$$

$$+\frac{B_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\cos\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)+\frac{F_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\cos\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\Big\}+\frac{12}{(1-k)^3}\Big\{\frac{A_1}{\pi\rho}\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)+\frac{A_1^2}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3$$

$$+\frac{A_1B_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2+\frac{A_1F_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\Big\}+\frac{C_3\overline{P}}{(1-k)^2}\sin^2\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)+\frac{C_3\overline{P}}{(1-k)^2}\Big\{A_1\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$+B_1\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)+F_1\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\Big\}-\frac{6C_3\overline{P}A_1}{\pi(1-k)^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$-\frac{6C_3\overline{P}}{(1-k)^2}\Big\{A_1^2\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4+A_1B_1\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3+A_1F_1\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\Big\}-\frac{2C_3\overline{P}B_1}{\pi(1-k)^2}\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$-\frac{2C_3\overline{P}}{(1-k)^2}\Big\{A_1B_1\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3+B_1^2\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2+B_1F_1\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\Big\}+\frac{(1+2n^2+C_1\overline{P})}{(1-k)^2}\frac{1}{\rho^2}\sin^2\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$+\frac{(1+2n^2+C_1\overline{P})\pi}{(1-k)^2}\Big\{\frac{A_1}{}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)+\frac{B_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)+\frac{F_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\Big\}$$

$$-6\frac{(1+2n^2+C\overline{P})}{\pi(1-k)^2}\frac{A_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)-6\frac{(1+2n^2C_1\overline{P})}{(1-k)^2}\Big\{\frac{A_1^2}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4+\frac{A_1B_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3$$

$$+\frac{A_1F_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\Big\}-\frac{2(1+2n^2+C_1\overline{P})}{\pi(1-k)^2}\frac{B_1}{\rho^2}\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)-\frac{2(1+2n^2+C_1\overline{P})}{(1-k)^2}\Big\{\frac{A_1B_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3$$

$$+\frac{B_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2+\frac{B_1F_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\Big\}-\frac{C_3\overline{P}}{(1-k)\pi}\frac{1}{\rho}\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\cos\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)-\frac{C_3\overline{P}}{(1-k)}\Big\{\frac{A_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\cos\pi\Big($$

$$+\frac{B_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\cos\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)+\frac{F_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\cos\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\Big\}-\frac{3C_3\overline{P}}{(1-k)\pi}\frac{A_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$-\frac{3C_3\overline{P}}{(1-k)}\Big\{\frac{A_1^2}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^5+\frac{A_1B_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4+\frac{A_1F_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\Big\}-\frac{2C_3\overline{P}}{(1-k)\pi}\frac{B_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$-\frac{2C_3\overline{P}}{(1-k)}\Big\{\frac{A_1B_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4+\frac{B_1^2}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3+\frac{B_1F_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\Big\}-\frac{C_3\overline{P}}{(1-k)\pi}\frac{F_1}{\rho}\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$-\frac{C_3\overline{P}}{(1-k)}\Big\{\frac{A_1F_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3+\frac{B_1F_1}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2+\frac{F_1^2}{\rho}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\Big\}+\frac{(1+2n^2+C_1\overline{P})}{(1-k)\pi}\frac{1}{\rho^3}\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\cos\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$+ \frac{(1+2n^2+C_1\bar{P})}{(1-k)} \left\{ \frac{A_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3 \cos\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) + \frac{B_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2 \cos\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) + \frac{F_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\cos\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) \right\}$$

$$- \frac{3(1+2n^2+C_1\bar{P})}{(1-k)\pi}\frac{A_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2 \sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) + \frac{3(1+2n^2+C_1\bar{P})}{(1-k)}\left\{ \frac{A_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^5 + \frac{A_1B_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4\right.$$

$$\left.+ \frac{A_1F_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3 \right\} + \frac{2(1+2n^2+C_1\bar{P})}{(1-k)\pi}\frac{B_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) + \frac{(1+2n^2+C_1\bar{P})}{(1-k)}\left\{\frac{A_1E_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\right.$$

$$\left.+ \frac{B_1F_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2 + \frac{F_1^2}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\right\} + \frac{n^2C_3\bar{P}}{\pi^2}\frac{1}{\rho^2}\sin^2\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) + \frac{n^2C_3\bar{P}}{\pi}\left\{\frac{A_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\right.$$

