บทที่ ๒

ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับการใช้แอนาลอกคอมพิวเตอร์

แอนาลอกคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือที่สร้างขึ้น เพื่อเลียนแบบการทำงาน (Simulation) โดยการสร้างแบบ (Model) ให้เหมือนหรือคล้ายกับระบบที่เป็นจริง ผลลัพธ์ที่ออกมาจากแอนาลอกคอมพิวเตอร์เป็นค่าที่ต่อเนื่อง ซึ่งอาจจะแสดงออกมาเป็นกราฟหรือรูปบนจอของออสซิลโลสโคป (Oscilloscope)

แอนาลอกคอมพิวเตอร์ส่วนมากจะสร้างขึ้นมาเพื่อใช้ในวัตถุประสงค์เฉพาะหรือกิจการงานพิเศษเฉพาะอย่างเช่น การจำลองเครื่องบิน การติดตามทิศทางขีปนาวุธ การควบคุมกระบวนการผลิตของโรงงาน นับว่าเป็นเครื่องมือที่สร้างขึ้นมาเพื่อใช้แก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่งโดยเฉพาะ อย่างไรก็ตามแอนาลอกคอมพิวเตอร์ที่สร้างมาเพื่อใช้ในวัตถุประสงค์โดยทั่วไปนั้น ก็มีใช้อยู่ด้วยเหมือนกัน โดยสร้างขึ้นเพื่อแก้ปัญหาใด ๆ ก็ตามที่สามารถแสดงผลในรูปของสมการคณิตศาสตร์ แอนาลอกคอมพิวเตอร์จะช่วยแก้ปัญหาได้โดยการเขียนปัญหานั้นให้ออกมาในรูปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลเสียก่อน หรืออาจพูดได้อีกอย่างหนึ่งว่า แอนาลอกคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือที่ใช้แก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลนั่นเอง ดังนั้นบางครั้งจึงมักเรียกแอนาลอกคอมพิวเตอร์ว่า "เครื่องวิเคราะห์สมการดิฟเฟอเรนเชียล" (Differential analyzer)

หัวข้อสำคัญเกี่ยวกับการคำนวณด้วยแอนาลอกคอมพิวเตอร์ คือ

(๑) วงจรการคำนวณแบบเชิงเส้น (Linear Computing Circuits)

(๒) การทำไทม์สเกลและการทำแอมปลิจูดสเกล (Time Scaling and Amplitude Scaling)

๒.๑ วงจรการคำนวณแบบเชิงเส้น[1]

วงจรต่าง ๆ ทางอิเล็คทรอนิคของแอนาลอกคอมพิวเตอร์ แบ่งออกเป็น ๒ พวก คือ พวกที่ทำงานแบบเชิงเส้นวงจรเหล่านี้ได้แก่ซัมเมอร์ (Summer) อินเวอตเตอร์ (Inverter) ดิฟเฟอเรนชิเอเตอร์ (Differentiator) อินทิเกรเตอร์ (Integrator) และโพเทนชิโอมิเตอร์ (Potentiometer) และพวกทำงานแบบเชิงโค้ง (Nonlinear operation) วงจรเหล่านี้ได้แก่มัลติพลายเออ (Multiplier) และฟังก์ชั่นเจนเนอเรเตอร์ต่าง ๆ (Function generators) เนื่องจากเครื่องยูนิเวอซัลรีแอคเตอร์ซิมูเลเตอร์(Universal Reactor Simulator) ทำงานแบบเชิงเส้น จึงจะขอกล่าวเฉพาะรายละเอียดของวงจรแบบนี้เท่านั้น

๒.๑.๑โอเปอเรชันนัลแอมปลิไฟเออ (Operational Amplifier)

หัวใจของแอนาลอกคอมพิวเตอร์ก็คือ โอเปอเรชันนัลแอมปลิไฟเออ ซึ่งมักจะเรียกสั้น ๆ ว่า ออปแอมป์ สัญญลักษณ์ที่ใช้แทนออปแอมป์ นั้นดูได้จากรูปที่ ๑ ซึ่งมีทางเข้าที่ SJ และทางออกที่ OU เมื่อโวลเตจ $e_g(t)$ ปรากฏที่ทางเข้า SJ โวลเตจ $-Ae_g(t)$ ก็จะปรากฏที่ทางออก OU ซึ่งเขียนสมการได้เป็น

$$e_o(t) \quad = \quad -Ae_g(t) \qquad (1)$$

A เป็นค่าคงที่อันหนึ่งซึ่งมีค่าเป็นบวกเรียกว่า การขยายของแอมปลิไฟเออ สังเกตุว่าโวลเตจที่ผ่านออปแอมป์แล้วจะมีเครื่องหมายตรงข้าม สำหรับออปแอมป์ที่สมบูรณ์แบบ (Ideal op - amp) นั้นจะมีการขยายเป็นลบอนันต์ แต่ในทางปฏิบัติแอมปลิไฟเออไม่สามารถจะมีกำลังขยายเป็นอนันต์ได้ แอมปลิไฟเออที่มีคุณภาพดี ๆ ที่ใช้กันทั่วไปจะมีการขยายประมาณ ๑ ล้าน

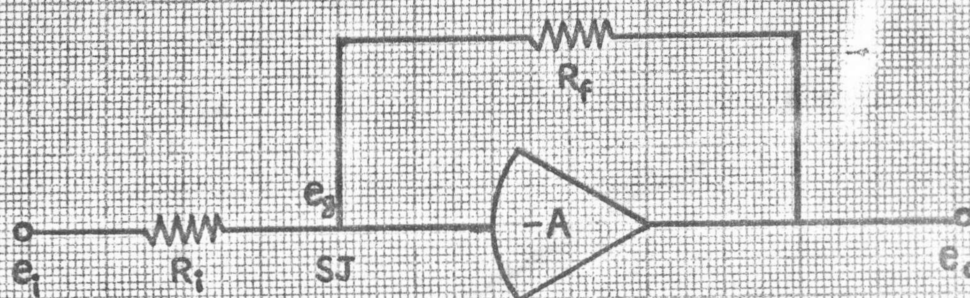
สังเกตุจากสมการที่ (๑) ว่าสัญญาณของเอาพุทโวลเตจ $e_o(t)$ ถูกขยายให้มีเครื่องหมายกลับกับสัญญาณ $e_g(t)$ กล่าวได้อีกอย่างหนึ่งคือ แอมปลิไฟเออจะไม่ทำให้สัญญาณของอินพุทโวลเตจ $e_g(t)$ เพี้ยนไปไม่ว่าที่ความถี่ใด ๆ ของ $e_g(t)$ แต่ในทางปฏิบัตินั้นจะมีช่วงของความถี่ (bandwidth) ช่วงหนึ่งเท่านั้นที่ออปแอมป์มีการขยายคงที่

---

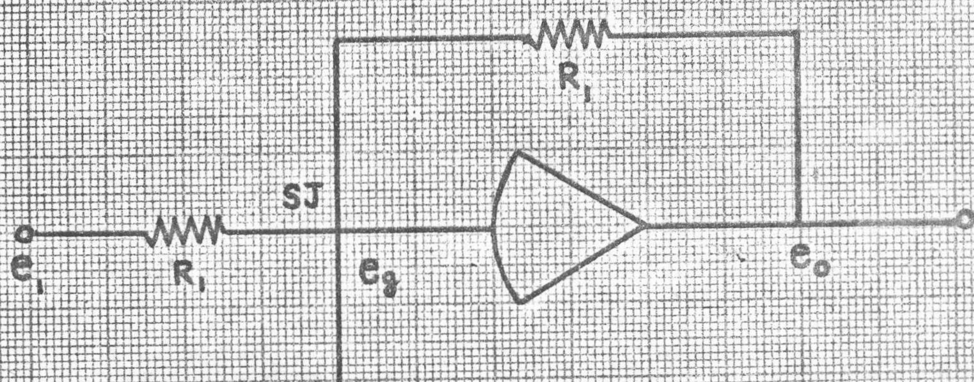
(1)

V. Rajaraman, Analog Computation and Simulation, 2nd ed. (New Delhi: Prentice-Hall of India private, 1974), pp.5-13.

รูปที่ 1 แอมปลิไฟเออที่มีการขยาย(GAIN)สูง



รูปที่ ๒ วงจรการเปลี่ยนสเกล



รูปที่ 3 วงจรการบวก (SUMMER)

กระแส i_g ที่ผ่านออปแอมป์นั้นเรียกว่ากระแสอินพุท (ดูรูปที่ ๑) ซึ่งสำหรับออปแอมป์ที่สมบูรณ์แบบค่าของ i_g จะเป็นศูนย์ แต่โดยทั่ว ๆ ไปนั้นกระแสอินพุทมีค่าประมาณ ๑๐๐ ไมโครแอมป์

สำหรับออปแอมป์ที่สมบูรณ์แบบโวลเตจ e_0 ที่ปรากฏที่ทางออกสำหรับอินพุทโวลเตจค่าหนึ่งนั้นจะไม่ขึ้นกับโหลด (load) ที่ต่อกับปลายของเอาพุท หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ เอาพุทอิมพีแดนซ์ของออปแอมป์ที่สมบูรณ์แบบนั้นมีค่าเป็นศูนย์ แต่ในทางปฏิบัตินั้นเอาพุทอิมพีแดนซ์จะมีค่าน้อยกว่า ๑ โอห์ม

สรุปแล้วออปแอมป์ที่สมบูรณ์แบบจะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

การขยายเป็นอนันต์ที่ทุก ๆ ความถี่

เฟสชิฟท์ (phase shift) ที่ทุก ๆ ความถี่เป็นศูนย์

อินพุทอิมพีแดนซ์เป็นอนันต์

เอาพุทโวลเตจเป็นศูนย์เมื่ออินพุทโวลเตจเป็นศูนย์

ไม่มีสัญญาณของสิ่งรบกวน (noise) เกิดขึ้นในแอมปลิไฟเออ

แอมปลิไฟเออนั้นมักจะทำงานด้วยส่วนย้อนกลับที่เป็นลบ (negative feedback) เสมอ ทำให้สัญญาณระหว่างอินพุทและเอาพุทมีเครื่องหมายตรงกันข้าม

๒.๑.๑.๒ <u>วงจรเปลี่ยนสเกล</u> (scale changer)

วงจรแรกของออปแอมป์ที่ใช้ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ คือ วงจรเปลี่ยนสเกล ซึ่งทำหน้าที่ในการคูณตัวแปรผันด้วยค่าคงที่อันหนึ่ง วงจรการเปลี่ยนสเกลนั้นดูได้จากรูปที่ ๒ ความต้านทาน R_i เรียกว่า ความต้านทานอินพุทและความต้านทาน R_f เรียกว่า ความต้านทานป้อนกลับ จากการประยุกต์กฎของเคอร์ชอฟ โดยการพิจารณากระแสที่จุด SJ จะได้

$$\frac{e_i - e_g}{R_i} = \frac{e_g - e_0}{R_f} \qquad (2)$$

โดยถือว่ากระแสที่ผ่านแอมปลิไฟเออเป็นศูนย์ แทนค่าสมการที่ (๑) $e_o = -Ae_g$ ลงในสมการที่ (๒) จะได้

$$\frac{R_f}{R_i}(e_i - e_g) = e_g - e_o$$

$$\frac{R_f}{R_i} e_i = \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{e_o}{-A}\right) + \left(\frac{e_o}{-A}\right) - e_o \qquad (3)$$

ทางขวามือของสมการที่ (๓) นั้นจะเห็นว่า (e_o/A) ทิ้งเสียได้เมื่อเทียบกับ e_o เนื่องจากว่าค่า A ของแอมปลิไฟเออที่มีคุณภาพดีมีค่าประมาณ ๑ ล้านและ R_f/R_i ในทางปฏิบัติส่วนมากจะมีค่าน้อยกว่า ๑๐ ดังนั้น $(-e_o/A)(R_f/R_i)$ อาจทิ้งเสียได้เมื่อเทียบกับ e_o และสมการที่ (๓) จะเหลือเป็น

$$e_o(t) = -\frac{R_f}{R_i} e_i(t) \qquad (4)$$

อัตราส่วน R_f ต่อ R_i ที่มากกว่า ๑๐ นั้น ในทางปฏิบัติไม่นิยมใช้เพราะว่าจะมีผลในการทำให้ความถูกต้องแน่นอนน้อยลง จากสมการที่ (๔) จะเห็นว่าเอาพุทโวลเตจนั้นขึ้นกับอินพุทโวลเตจและค่าของ R_f และ R_i เท่านั้น ซึ่งในที่นี้การขยายของออปแอมป์จะต้องสูงพอสมควร

๒.๑.๑.๒ การบวกและการลบ (Addition and Subtraction)

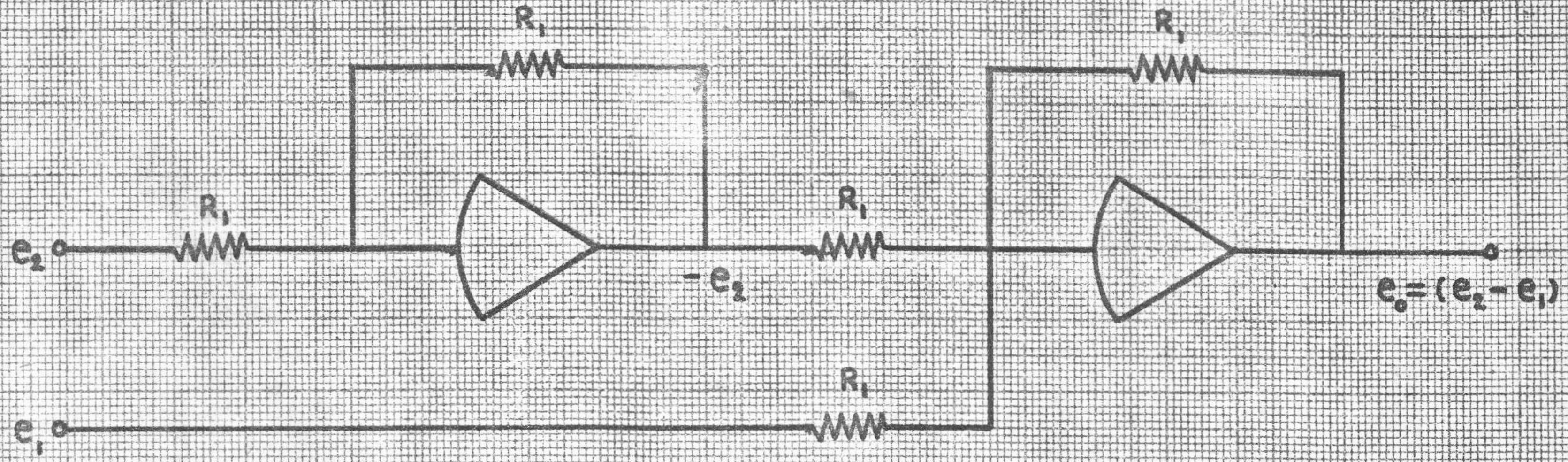
การบวกหรือการรวมโวลเตจ ๒ อันเข้าด้วยกันกระทำได้โดยใช้วงจรตามรูปที่ ๓ ในที่นี้ความต้านทานอินพุทและความต้านทานป้อนกลับมีค่าเท่ากัน จากการประยุกต์กฎของเคอร์ชอพสำหรับกระแสไฟฟ้าที่จุด SJ โดยถือว่ากระแสอินพุท $i_g = 0$ จะได้

$$\frac{e_1 - e_g}{R_1} + \frac{e_2 - e_g}{R_1} = \frac{e_g - e_o}{R_1} \qquad (5)$$

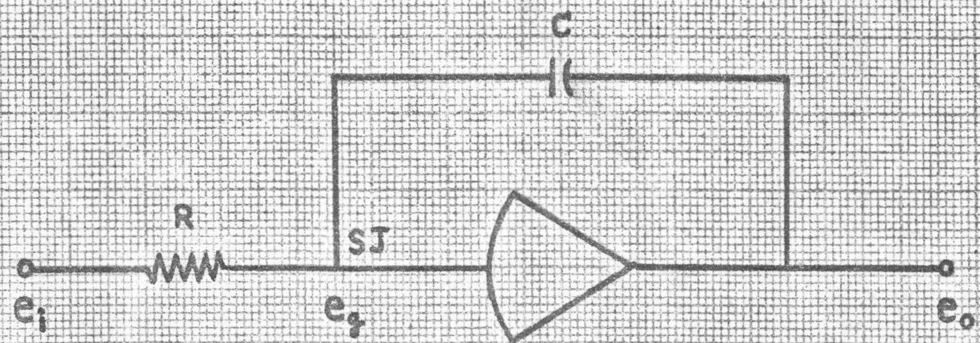
$$e_1 + e_2 = -e_o + 3e_g$$

แทนค่าของ e_g จากสมการที่ (๑) ลงในสมการที่ (๕) จะได้

$$e_1 + e_2 = -e_o + 3\left(\frac{-e_o}{A}\right) \qquad (6)$$



รูปที่ 4 วงจรการลบ



รูปที่ 5 อินทิเกรเตอร์

$(3e_o/A)$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ e_o ดังนั้น

$$e_o = -(e_1 + e_2) \qquad (7)$$

ในกรณีที่ความต้านทานอินพุทมีค่าไม่เท่ากัน ความสัมพันธ์ระหว่างเอาพุทโวลเตจและอินพุทโวลเตจเป็น

$$e_o = -\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \qquad (8)$$

โดยที่

$$a_1 = R_f/R_1, \; a_2 = R_f/R_2, \; \ldots \; a_i = R_f/R_i$$

สำหรับการลบนั้นไม่มีอะไรแตกต่างไปจากการบวกเพียงแต่เป็นการบวกเข้ากับปริมาณที่เป็นลบ วงจรสำหรับการลบนั้นทำได้ โดยการเพิ่มขยายวงจรสำหรับการบวกดังรูปที่ ๔

๒.๑.๑.๓ <u>การอินทิเกรต (Integration)</u>

ประโยชน์ที่ได้รับจากแอนาลอกคอมพิวเตอร์อีกอย่างหนึ่ง ก็คือสามารถที่จะทำการอินทิเกรตได้ทันทีทันใด วงจรของออปแอมป์สำหรับการอินทิเกรตนั้นดูได้จากรูปที่ ๕ สมการของการอินทิเกรต ได้จากการประยุกต์กฎของเคอร์ชอพสำหรับกระแสไฟฟ้าที่จุด SJ

$$\frac{e_i - e_g}{R} = C \frac{d}{dt}(e_g - e_o) \qquad (9)$$

จากการแทนค่า $e_g = (-e_o/A)$ ลงในสมการที่ (๙) จะได้

$$-C \frac{d}{dt}\left(e_o + \frac{e_o}{A}\right) = \frac{e_i}{R} + \frac{e_o}{AR} \qquad (10)$$

ทางซ้ายมือของสมการที่ (๑๐) ทิ้ง e_o/A ซึ่งมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ e_o จากนั้นทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างเทียบกับเวลาจะได้

$$-C\left[e_o(t) - e_o(0)\right] = \frac{1}{R}\int_0^t e_i(t)\,dt + \frac{1}{AR}\int_0^t e_o(t)\,dt$$

หรือ

$$e_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_o^t e_i(t)dt - \frac{1}{CAR}\int_o^t e_o(t)dt + e_o(0) \qquad (11)$$

สำหรับการอินทิเกรตในช่วงเวลาที่จำกัด และ A มีค่ามากดังนั้นเทอมที่ ๒ ทางขวามือ ในสมการที่ (๑๑) ทิ้งเสียได้เมื่อเทียบกับ $e_o(t)$ จะได้

$$e_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_o^t e_i(t)dt + e_o(0) \qquad (12)$$

จากสมการที่(๑๒) จะเห็นว่า $e_o(t)$ เท่ากับอินทิกรัลของอินพุทโวลเตจ $e_i(t)$ คูณกับค่าคงที่อันหนึ่งที่เป็นสัดส่วนกับ 1/RC สำหรับค่าคงที่ RC นั้นตามปกติมักจะเลือกให้เท่ากับ ๑ วินาที โดยเลือก $R = 1M\Omega$ (๑ ล้านโอห์ม) และ $C = 1\mu f$ (๑ไมโครฟารัด) ในกรณีเช่นนี้เป็นการอินทิเกรตตามเวลาที่แท้จริง (real time) เทอม $e_o(0)$ ทางขวามือของสมการนั้นแทนสภาวะเริ่มต้น (initial condition) ของอินทิเกรเตอร์ ซึ่งในทางกายภาพนั้นก็คือ ประจุเริ่มต้นที่มีอยู่ในคาปาซิเตอร์

วงจรอินทิเกรเตอร์อาจทำการอินทิเกรตสัญญาณอินพุทหลาย ๆ สัญญาณในเวลาเดียวกันดังในรูปที่ ๖

