

การขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพในจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น

นายสมศักดิ์ เสนาใหญ่

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2555

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)

เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)

are the thesis authors' files submitted through the Graduate School.

ACCELERATED EXPANSION OF THE UNIVERSE IN CASCADING COSMOLOGY

Mr. Somsak Senayai

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science Program in Physics

Department of Physics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2012

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพในจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น
โดย	นายสมศักดิ์ เสนาใหญ่
สาขาวิชา	ฟิสิกส์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถกฤต ฉัตรภูติ
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม	อาจารย์ ดร.อภิสิทธิ์ อึ้งกิจจานุกิจ

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

.....คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ทารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยสิงห์ ภูรักษาเกียรติ)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถกฤต ฉัตรภูติ)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม
(อาจารย์ ดร.อภิสิทธิ์ อึ้งกิจจานุกิจ)

.....กรรมการ
(อาจารย์ ดร.บูรินทร์ อัครพิภพ)

.....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(อาจารย์ ดร.คัมภีร์ คำแหวน)

สมศักดิ์ เสนาใหญ่: การขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพในจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น (ACCELERATED EXPANSION OF THE UNIVERSE IN CASCADING COSMOLOGY)

อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ.ดร.อรรถกฤต ฉัตรภูติ, อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม: อ.ดร.อภิสิทธิ์ อึ้งกิจจานุกิจ, 101 หน้า.

จากผลการสังเกตการณ์และผลการทดลองในปัจจุบัน พบว่า เอกภพกำลังขยายตัวด้วยความเร่ง เพื่อที่จะอธิบายปรากฏการณ์นี้จึงมีสมมติฐานเกี่ยวกับพลังงานมืด (dark energy) เพื่อให้เป็นสาเหตุของการขยายตัวของเอกภพ ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ได้นำเสนอทฤษฎี จักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น (cascading cosmology) ซึ่งเป็นทฤษฎีที่พัฒนาขึ้นเพื่ออธิบายถึงสาเหตุของการขยายตัวของเอกภพ ด้วยแอกชันของความโน้มถ่วง 6 มิติ ที่มีแอกชัน 5 มิติ และ 4 มิติ ลดหลั่นเป็นลำดับ โดยใช้ทฤษฎีสเกลาร์-เทนเซอร์ (Scalar-Tensor Theory) ศึกษาสนามสเกลาร์ π หรือเรียกว่า โหมดเบรนต์ดโค้ง (brane bending mode) แบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่นนี้ได้ให้ข้อมูลและแนวคิดใหม่ทางฟิสิกส์ จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่า สนามสเกลาร์ได้สนับสนุนการมีอยู่ของพลังงานมืด และผลเฉลยในรูปแบบสมการฟรีดมานน์ (Friedmann equation) ได้ให้ผลแตกต่างจากแบบจำลองค่าคงตัวจักรวาล (Λ CDM) ผลจากการศึกษานี้สามารถอธิบายการขยายตัวของเอกภพด้วยความเร่ง โดยไม่ต้องใช้ค่าคงตัวจักรวาลวิทยา

ภาควิชา.....ฟิสิกส์.....ลายมือชื่อนิสิต.....
 สาขาวิชา.....ฟิสิกส์.....ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก.....
 ปีการศึกษา.....2555.....ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม.....

5272575023: MAJOR PHYSICS

KEYWORDS: CASCADING COSMOLOGY/ DARK ENERGY/ BRANE-WORLD

SOMSAK SENAYAI: ACCELERATED EXPANSION OF THE UNIVERSE IN CASCADING COSMOLOGY. ADVISOR: ASST. PROF. AUTTAKIT CHATRABHUTI, Ph. D., CO-ADVISOR: AHPISIT UNGKITCHANUKIT, Ph. D., 101 pp.

Results from observations implied the accelerated expansion of the universe. To explain this phenomenon, mysterious dark energy was proposed. In this thesis, we introduce the cascading cosmology model. The model has studied cosmological solutions by using the 5D effective action for the 6D cascading gravity brane-world model. We obtain the 5D action through the 6D decoupling limit, in which an additional scalar degree mode, π , called the brane-bending mode, determines the bulk-brane gravitational interaction. The cascading cosmology model represents complicated information and new physics. The numerical analysis has shown that the scalar modes effectively contribute to dark energy. The modification of the Friedmann equation gives small deviations from Λ CDM model. These results may lead to an accelerating universe without a cosmological constant.

Department :Physics..... Student's Signature.....

Field of Study : ..Physics..... Advisor's Signature.....

Academic Year : 2012..... Co-advisor's Signature.....

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถกฤต ฉัตรภูติ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ท่านได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดที่มีคุณค่ายิ่งในการทำวิทยานิพนธ์ อีกทั้งคอยให้ความช่วยเหลือ และให้กำลังใจอย่างต่อเนื่อง ตลอดระยะเวลาในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ท่านได้ให้คำอธิบายและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ ท่านมีทัศนคติที่ดีมากในการทำวิจัยซึ่งเป็นแรงบันดาลใจให้แก่ข้าพเจ้าในการทำงาน นอกจากนี้ท่านยังช่วยตรวจสอบและแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.อภิสิทธิ์ อึ้งกิจจานุกิจ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ท่านได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ และแสดงให้เห็นเทคนิคการคำนวณซึ่งปรากฏอยู่เป็นจำนวนมากในวิทยานิพนธ์นี้ ความเชี่ยวชาญของอาจารย์ได้ช่วยข้าพเจ้าเป็นอย่างมากในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชัยสิทธิ์ ภูริรักษ์เกียรติ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ท่านได้ให้คำแนะนำในการใช้ภาษา และได้สละเวลาอันมีค่าของท่านช่วยตรวจสอบและแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.บุรินทร์ อัครพิภพ และอาจารย์ ดร.คำภีร์ คำแหวน ที่ท่านได้สละเวลาเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะ แก้ไข และปรับปรุงวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ที่สนับสนุนทุนการศึกษาสำหรับการศึกษาของข้าพเจ้า ตลอดระยะเวลาการศึกษา