$$\left.+ \frac{B_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) + \frac{F_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\right\} + \frac{n^2C_3\bar{P}}{\pi}\frac{A_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$+ n^2C_3\bar{P}\left\{\frac{A_1^2}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^6 + \frac{A_1B_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^5 + \frac{A_1F_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4\right\} + \frac{n^2C_3\bar{P}}{\pi}\frac{B_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$+ n^2C_3\bar{P}\left\{\frac{A_1B_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^5 + \frac{B_1^2}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4 + \frac{B_1F_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\right\} + \frac{n^2C_3\bar{P}}{\pi}\frac{F_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$+ n^2C_3\bar{P}\left\{\frac{A_1F_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4 + \frac{B_1F_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3 + \frac{F_1^2}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\right\} + \frac{(n^4-n^2C_1\bar{P}-4n^2)}{\pi^2}\frac{1}{\rho^4}\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$+ \frac{(n^4-n^2C_1\bar{P}-4n^2)}{\pi}\left\{\frac{A_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) + \frac{B_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2 + \frac{F_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\right\}$$

$$+ \frac{(n^4-n^2C_1\bar{P}-4n^2)}{\pi}\frac{A_1}{\rho^2}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) + (n^4-n^2C_1\bar{P}-4n^2)\left\{\frac{A_1^2}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^6 + \frac{A_1B_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^5\right.$$

$$\left.+ \frac{A_1F_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4\right\} + \frac{(n^4-n^2C_1\bar{P}-4n^2)}{\pi}\frac{B_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right) + (n^4-n^2C_1\bar{P}-4n^2)\left\{\frac{A_1B_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^5\right.$$

$$\left.+ \frac{B_1^2}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4 + \frac{B_1F_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3\right\} + \frac{(n^4-n^2C_1\bar{P}-4n^2)}{\pi}\frac{F_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$+ (n^4-n^2C_1\bar{P}-4n^2)\left\{\frac{A_1F_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4 + \frac{B_1F_1}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3 + \frac{F_1^2}{\rho^4}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\right\} + \frac{(1+2n^2+C_1\bar{P})}{(1-k)\pi}\frac{F_1}{\rho^3}\sin\pi\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)$$

$$+ \frac{2(1+2n^2+C_1\bar{P})}{(1-k)}\left\{\frac{A_1B_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^4 + \frac{B_1^2}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^3 + \frac{B_1F_1}{\rho^3}\left(\frac{\rho-k}{1-k}\right)^2\right\}\Big]\, d\rho = 0 \quad ......(48)$$

พิจารณาสมการ (48) จะเห็นว่าอินติกรัลทั้งหมดของสมการนี้สามารถสรุปหาค่าได้ดังนี้ (23)

$$\int_k^1 \sin^n C\rho d\rho = \frac{-\sin^{n-1} C\rho \cos C\rho}{nC} + \frac{n-1}{n}\int_k^1 \sin^{n-2} C\rho\, d\rho$$

$$\int_k^1 \rho^n \sin C\rho\, d\rho = \frac{-\rho^n \cos C\rho}{C} + \frac{n}{C}\int_k^1 \rho^{n-1} \cos C\rho\, d\rho \ , \ n=1,2,3$$

$$\int_k^1 \rho^n \cos C\rho d\rho = \frac{\rho^n \sin C\rho}{C} - \frac{n}{C}\int_k^1 \rho^{n-1} \sin C\rho\, d\rho \ , \ n=1,2$$

$$\int_k^1 \rho^n d\rho = \begin{cases} \dfrac{\rho^{n+1}}{n+1} & , \ n=1,\pm 2,\pm ,3,\pm 4 \\ \ln\rho & , \ n=-1 \end{cases}$$

$$\int_k^1 \frac{\sin C\rho d\rho}{\rho^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)}\dfrac{\sin C\rho}{\rho^{n-1}} + \dfrac{C}{(n-1)}\displaystyle\int_k^1 \dfrac{\cos C\rho\, d\rho}{\rho^{n-1}} & , \ n=2,3,4 \\ C\rho - \dfrac{(C\rho)^3}{3.3!} + \dfrac{(C\rho)^5}{5.5!} - \dfrac{(C\rho)^7}{7.7!} + \cdots & , \ n=1 \end{cases}$$