จากสมการของกระแสที่จุด SJ จะได้

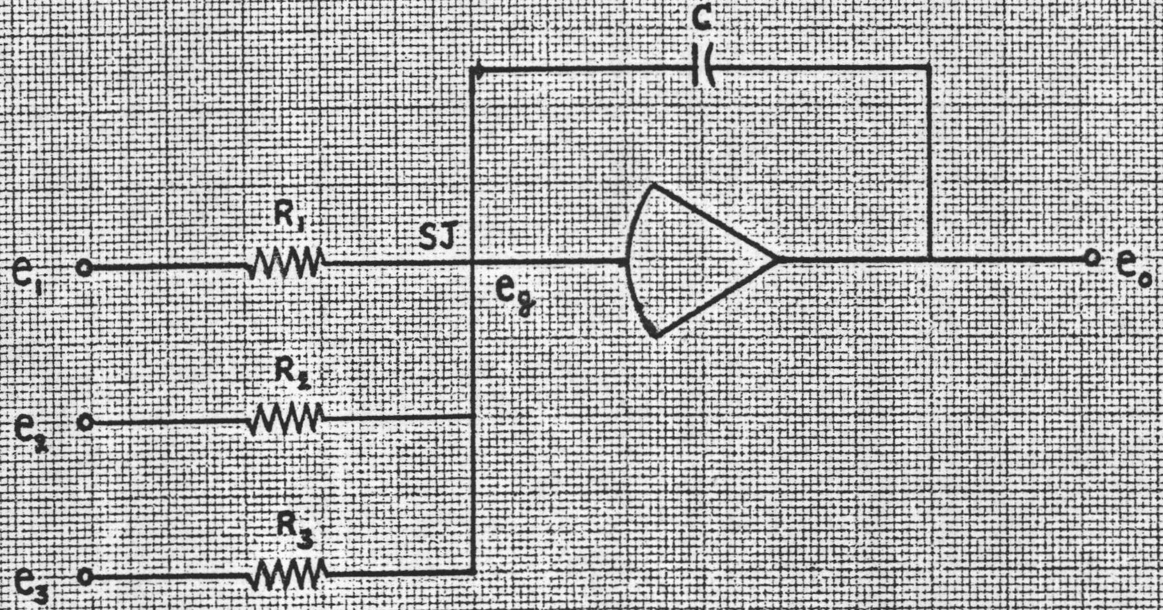
$$\frac{e_1 - e_g}{R_1} + \frac{e_2 - e_g}{R_2} + \frac{e_3 - e_g}{R_3} = C\frac{d}{dt}(e_g - e_o)$$

สมการข้างบนนี้อาจจะทำให้ง่ายขึ้นโดยการประมาณ (กล่าว คือ $e_g = -e_o/A$ ให้ $A \to \infty$) และผลลัพธ์ที่ได้คือ

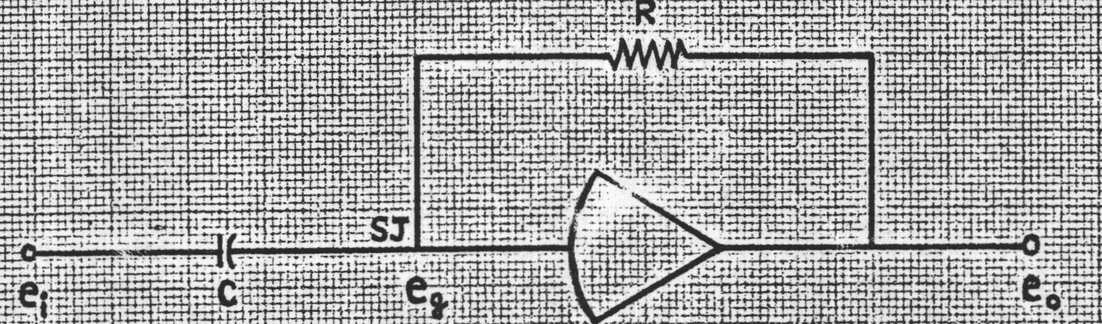
$$e_o(t) = -\frac{1}{C}\int_o^t \left(\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3}\right)dt + e_o(0) \qquad (13)$$

ถ้า $R_1 = R_2 = R_3 = R$ แล้ว

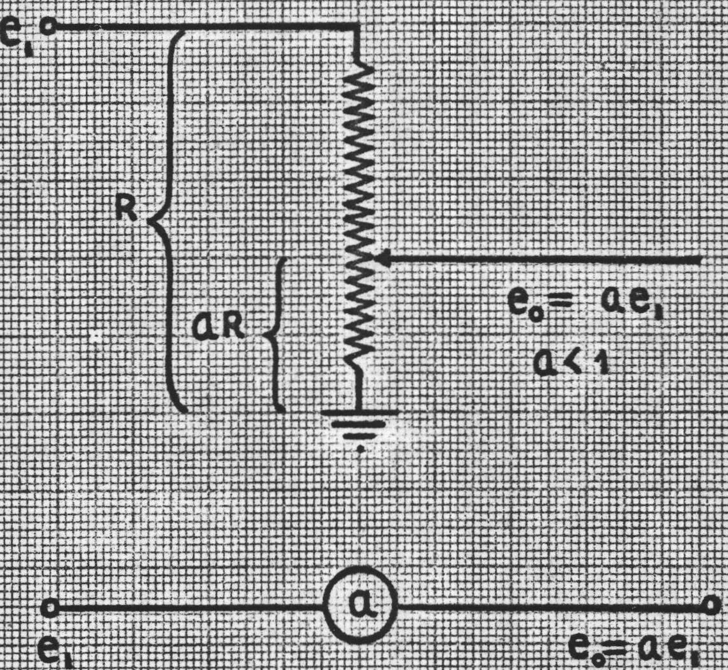
$$e_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_o^t (e_1 + e_2 + e_3)dt + e_o(0) \qquad (14)$$



รูปที่ 6 อินทิเกรเตอร์รวม



รูปที่ 7 ดิฟเฟอเรนชิเอเตอร์



รูปที่ ๘ โพเทนชิโอมิเตอร์

๒.๑.๑.๔ การดิฟเฟอเรนชิเอท(Differentiation)

เพียงแต่เปลี่ยนที่กันระหว่างความต้านทานและคาปาซิเตอร์ในรูปที่ ๕ จะได้ดิฟเฟอเรนชิเอเตอร์ดังรูปที่ ๗ จากการพิจารณากระแสที่จุด SJ จะได้

$$C \frac{d}{dt}(e_i - e_g) = \frac{e_g - e_o}{R} \qquad (15)$$

เมื่อแทนค่า $e_g = -(e_o/A)$ และทิ้งเทอมที่มีค่าน้อยแล้วจะได้

$$e_o(t) = -RC \frac{d}{dt} e_i(t) \qquad (16)$$

อย่างไรก็ตามดิฟเฟอเรนชิเอตอร์นี้ไม่ค่อยนิยมใช้กันในแอนาลอกคอมพิวเตอร์ เนื่องจากมีแนวโน้มในการขยายสิ่งรบกวน, ดริฟท์ (drift) และสิ่งอื่น ๆ ที่ไม่ต้องการซึ่งทำให้เกิดการรบกวนในระบบที่กำลังศึกษาอยู่

๒.๑.๒ โพเทนชิโอมิเตอร์ (Potentiometer)

สำหรับโพเทนชิโอมิเตอร์นี้ได้มีการนำมาใช้อย่างกว้างขวางในแอนาลอกคอมพิวเตอร์ โดยใช้คูณกับโวลเตจด้วยค่าคงที่ซึ่งน้อยกว่าหนึ่ง สัญญลักษณ์ของโพเทนชิโอมิเตอร์นั้นดูได้จากรูปที่ ๘ โดยการเลื่อนจุดสัมผัสของโพเทนชิโอมิเตอร์ดังที่แสดงในรูปที่ ๘ จะได้

$$e_o = \frac{e_1}{R} . aR = ae_1$$

สมการนี้ถือว่าไม่มีความต้านทานต่อเข้าที่ปลายของเอาพุท. สำหรับโพเทนชิโอมิเตอร์ที่สมบูรณ์แบบนั้นความต้านทานระหว่างจุดสัมผัสและจุดต่อลงดิน (ground) จะมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น

๒.๒ การแก้ปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์คงที่ (2)

วงจรแบบต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้นได้แก่ วงจรการเปลี่ยนสเกล, วงจรการบวก, วงจรการอินทิเกรตและโพเทนชิโอมิเตอร์ สามารถนำมาต่อเข้าด้วยกันเพื่อแก้ปัญหา

---

(2) Ibid., pp.13-15.

สมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบเชิงเส้นที่มี/สัมประสิทธิ์คงที่ได้ โดยวิธีที่เรียกว่า บูทสแทรป(bootstrap)

สมมติว่าสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่จะแก้ปัญหานั้น เป็น

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = c(t) \qquad (17)$$

โดยมีสภาวะเริ่มต้น (initial condition)

$$y(o) \text{ และ } \frac{dy}{dt}(o) = o$$

วิธีการใช้คอมพิวเตอร์แก้สมการที่ (๑๗) นั้น เริ่มด้วยการนำเทอมที่มีอันดับ (order) ของอนุพันธ์ (derivative) สูงสุดไว้ทางซ้ายมือและย้ายเทอมอื่น ๆ ไปไว้ทางขวามือ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a\frac{dy}{dt} - by + c(t) \qquad (18)$$

สมมติว่า d^2y/dt^2 สามารถที่จะทำการอินทิเกรตได้ต่อเนื่องกันจะได้ dy/dt และ y ดังที่แสดงในรูปที่ ๙

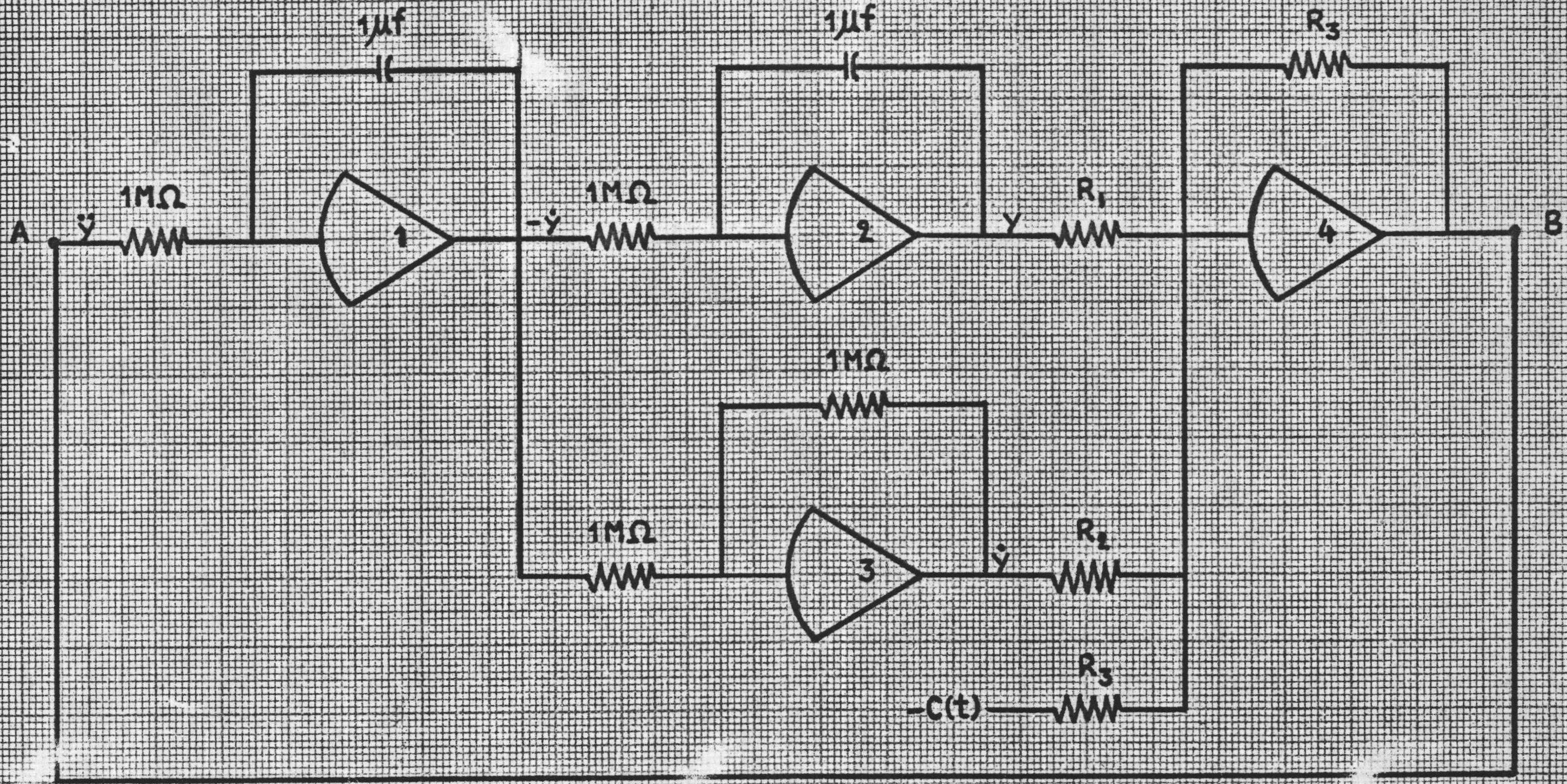
ที่เอาพุทของแอมปลิไฟเออตัวที่ ๔ (ที่จุด B ในรูปที่ ๙) จะได้ผลรวมเป็น

$$-\frac{R_3}{R_1}y - \frac{R_3}{R_2}\frac{dy}{dt} + c(t)$$

ถ้ากำหนดให้ $\frac{R_3}{R_1} = b$ และ $\frac{R_3}{R_2} = a$ ที่จุด B จะได้

$$-by - a\frac{dy}{dt} + c(t)$$

ซึ่งเท่ากับ d^2y/dt^2 ตามที่เริ่มต้นไว้ (ดูสมการที่ (๑๘) ดังนั้นจุด B และ A จึงนำมาต่อเข้าด้วยกันได้ วิธีการนี้เป็นการจัดรูปแบบของคอมพิวเตอร์ในการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล คำตอบ $y(t)$ นั้นจะได้จากเอาพุทของแอมปลิไฟเออตัวที่ ๒



รูปที่ ๙ รูปแบบคอมพิวเตอร์ในการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล

($\dot{y} = dy/dt \quad \ddot{y} = d^2y/dt^2$)

สมมติว่าสภาวะเริ่มต้นแทนที่จะเป็นศูนย์ แต่เป็น $\mathring{Y}(o) = P$ และ $Y(o) = Q$ ก็สามารถที่จะรวมสภาวะดังกล่าวเข้าไปในคอมพิวเตอร์ได้ โดยการจัดให้โวลเตจเริ่มต้นซึ่งสมนัย (correspond) กับ Pและ Q อยู่ในคาปาซิเตอร์ป้อนกลับของแอมปลิไฟเออตัวที่ ๑ และ ๒ ของรูปที่ ๙ ตามลำดับ

พื้นฐานของวิธี "บูทสแทรป" ที่แสดงนี้สามารถนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์โดยทั่วไปได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการแก้ปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเชียล

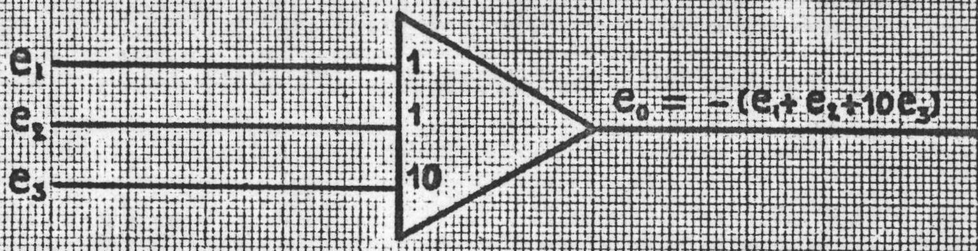
๒.๓ <u>สัญญลักษณ์ต่าง ๆ ที่ใช้ในแอนาลอกคอมพิวเตอร์</u>(3)

ในแผนภาพที่ผ่านมานั้น วงจรต่าง ๆ แสดงด้วยความต้านทานและคาปาซิเตอร์ที่ต่อเข้ากับออปแอมป์ เพื่อความสะดวกจึงได้มีการกำหนดสัญญลักษณ์ที่ใช้แทนวงจรของแอนาลอกคอมพิวเตอร์ เช่น รูปที่ ๑๐ นั้นเป็นสัญญลักษณ์ที่ใช้แทนวงจรการบวก ตัวเลขภายในสามเหลี่ยมที่ต่อกับอินพุทแต่ละอันนั้น แสดงถึงการขยายของออปแอมป์สำหรับอินพุทนั้น กรณีพิเศษอันหนึ่งของวงจรการบวก คือ ทำหน้าที่เป็นวงจรการเปลี่ยนสเกล ซึ่งจะมีอินพุทเพียงอันเดียวด้วย ค่าการขยายที่เหมาะสมอันหนึ่ง ในทางปฏิบัติค่าของการขยายที่ใช้กันนั้นมักจะเป็น ๑ และ ๑๐ เท่านั้น สำหรับค่าของการขยายอื่น ๆ นั้นทำได้โดยการต่อเข้ากับโพเทนซิโอมิเตอร์ที่อินพุทของแอมปลิไฟเออ. รูปที่ ๑๑ เป็นสัญญลักษณ์ที่ใช้แทนอินทิเกรเตอร์ ตัวเลขที่ตรงกับอินพุทนั้น แทนค่าขยายของอินทิเกรเตอร์ สภาวะเริ่มต้นบนคาปาซิเตอร์ในอินทิเกรเตอร์นั้น จะอยู่ด้านล่างของอินทิเกรเตอร์ ตามที่แสดงในรูป สังเกตุว่าโวลเตจของสภาวะเริ่มต้นนั้นมีเครื่องหมายตรงข้ามกับเอาพุทของอินทิเกรเตอร์. รูปที่ ๑๒ เป็นรูปของอินทิเกรเตอร์รวม จากการใช้สัญญลักษณ์ข้างบน. คอมพิวเตอร์ที่จัดไว้ในรูปที่ ๙ สามารถเขียนใหม่ได้ดังรูปที่ ๑๓ โดยสมมติค่าคงที่เป็น

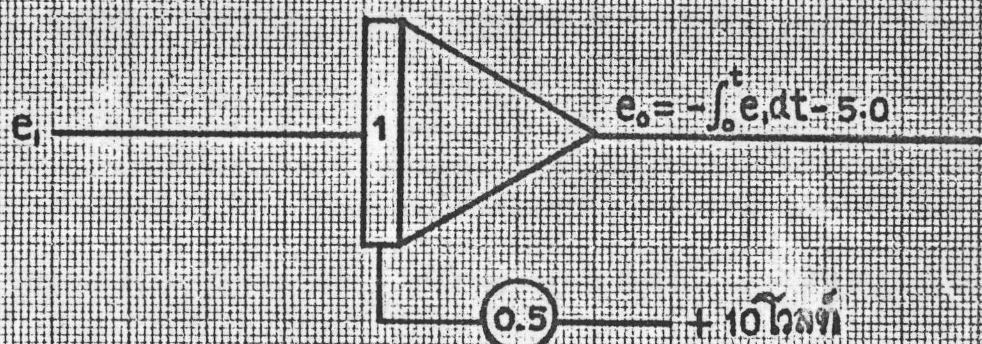
$$a = 5.4 \quad b = .58 \quad Y(o) = 4.8 \quad \mathring{Y}(o) = -2.3$$

---

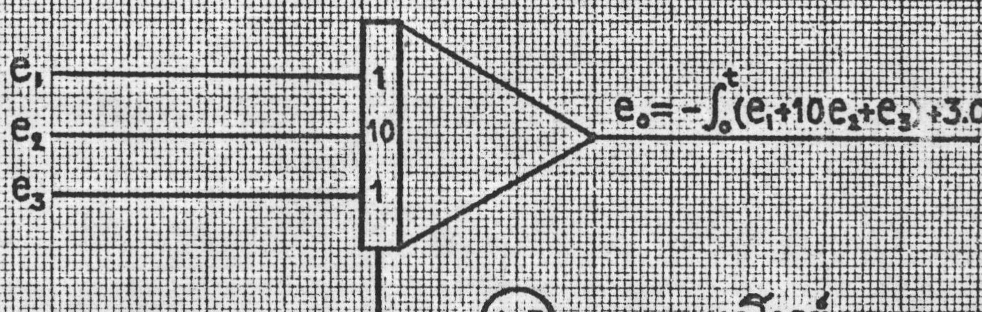
(3) Ibid., pp.15-16.