ขอขอบพระคุณ โรงเรียนดงยางวิทยาคม และสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน (สพฐ.) สำหรับการสนับสนุนและอนุญาตให้ข้าพเจ้าได้ศึกษาต่อ

นอกจากนี้ข้าพเจ้าขอขอบคุณสมาชิกทุกคนของกลุ่มวิจัย Theoretical high-energy physics and cosmology research group ขอขอบคุณไปถึง ดร.ดาริศ สามารถ พี่ชายที่เป็นแรงบันดาลใจและให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ และน้องๆ ที่คอยให้กำลังใจและอำนวยความสะดวกในเรื่องต่างๆ ตลอดระยะเวลาในการทำวิทยานิพนธ์นี้

และสุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา น้องสาวและครอบครัว รวมทั้งคุณมะลิวัลย์ กัญญาบุตร ที่ให้คำปรึกษา เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของข้าพเจ้ามาโดยตลอด อนึ่ง ประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญูตาบูชาแด่บิดามารดา ครู อาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณที่มีอภีระบุญมาได้หมดในที่นี้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญภาพ.....	ญ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	3
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	3
1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปกับจักรวาลวิทยา.....	5
2.1 หลักการของจักรวาลวิทยา.....	5
2.2 โรเบิร์ตสัน-วอล์กเกอร์ เมตริก.....	9
2.3 สมการฟรีดมานน์.....	12
2.4 วิวัฒนาการของความหนาแน่นพลังงาน.....	24
บทที่ 3 จักรวาลวิทยาแบบเบรน.....	29
3.1 ความโน้มถ่วงในมิติที่สูงขึ้น.....	29
3.2 แบบจำลองแรนด์ล-ซินดรัม.....	33
3.3 จักรวาลวิทยาแบบเบรน.....	38
3.4 สมการเกาส์ – โคดัชชี.....	42
3.5 แบบจำลอง ดีจีพี.....	45
บทที่ 4 จักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น.....	49
4.1 ความโน้มถ่วงแบบลดหลั่น.....	49
4.2 จักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น.....	50
4.3 วิวัฒนาการของเอกภพในจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น.....	60

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 5 สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ.....	74
5.1 สรุป และอภิปราย.....	74
5.2 ข้อเสนอแนะและการศึกษาในปัจจุบัน.....	76
รายการอ้างอิง.....	78
ภาคผนวก.....	81
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	101

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 วิวัฒนาการของความหนาแน่นพลังงานสำหรับแต่ละองค์ประกอบของเอกภพ.....	25
2.2 วิวัฒนาการของตัวประกอบมาตราส่วนสำหรับแต่ละองค์ประกอบของเอกภพ.....	27

สารบัญญภาพ

ภาพที่	หน้า
2.1 ผลการสังเกตการณ์ 3 ปีของดับเบิลยูแมพ (WMAP) แสดงรังสีไมโครเวฟพื้นหลังของจักรวาล (CMB) แผนภาพนี้แสดงในระบบพิกัดกาแล็กซี (Galactic coordinates) โดยเฉดสีที่ต่างกันอยู่ในช่วง ± 200 ไมโครเคลวิน (μK).....	6
2.2 แสดงความแตกต่างกันระหว่างความเหมือนกันในทุกทิศทางกับความเหมือนกันในทุกตำแหน่ง (ก) ในภาพเหมือนกันทุกทิศทางแต่ไม่เหมือนกันในทุกตำแหน่ง (ข) ในภาพเหมือนกันในทุกตำแหน่งแต่ไม่เหมือนกันในทุกทิศทาง (ค) ในภาพเหมือนกันทุกทิศทางและเหมือนกันทุกตำแหน่ง.....	7
2.3 การกระจายของ 6,476 กาแล็กซีแดงเปล่งแสง (Luminous Red Galaxies; LRGs) (ดำ) และ 32,417 กาแล็กซีหลัก (เขียว/เทา) วัดที่ระดับทำมุมกับระนาบเส้นขอบฟ้า 1.25°	8
3.1 โครงสร้างกาลอวกาศตามแบบจำลองรันดอล-ซันดรัม 1 เมื่อความแตกต่างระหว่างขนาดพลังค์ และขนาดวีค (เทระอิเล็กตรอนโวลต์ (TeV)) ขึ้นอยู่กับระยะห่างระหว่างเบรนในกาลอวกาศแบบ AdS_5	35
3.2 โครงสร้างกาลอวกาศตามแบบจำลองรันดอล-ซันดรัม 2 (Randall Sundrum II) เมื่อ เบรน ฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศ 5 มิติ.....	36
4.1 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ผลเฉลยของสมการคล้ายฟรีดมานน์สำหรับสนามสเกลาร์ π	72