$$\int_k^1 \frac{\cos C\rho d\rho}{\rho^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)}\dfrac{\cos C\rho}{\rho^{n-1}} \dfrac{-C}{(n-1)}\displaystyle\int_k^1 \dfrac{\sin C\rho d\rho}{\rho^{n-1}} & , \ n=2,3,4 \\ \ln\rho - \dfrac{(C\rho)^2}{2.2!} + \dfrac{(C\rho)^4}{4.4!} - \dfrac{(C\rho)^6}{6.6!} + \cdots & , \ n=1 \end{cases}$$

เมื่อ C คือตัวคงที่ใด ๆ ให้อินติเกรทสมการ (48) โดยใช้สูตรข้างบนจะได้ว่า

$$\psi_1 \left[\overline{P} \left\{ C_3W_3 + C_1W_4 + (C_3W_2 - C_1W_5)n^2 \right\} + \left\{ W_1 + (1+2n^2)W_4 + n^2(n^2-4)W_5 \right\} \right] = 0. \quad . \ .(49)$$

ที่ซึ่ง

$$W_1 = \frac{1}{(1-k)^3}\left[\frac{\pi^2}{2} - \pi Y_1 + \frac{12}{\pi}(1-k)^3 Z_3 Y_2 + 2\pi^2 Z_0 Y_3 - 2\pi^2 Z_0 \right.$$

$$+ \pi^2 (1+k)Z_1 - \pi^2 (1+k^2)Z_2 + \left\{\pi^2 (1+k^3) - 2(1+k)(1-k)^2\right\} Z_3$$

$$+ 4(1-k^3)(1-k)^3 Z_3^2 - 6(1-k^2)(1-k)^3 Z_2 Z_3 + 12(1-k)^3 Z_0 Z_3 \ln k\Big] \quad \ldots\ldots(50)$$

$$W_2 = \frac{Y_1}{\pi(1-k)} + \frac{2Z_1Y_2}{\pi} - \frac{2Z_0Y_3}{(1-k)} - \frac{4(1-k)}{\pi^2} Z_2 + \frac{2(1-k^2)Z_3}{\pi^2}$$

$$+ \frac{(1-k)}{k} Z_0^2 + (1-k) Z_1^2 + \frac{1}{3}(1-k^3) Z_2^2 + \frac{(1-k^5)}{5} Z_3^2 - 2(1-k)Z_0Z_2$$

$$- (1-k^2)Z_0Z_3 - (1-k^2)Z_1Z_2 + \frac{2}{3}(1-k^3)Z_1Z_3 - \frac{1}{2}(1-k^4)Z_2Z_3 + 2Z_0Z_1 \ln k \quad ..(51)$$

$$W_3 = \frac{1}{2(1-k)} - \frac{Y_1}{2\pi(1-k)} - \frac{Z_1Y_2}{\pi} - \frac{Z_0}{(1-k)}Y_3 - \frac{2}{(1-k)} Z_0 + \frac{(1+k)}{(1-k)} Z_1$$

$$+ \left\{\frac{10(1-k)}{\pi^2} + \frac{(1+k^3)}{(1-k)}\right\} Z_2 + \left\{\frac{(1+k^3)}{(1-k)} - \frac{13}{\pi^2}(1-k^2)\right\} Z_3 - (1-k) Z_1^2$$

$$- \frac{4}{3}(1-k^3)Z_2^2 - \frac{9}{5}(1-k^5)Z_3^2 - 4(1-k) Z_0Z_2 + \frac{9}{2}(1-k^2)Z_0Z_3$$

$$+ \frac{5}{2}(1-k^2)Z_1Z_2 - \frac{10}{3}(1-k^3)Z_1Z_3 + \frac{13}{4}(1-k^4)Z_2Z_3 - Z_0Z_1 \ln k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(52)$$

$$W_4 = \frac{1}{2k(1-k)} - \left\{\frac{3Z_3}{\pi} + \frac{Z_1}{2(1-k)^2}\right\} Y_2 - \left\{\frac{\pi^2 Z_0}{2(1-k)^3} + \frac{Z_2}{(1-k)}\right\} Y_3$$