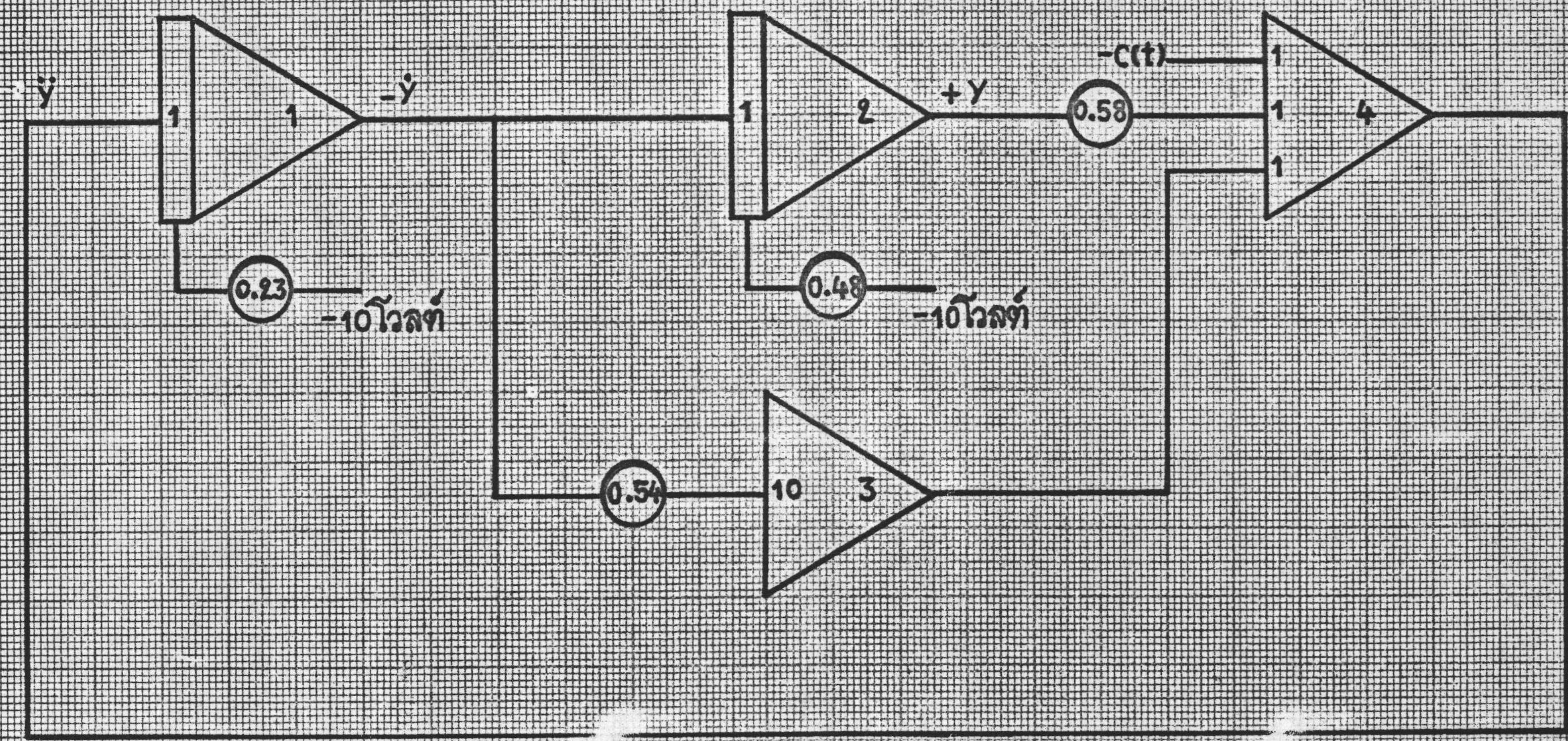
รูปที่ 10 การบวก



รูปที่ 11 อินทิเกรเตอร์



รูปที่ 12 อินทิเกรเตอร์รวม



รูปที่ 13 รูปแบบคอมพิวเตอร์ในการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\ddot{y} + 5.4\dot{y} + 0.58y = c(t)$$

๒.๔ การทำไทม์สเกลและการทำแอมปลิจูดสเกล[4]

(Time Scaling and Amplitude Scaling)

ในระบบทางกายภาพนั้น จะมีขอบเขตจำกัดที่เป็นค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของตัวแปรและอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร แอนาลอกคอมพิวเตอร์ทำงานเลียนแบบระบบทางกายภาพโดยใช้โวลเตจแทนตัวแปรตามและเวลาแทนตัวแปรอิสระ คอมพิวเตอร์ก็คล้ายกับระบบทางกายภาพ โดยมีขอบเขตจำกัดของระดับโวลเตจและอัตราการเปลี่ยนแปลงของโวลเตจ ดังนั้นสมการที่ใช้กับคอมพิวเตอร์จะต้องมีการสเกลให้ถูกต้อง โดยโวลเตจที่ปรากฏในคอมพิวเตอร์จะอยู่ในขอบเขตของโวลเตจที่ใช้กับแอมปลิไฟเออและอัตรา

การเปลี่ยนแปลงของโวลเตจจะต้องไม่เกินกว่าความเร็วในการตอบสนองของแอมปลิไฟเออ และกลไกของการบันทึก วิธีการสเกลสมการเพื่อใช้กับคอมพิวเตอร์นั้นมีหลายวิธี การขาดความรู้เกี่ยวกับพื้นฐานของการสเกลจะทำให้ผู้ใช้แอนาลอกคอมพิวเตอร์มีความสับสน ดังนั้น การสเกลจึงมีความสำคัญมาก ซึ่งผู้ที่ศึกษาจะต้องมีความเข้าใจและสามารถนำไปประยุกต์ให้ใช้งานได้

เนื่องจากตัวแปรอิสระและตัวแปรตามของปัญหาที่ศึกษามีความสัมพันธ์กับเวลาและโวลเตจในคอมพิวเตอร์ จึงจำเป็นต้องมีการทำไทม์สเกลสำหรับตัวแปรอิสระ และการทำแอมปลิจูดสเกลสำหรับตัวแปรตาม

๒.๔.๑ การทำไทม์สเกล

การทำไทม์สเกลในสมการดิฟเฟอเรนเชียลสำหรับคำตอบที่ได้จากแอนาลอกคอมพิวเตอร์นั้นเป็นสิ่งจำเป็น เนื่องจากเหตุผลดังต่อไปนี้ :

เหตุผลประการแรกคือ เครื่องมือที่ใช้บันทึกคำตอบของแอนาลอกคอมพิวเตอร์ไม่สามารถตอบสนองได้เร็วกว่าค่าที่กำหนดไว้สำหรับเครื่องมือนั้น ส่วนมากเครื่องมือที่ใช้บันทึกก็คือ เอ็กซ์วายพลอตเตอร์ (x-y plotter) ซึ่งเป็นเครื่องกลไกทางไฟฟ้าที่มีการเคลื่อนไหว

---

(4) Ibid., pp.24-29.

ค่อนข้างช้า ออสซิลโลสโคปมีการตอบสนองได้เร็วกว่ามากแต่ไม่มีความถูกต้องแน่นอน (accuracy) เหมือนกับเอ็กซ์วายพลอตเตอร์ เหตุผลอันต่อไปก็คือ แอมปลิไฟเออที่ใช้ในคอมพิวเตอร์นั้น มีช่วงของความถี่ในการทำงานอยู่ช่วงหนึ่งที่ทำให้การทำงานทางด้านคณิตศาสตร์ต่าง ๆ นั้นมีความถูกต้องแน่นอน ดังนั้นความถี่สูงสุดของคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลจะต้องอยู่ในช่วงความถี่ของเครื่องมือที่ใช้บันทึกและแอมปลิไฟเออในแอนาลอกคอมพิวเตอร์ ถ้าความถี่สูงสุดมีค่าต่ำมากและคอมพิวเตอร์ใช้เวลานานในการแก้สมการจะทำให้ความถูกต้องแน่นอนนั้นลดลงเนื่องจากการดริฟท์ในแอมปลิไฟเออ พารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงและสิ่งรบกวนอื่น ๆ

เทคนิคของการทำไทม์สเกลก็คือ การทำคำตอบของปัญหาที่กำลังศึกษาอยู่ให้มีเวลาที่เหมาะสมที่สุด ดังเช่นปรากฏการณ์ทางภายภาพที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่งส่วนล้านวินาทีหรือในช่วงเวลา ๑ ปี นั้นอาจทำไทม์สเกลให้มาเป็น ๑๐ วินาที ของเวลาคอมพิวเตอร์ เทคนิคง่าย ๆ ของการทำไทม์สเกลปรากฏในตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ ๑</u> สมมติว่าต้องการใช้แอนาลอกคอมพิวเตอร์แก้ปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10^{10}\,x = 0 \qquad (1)$$

$$x(0) = 1 \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

โดยต้องการคำตอบในช่วงเวลา : $4\pi/10^5 \geqslant t \geqslant 0$

ถ้าใช้วิธีที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้นนั้นมาแก้ปัญหาจะเห็นว่าออปแอมป์จะต้องมีการขยายถึง 10^{10} ซึ่งเป็นการขยายที่สูง คำตอบของสมการที่ (๑) คือ

$$x(t) = \cos 10^5 t \qquad (2)$$

จะเห็นว่าคำตอบที่ได้นั้นมีความถี่ถึง ๑๐๐,๐๐๐ เรเดียน/วินาที เนื่องจากความถี่นี้สูงมากและเหนือกว่าความถี่สูงสุดที่ใช้กับออปแอมป์โดยทั่ว ๆ ไป ดังนั้นสมการนี้จึงต้องมีการทำไทม์สเกลเพื่อลดความถี่ให้อยู่ในช่วง ๐.๑ ถึง ๑๐.๐ เรเดียนต่อวินาที การทำไทม์สเกลนั้นมีวัตถุประสงค์ ๒ อย่างคือ ลดความถี่ของคำตอบให้อยู่ในช่วงความถี่ของเอ็กซ์วายพลอตเตอร์ และทำให้การขยาย

ของแอมปลิไฟเออแต่ละอันในแอนาลอกคอมพิวเตอร์มีค่าต่ำกว่า ๑๐ เหตุผลประการหลังก็คือเพื่อให้แน่ใจว่าแอมปลิไฟเออแต่ละอันนั้นมีความถูกต้องดีทำให้ได้คำตอบที่มีความถูกต้องแน่นอน

การทำไทม์สเกลนั้น ทำได้โดยการแทนค่า t ในสมการที่ (๑) ด้วยตัวแปร τ โดยที่

$$t = \tau/n \qquad (3)$$

ในสมการที่ (๓) n เป็นค่าคงที่อันหนึ่งซึ่งสามารถเลือกได้ตามความเหมาะสม

แทนค่า $t = \tau/n$ ลงในสมการที่ (๑) และเนื่องจาก

$$\frac{dx}{dt} = n\frac{dx}{d\tau} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = n^2\frac{dx^2}{d\tau^2}$$

จะได้

$$n^2\frac{d^2x}{d\tau^2} + 10^{10}x = 0 \qquad (4)$$

$$x(\tau = o) = 1 \qquad n\frac{dx}{d\tau}(0) = 0$$

คำตอบสำหรับ τ ที่อยู่ในช่วงของ

$$4\pi n/10^5 \geqslant \tau \geqslant 0$$

ถ้าเลือก $n = 10^5$ สมการที่ (๔) จะเป็น

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \qquad (5)$$

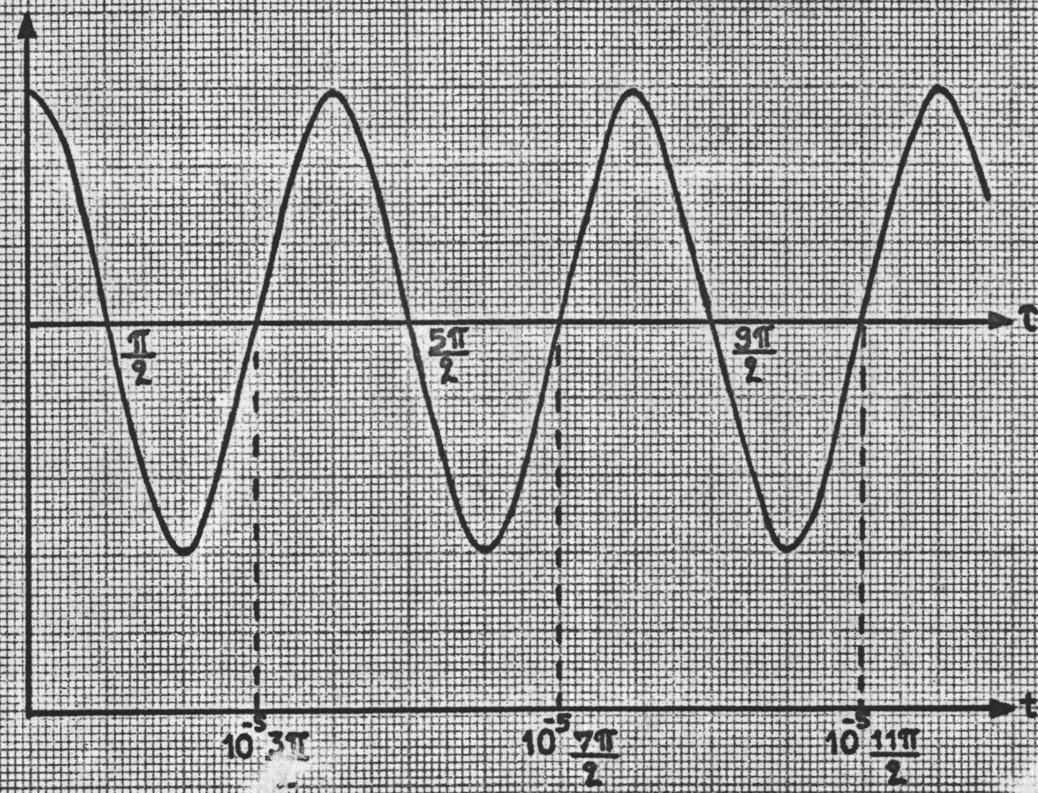
คำตอบในช่วง $4\pi \geqslant \tau \geqslant 0$

สมการข้างบนนี้สามารถที่จะจัดแอนาลอกคอมพิวเตอร์ด้วยแอมปลิไฟเออและอินทิเกรเตอร์ที่มีการขยายเท่ากับหนึ่ง จากสมการที่ (๕) จะได้คำตอบ

$$x(\tau) = \cos\tau \qquad (6)$$

คำตอบที่ได้ข้างบนนี้อยู่ในช่วงความถี่ของเอ็กซ์วายพลอตเตอร์

จากการสังเกตุจะเห็นว่าการแปลง $t = \tau/10^5$ นำไปสู่การทำให้คำตอบของสมการเริ่มแรกช้าลงเป็น 10^5 เท่า คำตอบในสมการที่ (๖) อยู่ในเทอมของตัวแปรอิสระ



รูปที่ ๑๔ การแสดงแกนของเวลาหลังจากการทำไทม์สเกล

ตัวใหม่คือ τ ดังนั้นเพื่อให้ได้รับคำตอบของสมการเริ่มแรกกล่าวคือ สมการที่ (๔) นั้น แกนของเวลาในการพลอตคำตอบก็จะเป็นไปตามที่แสดงดังรูปที่ ๑๔

การแปลงอีกแบบหนึ่งเป็นแบบที่ทำให้เร็วขึ้น กรณีนี้คำตอบของสมการที่ได้จากแอนาลอกคอมพิวเตอร์ จะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงช้า

<u>ตัวอย่างที่ ๒</u> พิจารณาสมการ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10^{-10}x = 0 \qquad (7)$$

$$x(o) = 1 \qquad \dot{x}(o) = 0$$

คำตอบสำหรับช่วงเวลา : $4\pi \times 10^5 \geqslant t \geqslant 0$

คำตอบของสมการที่ (๗) คือ

$$x(t) = \cos 10^{-5}\, t \qquad (8)$$

คำตอบของสมการที่ (๗) บนแอนาลอกคอมพิวเตอร์ อาจจะทำให้เร็วขึ้นโดยการแปลง $t = \tau/10^{-5}$ สมการที่แปลงเรียบร้อยแล้วจะเป็น

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0 \qquad (9)$$

$$x(o) = 1 \qquad \dot{x}(o) = 0 \qquad 4\pi \geqslant \tau \geqslant 0$$

ซึ่งได้คำตอบเป็น

$$x(\tau) = \cos \tau \qquad (10)$$

โดยทั่ว ๆ ไปนั้นถ้า $n>1$ จากการแปลง $t = \tau/n$ สมการที่ทำไทม์สเกลแล้วจะช้าลงเมื่อเทียบกับสมการเริ่มต้น ในทางตรงข้ามเมื่อ $n<1$ คำตอบที่ได้จะเร็วขึ้นเมื่อเทียบกับสมการเริ่มต้น

ปัญหาที่น่าสงสัยมากที่สุดของผู้ที่ศึกษาในตอนนี้ก็คือ ว่าจากสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่กำหนดนั้น จะรู้ได้อย่างไรว่าสมการนั้นจะต้องทำไทม์สเกลหรือไม่ โดยทั่ว ๆ ไปนั้นมีหลักในการพิจารณาว่า ถ้าอัตราส่วนของสัมประสิทธิของอนุพันธ์ต่ำสุดต่ออนุพันธ์สูงสุดของสมการ

ดิฟเฟอเรนเชียลไม่ได้อยู่ในช่วง ๑ ถึง ๑๐ แล้วสมการนั้น จำเป็นต้องทำไทม์สเกลอันนี้ เนื่องจากความจริงที่ว่า อัตราส่วนนี้ชี้แสดงถึงความถี่ตามธรรมชาติ (natural frequency) ของคำตอบจากสมการนั้น ในกรณีเช่นนี้ตัวแปรอิสระ " t " ในสมการดิฟเฟอเรนเชียล ก็จะถูกแปลงโดยใช้ความสัมพันธ์ $t = \tau/n$ และ n ที่เลือกนี้จะต้องทำให้อัตราส่วนนั้นอยู่ใน ช่วง ๑ ถึง ๑๐

<u>ตัวอย่างที่ ๓</u> พิจารณาสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\frac{d^2x}{dt} + 2\frac{dx}{dt} + 100x = 10\,e^{-2x} \qquad (11)$$

$$x(o) = 0.5 \qquad \frac{dx}{dt}(o) = 1$$

อัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของอนุพันธ์ต่ำสุดต่อสัมประสิทธิ์ของอนุพันธ์สูงสุด ในสมการที่ (๑๑) คือ **100/1** = 100 ซึ่งจำเป็นต้องทำไทม์สเกล จากการแปลง $t = \tau/n$ จะได้

$$n^2\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2n\frac{dx}{d\tau} + 100x = 10\,e^{-2\tau/n} \qquad (12)$$

$$x(\tau = o) = 0.5 \qquad n\frac{dx}{d\tau}(o) = 1$$

เลือก $n = 10$ จะได้

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 0.2\frac{dx}{d\tau} + x = 0.1\,e^{-0.2\tau} \qquad (13)$$

$$x(o) = 0.5 \qquad \frac{dx(0)}{d\tau} = 0.1$$

สังเกตว่าในการทำไทม์สเกลสมการที่ (๑๑) นั้น ปริมาณ (τ/n) จะถูกแทนที่ " t " ทุกแห่งที่ปรากฏในสมการที่ (๑๑) ดังนั้นฟอซซิงฟังก์ชั่น (forcing function) และสภาวะเริ่มต้นก็จะต้องมีการเปลี่ยนแปลงด้วย

<u>สรุปเทคนิคของการทำไทม์สเกล</u>

จากสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่กำหนดให้มีหลักในการทำไทม์สเกลดังต่อไปนี้

(ก) หาอัตราส่วน " S " ของสมการดิฟเฟอเรนเชียล ซึ่งเท่ากับสัมประสิทธิ์ ของอนุพันธ์อันดับต่ำที่สุด (อันดับศูนย์) ต่อสัมประสิทธิ์ของอนุพันธ์อันดับสูงที่สุด

(ข) ถ้าอัตราส่วน Sนี้อยู่ระหว่าง ๑ ถึง ๑๐ สมการนั้นไม่ต้องทำไทม์สเกล แต่ถ้า S ไม่อยู่ในช่วงนี้ (๑ ถึง ๑๐) สมการนั้นต้องแปลงตัวแปรอิสระ t ไปเป็นตัวแปร τ โดยที่ $t = \tau/n$ ค่าคงที่ n ที่เลือกนั้นก็เพื่อที่ให้อัตราส่วน S ของสมการที่แปลงแล้วอยู่ในช่วง ๑ ถึง ๑๐