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ข้อมูลจากการสังเกตซูเปอร์โนวาชนิด 1a (Type 1a Supernova: SNIa) [1] พบว่าปัจจุบันเอกภพกำลังขยายตัวด้วยความเร่ง ผลจากการสังเกตการณ์นี้ขัดแย้งกับแบบจำลองจักรวาลวิทยาที่มีพื้นฐานมาจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (general relativity theory) ที่ให้ผลทางทฤษฎีตรงข้ามกับผลการสังเกตการณ์นี้ เพื่อที่จะอธิบายปรากฏการณ์นี้ สมมติฐานเกี่ยวกับพลังงานลึกลับที่เรียกกันว่าพลังงานมืด (dark energy) ได้ถูกนำเสนอขึ้น ผลการสังเกตการณ์และข้อมูลที่รวบรวมได้จากรังสีไมโครเวฟพื้นหลังจักรวาล (Cosmic Microwave Background Radiation: CMB) [2] และการศึกษาโครงสร้างขนาดใหญ่ (Large Scale Structures: LSS) [3] ได้ยืนยันว่าเอกภพมีพลังงานมืดเป็นองค์ประกอบส่วนใหญ่ คือประมาณ 73% ของความหนาแน่นพลังงานทั้งหมด นักจักรวาลวิทยาและนักฟิสิกส์ได้มีการพัฒนาแบบจำลองมากมายสำหรับอธิบายพฤติกรรมของพลังงานมืดนี้ แบบจำลองค่าคงตัวจักรวาลวิทยา (cosmological constant) Λ เป็นแบบจำลองพลังงานมืดที่ง่ายที่สุดที่ถูกนำเสนอในช่วงแรกๆ อย่างไรก็ตาม แบบจำลองนี้ไม่เป็นพลวัต (ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงตามเวลา) และเกิดปัญหาปรับจูน (fine-tuning problem) และปัญหาความบังเอิญ (coincidence problem) [4] นอกจากนี้ ผลจากการสังเกตการณ์ค่าคงตัวจักรวาลวิทยาพบว่ามีค่าน้อยมาก (ประมาณ 10^{-11} eV^4) และไม่สามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลองมาตรฐาน (standard model) ของฟิสิกส์อนุภาค ดังนั้น จำเป็นต้องพัฒนาแบบจำลองใหม่เพื่อให้สามารถอธิบายผลจากการสังเกตการณ์ดังกล่าว โดยเฉพาะแบบจำลองที่เป็นพลวัต ตัวอย่างเช่น แบบจำลองสนามสเกลาร์ (scalar field model) ได้แก่ ควินเทสเซนซ์ (Quintessence), คาเมเลียน (Chameleon), เค-เอสเซนซ์ (K-essence), เทคิออนฟิลด์ (Tachyon field), แฟนทอม (โกลสต์) ฟิลด์ (Phantom (ghost) field), และพลังงานมืดไดเลทอนิก (Dilatonic dark energy) นอกจากนี้ยังมีแบบจำลองอื่นๆ เช่น แบบจำลองความโน้มถ่วงดัดแปลง (modified gravity model) ได้แก่ เอฟอาร์ กราวิตี (f(R) gravity) เป็นต้น

ในช่วงสิบกว่าปีที่ผ่านมาแบบจำลองโลกแบบเบรน (brane-world models) เป็นแบบจำลองพลังงานมืดที่ได้รับความสนใจอย่างแพร่หลาย ต้นฉบับของแบบจำลองโลกแบบเบรน ได้ถูกนำเสนอโดย ลิซา แรนดัลล์ (Lisa Randall) และรามัน ซันดรัม (Raman Sundrum) ในปี ค.ศ. 1999 [5,6] โดยแบบจำลองของพวกเขาสามารถอธิบายปัญหาไฮเออร์ราคิ (hierarchy problem) ซึ่งในแบบจำลอง

แรนดัล-ชันดรัม (RS-model) นี้ โลก 4 มิติของพวกเราถูกพิจารณาให้เป็นแผ่น 3 มิติ เรียกว่า 3-เบรน (3-brane) ฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศ 5 มิติ เรียกว่า บัลค์ (bulk) สสารทุกชนิดตามแบบจำลองมาตรฐาน ถูกขังอยู่บนเบรน ขณะที่ความโน้มถ่วงสามารถแพร่ออกไปยังบัลค์ 5 มิติได้ ตามแบบจำลองนี้ เมื่อพิจารณาในกาลอวกาศที่มีจำนวนมิติสูงขึ้น ความโน้มถ่วงยังคงส่งผลต่อเบรน 3 มิติ และอาจเป็นสาเหตุทำให้สามารถสังเกตเห็นการขยายตัวด้วยความเร่งบนเบรน

มีการพัฒนาแบบจำลองอาร์เอส (RS) ให้อยู่ในรูปทั่วไปมากขึ้น โดย เจีย อาร์. ดาวาลิ (Gia R. Dvali) แกรกอรี กาบาเดซ (Gregory Gabadadze) และ แมสซิโม พอร์ราติ (Massimo Porrati) ในปี ค.ศ. 2000 ซึ่งเรียกย่อๆ ว่าแบบจำลองดีจีพี (DGP) [7] ด้วยการเพิ่มพจน์ความโค้งสเกลาร์ (scalar curvature) 4 มิติ เข้าไปในแบบจำลองอาร์เอส ในการเพิ่มพจน์ความโน้มถ่วงเข้าไปนี้ทำให้เกิดผลทางควอนตัม (quantum effect) กล่าวคือ เกิดอันตรกิริยาระหว่างกราวิตอน (graviton) ที่อยู่ในบัลค์กับสสารที่อยู่บนเบรน อย่างไรก็ตามแบบจำลองดีจีพี มีปัญหาเกี่ยวกับความไม่เสถียรแบบโกสต์ (ghost instabilities) หลังจากการรบกวน (perturbation) [8,9] (โกสต์ ในทางทฤษฎีหมายถึง ในการรบกวนสมมูลของแบบจำลองใดๆ ถ้าได้พจน์ที่กำลังสองของมวลเป็นลบ แสดงว่าแบบจำลองนั้นมีปัญหาเรื่องเสถียรภาพที่จุดสมมูล เรียกว่า มีโกสต์โหมด) และเกิดภาวะเอกฐานเปลือย (naked singularity) ที่ระยะห่างจากเบรนระยะหนึ่ง เมื่อใช้โคไดเมนชัน (codimension) $N > 2$ [10]