$$- \frac{(1+k^2)}{2k^2(1-k)} Z_0 + \frac{3(1+k)}{2k(1-k)} Z_1 - \frac{2Z_2}{(1-k)} + \frac{(1+k)}{(1-k)} Z_3 + \frac{(1-k)}{k} Z_1^2$$

$$-(1-k^3)Z_3^2 - \frac{(1-k^2)}{k^2} Z_0Z_1 - 2(1-k)Z_1Z_3 + \frac{3}{2}(1-k^2) Z_2Z_3$$

$$+ \left\{Z_1Z_2 - 3Z_0Z_3\right\} \ln k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(53)$$

$$W_5 = \frac{1}{3k(1-k)} - \frac{2\pi Y_1}{3(1-k)^3} + \left\{\frac{2Z^3}{\pi} - \frac{\pi Z_1}{(1-k)^2}\right\} Y_2 - \left\{\frac{2Z_2}{(1-k)} - \frac{\pi^2 Z_0}{3(1-k)^3}\right\} Y_3$$

$$- \frac{(1+k^2)}{3k^2(1-k)} Z_0 + \frac{(1+k)}{2k(1-k)} Z_1 + \frac{(1-k^3)}{3k^3} Z_0^2 + \left(\frac{1-k}{k}\right) Z_1^2 + (1-k) Z_2^2$$

$$+ \frac{1}{3}(1-k^3)Z_3^2 - \frac{(1-k^2)}{k^2} Z_0Z_1 + \frac{2(1-k)}{k} Z_0Z_2 + 2(1-k)\, Z_1Z_3$$

$$- (1-k^2)Z_2Z_3 + \left\{ 2Z_0Z_3 + 2Z_1Z_2 \right\} \ln k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(54)$$

โดยที่

$$Z_0 = \frac{k^3A_1}{(1-k)^3} - \frac{k^2B_1}{(1-k)^2} + \frac{kF_1}{(1-k)}$$

$$Z_1 = \frac{3k^2A_1}{(1-k)^3} - \frac{2kB_1}{(1-k)^2} + \frac{F_1}{(1-k)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(55)$$

$$Z_2 = \frac{3kA_1}{(1-k)^3} - \frac{B_1}{(1-k)^2}$$

$$Z_3 = \frac{A_1}{(1-k)^3}$$

$$Y_1 = \left[2\pi - \frac{(2\pi)^3(1-k^3)}{3.3!(1-k)^3} + \frac{(2\pi)^5(1-k^5)}{5.5!\,(1-k)^5} - \frac{(2\pi)^7(1-k^7)}{7.7!\,(1-k)^7} + \ldots\right]\cos\left(\frac{2\pi k}{1-k}\right)$$

$$+ \left[\ln k + \frac{(2\pi)^2(1-k^2)}{2.2!\,(1-k)^2} - \frac{(2\pi)^4(1-k^4)}{4.4!\,(1-k)^4} + \frac{(2\pi)^6(1-k^6)}{6.6!\,(1-k)^6} - \ldots\right]\sin\left(\frac{2\pi k}{1-k}\right) \ldots(56)$$

$$Y_2 = \left[\pi - \frac{\pi^3(1-k^3)}{3.3!\,(1-k)^3} + \frac{\pi^5(1-k^5)}{5.5!(1-k)^5} - \frac{\pi^7(1-k^7)}{7.7!(1-k)^7} + \ldots\right]\cos\left(\frac{\pi k}{1-k}\right)$$

$$+ \left[\ln k + \frac{\pi^2(1-k^2)}{2.2!(1-k)^2} - \frac{\pi^4(1-k^4)}{4.4!(1-k)^4} + \frac{\pi^6(1-k^6)}{6.6!(1-k)^6} - \ldots\right]\sin\left(\frac{\pi k}{1-k}\right) \ldots(57)$$

$$Y_3 = \left[\pi - \frac{\pi^3(1-k^3)}{3.3!(1-k)^3} + \frac{\pi^5(1-k^5)}{5.5!(1-k)^5} - \frac{\pi^7(1-k^7)}{7.7!(1-k)^7} + \ldots\ldots\right]\sin\left(\frac{\pi k}{1-k}\right)$$

$$- \left[\ln k + \frac{\pi^2(1-k^2)}{2.2!(1-k)^2} - \frac{\pi^4(1-k^4)}{4.4!(1-k)^4} + \frac{\pi^6(1-k^6)}{6.6!(1-k)^6} - \ldots\right]\cos\left(\frac{\pi k}{1-k}\right) \ldots(58)$$