(ค) สมการที่แปลงแล้วในตอนนี้อยู่ในรูปของตัวแปรอิสระตัวใหม่ คือ τ ตัวแปรนี้เรียกว่า " เวลาของคอมพิวเตอร์ " เพื่อที่จะชี้ให้เห็นถึงความแตกต่างจากตัวแปรอิสระของสมการเริ่มต้นที่เรียกว่า " เวลาที่แท้จริง " หลังจากที่ได้คำตอบแล้วแกนของเวลาซึ่งเป็นเวลาของคอมพิวเตอร์นั้น จะต้องเทียบกลับไปเป็นเวลาที่แท้จริงของปัญหานั้น

(ง) การแปลง $t = \tau/n$ จะประยุกต์ใช้กับตัวแปร t ที่ปรากฏในสมการเริ่มต้นทุกแห่ง รวมทั้งฟอซซิงฟังก์ชั่น และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดจะต้องมีการแปลงด้วย

๒.๔.๒ การทำแอมปลิจูดสเกล

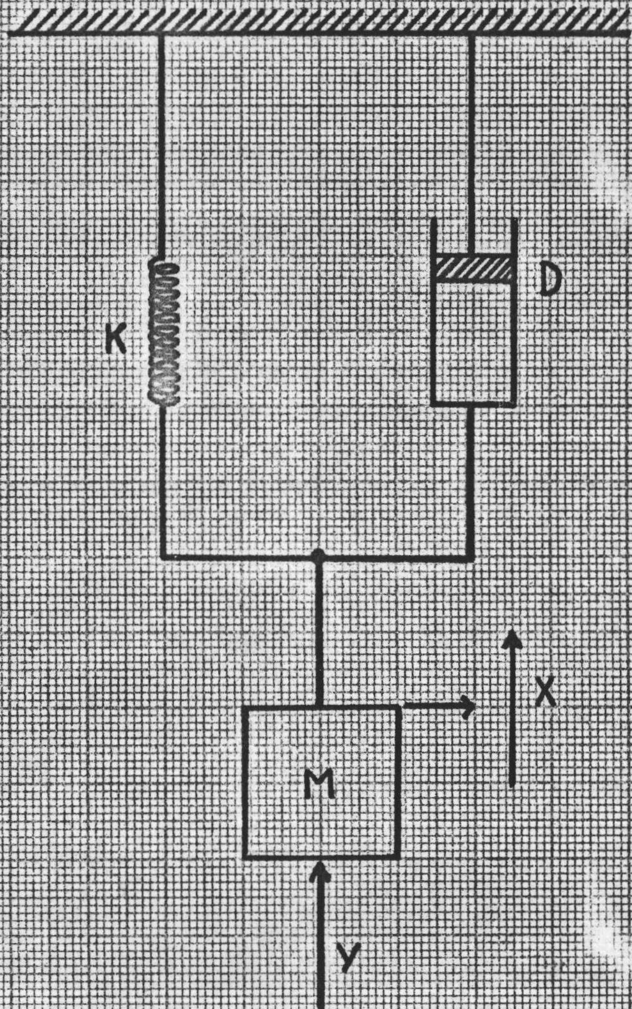
เพื่อให้แน่ใจว่าคำตอบที่ได้รับจากแอนาลอกคอมพิวเตอร์นั้น มีความถูกต้องมากที่สุด จึงจำเป็นต้องปรับโวลเตจของออปแอมป์ให้อยู่ในช่วงที่สามารถจะทำงานได้ดีที่สุด เพื่อลดความไม่ถูกต้องที่เกิดจากสิ่งรบกวน, ดริฟท์และการรบกวนอื่น ๆ ให้น้อยที่สุด ความสำคัญอีกอย่างหนึ่งก็คือ โวลเตจของคำตอบที่ได้นั้นจะต้องไม่เกินกว่าช่วงของโวลเตจที่สามารถทำงานได้สูงสุดวัตถุประสงค์เหล่านี้ทำได้โดยการทำแอมปลิจูดสเกล กับสมการที่ใช้แทนระบบทางกายภาพก่อนที่จะนำสมการนั้นมาแก้ปัญหาด้วยแอนาลอกคอมพิวเตอร์

การทำแอมปลิจูดสเกลนั้นมีอยู่ ๒ วิธี แต่ถ้าพิจารณาแล้วจะเห็นว่าทั้งสองวิธีนั้นมีพื้นฐานที่เหมือนกันและผลลัพธ์ที่ได้ก็เหมือนกันทุกประการ

วิธีแรกใช้สเกลแฟคเตอร์ที่มีมิติ (dimension) สัมพันธ์กับตัวแปรของคอมพิวเตอร์[5] ในสมการนั้น เช่นในกรณีที่ตัวแปรคือ x สำหรับในคอมพิวเตอร์นั้นใช้แทนด้วยโวลเตจซึ่งมีสัญลักษณ์เป็น e_x ดังนั้น $e_x = a_x \cdot X$ โดยที่ a_x เป็นค่าคงที่อันหนึ่งซึ่งเป็นสเกลแฟคเตอร์ที่มีมิติเป็นโวลต์ต่อหน่วยของ X ในคอมพิวเตอร์ทุกเครื่องจะมีโวลเตจเปรียบเทียบ (Reference voltage) อยู่ ๒ ค่า ค่าหนึ่งเป็นบวกอีกค่าหนึ่งเป็นลบโดยเทียบกับจุดต่อลงดินค่าทั้งสองนี้มี

---

(5) D.E. Hyndman, Analog and Htbrid Computing, 1 st ed. (London: Pergamon Press, 1970), pp.53-56.



รูปที่ 15 ระบบการแกว่งของมวลสปริง

แอมปลิจูดเท่ากัน เพื่อความสะดวกจะพิจารณาให้แอมปลิจูดนั้นมีขนาดเท่ากับ ๑ หน่วยคอมพิวเตอร์จะเขียนแทนด้วย C.U.

ค่าของสเกลแฟคเตอร์นั้นหาได้จากความสัมพันธ์ที่ว่า ค่าสูงสุดของตัวแปรคอมพิวเตอร์ (1 C.U.)นั้นจะมีค่าเท่ากับสเกลแฟคเตอร์คูณกับค่าสูงสุดของตัวแปรของสมการ

$$\{e_x\}max = a_x \{X\}max$$

$$a_x = \frac{\{e_x\}max}{\{X\}max} \qquad \text{C.U./หน่วยของ } x$$

$$= \frac{1}{\{X\}max} \qquad \text{C.U./หน่วยของ } x$$

การประยุกต์วิธีการทำแอมปลิจูดสเกลเข้ากับสมการดิฟเฟอเรนเชียล อันดับสองสำหรับระบบของการแกว่งของมวลสปริง ดังรูปที่ ๑๕

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{M}X = \frac{1}{M}Y \qquad (14)$$

สมการที่ (๑๔) สามารถเขียนโดยใช้สัญลักษณ์จุดแทนดิฟเฟอเรนเชียล

$$\ddot{X} + \frac{D}{M}\dot{X} + \frac{K}{M}X = \frac{1}{M}Y \qquad (15)$$

กำหนดให้ e_{x2}, e_{x1}, e_{x0} และ e_y เป็นตัวแปรของคอมพิวเตอร์แทนตัวแปรของสมการ $\ddot{X}$, $\dot{X}$, X และ Y ตามลำดับดังนี้

$$e_{x2} = a_{x2} \cdot \ddot{X}$$

$$e_{x1} = a_{x1} \cdot \dot{X}$$

$$e_{x0} = a_{x0} \cdot X$$

และ

$$e_y = a_y \cdot Y$$

เมื่อค่าสูงสุดสำหรับตัวแปรของสมการทุกตัวสามารถคำนวณ หรือประมาณออกมาได้แล้ว จะได้ว่า ค่าของสเกลแฟคเตอร์

$$a_{x2} = \frac{1}{[\ddot{X}]_{max}} \quad C.U. / m/ sec.^2$$

$$a_{x1} = \frac{1}{[\dot{X}]_{max}} \quad C.U. / m/sec.$$

$$a_{x0} = \frac{1}{[X]_{max}} \quad C.U. / m$$

$$a_y = \frac{1}{[Y]_{max}} \quad C.U. /N$$

เมื่อเปลี่ยนตัวแปรของสมการไปเป็นตัวแปรของคอมพิวเตอร์ สมการที่ (๑๔) จะเป็น

$$\frac{e_{x2}}{a_{x2}} + \frac{D}{M}\frac{e_{x1}}{a_{x1}} + \frac{K}{M}\frac{a_{x0}}{a_{x0}} = \frac{1}{M}\frac{e_y}{a_y} \qquad (16)$$

คูณตลอดด้วย a_{x2} แล้วย้ายแต่ e_{x2} ไว้ทางซ้ายมือ

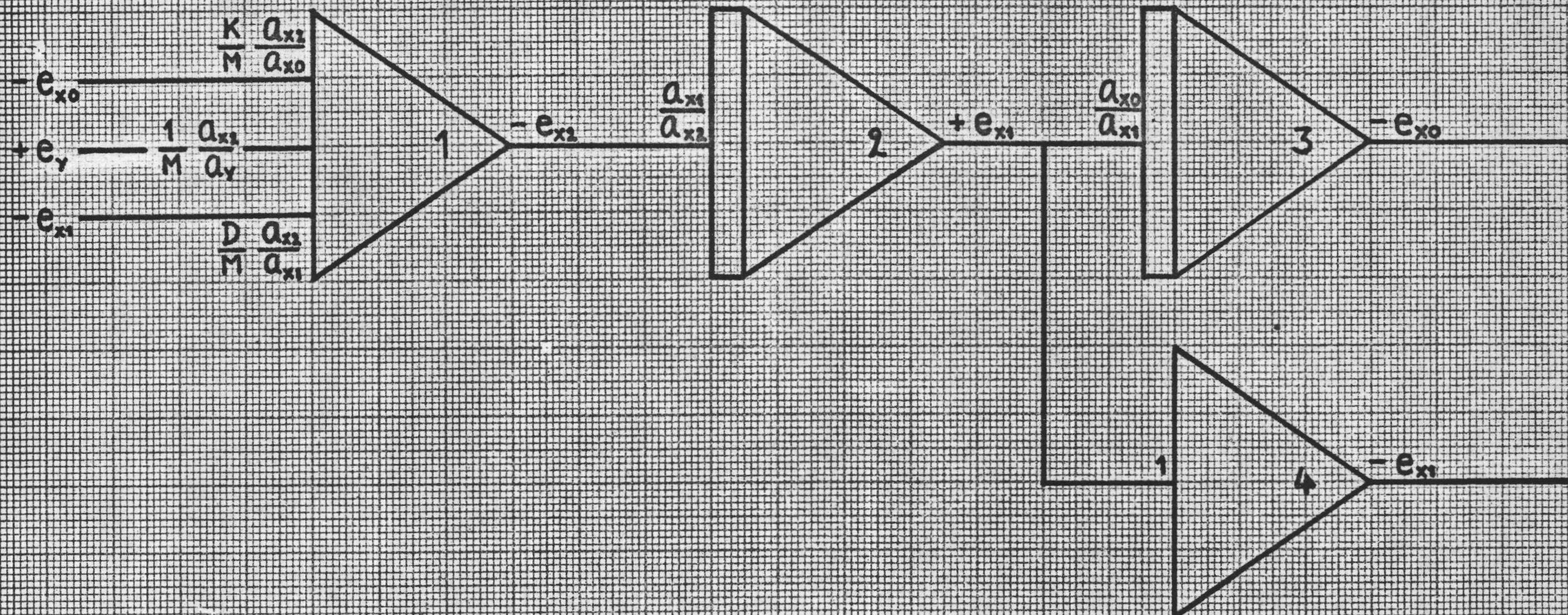
$$x_2 = \frac{1}{M}\frac{x_2}{a_y}\left[e_y\right] - \frac{D}{M}\frac{a_{x2}}{a_{x1}}\left[e_{x1}\right] - \frac{K}{M}\frac{a_{x2}}{a_0}\left[e_{x0}\right] \qquad (17)$$

สัมประสิทธิ์ ของสมการนี้ก็คือ ค่าของการขยายสำหรับอินพุทที่เข้าไปยังแอมปลิ-ไฟเออตัวที่ ๑ ของรูปที่ ๑๖ ขณะที่สเกลแฟคเตอร์สำหรับตัวแปรทั้งหมดนั้นแตกต่างกัน จำเป็นต้องหาค่าการขยายของอินทิเกรเตอร์จากสมการข้างล่าง ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\dot{X}$ กับ $\ddot{X}$ และ X กับ $\dot{X}$ ให้อยู่ในรูปของตัวแปรคอมพิวเตอร์

$$\dot{X} = \int_0^t \ddot{X}\, dt + \dot{X}\Big|_{t=0} \qquad (18)$$

ในรูปของตัวแปรคอมพิวเตอร์จะเป็น

$$\frac{e_{x1}}{e_{x1}} = \int_0^t \frac{e_{x2}}{e_{x2}}\, dt + \frac{e_{x1}}{e_{x1}}\Big|_{t=0} \qquad (19)$$



รูปที่ 16 รูปแบบคอมพิวเตอร์ที่ทำแอมปลิจูดสเกลโดยใช้สเกลแฟกเตอร์ที่มีมิติ

คูณตลอดด้วย a_{x_1} จะได้

$$e_{x_1} = \frac{a_{x_1}}{a_{x_2}} \int_0^t e_{x_2} dt + e_{x_1}\Big|_{t=o} \qquad (20)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$X = \int_0^t \dot{X}\, dt + X\Big|_{t=o} \qquad (21)$$

เมื่อเปลี่ยนให้อยู่ในรูปตัวแปรของคอมพิวเตอร์ในทำนองเดียวกับที่ทำมาแล้ว จะได้

$$e_{x_0} = \frac{a_{x_0}}{a_{x_1}} \int_0^t e_{x_1} dt + e_{x_0}\Big|_{t=o} \qquad (22)$$

จากสมการที่ (๒๐) ค่าการขยายของอินทิเกรเตอร์ตัวแรก ซึ่งก็คือแอมปลิไฟเออตัวที่ ๒ ในรูปที่ ๑๖ คือ a_{x_1}/a_{x_2} จากสมการที่ (๒๒) ค่าการขยายของอินทิเกรเตอร์ตัวที่ ๒ ซึ่งก็คือแอมปลิไฟเออตัวที่ ๓ คือ a_{x_0}/a_{x_1}

วิธีที่สองของการทำแอมปลิจูดสเกลนั้นเรียกว่า วิธีการทำตัวแปรให้เป็นรูปแบบทั่วไป[(6)] (normalised variable techniques). วิธีนี้ตัวแปรของสมการจะถูกทำให้เป็นรูปแบบทั่วไปโดยการหารด้วยค่าสูงสุดของตัวแปร ซึ่งค่าเหล่านี้ก็จะเท่ากับตัวแปรของคอมพิวเตอร์ที่ถูกทำให้เป็นรูปแบบทั่วไปด้วย พิจารณาตัวแปร X ที่มีค่าสูงสุดเป็น Xm เมื่อเขียนในรูปแบบทั่วไปจะเป็น $\left[X/Xm\right]$ ซึ่งจะมีค่าสูงสุดเป็น ๑ และไม่มีมิติ สำหรับในคอมพิวเตอร์นั้น แทนด้วยโวลเตจ e ที่เอาพุทของแอมปลิไฟเออในรูปแบบทั่วไปจะเป็น $\left[e/Vref\right]$ ซึ่งก็จะมีค่าสูงสุดเท่ากับ ๑ เช่นกัน ปริมาณที่อยู่ในรูปแบบทั้ง ๒ อัน สามารถที่จะเทียบให้เท่ากันได้ดังนี้

$$\left[\frac{X}{Xm}\right] = \left[\frac{e}{Vref}\right]$$

---

(6) Ibid., pp.57-60.

สำหรับค่าอื่น ๆ ของเอาพุทโวลเตจ e ที่สอดคล้องกับค่าของ X จะเป็น

$$X = \left[\frac{Xm}{Vref}\right] e$$

ในการเปลี่ยนจากสมการของระบบไปเป็นสมการของคอมพิวเตอร์ ตัวแปรของสมการทุกตัวที่เขียนในรูปแบบทั่วไปนั้น สัมประสิทธิ์ของตัวแปรจะคูณกับค่าสูงสุดของตัวแปรนั้น ๆ

เพื่อที่จะแสดงถึงวิธีการสเกลแบบนี้ จะใช้สมการสำหรับระบบของการแกว่งของมวลสปริงจากรูปที่ ๑๕

$$\ddot{X} + \frac{D}{M}\dot{X} + \frac{K}{M}X = \frac{1}{M}Y \qquad (15)$$

ตัวแปรในรูปแบบทั่วไปจะเป็น

$$\left[\frac{\ddot{X}}{\ddot{X}m}\right], \left[\frac{\dot{X}}{\dot{X}m}\right], \left[\frac{X}{Xm}\right] \text{ และ } \left[\frac{Y}{Ym}\right]$$

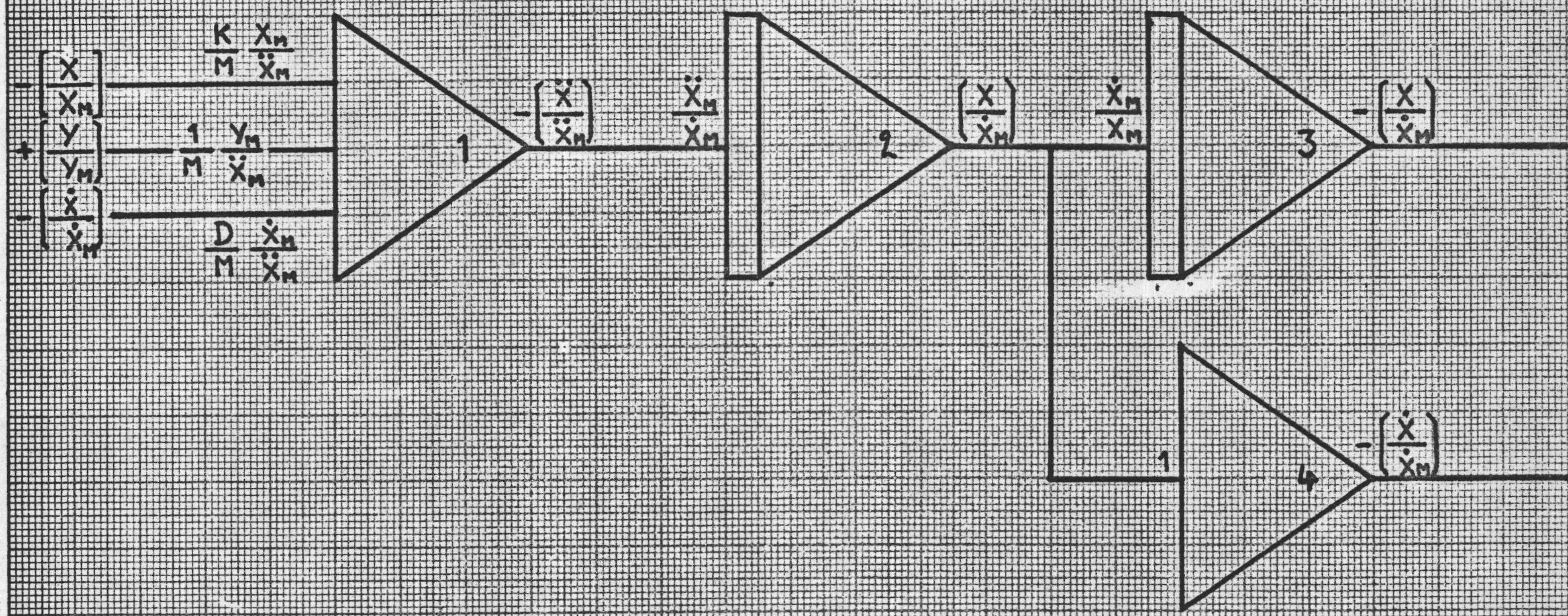
สมการที่ (๑๕) เมื่อแทนด้วยตัวแปรเหล่านี้จะเป็น

$$\ddot{X}m\left[\frac{\ddot{X}}{\ddot{X}m}\right] + \frac{D}{M}\dot{X}m\left[\frac{\dot{X}}{\dot{X}m}\right] + \frac{K}{M}Xm\left[\frac{X}{Xm}\right] = \frac{1}{M}Ym\left[\frac{Y}{Ym}\right] \qquad (23)$$

หารตลอดด้วย $\ddot{X}m$ แล้วย้ายเทอมอื่น ๆ ไปทางขวามือยกเว้นเทอม $[\ddot{X}/\ddot{X}m]$

$$\left[\frac{\ddot{X}}{\ddot{X}m}\right] = \frac{1}{M}\frac{Ym}{\ddot{X}m}\left[\frac{Y}{Ym}\right] - \frac{D}{M}\frac{\dot{X}m}{\ddot{X}m}\left[\frac{\dot{X}}{\dot{X}m}\right] - \frac{K}{M}\frac{Xm}{\ddot{X}m}\left[\frac{X}{Xm}\right] \qquad (24)$$