จากปัญหาของแบบจำลองดีจีพีนี้ นำไปสู่แนวคิดในการพัฒนาแบบจำลองดีจีพีแบบลดหลั่น (cascading DGP) [30] ซึ่งเป็นแบบจำลองที่พัฒนาต่อจากแบบจำลองดีจีพี ด้วยการเพิ่มจำนวนมิติมากขึ้น เป็นการศึกษากาลอวกาศ 6 มิติ เรียกว่า บัลค์ 6 มิติ (โคไดเมนชัน $N = 2$) โดยมี 4-เบรนฝังตัวอยู่ และใน 4-เบรนมี 3-เบรนฝังตัวอยู่ลดหลั่นตามลำดับ และกำหนดให้เบรนมีค่าความตึงสูง [30,31] หลักการนี้สามารถแก้ปัญหาของแบบจำลองดีจีพี และเป็นหลักการที่ใช้พัฒนาแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น (cascading cosmology) [34] แล้วนำไปสู่การศึกษาการเปลี่ยนแปลงและวิวัฒนาการของเอกภพ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้ เป็นการทบทวนแนวคิดและผลของแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่นศึกษาโดยใช้ทฤษฎีสเกลาร์เทนเซอร์ของความโน้มถ่วง (scalar-tensor theory) เริ่มจากแอคชัน 5 มิติที่เป็นตัวแทน (proxy) ของ 6 มิติ วิวัฒนาการของเอกภพตามแบบจำลองนี้ สามารถศึกษาจากสนามสเกลาร์ π เรียกว่า โหมดเบรนดัดโค้ง (brane bending Mode) ซึ่งสามารถแสดงพฤติกรรมคล้ายกับพลังงานมืด จากแอคชัน 5 มิติ โดยใช้หลักการแปรผัน จะได้สมการการเคลื่อนที่บนบัลค์ หลังจากนั้นคำนวณหาสมการคล้ายฟรีดมานน์ (Friedmann-like equations) ตลอดจนความหนาแน่นพลังงานของสนาม สเกลาร์ (ρ_π) เนื่องจากไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการคล้ายฟรีดมานน์เชิงการวิเคราะห์ได้โดยตรง จึงใช้การประมาณโดยแบ่งพิจารณาออกเป็น 2 ช่วงเวลา คือ

ยุคควบคู่อย่างเข้ม (strong-coupling regime) และ ยุคควบคู่อย่างอ่อน (weak-coupling regime) และใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขในการดูแนวโน้มผลเฉลยโดยรวม

ในบทที่ 2 ทบทวนทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปกับจักรวาลวิทยา ศึกษาแนวคิดและที่มาของสมการฟรีดมานน์ วิวัฒนาการของเอกภพตามแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบฟรีดมานน์-โรเบิร์ตสัน-วอล์กเกอร์ ในบทที่ 3 ศึกษาจักรวาลวิทยาแบบเบรน เริ่มจากแบบจำลองแรนดัล-ซันดรัม (RS-models) การพิสูจน์สมการเกาส์-โคดัสซี (Gauss-Codazzi equations) และทบทวนแนวคิดของแบบจำลองดีจีพี ในบทที่ 4 ศึกษาจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น เริ่มจากความโน้มถ่วงแบบลดหลั่น (Cascading Gravity) และวิวัฒนาการของเอกภพตามแบบจำลองวิทยาแบบลดหลั่น และบทที่ 5 สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาแนวคิดพื้นฐานของจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น ที่มีพื้นฐานมาจากแบบจำลองมิติที่สูงขึ้น

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

จักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น เป็นทฤษฎีที่พัฒนาขึ้นเพื่ออธิบายพลังงานมืด ที่ทำให้เอกภพขยายตัวด้วยความเร่งในปัจจุบัน โดยการพิจารณากาลอวกาศ 4 มิติ หรือ เบรน (brane) ผิงตัวอยู่ในกาลอวกาศที่มีมิติสูงขึ้นไปหรือ บัลค์ (bulk) ด้วยแอกชันของความโน้มถ่วงแบบลดหลั่น 6 มิติ รวมกับแอกชัน 5 มิติ และ 4 มิติ โดยใช้ทฤษฎีสเกลาร์-เทนเซอร์ ศึกษาสนาม สเกลาร์ π หรือเรียกว่า โหมดเบรนตัดโค้ง เราสามารถเลือกเงื่อนไขที่เหมาะสมและใช้สมการบัลค์ ศึกษาจักรวาลวิทยาบนเบรน และหาผลเฉลยของสนามสเกลาร์ ตลอดจนสมการการเคลื่อนที่ของสนามสเกลาร์ เพื่ออธิบายการขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพ โดยไม่ต้องใช้แบบจำลองพลังงานมืดจากค่าคงตัวจักรวาลวิทยา

1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น

ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ได้ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ มากมาย ดังนั้นเพื่อให้ผู้ที่สนใจศึกษาวิทยานิพนธ์เล่มนี้เข้าใจสัญลักษณ์ต่างๆ ตรงกัน จึงมีข้อกำหนดดังนี้

1. ในสมการที่เกี่ยวกับเทนเซอร์ชนิดต่างๆ จะปรากฏดัชนีแทนการบวก หรือที่เรียกว่าสัญลักษณ์การบวกแบบไอน์สไตน์ (Einstein summation) ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ กำหนดชนิดของดัชนีดังนี้

- ดัชนีที่เป็นตัวอักษรลาตินจะมีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 3 คือ $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$
เป็นดัชนีที่ใช้เมื่อพิจารณกาลอวกาศ 3 มิติ
- ดัชนีที่เป็นตัวอักษรกรีกจะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 3 คือ $\mu, \nu, \lambda, \sigma, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$
เป็นดัชนีที่ใช้เมื่อพิจารณกาลอวกาศ 4 มิติ
- ดัชนีที่เป็นตัวอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ กำหนดโดย $M, N, L, \dots = 0, 1, 2, 3, 5$ เมื่อ
ตัวเลข 5 หมายถึงมิติที่ 5 หรือมิติพิเศษ (extra dimension) เป็นดัชนีที่ใช้เมื่อกาลอวกาศมีจำนวนมิติ
มากกว่า 4 มิติ
- ดัชนีที่เป็นตัวอักษรตัวพิมพ์ใหญ่มีหมวก กำหนดโดย $\hat{M}, \hat{N}, \dots = 0, 1, 2, 3, 5, 6$
เมื่อตัวเลข 5,6 หมายถึงมิติที่ 5,6 ตามลำดับ เป็นดัชนีที่ใช้เมื่อกาลอวกาศมีจำนวนมิติมากกว่า 4 มิติ