สมการ (49) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $\phi_1 = 0$ หรือ

$$\bar{P}\left\{C_3W_3 + C_1W_4 + (C_3W_2 - C_1W_5)n^2\right\} + \left\{W_1 + (1+2n^2)W_4 + n^2(n^2-4)W_5\right\} = 0 \quad \ldots(59)$$

จะเห็นได้ว่าถ้า $\phi_1 = 0$ ฟังก์ชันของการโก่ง w ก็จะเป็นศูนย์ ซึ่งหมายความว่าไม่มีการ

เดาะ ดังนั้นขณะเกิดการเดาะ ψ_1 ต้องไม่เท่ากับศูนย์ และสมการ (59) จะต้องเป็นจริง นั่นคือจะได้

$$\overline{P} = - \frac{\left\{ W_1+W_4+2(W_4-2W_5)n^2+W_5n^4 \right\}}{C_3W_3+C_1W_4+(C_3W_2-C_1W_5)n^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(60)$$

เมื่อ $\overline{P}=\frac{Pb^2}{D}$ ตามสมการ (21) เป็นตัวแปรของการเดาะ (buckling parameter) ส่วนเทอมในด้านขวามือของสมการ (60) มีค่าขึ้นอยู่กับค่า ν, k, χ_i, χ_o α_i และ α_o และแต่ละค่าของ n จาก 0,1,2,3,..........,n เมื่อแทนค่า W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, C_1 และ C_3 ตามสมการ (16 ก)(16 ข)(50),(51),(52),(53),(54),(55),(56),(57), และ (58) ลงไปก็จะได้รูปแบบของการเดาะเป็นคลื่นไปตามเส้นรอบวงของแผ่นวงแหวนเท่าจำนวนคลื่น n และได้ค่าแรงเดาะของรูปแบบของการเดาะที่จำนวนคลื่นนั้น ๆ กล่าวคือ เมื่อ n=0 ก็จะได้ตัวแปรของการเดาะเป็น $\overline{P}_o$ หรือได้ค่าแรงเดาะเป็น $P_o = \frac{\overline{P}_o D}{b^2}$ ในทำนองเดียวกันที่ n=1,2,3,.......,n ก็จะได้ตัวแปรของการเดาะ $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$............,$\overline{P}_n$ หรือค่าของแรงเดาะ P_1, P_2, P_3,......,P_n ตามลำดับนั่นเอง ค่าของตัวแปรของการเดาะระหว่างค่า $\overline{P}_o$ ถึง $\overline{P}_n$ นี้จะมีค่า ๆ หนึ่งที่น้อยที่สุด ค่าตัวแปรของการเดาะที่น้อยที่สุดจากสมการ (60) นี้จะเขียนได้ว่า

$$\overline{P}_{cr} = \min. \overline{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(61)$$

และจากสมการ (21) สามารถเขียนได้ว่า

$$\overline{P}_{cr} = \frac{P_{cr} b^2}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(62)$$

ซึ่ง P_{cr} ในสมการดังกล่าวเรียกว่า "แรงวิกฤติ" (critical load) นั่นเอง

ในการคำนวณหาค่าตัวแปรของการเดาะที่น้อยที่สุดหรือแรงวิกฤตินี้ได้อาศัยเครื่องจักรกลประมวลผล (computer) ช่วยในการคำนวณคำตอบตัวเลข ซึ่งใช้เครื่องจักรกล IBM 370/138 ที่ศูนย์คอมพิวเตอร์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย คำตอบตัวเลขที่ได้จากการคำนวณโดยเครื่องจักรกลประมวลผลนี้ได้แสดงไว้ในรูปของตาราง และกราฟในบทที่ 3 แล้ว