สัมประสิทธิ์ที่อยู่ทางขวามือก็คือ ค่าการขยายสำหรับอินพุทของแอมปลิไฟเออตัวที่ ๑ ของรูปที่ ๑๗ ส่วนค่าการขยายของอินทิเกรเตอร์นั้นหาได้เช่นเดียวกับวิธีการสเกลวิธีแรก จากสมการข้างล่างที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของ $\dot{X}$ กับ $\ddot{X}$ และ X กับ $\dot{X}$ เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในรูปแบบทั่วไปจะเป็น



รูปที่ 17 รูปแบบคอมพิวเตอร์ที่ทำแอมปลิจูดสเกลโดยวิธีการทำตัวแปรให้เป็นรูปแบบทั่วไป

$$\mathring{X} = \int_0^t \ddot{X}\,dt + \mathring{X}\Big|_{t=o} \qquad (25)$$

$$\mathring{X}m\left[\frac{\mathring{X}}{\mathring{X}m}\right] = \int_o^t \ddot{X}m\left[\frac{\ddot{X}}{\ddot{X}m}\right]dt + \mathring{X}m\left[\frac{\mathring{X}}{\mathring{X}m}\right]\Bigg|_{t=o} \qquad (26)$$

หารตลอดด้วย $\mathring{X}m$ จะได้

$$\left[\frac{\mathring{X}}{\mathring{X}m}\right] = \frac{\ddot{X}m}{\mathring{X}m}\int_o^t \left[\frac{\ddot{X}}{\ddot{X}m}\right]dt + \left[\frac{\mathring{X}}{\mathring{X}m}\right]\Bigg|_{t=o} \qquad (27)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$X = \int_o^t \mathring{X}\,dt + X\Big|_{t=o} \qquad (28)$$

$$\left[\frac{X}{Xm}\right] = \frac{\mathring{X}m}{Xm}\int_o^t \left[\frac{\mathring{X}}{\mathring{X}m}\right]dt + \left[\frac{X}{Xm}\right]\Bigg|_{t=o} \qquad (29)$$

ค่าการขยายของอินทิเกรเตอร์ตัวแรก ซึ่งเป็นแอมปลิไฟเออตัวที่ ๒ ในรูปที่ ๑๗ จากสมการที่ (๒๗) มีค่าเป็น $\ddot{X}m/\mathring{X}m$ ค่าการขยายของอินทิเกรเตอร์ตัวที่สองซึ่งเป็นแอมปลิไฟเออตัวที่ ๓ จาก สมการที่ (๒๙) มีค่าเป็น $\mathring{X}m/Xm$

จะเห็นว่าการทำแอมปลิจูดสเกลทั้ง ๒ วิธีนั้น มีรูปแบบคอมพิวเตอร์ที่มีค่าการขยายที่อินพุทของแอมปลิไฟเออทุกตัวเหมือนกันทุกประการ ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นว่าค่าการขยายของแอมปลิไฟเออต่าง ๆ ในรูปที่ ๑๖ นั้น ก็มีค่าเท่ากันกับแอมปลิไฟเออในรูปที่ ๑๗

พิจารณาค่าการขยายที่อินพุทของแอมปลิไฟเออตัวที่ ๑ ในรูปที่ ๑๖ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\frac{K}{M}\cdot\frac{a_{x_2}}{a_{x_0}}\ ,\quad \frac{1}{M}\cdot\frac{a_{x_2}}{a_y}\ \text{และ}\ \frac{D}{M}\,\frac{a_{x_2}}{a_{x_1}}$$

ถ้าแทนค่าสเกลแฟคเตอร์เหล่านี้ในเทอมค่าสูงสุดของตัวแปรของสมการ

$a_{x_2} = 1/\ddot{X}m$, $a_{x_1} = 1/\mathring{X}m$, $a_{x_0} = 1/Xm$ และ $a_y = 1/Ym$

ค่าการขยายจะเป็น

$$\frac{K}{M} \cdot \frac{1}{\ddot{X}m} \cdot Xm \;,\quad \frac{1}{M}\frac{1}{\ddot{X}m} \cdot Ym \text{ และ } \frac{D}{M} \cdot \frac{1}{\ddot{X}m} \cdot \dot{X}m$$

ซึ่งก็จะเหมือนกับรูปที่ ๑๗

ค่าการขยายของอินทิเกรเตอร์ ในรูปที่ ๑๖ มีค่าเท่ากับ a_{x_1}/a_{x_2} และ a_{x_0}/a_{x_1} เมื่อทำให้อยู่ในเทอมของค่าสูงสุดจะเป็น $\frac{1}{\ddot{X}m} \cdot \dot{X}m$ และ $\frac{1}{Xm} \cdot \dot{X}m$ ซึ่งจะมีค่าเท่ากับค่าการขยายในรูปที่ ๑๗

เพราะฉนั้นการทำแอมปลิจูดสเกลทั้งสองวิธีให้รูปแบบคอมพิวเตอร์แบบเดียวกัน

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงการทำแอมปลิจูดสเกลแบบการทำตัวแปรให้เป็นรูปแบบทั่วไปเท่านั้น ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้รู้ถึงคุณค่าของการใช้แอมปลิจูดสเกล ซึ่งจะเริ่มต้นด้วยการทำฟังก์ชั่นเวลาตามที่กำหนดให้และการประมาณค่าสูงสุด

๒.๔ การทำฟังก์ชั่นเวลาและการทำแอมปลิจูดสเกล (7)

ในการทำฟังก์ชั่นเวลาด้วยแอนาลอกคอมพิวเตอร์ ฟังก์ชั่นที่ใช้มากที่สุด คือ ฟอซซิงฟังก์ชั่นในสมการดิฟเฟอเรนเชียล วิธีพื้นฐานของการทำฟังก์ชั่นเวลาก็ คือ " สังเคราะห์ " สมการดิฟเฟอเรนเชียลซึ่งมีคำตอบเป็นฟังก์ชั่นเวลา ได้แก่ ฟังก์ชั่นทางตรีโกณมิติทั้งหมด, เอ็กโปเนนเชียลฟังก์ชั่นและโพลีโนเมียลฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระ ดังนั้นฟังก์ชั่นที่ต้องการส่วนใหญ่ในทางปฏิบัติอาจจะทำได้โดยวิธีนี้

<u>ตัวอย่างที่ ๔</u> สมมติว่าฟังก์ชั่นที่จะทำคือ

$$y(t) = 25 \sin (2t + \pi/3) \qquad (30)$$

สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่มีคำตอบเป็น $y(t)$ หาได้โดยการดิฟเฟอเรนซิเอท $y(t)$ ต่อๆ ไปจนกระทั่งได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล

---

(7) Rajaraman, <u>Analog Computation and Simulation</u>, 2: pp.31-40.

$$\frac{dy}{dt} = 50\cos(2t + \pi/3) \qquad (31)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -100\sin(2t + \pi/3) = -4y(t) \qquad (32)$$

สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่มีคำตอบเป็น $y(t) = 25\sin(2t + \pi/3)$ คือ

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0 \qquad (33)$$

สภาวะเริ่มต้น :

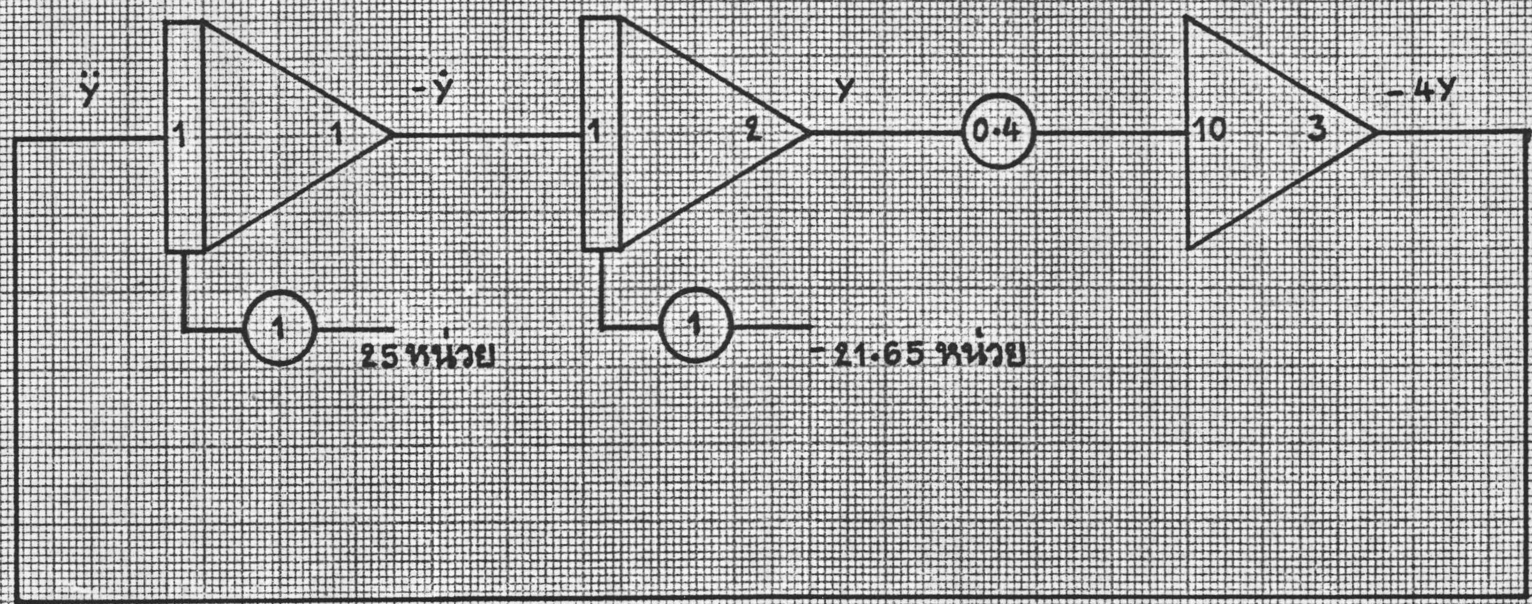
$$y(o) = 25\sin\pi/3 = 21.65 \quad \frac{dy}{dt}(o) = 50\cos\pi/3 = 25$$

เมื่อจำลองการปฏิบัติการของสมการที่ (๓๓) โดยใช้วิธีการแบบบูทสแทรป จะได้รูปแบบดังรูปที่ ๑๘

เมื่อได้รูปแบบคอมพิวเตอร์เรียบร้อยแล้ว ขั้นต่อไปคือ การหาโวลเตจที่แท้จริงที่ป้อนเข้าสู่อินทิเกรเตอร์ที่สภาวะเริ่มต้น โดยการพิจารณาว่า

(ก) แอมปลิไฟเออในแอนาลอกคอมพิวเตอร์นั้น ได้รับการออกแบบให้ทำงานในช่วงของโวลเตจที่ระบุไว้อันหนึ่ง แอมปลิไฟเออแบบเก่าซึ่งเป็นหลอดสุญญากาศจะมีโวลเตจของการใช้งานในช่วง ± 100 โวลต์ ส่วนแบบใหม่นั้นส่วนมากเป็นทรานซิสเตอร์จะมีโวลเตจของการใช้งานในช่วง ±10 โวลต์ โวลเตจสูงสุดและต่ำสุดที่แอมปลิไฟเออได้รับการออกแบบเพื่อใช้งานนั้นเรียกว่า <u>โวลเตจเปรียบเทียบ</u> (reference voltage) ของคอมพิวเตอร์และสัญญลักษณ์ที่ใช้คือ ± Vref. ดังนั้นโวลเตจที่ใช้แทนสภาวะเริ่มต้นในรูปที่ ๑๘ นั้น จะต้องไม่ทำให้แอมปลิไฟเออทำงานเกินขนาด (overload) นั้นคือโวลเตจที่ใช้จะต้องไม่เกินกว่าช่วงของ ± Vref

(ข) เพื่อที่จะทำให้แอมปลิไฟเออทำงานได้ดีที่สุด โดยใช้ ± Vref ให้เป็นประโยชน์มากที่สุด (กล่าวคือจะต้องไม่คิดเพียงแต่ว่าจะใช้โวลเตจที่ต่ำกว่า ± Vref เท่านั้น) โดยจะต้องพยายามใช้โวลเตจให้เข้าใกล้ ± Vref มากที่สุด ตัวอย่างเช่นถ้าช่วงของการทำงานเป็น ±10 โวลต์ แต่ใช้เอาพุทโวลเตจของแอมปลิไฟเออเพียง ±1 โวลต์. แอมปลิไฟเออไม่ได้ทำงานเกินขนาดแต่สัดส่วนของสิ่งรบกวนเมื่อเทียบกับสัญญาณนั้นมีมาก



รูปที่ 18 รูปแบบคอมพิวเตอร์ของ $y(t) = 25 \sin(2t + \pi/3)$

ทำให้คำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง ดังนั้นโวลเตจที่สอดคล้องกับสภาวะเริ่มต้นในรูปที่ ๑๘ ก็คือ โวลเตจที่ทำให้เอาพุทของแอมปลิไฟเออทุกตัวเข้าใกล้ ± Vref เท่าที่จะทำได้

วิธีเลือกโวลเตจที่ถูกต้องเพื่อแทนสภาวะเริ่มต้นและฟอซซิงฟังก์ชั่นของสมการดิฟเฟอเรนเชียล และเพื่อให้แน่ใจว่าได้ใช้แอมปลิไฟเออให้เกิดประโยชน์ได้เต็มที่ วิธีการนี้เรียกว่า <u>การทำแอมปลิจูดสเกล</u> และจะแสดงวิธีการทำแอมปลิจูดสเกลแบบที่เรียกว่า <u>วิธีการทำตัวแปรให้เป็นรูปแบบทั่วไป</u> โดยใช้สมการที่ (๓๓) เป็นตัวอย่าง

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0 \qquad (33)$$

$$y(o) = 21.65 \qquad \frac{dy(o)}{dt} = 25$$

ในการใช้วิธีการทำตัวแปรให้เป็นรูปแบบทั่วไปนั้น จำเป็นต้องทราบค่าสัมบูรณ์สูงสุด (maximum absolute values) ของตัวแปรตาม (ในที่นี้คือy) และอนุพันธ์ของ y จนถึง d^2y/dt^2 จากสมการที่ (๓๐), (๓๑) และ (๓๒) จะได้ว่า

$$|Y|_m = 25$$

$$\left|\frac{dy}{dt}\right|_m = 50$$

$$\left|\frac{d^2y}{dt^2}\right|_m = 100$$

จากการใช้ค่าสูงสุดไปหารตัวแปรในสมการและสภาวะเริ่มต้นจะได้สมการที่อยู่ในรูปแบบทั่วไปเป็น

$$100\left[\frac{\ddot{Y}}{100}\right] + 4\left[\frac{Y}{25}\right] 25 = 0 \qquad (34)$$

หรือ $$[\ddot{Y}/100] = -[Y/25]$$

$$\left[\frac{Y(0)}{25}\right] = \frac{21.65}{25} = 0,866, \quad \left[\frac{\dot{Y}(0)}{50}\right] = \frac{25}{50} = 0,5$$

สมการที่ (๓๔) เป็นสมการที่ใช้กับแอนาลอกคอมพิวเตอร์ที่ทำให้เอาพุทของแอมปลิไฟเออทุกตัวอยู่ในรูปแบบทั่วไป รูปแบบคอมพิวเตอร์จะเป็นดังรูปที่ ๑๙ สังเกตุว่า $[\dot{Y}/100]$ ถูกอินทิเกรตด้วยอินทิเกรเตอร์ที่มีค่าการขยาย* $[100/50] = 2$. ค่าการขยายเท่ากับ ๒ นี้ จะทำให้เอาพุทอยู่ในรูปแบบทั่วไป คือ $-[\dot{Y}/50]$ กล่าว-ได้อีกอย่างหนึ่งคือ $\frac{100}{50}\int[\ddot{Y}/100] = -[\dot{Y}/50]$ ในทำนองเดียวกัน $-[\dot{Y}/50]$ ถูกอินทิเกรตด้วยอินทิเกรเตอร์ที่มีค่าการขยาย $[50/25] = 2$ เพื่อให้ได้เอาพุทอยู่ในรูปแบบทั่วไป $[Y/25]$. เหตุผลที่ต้องทำตัวแปรทุกตัวให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปรวมทั้งการทำให้เอาพุทของแอมปลิไฟเออทุกตัวอยู่ในรูปแบบทั่วไปนั้น เนื่องจากเหตุผลที่ว่าช่วงของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในรูปแบบทั่วไปจะเป็น ±1 ถ้าใช้ ± Vref แทน ±1 ในคอม-พิวเตอร์แล้ว ช่วงของการทำงานของแอมปลิไฟเออทั้งหมดจะใช้ประโยชน์ได้อย่างเต็มที่และไม่มีแอมปลิไฟเออที่ทำงานเกินขนาด. อันนี้ทำได้โดยใช้ + Vref และ −Vref ในตำแหน่งของ +1 และ −1 ตามลำดับ เช่น โวลเตจที่ใช้กับโพเทนชิโอมิเตอร์ของสภาวะเริ่มต้นในรูปที่ ๑๙

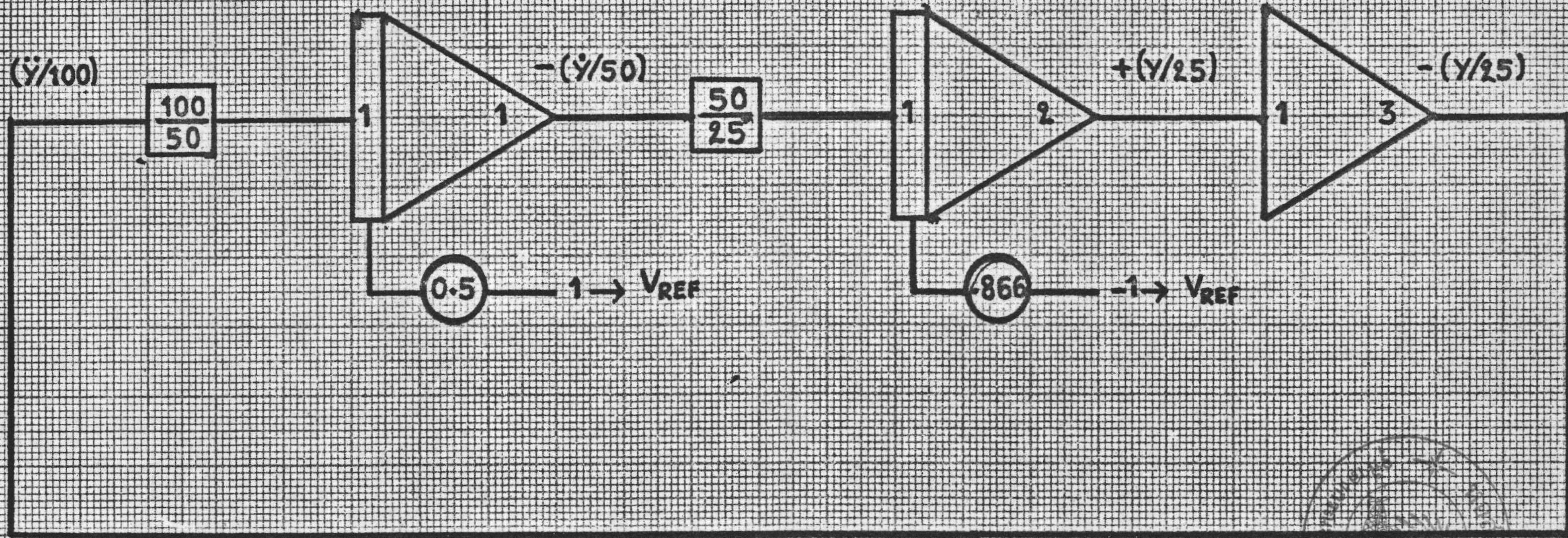
เมื่อ $[Y/25]$ เป็นคำตอบที่ได้รับจากคอมพิวเตอร์ และพลอต (plot) ออกมาดังรูปที่ ๒๐ พลอตเตอร์จะถูกปรับเทียบ (calibrate) ในหน่วยของโวลต์และพลอตออกมาในหน่วยของโวลต์ เพื่อที่จะหาผลลัพธ์ในหน่วยของปัญหา เริ่มแรก เอาพุทโวลเตจในรูปแบบทั่วไปจะถูกนำไปเทียบกับค่าโวลเตจสูงสุดที่ใช้ในระบบ ซึ่งในที่นี้คือ Vref ซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ ๒๐ วัตถุประสงค์ที่แท้จริงนั้นก็เพื่อที่จะใช้สมการที่จะกล่าวต่อไป อธิบายผลลัพธ์ที่พลอตออกมา

$$[Y/Y_m] = [V/Vref] \tag{35}$$

$$Y = \left[\frac{V}{Vref}\right] Y_m \tag{36}$$

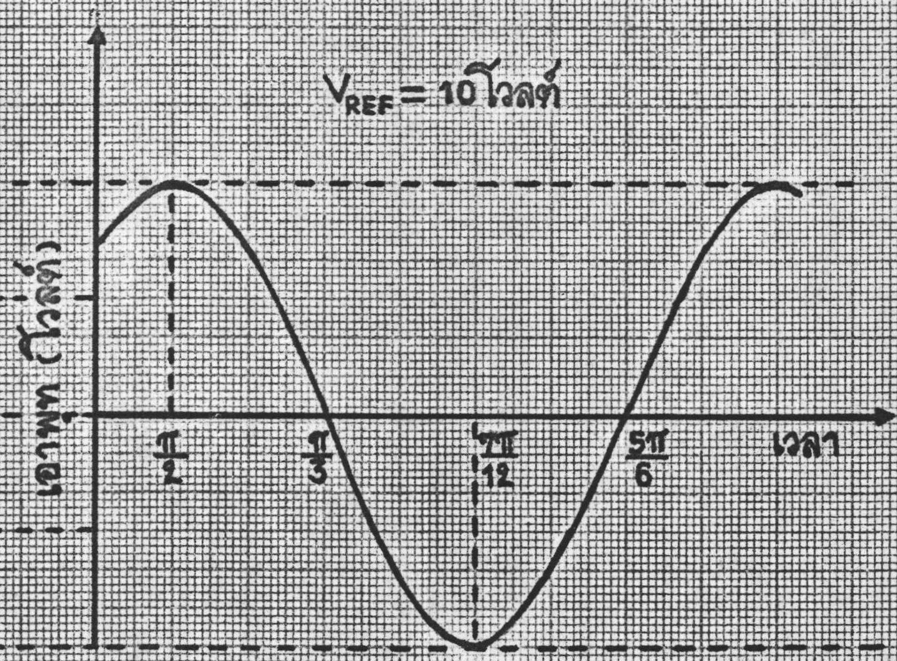
---

* ค่าการขยายนี้ใช้สัญญลักษณ์สี่เหลี่ยมแทน



รูปที่ 19 รูปแบบคอมพิวเตอร์ของ $y(t) = 25 \sin(2t + \pi/3)$

Y	$\frac{Y}{25}$	$\frac{V}{V_{REF}}$	เอาพุทในรูปแบบทั่วไป
25	1	1	10 โวลต์
12.5	0.5	0.5	5 โวลต์
0	0	0	0 โวลต์
-12.5	-0.5	-0.5	-5 โวลต์
-25	-1	-1	-10 โวลต์