2. สัญลักษณ์ในสมการเกี่ยวกับระบบพิกัด และการหาอนุพันธ์

- x คือ พิกัดของอวกาศ 4 มิติ โดยที่ $x^0 = t$ แทนพิกัดของเวลา และ x^i แทน
พิกัดของอวกาศ
- y คือ พิกัดที่ 5 หรือพิกัดของมิติพิเศษ
- สัญลักษณ์ดอท (dots) เช่น \dot{a} แทนการหาอนุพันธ์เทียบกับ t
- สัญลักษณ์ไพรม์ (primes) เช่น a' แทนการหาอนุพันธ์เทียบกับ y

3. สัญลักษณ์ที่ใช้ในการคำนวณ

- ตัวดำเนินการดิอะแลมเบิร์ต (d'Alembert operator)

$$\square_5 = g^{MN} \nabla_M \nabla_N$$

- อนุพันธ์โควาเรียนท์ (covariant derivative)

$$\nabla_M \rightarrow \nabla_M V^N = \partial_M V^N + \Gamma_{MP}^N V^P$$

$$\nabla_M W_N = \partial_M W_N - \Gamma_{MN}^P W_P$$

- สัญลักษณ์คริสตอฟเฟล (Christoffel symbol)

$$\Gamma_{MN}^A = \frac{1}{2} g^{AB} (\partial_M g_{NB} + \partial_N g_{BM} - \partial_B g_{MN})$$

- สมบัติสมมาตร (symmetrization)

$$X_{(MN)} \equiv \frac{1}{2} (X_{MN} + X_{NM})$$

- สัญลักษณ์ที่ใช้เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์

$$(\partial\pi)^2 = g^{MN} \partial_M \pi \partial_N \pi$$

$$\partial_M = \frac{\partial}{\partial x^M} \rightarrow \partial_M \pi = \frac{\partial \pi}{\partial x^M}$$

บทที่ 2

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปกับจักรวาลวิทยา

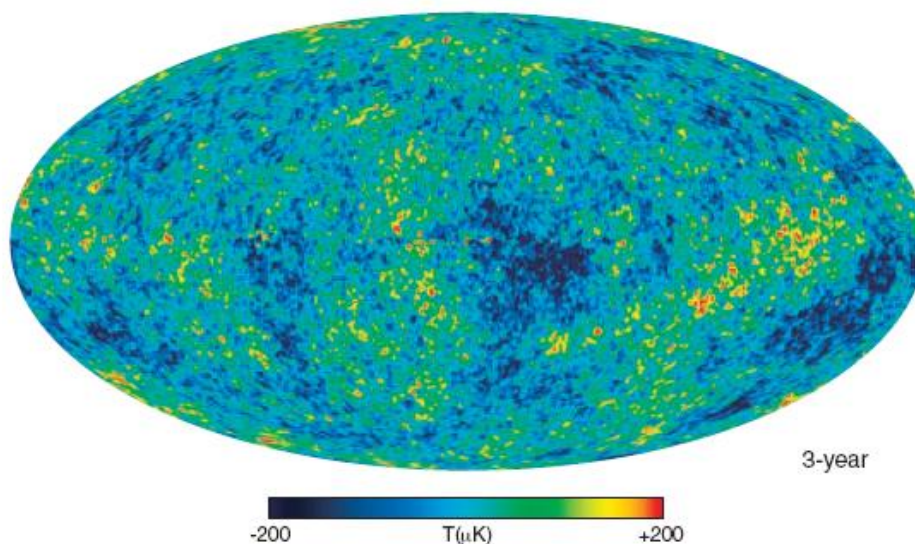
จักรวาลวิทยา เป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมและวิวัฒนาการของเอกภพบนพื้นฐานของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ในบทนี้เราจะทบทวนแนวคิดพื้นฐานของจักรวาลวิทยา พิสูจน์ที่มาของสมการฟรีดมานน์ โดยใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

2.1 หลักการของจักรวาลวิทยา

กาแล็กซีหลายล้านกาแล็กซีที่กระจายอยู่ทั่วอวกาศ และวิวัฒนาการของเอกภพผ่านช่วงเวลาหลายพันล้านปีเป็นสิ่งที่น่าสนใจมาก มีหลายทฤษฎีที่พยายามอธิบายโครงสร้างขนาดใหญ่ของเอกภพว่า เอกภพสามารถขยายตัวออกไปเป็นระยะทางหลายพันล้านปีแสงได้อย่างไร

ประวัติศาสตร์ของเอกภพเริ่มต้นที่บิกแบง (Big Bang) ผ่านกระบวนการเปลี่ยนแปลงหลายยุคก่อนที่จะมีการก่อตัวของดวงดาวและกาแล็กซีต่างๆ สมบัติหนึ่งที่สำคัญของเอกภพคือ สามารถอธิบายด้วยหลักการจักรวาลวิทยา (cosmological principle) ที่กล่าวว่า เอกภพเหมือนกันทุกทิศทางและทุกตำแหน่ง (isotropic and homogeneous) เมื่อพิจารณาที่มาตราส่วนขนาดใหญ่ (large scale) การศึกษาจักรวาลวิทยาสมัยใหม่ มีแนวคิดพื้นฐานว่าเอกภพเหมือนกันทุกที่ (บางครั้งเรียกว่าหลักการโคเปอร์นิคัส หรือ Copernicus principle) หลักการโคเปอร์นิคัสนี้เป็นจริงเมื่อพิจารณาที่มาตราส่วนขนาดใหญ่ (มากกว่า 100 เมกะพาร์เซก (Mpc)) โดยหลักการนี้ได้รับการสนับสนุนจากผลการสังเกตการณ์หลายๆ อย่าง เช่น จำนวนของกาแล็กซี และการสังเกตการณ์กระจายของรังสีเอกซ์ (X-ray) และรังสีแกมมา (γ -ray) พื้นหลัง นอกจากนี้ยังมีผลจากการสังเกตการณ์ของดาวเทียมสำรวจคลื่นไมโครเวฟวิลกินสัน (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe: WMAP) [12] ได้แสดงให้เห็นว่า รังสีไมโครเวฟพื้นหลังของจักรวาล (cosmic microwave background radiation: CMB) มีความเหมือนกันในทุกตำแหน่ง กล่าวคือ ในบางตำแหน่งมีความแตกต่างกันประมาณ 10^{-5} เท่าหรือน้อยกว่า ดังแสดงในภาพที่ 2.1 ซึ่งความแตกต่างเพียงเล็กน้อยนี้มีความสำคัญ