รูปที่ 20 $Y(t) = 25 \sin(2t + \pi/3)$

ตัวอย่างที่ ๕ สมมติว่าฟังก์ชั่นที่ต้องการศึกษา คือ

$$Y(t) = 5(1 - e^{-.5t} \cos 2t) \tag{37}$$

รูปแบบทั่วไปของสมการที่ (๓๗) คือ

$$Z(t) = A + Be^{-\alpha t} \cos(\omega t + \phi) \tag{38}$$

ดิฟเฟอเรนชิเอทสมการที่ (๓๘)

$$\frac{dZ}{dt} = -\alpha Be^{-\alpha t} \cos(\omega t+\phi) - \omega Be^{-\alpha t} \sin(\omega t+\phi)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -\alpha(Z-A) - \omega Be^{-\alpha t} \sin(\omega t+\phi) \tag{39}$$

ดิฟเฟอเรนชิเอทสมการที่ (๓๙)

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -\frac{\alpha dZ}{dt} + \omega\alpha Be^{-\alpha t} \sin(\omega t+\phi) - \omega^2 Be^{-\alpha t} \cos(\omega t+\phi)$$

$$= -\frac{\alpha dZ}{dt} - \alpha^2(Z-A) - \frac{\alpha dZ}{dt} - \omega^2(Z-A)$$

หรือ

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{2\alpha dZ}{dt} + (\alpha^2 + \omega^2)Z = A(\alpha^2 + \omega^2) \tag{40}$$

สภาวะเริ่มต้นสำหรับสมการข้างบนที่ได้จากสมการที่ (๓๘) และ (๓๙) คือ

$$Z(0) = A + B \cos\phi \tag{41}$$

$$\frac{dZ(0)}{dt} = -\alpha \cos\phi - \omega B \sin\phi$$

$$= -B\sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \cos(\phi - \theta)$$

โดยที่ $\theta = \tan^{-1}(\omega/\alpha)$ (42)

ค่าสัมบูรณ์สูงสุดของ Z และ dZ/dt จากสมการที่ (๓๘) และ (๓๙) คือ

$$Zm = |A| + |B| \tag{43}$$

$$\frac{dZ}{dt} = -Be^{-\alpha t}\alpha\left[\cos(\omega t+\phi) + \omega\sin(\omega t+\phi)\right]$$

$$= B\sqrt{\alpha^2+\omega^2}\, e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi - \theta)$$

โดยที่ $\theta = \tan^{-1}(\omega/\alpha)$

ดังนั้น $$\left[\frac{dZ}{dt}\right]_m = |B|\sqrt{\alpha^2+\omega^2} \tag{44}$$

เทียบสมการที่ (๓๗) กับสมการที่ (๓๘) จะได้ว่า

$$A = 5,\quad B = -5,\quad \alpha = 0.5,\ \omega = 2,\ \phi = 0$$

ดังนั้นสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่ได้คือ

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 4.25Y = 21.25 \tag{45}$$

$$Y(0) = A + B\cos\phi = 5 - 5 = 0$$

$$\frac{dY(0)}{dt} = -\alpha B = 2.5 \tag{46}$$

$$Y_m = 10,\ \left.\frac{dY}{dt}\right|_m = 5\sqrt{4.25} = 10.3$$

สมการที่ (๔๕) ทำให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปด้วยการใช้ค่าสูงสุด

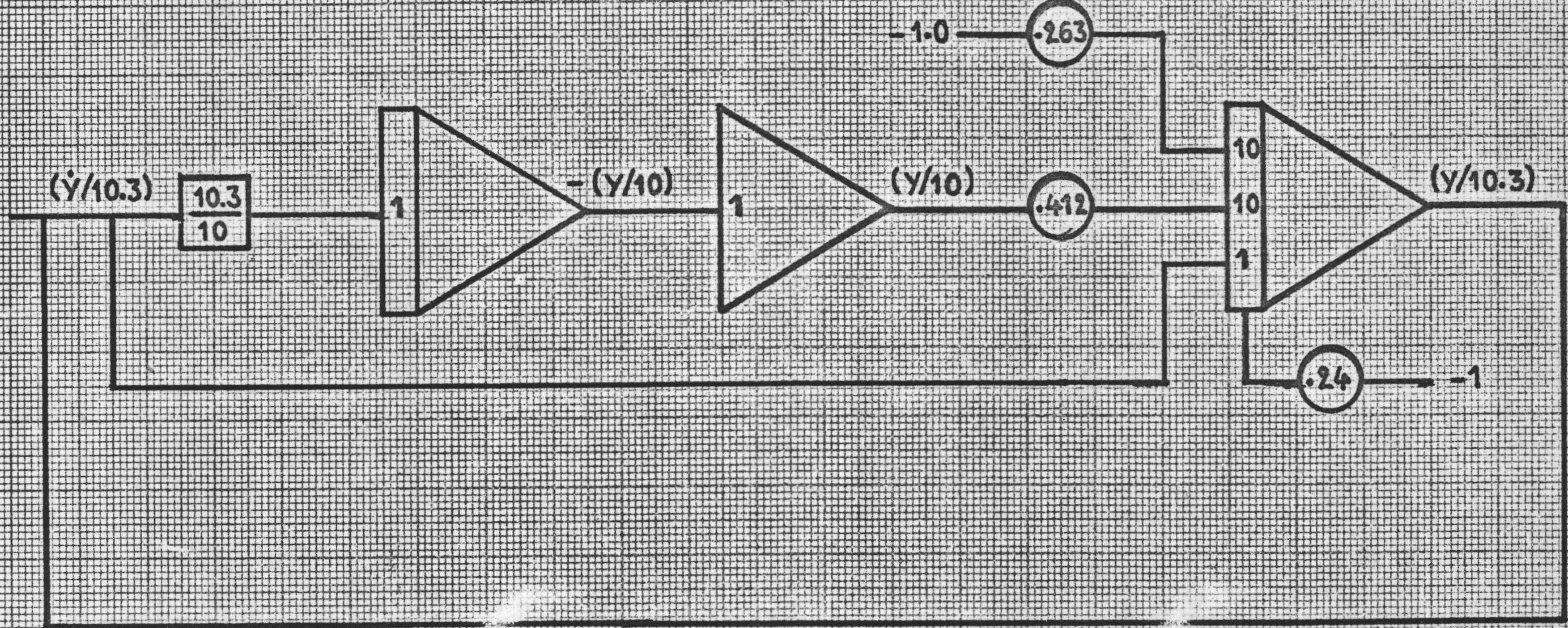
$$\ddot{Y} = -[\mathring{Y}/10.3]\,10.3 - 4.25\,[Y/10]\,10 + 21.25 \tag{47}$$

$$\left[\frac{Y(0)}{10}\right] = 0\ ,\ \left[\frac{\mathring{Y}(0)}{10.3}\right] = \left[\frac{2.5}{10.3}\right] = 0.24$$

อินทิเกรตสมการที่ (๔๗) ทั้งสองข้างแล้วจัดเทอมใหม่จะได้

$$\int\ddot{Y} = \mathring{Y} = [\mathring{Y}/10.3]\,10.3 = \int \{10.3[\mathring{Y}/10.3] + 4.25\,[Y/10]\,10 - 21.25\}dt$$

หรือ



รูปที่ 21 รูปแบบคอมพิวเตอร์ของ $y(t) = 5(1 - e^{-.5t} \cos 2t)$

$$\left[\mathring{Y}/10.3\right] = -\int\{\left[\mathring{Y}/10.3\right] + 4.12\left[Y/10\right] - 2.63\}\,dt \qquad (48)$$

$$\left[Y(0)/10\right] = 0, \qquad \left[\mathring{Y}(0)/10.3\right] = 0.24$$

จากสมการที่ (๔๘) อาจจะใช้วิธีการแบบบูทสแทรปได้ดังนี้

ขั้นที่ ๑: สมมติว่าที่จุด A ของรูปที่ ๒๑ มีค่าเป็น $\left[\mathring{Y}/10.3\right]$

ขั้นที่ ๒: อินทิเกรต $\left[\mathring{Y}/10.3\right]$ ด้วยอินทิเกรเตอร์ที่มีค่าการขยายเท่ากับ $\left[10.3/10\right]$ จะได้ $-\left[Y/10\right]$ ค่าของการขยายที่เลือกนี้ จะทำให้เอาพุทของอินทิเกรเตอร์ที่ได้นั้นอยู่ในรูปแบบทั่วไป

ขั้นที่ ๓: ป้อน $-\left[Y/10\right]$ เข้าไปยังแอมปลิไฟเออที่มีค่าของการขยายเท่ากับ ๑ จะได้ $+\left[Y/10\right]$

ขั้นที่ ๔: จากการรวม $\{\left[\mathring{Y}/10.3\right]+4.12\left[Y/10\right] - 2.63\}$ และอินทิเกรต

ขั้นที่ ๕: ผลที่ได้จากการอินทิเกรตในขั้นที่ ๔ มีค่าเท่ากับ $\left[\mathring{Y}/10.3\right]$ เหมือนกับที่แสดงไว้ในสมการที่ (๔๘) (จำไว้ว่าอินทิเกรเตอร์นั้นก็เปลี่ยนเครื่องหมายด้วย)

ขั้นที่ ๖: ต่อเอาพุทของอินทิเกรเตอร์ไปยังจุด A รูปแบบคอมพิวเตอร์ที่ได้ก็จะเป็นดังรูปที่ ๒๑

วิธีการทำบูทสแทรปที่แสดงข้างบนนี้ แตกต่างจากวิธีที่ได้เคยแสดงมาก่อน ซึ่งเป็นแบบที่อนุพันธ์สูงสุดของตัวแปรตามถูกนำมาใช้ในการทำบูทสแทรป ข้อดีของวิธีนี้ก็คือ ใช้จำนวนแอมปลิไฟเออน้อยที่สุด อีกประการหนึ่งก็คือ ไม่จำเป็นต้องทราบค่าสูงสุดของ $\ddot{Y}$ แต่มีข้อเสียที่ว่าวิธีนี้ไม่สามารถจะแสดงค่าของ $\ddot{Y}$

<u>ตัวอย่างที่ ๖.</u> ต้องการสร้างฟังก์ชั่น

$$f(t) = 0.5t^2 + 10\,e^{-2t} \text{ สำหรับ } 10 \geqslant t \geqslant 0 \qquad (49)$$

เทคนิคง่าย ๆ ในการสร้างฟังก์ชั่น f(t) ก็คือการเขียน f(t) ให้อยู่ในรูป

$$f(t) = g(t) + h(t) \qquad (50)$$

$$\text{โดยที่ } g(t) = 0.5t^2 \qquad (51)$$

$$\text{และ } h(t) = 10e^{-2t} \qquad (52)$$

ตอนนี้ g(t) และ h(t) จะถูกสร้างออกมาโดยแยกจากกันแล้วนำมารวมเข้าด้วยกัน

$$g(t) = 0.5t^2 \;,\quad |g(t)|_m = 50 \quad \text{ที่ } t = 10$$

$$\frac{dg}{dt} = t \;,\quad \left|\frac{dg}{dt}\right|_m = 10 \quad \text{ขณะที่ } t \leqslant 10 \qquad (53)$$

$$\frac{d^2g}{dt} = 1$$

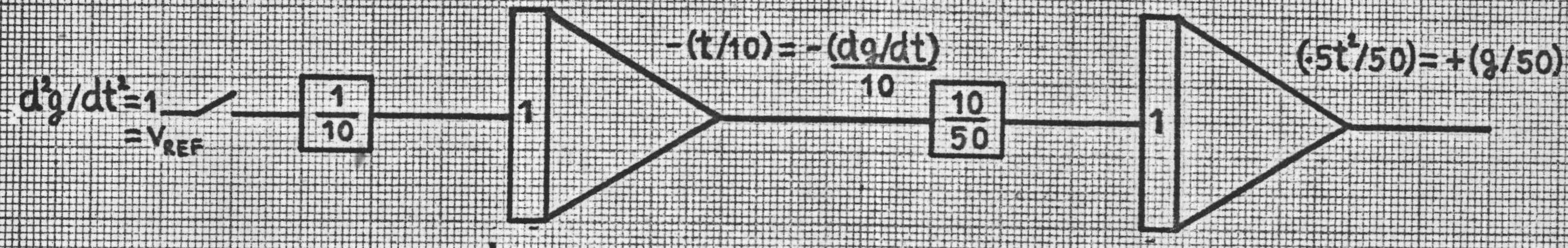
รูปที่ ๒๒ แสดงถึงรูปแบบคอมพิวเตอร์ในการสร้างฟังก์ชั่น g(t) [สังเกตุ : ถ้า $\frac{d^2g}{dt^2} = -1$ จะได้ $-[g/50]$ เป็นเอาพุทของอินทิเกคเตอร์ตัวที่สองในรูปที่ ๒๒]

จากสมการที่ (๕๒)

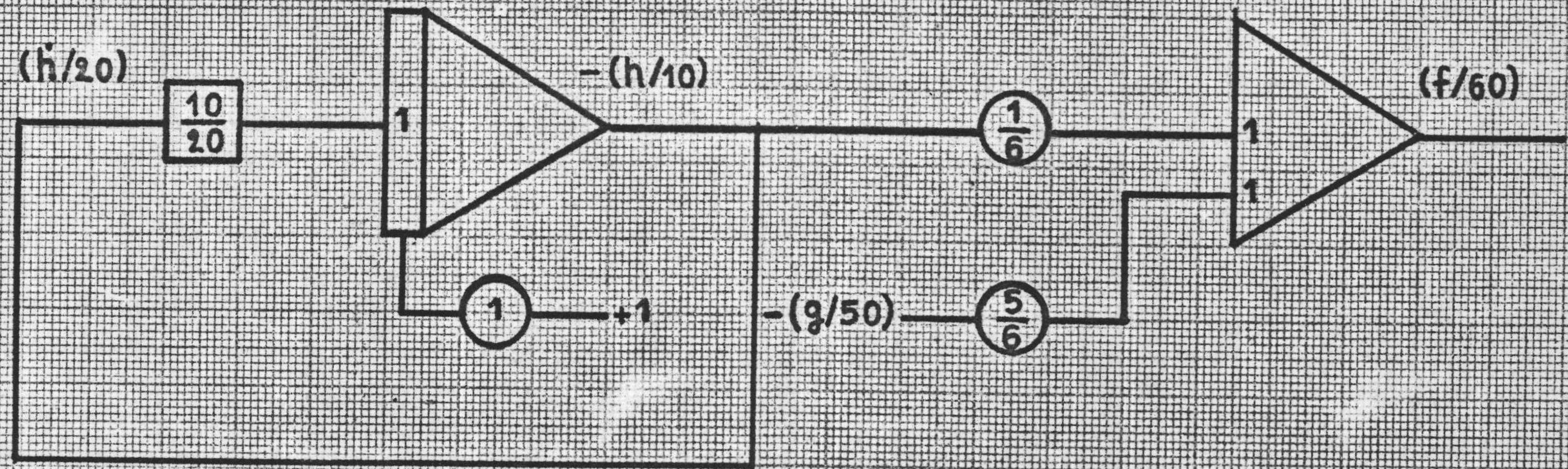
$$h(t) = 10e^{-2t} \;,\; |h|m = 10 \;,\; h(0) = 10$$

$$\frac{dh}{dt} = -20\,e^{-2t}, \quad \left|\frac{dh}{dt}\right|_m = 20$$

$$= -2h(t)$$



รูปที่ ๒๒ รูปแบบคอมพิวเตอร์ของ $g(t) = 0.5t^2$



รูปที่ ๒3 รูปแบบคอมพิวเตอร์ของ $f(t) = 0.5t^2 + 10e^{-2t}$

ได้สมการดิฟเฟอเรนเชียลเป็น

$$20\left[\frac{dh/dt}{20}\right] + 20\left[\frac{h(t)}{10}\right] = 0 \qquad (54)$$

$$\left[\frac{h(0)}{10}\right] = 1$$

จากสมการข้างบนนี้จะได้ รูปแบบของคอมพิวเตอร์ดังรูปที่ ๒๓

จากสมการที่ (๕๐) จะเห็นว่า

$$|f(t)|_m = 50 + 10 = 60$$

f(t) ในรูปแบบทั่วไปจะเป็น

$$60[f/60] = 50\,[g/50] + 10[h/10]$$

หรือ $$[f/60] = \frac{5}{6}\,[g/50] + \frac{1}{6}\,[h/10] \qquad (55)$$

รูปที่ ๒๓ แสดงถึงรูปแบบคอมพิวเตอร์ของฟังก์ชั่น f(t) ซึ่งเกิดจากการรวมกันของฟังก์ชั่น g(t) และ h(t)

๒.๖ <u>การประมาณค่าสูงสุด</u> (8)

จะเห็นได้ว่าค่าสูงสุดของตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามนั้น จำเป็นต้องหาเพื่อนำไปใช้ในการทำแอมปลิจูดสเกลของสมการดิฟเฟอเรนเชียล จากที่กล่าวมาแล้วนั้น ค่าสูงสุดเหล่านี้สามารถทราบได้จากฟังก์ชั่นที่กำหนดให้ แต่ในทางปฏิบัตินั้นสมการดิฟเฟอเรนเชียลจะกำหนดมาให้และสิ่งที่ต้องการคือคำตอบของสมการ ดังนั้น ค่าสูงสุดของคำตอบ (ในที่นี้คือตัวแปรตาม) และอนุพันธ์ของตัวแปรนั้นจะไม่ทราบ ทำให้ต้องทำการประมาณค่าสูงสุดเหล่านี้ ในการประมาณนั้นจะต้องทราบบางสิ่งบางอย่าง เช่น

๑. ความรู้เกี่ยวกับระบบทางกายภาพที่ใช้แทนด้วยสมการดิฟเฟอเรนเชียล

๒. ความรู้ทางด้านทฤษฎีเกี่ยวกับธรรมชาติของคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

---

(8) Ibid., pp. 40-47.

๓. ความชำนาญซึ่งขึ้นกับประสพการณ์

ขณะที่การสเกลที่ถูกต้องจริง ๆ นั้นเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อทราบคำตอบแล้วเท่านั้น ดังนั้น การสเกลก็เป็นขบวนการที่จะต้องทดลองให้มีความผิดพลาดน้อยที่สุด (trial and error process) โดยเริ่มต้นด้วยการสมมติค่าสูงสุดของตัวแปรและอนุพันธ์ของตัวแปร และสเกล ในขั้นเบื้องต้น . สมการที่สเกลแล้วก็จะนำมาแก้ปัญหาด้วยคอมพิวเตอร์. เอาพุทของแอมปลิไฟเออทั้งหมดในคอมพิวเตอร์ที่จัดไว้นั้นสามารถวัดออกมาได้ จากการวัดค่าเหล่านี้ถ้าค่าที่ได้น้อยเกินไปหรือมากเกินกว่าโวลเตอสูงสุดที่ใช้ก็จำเป็นต้องทำการประมาณค่าสูงสุดใหม่ ขบวนการแบบนี้จะถูกทำซ้ำแล้วซ้ำอีกจนกระทั่งการสเกลนั้นเป็นที่พอใจ วิธีการทดลองให้มีความผิดพลาดน้อยที่สุดมีขั้นตอนดังนี้

การประมาณค่าสูงสุดในขั้นแรก

↓

→ ทำแอมปลิจูดสเกลกับสมการดิฟเฟอเรนเชียล

↓

วัดเอาพุทของแอมปลิไฟเออทุกตัว

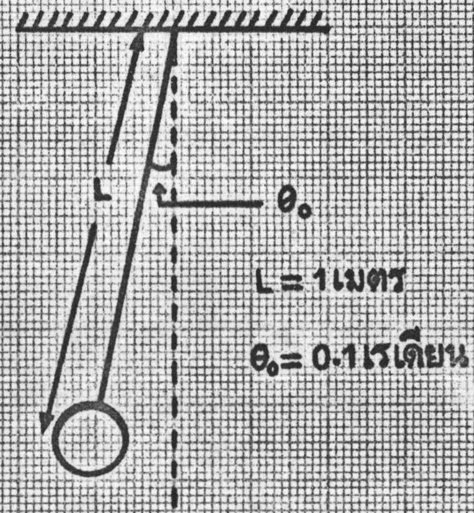
↓

ดูว่าเอาพุทที่ได้นั้นอยู่ในขอบเขตที่ต้องการหรือไม่? $\xrightarrow{\text{ยอมรับ}}$ สิ้นสุด

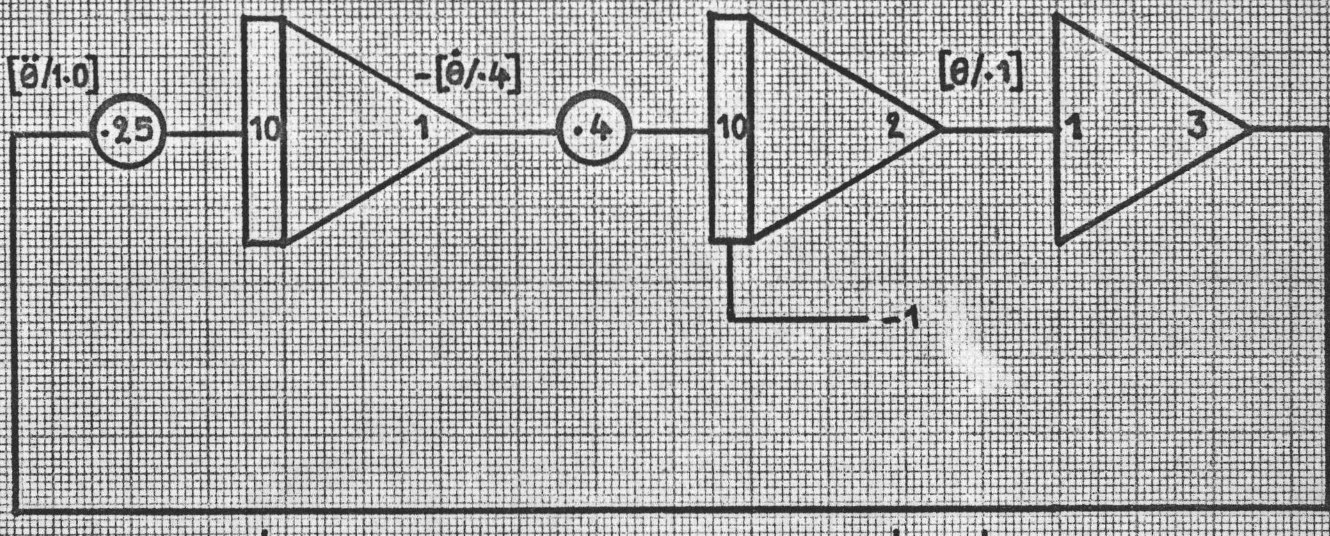
↓ ไม่ยอมรับ

ทำการประมาณค่าสูงสุดใหม่

<u>ตัวอย่างที่ ๗</u> ลูกตุ้มนาฬิกาแบบง่าย ๆ อันหนึ่งดังที่แสดงในรูปที่ ๒๔ สมมติว่าต้องการทำให้ลูกตุ้มออกจากตำแหน่งที่หยุดนิ่งเป็นมุม θ ที่ $t = 0$ แล้วก็ปล่อยออกไป สมการของการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มนาฬิกาสำหรับการแกว่งที่ทำมุมน้อย ๆ จะเป็น



รูปที่ 24 ลูกตุ้มนาฬิกาแบบง่าย



รูปที่ 25 รูปแบบคอมพิวเตอร์ของการเคลื่อนที่ของลูกตุ้ม

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad (56)$$

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \mathring{\theta}(0) = 0$$

จากการแทนค่าของ g และ L จะได้

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 9.8 = 0 \qquad (57)$$

$$\theta(0) = 0.1 \qquad \mathring{\theta}(0) = 0$$

เมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อลูกตุ้มนาฬิกา จากการพิจารณาทางด้านกายภาพ จะทราบว่าค่าสูงสุดของ θ จะมีค่าเท่ากับ ๐.๑ เรเดียน และยังทราบอีกด้วยว่าลูกตุ้มนาฬิกาเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิคด้วยความถี่ของการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคเท่ากับ $\sqrt{g/L}$ ดังนั้นคำตอบจะอยู่ในรูปของ

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{g/L})\, t \qquad (58)$$

ค่าสูงสุดของ $\mathring{\theta}_0$ จะมีค่าเท่ากับ $\sqrt{g/L}\ \theta_m$ และ

ค่าสูงสุดของ $\ddot{\theta}$ มีค่าเท่ากับ $(g/L)\ \theta_m$

ดังนั้นการประมาณที่ได้คือ

$$\theta_m = 0.1, \quad \mathring{\theta}_m = (3.2)(0.1) = 0.32, \quad \ddot{\theta}_m = (9.8)(0.1) = 0.98$$

เพื่อความสะดวกทางด้านตัวเลข (และเป็นการลดความคลาดเคลื่อนทางตัวเลข) จะได้ค่าสูงสุดเป็น

$$\theta_m = 0.1, \ \mathring{\theta}_m = 0.4, \qquad \ddot{\theta}_m = 1.0$$

จากการใช้ค่าเหล่านี้ สมการที่ (๕๗) ที่อยู่ในรูปแบบทั่วไป คือ

$$\left[\frac{\ddot{\theta}}{1.0}\right]1.0 + 9.8\left[\frac{\theta}{0.1}\right] 0.1 = 0$$

$$\left[\frac{\theta(0)}{0.1}\right] = \frac{0.1}{0.1} = 1.0, \qquad \mathring{\theta}(0) = 0$$

หรือ $[\theta/1.0] + 0.98\,[\theta/0.1] = 0$ (59)

จากสมการที่ (๕๙) จะได้รูปแบบของคอมพิวเตอร์ดังรูปที่ ๒๕ สังเกตุว่าเอาพุท ของแอมปลิไฟเออทุกตัวนั้นอยู่ในรูปแบบทั่วไป

๒.๖.๑ การประมาณค่าสูงสุดของแอมปลิจูดของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

ในหัวข้อนี้จะได้พิจารณาถึงการประมาณค่าสูงสุดของคำตอบจากสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสอง ซึ่งถือว่าเป็นสมการที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์ทางกายภาพได้อย่างกว้างขวาง ดังนั้นจึงเป็นที่สนใจในทางปฏิบัติ

สมมติให้สมการเป็น

$$\frac{ad^2X}{dt^2} + b\frac{dX}{dt} + cX = 0 \qquad (60)$$

$$X(0) = K \qquad \mathring{X}(0) = 0$$

ลักษณะของคำตอบของสมการที่ (๖๐)ขึ้นอยู่กับรากของสมการช่วย

$$aq^2 + bq + c = 0 \qquad (61)$$

แบ่งออกได้เป็น ๓ กรณี คือ

กรณีที่ ๑

รากทั้งสองเป็นค่าจริง กรณีนี้ $b^2 > 4ac$

คำตอบในกรณีนี้อยู่ในรูปของ

$$X(t) = Ae^{-q_1t} + Be^{-q_2t} \qquad (62)$$

$$q_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac})/2a$$

วัตถุประสงค์อันดับแรกในที่นี้คือการประมาณค่าสูงสุดอย่างรวดเร็ว โดยให้ b^2 มีค่ามากกว่า 4 ac ประมาณ $b^2/2$ ดังนั้น

$$q_{1,2} = (-\,b \pm b/2)/2a \;\simeq (-\,b \pm\; 2b/3)/2a$$

$$= \frac{-b}{6a}\;, \qquad \frac{-5b}{6a} \qquad (63)$$

$$q_{1,2} = -\alpha/6, \quad -5\alpha/6 \quad \text{โดยที่} \quad \alpha = b/a$$

คำตอบโดยประมาณจะเป็น

$$X(t) = Ae^{-\alpha t/6} + Be^{-5\alpha t/6} \tag{64}$$

$$X(0) = K = A + B$$

$$\mathring{X}(0) = -A(\alpha/6) - B(5\alpha/6) = 0 \quad \text{หรือ } A = -5B$$

ดังนั้น

$$B = -K/4 \quad \text{และ} \quad A = 5K/4$$

เมื่อแทนค่า A และ B แล้วจะได้

$$|X_m| = K \tag{65}$$

$$|\mathring{X}_m| = (5K/4)(\alpha/6) \sim 0.2K\alpha \tag{66}$$

$$|\ddot{X}_m| = 0.2K\alpha^2 \tag{67}$$

<u>กรณีที่ ๒</u>

รากของสมการที่ (61) มีค่าเท่ากัน ในกรณีนี้ $b^2 = 4ac$ คำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$a\frac{d^2X}{dt^2} + b\frac{dX}{dt} + cX = F \tag{68}$$

โดยมี $X(0) = \mathring{X}(0) = 0$

จะอยู่ในรูปของ

$$X(t) = (A+Bt)e^{-\alpha t/2} + F_1 \tag{69}$$

โดยที่ $F_1 = F/c$ และ $\alpha = b/a$

เมื่อเวลา $t = 0$

$$X(0) = A + F_1 = 0 \quad \text{หรือ} \quad A = -F_1 \tag{70}$$

$$\mathring{X}(0) = -\alpha A/2 + B = 0 \quad \text{หรือ} B = -\alpha F_1/2 \tag{71}$$

ดังนั้น

$$X(t) = -\left[F_1 + \alpha F_1 t/2\right] e^{-\alpha t/2} + F_1 \quad (71)$$

โดยการดิฟเฟอเรนซิเอท X(t) และให้เท่ากับศูนย์ ค่าของ t ขณะที่ X(t) มีค่าสูงสุดนั้น พบว่า $t = \infty$ ดังนั้น

$$|X_m| = F_1 \quad (73)$$

โดยการดิฟเฟอเรนซิเอท $\mathring{X}(t)$ และให้เท่ากับศูนย์ ค่าของ t ขณะที่ $\mathring{X}(t)$ มีค่าสูงสุดนั้น พบว่า $t = 2/\alpha$ และใช้ค่าของ $t = 2/\alpha$ จะได้

$$|\mathring{X}_m| = \alpha F_1 e^{-1}/2 \quad (74)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$|\ddot{X}_m| = (\alpha/2)^2 F_1 \quad (75)$$

<u>กรณีที่ ๓</u>

กรณีที่ $b^2 << 4ac$ ในกรณีนี้ ถ้าสมการดิฟเฟอเรนเชียลเป็น

$$a\frac{d^2X}{dt^2} + b\frac{dX}{dt} + cX = F \quad (76)$$

$$X(0) = K \qquad \mathring{X}(0) = 0$$

คำตอบอยู่ในรูปของ

$$X(t) = Ae^{-\alpha t} \cos\{(\sqrt{4ac - b^2}/2a)t + \phi\} + F/c \quad (77)$$

ขณะที่ $b^2 << 4ac$ จากสมการข้างบนประมาณได้ว่า

$$X(t) \simeq A\cos(\omega t + \phi) + F_1 \quad (78)$$

โดยที่ $F_1 = F/c$ และ $\omega = \sqrt{c/a}$ (79)

$$X(0) = K = A\cos\phi + F_1$$

$$\mathring{X}(0) = -\omega A \sin\phi = 0 \text{ หรือ } \phi = 0 \quad (80)$$

ดังนั้น

ตารางที่ ๑

สมการดิฟเฟอเรนเชียล : $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F$

สัญญลักษณ์ที่ใช้ : $\alpha = b/a$, $\omega = \sqrt{c/a}$, $F_1 = F/c$

		$\lvert x(0)\rvert$	$\lvert \dot{x}(0)\rvert$	$\lvert F\rvert$	$\lvert x\rvert_{max}$	$\lvert \dot{x}\rvert_{max}$	$\lvert \ddot{x}\rvert_{max}$
1	$b^2 \gg 4ac$ $(4ac \simeq b^2/2)$	K_1	0	0	K_1	$.2\alpha K_1$	$.2\alpha^2 K_1$
2	$4ac \simeq (b^2/2)$	0	K_2	0	$\frac{3}{2\alpha}K_2$	K_2	$\frac{13}{12}\alpha K_2$
3	$4ac \simeq (b^2/2)$	0	0	F	F_1	$.2\alpha F_1$	$.2\alpha^2 F_1$
4	$b^2 = 4ac$	K_1	0	0	K_1	$\frac{\alpha}{2e}K_1$	$\alpha^2 K_1$
5	$b^2 = 4ac$	0	K_2	0	$\frac{2}{\alpha e}K_2$	K_2	αK_2
6	$b^2 = 4ac$	0	0	F	F_1	$\frac{\alpha}{2e}F_1$	$\alpha^2 F_1$
7	$b^2 \ll 4ac$ $b \simeq 0$	K_1	0	0	K_1	ωK_1	$\omega^2 K_1$
8	$b \simeq 0$	0	K_2	0	K_2/ω	K_2	ωK_2
9	$b \simeq 0$	0	0	F	$2F_1$	ωF_1	$\omega^2 F_1$
10	$b \simeq 0$	K_1	0	F	$\lvert F_1\rvert + \lvert K_1 - F_1\rvert$	$\omega\lvert K_1 - F_1\rvert$	$\omega^2\lvert K_1 - F_1\rvert$
11	$b \simeq 0$	K_1	K_2	F	$X_{m1} + F_1$	ωX_{m1}	$\omega^2 X_{m1}$
					$X_{m1} = [(K_1 - F_1)^2 + (K_2/\omega)^2]^{1/2}$		

$$A = K - F_1$$

จากการแทนค่า $A = K - F_1$ จะได้ว่า

$$|X_m| = \text{Max}\,[|(K-F_1)\cos\omega t + F|] \leqslant |K-F_1| + |F_1| \qquad (81)$$

$$|\mathring{X}_m| = \omega\,|K - F_1| \qquad (82)$$

$$|\ddot{X}_m| = \omega^2|K - F_1| \qquad (83)$$

ในกรณีที่ $K = 0$ จะได้

$$|X_m| = 2|F_1|\ ,\ |\mathring{X}_m| = \omega|F_1|\ ,\ |\ddot{X}_m| = \omega^2|F_1|$$

ในกรณีที่ $F = 0$ จะได้

$$|X_m| = |K|\ ,\quad |\mathring{X}_m| = |\omega|K|\ ,\quad |\ddot{X}_m| = \omega^2|K|$$

ในตารางที่ ๑ แสดงถึงการประมาณค่าสูงสุดของสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสองที่มีสภาวะเริ่มต้นแบบต่าง ๆ

<u>ตัวอย่างที่ ๘</u> พิจารณาสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\ddot{X} + .05\mathring{X} + 5X = 0 \qquad (84)$$

$$X(0) = 100,\ \mathring{X}(0) = 0$$

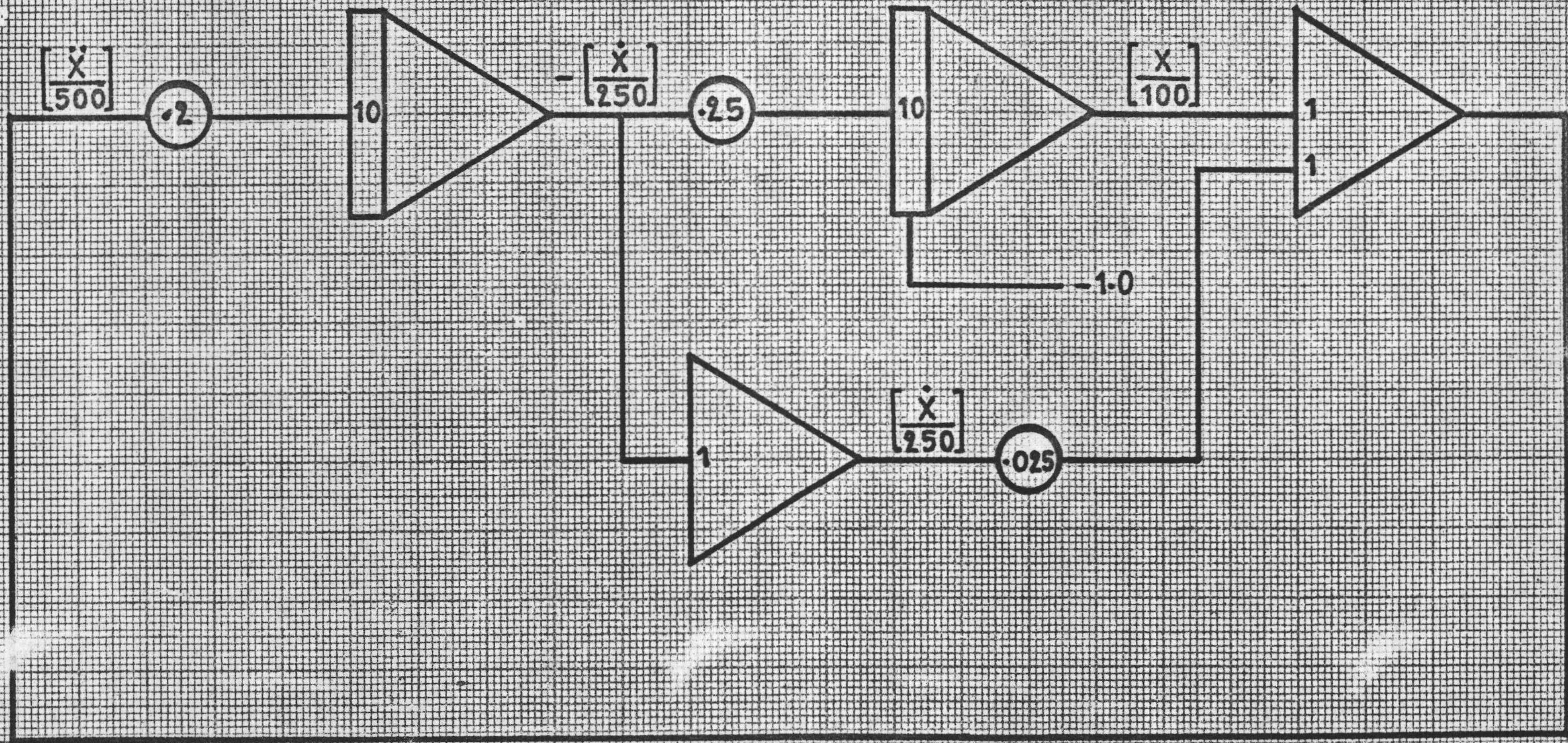
ในสมการที่ (๘๔) $a = 1$ $b = .05$ $c = 5$ ดังนั้น

$b^2 = .0025 << 4ac = 20$ จากตารางที่ ๑ จะได้

$$|X_m| = K_1 = 100 \qquad (85)$$

$$|\mathring{X}_m| = \omega K_1 = \sqrt{5}(100) \simeq 250 \qquad (86)$$

$$|\ddot{X}_m| = \omega^2 K_1 = 5(100) = 500 \qquad (87)$$



รูปที่ 26 รูปแบบคอมพิวเตอร์ของสมการ $\ddot{X} + .05\dot{X} + 5X = 0$

สมการที่อยู่ในรูปแบบทั่วไปจะเป็น

$$500\left[\frac{\ddot{X}}{500}\right] + .05\left[\frac{\mathring{X}}{250}\right] 250 + 5\left[\frac{X}{100}\right] 100 = 0$$

$$\left[\frac{X(0)}{100}\right] = \frac{100}{100} , \left[\frac{\mathring{X}(0)}{250}\right] = 0$$

หรือ $$\left[\frac{\ddot{X}}{500}\right] +.025 \left[\frac{\mathring{X}}{250}\right] + \left[\frac{X}{100}\right] = 0 \qquad (88)$$

จากสมการที่ (๘๘) จะได้รูปแบบของคอมพิวเตอร์ดังรูปที่ ๒๖

๒.๖.๒ กฎสัมประสิทธิ์เท่ากัน (9)

ในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงการประมาณค่าสูงสุดสำหรับสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสองโดยใช้เทคนิคในการวิเคราะห์ สำหรับสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่มีอันดับสูงกว่านั้นเป็นการยากที่จะใช้วิธีการวิเคราะห์ดังกล่าวซึ่งยุ่งยาก เทคนิคง่าย ๆ อันหนึ่งซึ่งให้ผลดีในการประมาณตอนเริ่มต้นมีชื่อว่า กฎสัมประสิทธิเท่ากัน วิธีการประยุกต์กฎอันนี้มีดังต่อไปนี้

พิจารณาสมการดิฟเฟอเรนเชียลเอกพันธ์เชิงเส้น (linear homogeneous differential equation) อันดับที่ n

$$a_n\frac{d^nX}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}X}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_1\frac{dX}{dt} + a X = 0 \qquad (89)$$

$$X(0) = X_0, \quad \mathring{X}(0) = X_{10}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}X}{dt^{n-1}} = X_{(n-1)0}$$

การประยุกต์กฎสัมประสิทธิ์เท่ากัน

ขั้นที่ ๑ :

ทำแต่ละเทอมของ d^nX/dt^n, $d^{n-1}X/dt^{n-1}$,......, dX/dt,

---

(9) Ibid., pp.48-52.