ในยุคแรกเริ่มของเอกภพ ซึ่งอาจจะมีโครงสร้างที่เป็นก้อนพลังงาน แต่ไม่มีผลต่อเอกภพในปัจจุบัน
 ดังนั้นเราจึงตั้งสมมติฐานได้ว่า กาลอวกาศของเราเหมือนกันในทุกทิศทางและทุกตำแหน่ง



ภาพที่ 2.1 ผลการสังเกตการณ์ 3 ปีของดับเบิลยูแมพ (WMAP) แสดงรังสีไมโครเวฟพื้นหลังของจักรวาล (CMB) แผนภาพนี้แสดงในระบบพิกัดกาแล็กซี (Galactic coordinates) โดยเฉดสีที่ต่างกันอยู่ในช่วง ± 200 ไมโครเคลวิน (μK) (ภาพจาก [12])

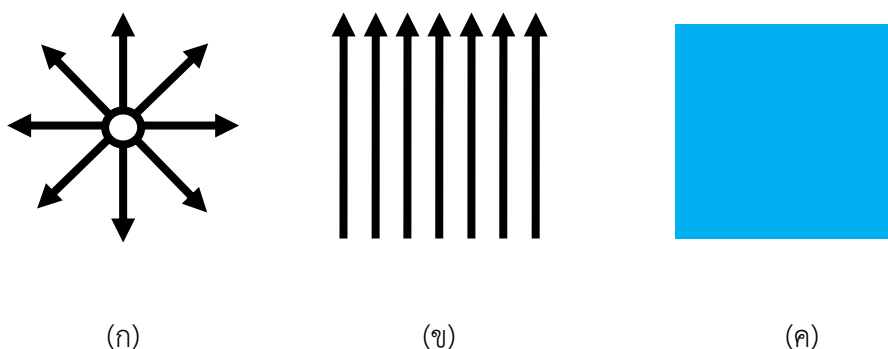
2.1.1 ความเหมือนกันทุกทิศทาง (Isotropy)

หนึ่งในสมมติฐานที่สำคัญของจักรวาลวิทยา คือ โดยเฉลี่ยแล้วเอกภพเหมือนกันในทุกทิศทาง ไม่ว่าจะมองจากตำแหน่งไหน ซึ่งเอกภพเหมือนกันในทุกทิศทาง หมายความว่า ไม่มีทิศทางอ้างอิงในเอกภพ มองทางไหนก็เหมือนกันหมดไม่ขึ้นอยู่กับทิศทางที่เรามอง ในทางคณิตศาสตร์ สมบัติความเหมือนกันทุกทิศทางนี้ กล่าวถึงตำแหน่งบนแมนิโฟลด์ (manifold) โดยแมนิโฟลด์ \mathcal{M} มีความเหมือนกันทุกทิศทางรอบจุด p ถ้าเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ V และ W ใน $T_p\mathcal{M}$ มีสมบัติไอโซเมทรี (isometry) ใน \mathcal{M} กล่าวคือ เมื่อลาก W ภายใต้อิสมetrie แล้ว ทิศทางของ W จะยังคงขนานกับ V [11]

2.1.2 ความเหมือนกันทุกตำแหน่ง (Homogeneity)

เอกภพเหมือนกันในทุกตำแหน่ง หมายความว่า ไม่มีตำแหน่งอ้างอิงในเอกภพ ไม่ว่าเราจะอยู่ตำแหน่งไหนในเอกภพก็เหมือนกันหมด เมื่อพิจารณาที่มาตราส่วนขนาดใหญ่ซึ่งจะทำให้ค่าเฉลี่ยความหนาแน่นของสสารเหมือนกันในทุกตำแหน่งของเอกภพ ในทางคณิตศาสตร์ ความเหมือนกันในทุกตำแหน่ง คือ เมตริกมีความเหมือนกันทั่วทั้งแมนิโฟลด์ หรือกล่าวได้ว่า สำหรับทุกๆ 2 ตำแหน่ง p และ q ใน \mathcal{M} จะมีสมบัติไอโซเมทรี เมื่อแทนตำแหน่ง p ในตำแหน่ง q [11]

มีข้อสังเกตที่น่าสนใจ คือ อวกาศที่เราพิจารณาไม่จำเป็นต้องมีทั้งสมบัติความเหมือนกันทุกทิศทางและเหมือนกันในทุกตำแหน่ง กล่าวคือ แมนิโฟลด์สามารถเหมือนกันในทุกทิศทางแต่ไม่เหมือนกันทุกตำแหน่ง หรือมีความเหมือนกันทุกตำแหน่งแต่ไม่เหมือนกันในทุกทิศทาง พิจารณาได้จากตัวอย่างในภาพที่ 2.2