และ X ในสมการดิฟเฟอเรนเชียล ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปด้วยค่าคงที่ $Xm^{(n)}$, $Xm^{(n-1)}$ ...., $\mathring{X}m$ และ Xm ดังนั้นจะได้ว่า $a_n Xm^{(n)}$, $a_{n-1} Xm^{(n-1)}$......., $a_1 \mathring{X}m$, $a_0 Xm$ มีค่าเกือบจะเท่ากัน

<u>ขั้นที่ ๒</u> :

ทำสภาวะเริ่มต้น $d^{n-1}X/dt^{n-1}(0)$, ..., $dX/dt(0)$, $X(0)$ ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปโดยการใช้ค่าคงที่ในขั้นที่ ๑ ถ้าขนาดของค่าที่อยู่ในรูปแบบทั่วไปทุก ๆ ตัวมีค่าน้อยกว่าหนึ่งแล้วจึงดำเนินการขั้นต่อไป แต่ถ้ามีบางตัวที่มีค่ามากกว่าหนึ่งก็จะต้องเปลี่ยนแปลงแก้ไขค่าคงที่นั้นให้เหมาะสม เพื่อให้แน่ใจว่าสภาวะเริ่มต้นที่อยู่ในรูปแบบทั่วไปทุก ๆ ตัวมีค่าน้อยกว่าหนึ่งแล้วจึงดำเนินการขั้นต่อไป

<u>ขั้นที่ ๓</u> :

ตรวจดูลำดับต่อเนื่อง (sequence) ของค่าคงที่ที่ใช้ในการทำให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้แก่ Xm^n , Xm^{n-1}, ..., $\mathring{X}m$, Xm ซึ่งลำดับต่อเนื่องนั้นจำเป็นต้องเป็นแบบเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง หรือลดลงอย่างต่อเนื่องอย่างใดอย่างหนึ่ง แต่ถ้ายังไม่อยู่ในรูปใดรูปหนึ่ง กล่าวคือ เพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างต่อเนื่อง ก็จำเป็นต้องเปลี่ยนแปลงแก้ไขค่าคงที่บางตัว เพื่อให้ลำดับต่อเนื่องนั้นเป็นแบบที่เพิ่มขึ้น อย่างต่อเนื่องหรือลดลงอย่างต่อเนื่อง

<u>ขั้นที่ ๔</u>:

จากนั้นจึงใช้ค่าคงที่เหล่านี้ไปทำให้สมการอยู่ในรูปแบบทั่วไป ขั้นตอนเหล่านี้จะเข้าใจแจ่มแจ้งขึ้นเมื่อดูตัวอย่างข้างล่าง

<u>ตัวอย่างที่ ๙</u> สมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\frac{d^4X}{dt^4} + \frac{15d^3X}{dt^3} + \frac{10d^2X}{dt^2} + \frac{20dX}{dt} + 100X = 0 \qquad (90)$$

$$\frac{d^3X(0)}{dt^3} = 5, \quad \frac{d^2X(0)}{dt^2} = 12, \quad \frac{dX(0)}{dt} = 0, \quad X(0) = 0.5 \qquad (91)$$

<u>ขั้นที่ ๑</u> :

$$\left[\frac{d^4X/dt^4}{Xm^{IV}}\right] Xm^{IV} + 15\left[\frac{d^3X/dt^3}{\dddot{X}m}\right]\dddot{X}m + 10\left[\frac{d^2X/dt^2}{\ddot{X}m}\right]\ddot{X}m$$

$$+ 20\left[\frac{dX/dt}{\dot{X}m}\right]\dot{X}m + 100\left[\frac{X}{Xm}\right] Xm = 0 \qquad (92)$$

เลือกค่าคงที่ของ Xm^{IV}, $\dddot{X}m$, $\ddot{X}m$, $\dot{X}m$, Xm ที่จะทำให้

$$Xm^{IV} \simeq 15\dddot{X}m \simeq 10\ddot{X}m \simeq 20\dot{X}m \simeq 100\,Xm$$

จะต้องเลือก $Xm = 1$, $\dot{X}m = 5$, $\ddot{X}m = 10$, $\dddot{X}m = 7$, $Xm^{IV} = 100$

<u>ขั้นที่ ๒</u> :

ทำให้สภาวะเริ่มต้นอยู่ในรูปแบบทั่วไป

$$\left[\frac{\dddot{X}(0)}{\dddot{X}m}\right] = \frac{5}{7}, \quad \left[\frac{\ddot{X}(0)}{\ddot{X}m}\right] = \frac{12}{10} > 1, \quad \left[\frac{\dot{X}(0)}{\dot{X}m}\right] = 0, \quad \left[\frac{X(0)}{Xm}\right] = 0.5$$

ขณะที่

$\left[\frac{\ddot{X}(0)}{\ddot{X}m}\right] > 1$ จะต้องเปลี่ยนค่า $\ddot{X}m$ ใหม่เพื่อทำให้ค่าที่อยู่ในรูปแบบทั่วไปมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่ง ดังนั้น จึงให้ $\ddot{X}m = 12$

ขั้นที่ ๓ :

จัดค่าสูงสุดที่ได้ตรวจแก้ไขแล้วในขั้นที่ ๒ จะได้ $\dot{X}m = 1$, $\dot{X}m = 5$, $\ddot{X}m = 12$, $\dddot{X}m = 7$, $Xm^{IV} = 100$ ค่าเหล่านี้ยังไม่อยู่ในแบบที่เป็นลำดับเพิ่มขึ้นอย่างเดียวหรือลดลงอย่างเดียว เพื่อที่จะให้เป็นแบบที่เพิ่มขึ้นอย่างเดียว เมื่อพิจารณาแล้วจะเห็นว่า $\dddot{X}m$ ควรจะเป็น ๒๐ ผลสุดท้ายของการประมาณจะเป็น

$$Xm = 1, \quad \dot{X}m = 5, \quad \ddot{X}m = 12, \quad \dddot{X}m = 20, \quad Xm^{IV} = 100$$

ขั้นที่ ๔:

สมการที่ (๙๒) ที่อยู่ในรูปแบบทั่วไป

$$100\left[\frac{d^4X/dt^4}{100}\right] + 15 \times 20\left[\frac{d^3X/dt^3}{20}\right] + 10 \times 12\left[\frac{d^2X/dt^2}{12}\right]$$

$$+ 20 \times 5\left[\frac{dX/dt}{5}\right] + 100\left[\frac{X}{1}\right] = 0 \qquad (93)$$

หรือ

$$\left[\frac{d^4X/dt^4}{100}\right] + 3\left[\frac{d^3X/dt^3}{20}\right] + 1.2\left[\frac{d^2X/dt^2}{12}\right] + \left[\frac{dX/dt}{5}\right] + \left[\frac{X}{1}\right] = 0$$

$$\left[\frac{X(0)}{20}\right] = \left[\frac{5}{20}\right], \quad \left[\frac{X(0)}{12}\right] = \left[\frac{12}{12}\right] = 1, \quad \left[\frac{X(0)}{5}\right] = 0, \quad \left[\frac{X(0)}{1}\right] = 0.5$$

วิธีที่ได้แสดงมาข้างบนนี้เป็นวิธีที่มีประโยชน์ในทางปฏิบัติส่วนการที่ต้องทำให้ค่าสูงสุดเป็นลำดับที่เพิ่มขึ้นหรือลำดับที่ลดลงนั้น ก็คือคำตอบของสมการเชิงเส้นนั้นอยู่ในรูปของ $e^{-\alpha t} \sin \omega t$ และขนาดของอนุพันธ์ของฟังค์ชั่นนั้นเป็นโมโนโทนิค (monotonic)

วิธีการนี้เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ช่วยในการพิจารณาค่าสูงสุดนอกเหนือไปจากที่มีอยู่แล้วในตารางที่ ๑

ในตัวอย่างสุดท้ายที่ผ่านมาได้พิจารณาถึงสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบเอกพันธ์. แต่ถ้าสมการดิฟเฟอเรนเชียลมีฟอซซิงฟังก์ชั่นเป็นค่าคงที่อันหนึ่งนั้นก็มีวิธีการประมาณค่าสูงสุดต่าง ๆ เหมือนกัน แต่มีการเปลี่ยนแปลงแก้ไขในขั้นที่ ๑ คือเลือก Xm ที่จะทำให้ $a_0 Xm$ เป็น 2 เท่าของสัมประสิทธิตัวอื่น ๆ ได้แก่ $a_n Xm^n$, $a_{n-1} Xm^{n-1}$, ..., $a_1 \dot{X}m$

<u>ตัวอย่างที่ ๙</u>

$$\frac{d^3X}{dt^3} + 5\,\frac{d^2X}{dt^2} + 10\,\frac{dX}{dt} + 50X = 10u_{-1}(t) \qquad (94)$$

สภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์

$$\left[\frac{\dddot{X}}{\dddot{X}m}\right] \dddot{X}m + 5\left[\frac{\ddot{X}}{\ddot{X}m}\right] \ddot{X}m + 10\left[\frac{\dot{X}}{\dot{X}m}\right] \dot{X}m + 50\left[\frac{X}{Xm}\right] Xm = 10\ u_{-1}(t)$$

$$\dddot{X}m \simeq 5\ddot{X}m \simeq 10\dot{X}m \simeq \frac{50Xm}{2} \simeq 10$$

ดังนั้นค่าที่เลือกคือ

$$\dddot{X}m = 10, \quad \ddot{X}m = 2, \quad \dot{X}m = 1, \quad Xm = \frac{2}{5} = 0.4$$

ค่าที่ได้เหล่านี้เป็นลำดับต่อเนื่องแบบลดลง ซึ่งสามารถจะใช้ทำสมการที่ (๙๔) ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ทันที สมการในรูปแบบทั่วไปจะเป็น

$$10\,[\dddot{X}/10] + 10\,[\ddot{X}/2] + 10\,[\dot{X}/1] + 20\,[X/0.4] = 10\,u_{-1}(t)$$

หรือ

$$[\dddot{X}/10] + [\ddot{X}/2] + [\dot{X}/1] + 2\,[X/0.4] = u_{-1}(t) \qquad (95)$$

สรุป

ในหัวข้อนี้จะเห็นถึงความจำเป็นที่จะต้องใช้แอมปลิจูดสเกลกับสมการดิฟเฟอเรนเชียล ก่อนที่จะใช้คอมพิวเตอร์แก้ปัญหา สังเกตุว่าในการที่จะทำการสเกลสมการให้ถูกต้องนั้น จำเป็นจะต้องทราบค่าสูงสุดที่แท้จริงของตัวแบระตามและอนุพันธ์ของตัวแปรนั้น ขณะที่ค่าสูงสุดที่แท้จริงนั้นไม่ทราบแต่ก็มีวิธีประมาณค่าเหล่านี้โดยไม่ต้องทำการแก้ปัญหาสมการนั้นได้ตามวิธีที่ได้กล่าวมาแล้ว ในที่สุดนี้ขอย้ำว่าการประมาณค่าสูงสุดที่ตั้งขึ้นมาเป็นกลุ่ม (set) ในตอนแรกนั้น จะทำให้ดีขึ้นโดยการแก้ปัญหาสมการนั้นด้วยแอนาลอกคอมพิวเตอร์และทำการประมาณค่าสูงสุดใหม่ถ้ามีความจำเป็น

๒.๗ การรวมไทม์สเกลและแอมปลิจูดสเกลเข้าด้วยกัน[10]

ในหัวข้อนี้จะแสดงถึงวิธีการทำไทม์สเกลรวมกับวิธีการทำแอมปลิจูดสเกลด้วยตัวอย่างต่อไปนี้ .-

ตัวอย่างที่ ๑๐ สมมติว่าฟังก์ชั่นที่ต้องการสร้างขึ้นเป็น

$$Y(t) = 50 \sin (20t + \pi/3) \tag{96}$$

สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่จะใช้แก้ปัญหาเพื่อให้ได้ฟังก์ชั่นข้างบนคือ

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + 400\,Y = 0 \tag{97}$$

$$Y(0) = 50 \sin \pi/3 , \quad \dot{Y}(0) = 1000 \cos \pi/3 \tag{98}$$

จากการพิจารณาสมการที่ (๙๗) จะเห็นว่าจะต้องทำไทม์สเกล

แทนค่า $t = \tau/n$ ในสมการที่ (๙๗)

---

(10) Ibid., pp.55-56.

$$n^2\frac{d^2Y}{d\tau^2} + 400Y = 0 \qquad (99)$$

$$Y(0) = 50 \sin \pi/3, \quad n\mathring{Y}(0) = 1000 \cos \pi/3 \qquad (100)$$

จากการ**พิจารณาสมการที่ (๙๙) เลือก n = 20 เพื่อที่จะทำให้ความถี่เป็น** ๑ เรเดียน/วินาที ดังนั้นสมการที่ (๙๙) จะเป็น

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} + Y = 0 \qquad (101)$$

$$Y(0) = 50 \sin \pi/3, \quad \mathring{Y}(0) = 50 \cos \pi/3$$

ขั้นต่อไปเป็นการทำแอมปลิจูดสเกล จากการพิจารณาสมการที่ (๑๐๑) จะเห็นว่า

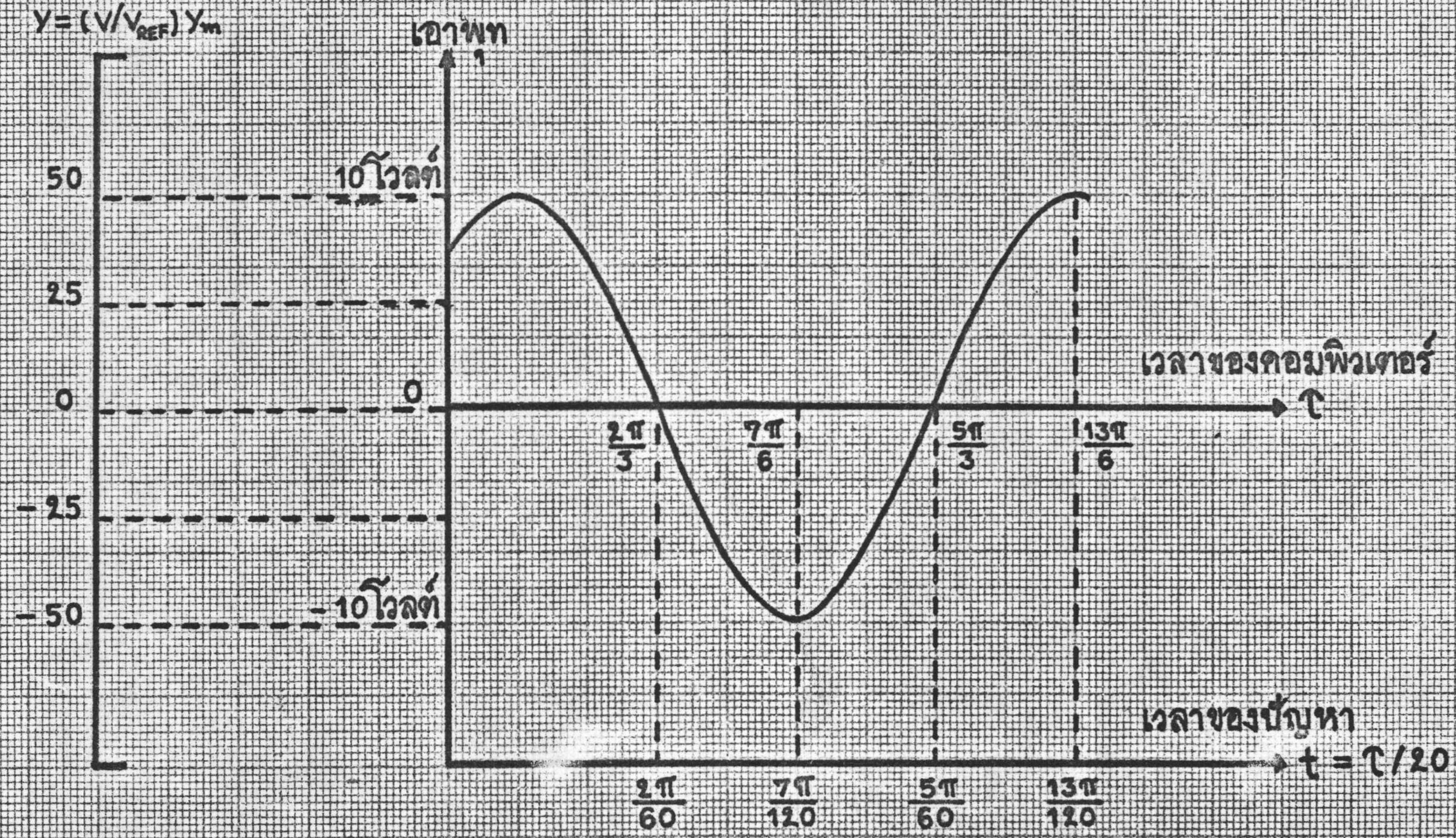
$$Ym = 50, \quad \mathring{Y}m = 50, \quad \mathring{\mathring{Y}}m = 50 \quad \left[\because\ Y = -\ddot{Y} \right]$$

(ขณะที่ $\omega = 1$ ค่าสูงสุดของ Y และอนุพันธ์ทุกตัวของ Y จะมีค่าเท่ากัน) สมการที่ (๑๐๑) เมื่อทำให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปโดยใช้ค่าสูงสุดเหล่านี้แล้วจะได้

$$\left[\frac{\mathring{\mathring{Y}}}{50}\right] + \left[\frac{Y}{50}\right] = 0 \qquad (102)$$

$$\left[\frac{Y(0)}{50}\right] = \sin \pi/3, \quad \left[\frac{\mathring{Y}(0)}{50}\right] = \cos \pi/3$$

เมื่อนำสมการที่ (๑๐๒) ไปแก้ปัญหาด้วยคอมพิวเตอร์ จะได้ผลลัพธ์ออกมาดังรูปที่ ๒๗ สังเกตุว่าทั้งแกนเวลาและแกน Y นั้น คำตอบได้เทียบกลับไปอยู่ในรูปของสมการเริ่มแรก คือสมการที่ (๘๗) อีกประการหนึ่งจะสังเกตุเห็นว่าการประมาณค่าสูงสุดของ $\mathring{Y}$ และ $\ddot{Y}$ ที่ได้จากสมการที่ (๘๗) ซึ่งเป็นสมการก่อนการทำไทม์สเกลนั้น **จะต่างจากค่า** ที่ได้รับจากสมการที่ (๑๐๒) ซึ่งเป็นสมการภายหลังการทำไทม์สเกล



รูปที่ 27 รูปของฟังก์ชั่น $Y(t) = 50 \sin(20t + \pi/3)$