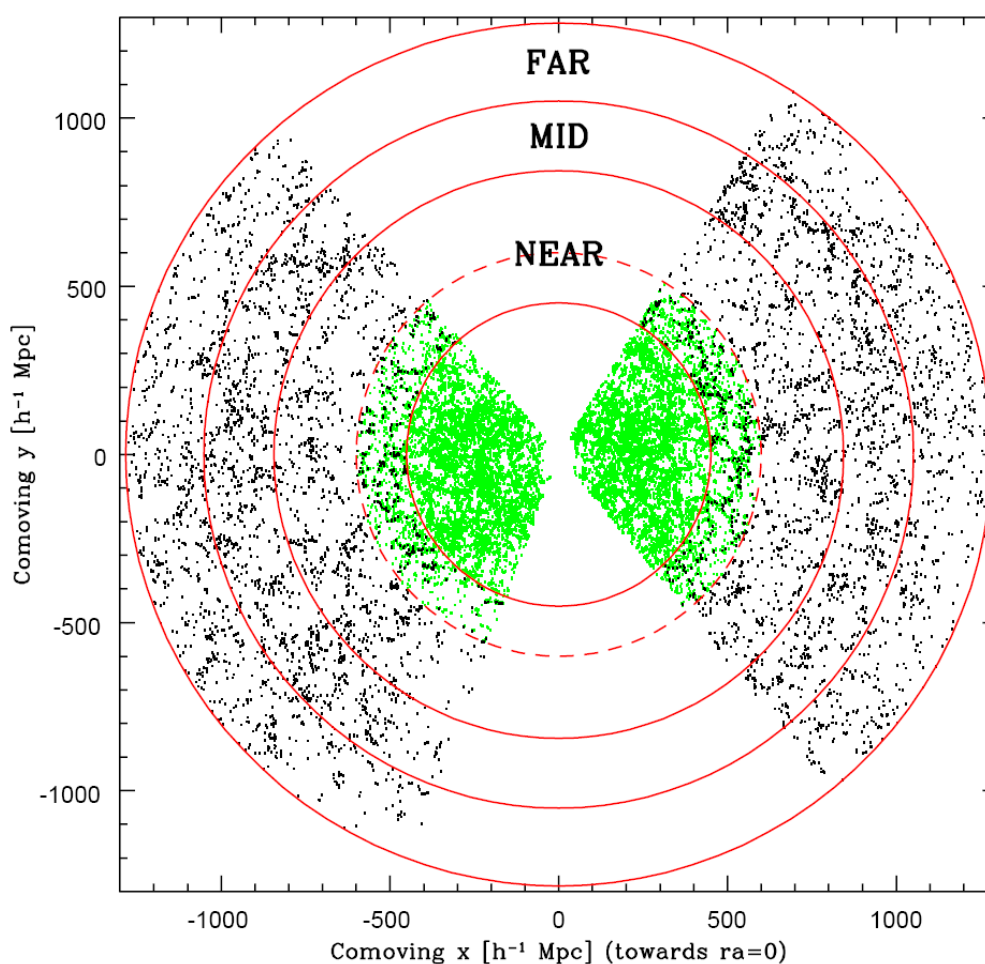
ภาพที่ 2.2 แสดงความแตกต่างกันระหว่างความเหมือนกันในทุกทิศทางกับความเหมือนกันในทุกตำแหน่ง (ก) ในภาพเหมือนกันทุกทิศทางแต่ไม่เหมือนกันในทุกตำแหน่ง (ข) ในภาพเหมือนกันในทุกตำแหน่งแต่ไม่เหมือนกันในทุกทิศทาง (ค) ในภาพเหมือนกันทุกทิศทางและเหมือนกันทุกตำแหน่ง

2.1.3 หลักการของจักรวาลวิทยา

การศึกษาจักรวาลวิทยาในปัจจุบัน มีสมมติฐานว่า การกระจายของสสารในเอกภพมีความเหมือนกันในทุกทิศทางและทุกตำแหน่ง หลักการของจักรวาลวิทยาจะเป็นจริงเมื่อพิจารณาที่มาตราส่วนขนาดใหญ่ (มากกว่า 100 เมกะพาร์เซก) หลักการนี้รวมไปถึงกฎทางฟิสิกส์และแบบจำลองต่างๆ

ใช้ได้เหมือนกันในทุกที่ในเอกภพ รวมทั้งค่าคงตัวต่างๆ เช่น ความเร็วแสง ค่าคงตัวความโน้มถ่วง จะไม่เปลี่ยนไปเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งหรือเวลาในเอกภพ

หลักการของจักรวาลวิทยาเป็นจริงเมื่อพิจารณาที่ระยะหรือขนาดใหญ่พอ ดังนั้นจึงมีคำถามว่าขนาดใหญ่เท่าไรจึงจะใหญ่พอ? ลองจินตนาการว่าเรามองออกไปรอบๆ เป็นทรงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางประมาณ 100 เมกะพาร์เซก โดยมีเราอยู่ที่จุดศูนย์กลาง ขนาดนี้เป็นขนาดของซูเปอร์คลัสเตอร์ของกาแล็กซี (superclusters of galaxies) ซึ่งมองเห็นลักษณะคล้ายงานเรืองแสงที่เหมือนกันทั่วทั้งบริเวณ ดังนั้นที่ระยะขนาด 100 เมกะพาร์เซก เอกภพเริ่มมีความเหมือนกันทุกทิศทางและทุกตำแหน่ง สอดคล้องกับผลการสังเกตการณ์ที่มาตราส่วนขนาดใหญ่ แสดงให้เห็นว่าเอกภพเหมือนกันทุกตำแหน่งและทุกทิศทางเมื่อพิจารณาที่มาตราส่วนขนาดใหญ่อ้างอิงภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 การกระจายของ 6,476 กาแล็กซีแดงเปล่งแสง (Luminous Red Galaxies; LRGs) (ดำ) และ 32,417 กาแล็กซีหลัก (เขียว/เทา) วัดที่ระดับทำมุมกับระนาบเส้นขอบฟ้า 1.25° (ภาพจาก [3])

2.2 โรเบิร์ตสัน-วอล์กเกอร์ เมตริก

จากที่เราได้ศึกษาในหัวข้อที่ผ่านมา ข้อมูลจากการสังเกตการณ์ทำให้เรากล่าวได้ว่าเอกภพเหมือนกันในทุกทิศทางและทุกตำแหน่ง แต่มีการเปลี่ยนแปลงไปในเวลา ในทางคณิตศาสตร์เราสามารถมองหลักการของจักรวาลวิทยาว่าเป็นสมมาตรของกาลอวกาศ ดังนั้นเราสามารถเขียนเมตริกที่สอดคล้องกับความเหมือนกันทุกทิศทางและทุกตำแหน่งของกาลอวกาศได้ดังนี้ [11]

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)d\sigma^2 \quad (2.1)$$

เมื่อ $R(t)$ คือ ตัวประกอบมาตราส่วน (scale factor), t คือ พิกัดเวลา (time-like) และ $d\sigma^2$ คือ เมตริกบนพื้นผิวไฮเปอร์ (hypersurface) เราสามารถเขียนได้ว่า

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}(x)dx^i dx^j \quad (2.2)$$

เมื่อ (x^1, x^2, x^3) คือ พิกัดบนพื้นผิวไฮเปอร์ และ γ_{ij} คือเมตริกเทนเซอร์ (metric tensor) ที่มีสมมาตรใน 3 มิติ การเปลี่ยนแปลงของพื้นผิวไฮเปอร์เทียบกับเวลา t สามารถบอกเราได้ด้วยตัวประกอบมาตราส่วน $R(t)$ เมตริกดังสมการ (2.1) ไม่มีความสัมพันธ์กันระหว่างพจน์ dt , dx^i และสัมประสิทธิ์ของ dt^2 ไม่ขึ้นกับตำแหน่ง x^i เรียกระบบพิกัดแบบนี้ว่า ระบบพิกัดแบบโคมูฟวิง (comoving coordinates)

ในทศวรรษที่ 1930 มีนักฟิสิกส์ 2 ท่าน คือ ฮาวเวิร์ด โรเบิร์ตสัน (Howard Robertson) และอาร์เธอร์ วอล์กเกอร์ (Arthur Walker) ได้นำเสนอเมตริกของกาลอวกาศที่สอดคล้องกับสมมติฐานที่ว่า กาลอวกาศมีความเหมือนกันทุกทิศทางและทุกตำแหน่งตลอดเวลา ยอมให้เฉพาะอวกาศสามารถขยายตัวหรือหดตัวเป็นฟังก์ชันของเวลา เมตริกที่พวกเขาเสนอนี้เรียกว่า โรเบิร์ตสัน-วอล์กเกอร์ เมตริก (Robertson-Walker Metrics) โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้ [13]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.3)$$

เมื่อ $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ เมตริกของกาลอวกาศดั่งสมการ (2.3) ประกอบไปด้วยเมตริกที่อธิบายลักษณะเรขาคณิตของอวกาศโดยมีขนาดขึ้นอยู่กับตัวประกอบมาตราส่วน $a(t)$ ซึ่งเป็นปริมาณที่บอกให้ทราบว่าเอกภพขยายตัวอย่างไรเมื่อเวลาเปลี่ยนไป

สมมติฐานที่ว่าเอกภพเหมือนกันทุกทิศทางและทุกตำแหน่ง เป็นหลักการที่มีประโยชน์มาก กล่าวคือ ทุกสิ่งที่เราต้องการจะรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตของเอกภพถูกบรรจุอยู่ในปริมาณต่อไปนี้ ได้แก่ $a(t)$, k และรัศมี r เมื่อ ตัวประกอบมาตราส่วน $a(t)$ คือปริมาณที่ไม่มีหน่วย เป็นฟังก์ชันของเวลา โดยนิยามว่าที่เวลาปัจจุบัน $a(t_0) = 1$ ในขณะที่ ณ จุดเริ่มต้นบิกแบง $a(0) = 0$ และค่าคงตัวความโค้ง (curvature constant) k เป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วย มีค่าและความหมายแตกต่างกัน ดังนี้

$k = 0$ ถ้าเอกภพมีลักษณะแบนราบ (flat)

$k = -1$ เอกภพมีค่าความโค้งเป็นลบ (มีลักษณะเหมือนอานม้า)

$k = +1$ เอกภพมีค่าความโค้งเป็นบวก (โค้งทรงกลม)

จากโรเบิร์ตสัน-วอล์กเกอร์ เมตริกในสมการ (2.3) เราสามารถคำนวณหาเทนเซอร์ความโค้ง (curvature tensor) และปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง ในการหาผลเฉลยของสมการสนามของไอน์สไตน์ (Einstein field equations) ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นแรกเรากำหนดระบบพิกัดดังนี้

$$x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi \quad (2.4)$$

จากเมตริกในสมการ (2.3) องค์ประกอบที่ไม่เป็นศูนย์ของเมตริกเทนเซอร์ $g_{\mu\nu}$ และ $g^{\mu\nu}$ ได้แก่

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \frac{a^2}{1-kr^2} & & \\ & & a^2 r^2 & \\ & & & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \frac{1-kr^2}{a^2} & & \\ & & \frac{1}{a^2 r^2} & \\ & & & \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป สัญลักษณ์คริสทอฟเฟล สามารถหาค่าได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (2.7)$$

จากเมตริกเทนเซอร์ $g_{\mu\nu}$ และ $g^{\mu\nu}$ ในสมการ (2.5), (2.6) โดยกำหนดให้ $\dot{a} \equiv da/dt$ เราจะต้องประกอบที่ไม่เป็นศูนย์ของสัญลักษณ์คริสทอฟเฟล มีดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2} \\ \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2) & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

หลังจากนั้นเราใช้นิยามของริชชีเทนเซอร์ (Ricci tensor) ซึ่งถูกนิยามโดย

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (2.9)$$

เราสามารถหาค่าริชชีเทนเซอร์โดยใช้รีมันน์เทนเซอร์ (Riemann tensor) ที่นิยามจาก

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (2.10)$$

จากการคำนวณพบว่าองค์ประกอบที่ไม่เป็นศูนย์ของริชชีเทนเซอร์ได้แก่

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\ R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\ R_{33} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\sin^2\theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

และเราสามารถหาค่าริชชีสเกลาร์ (Ricci scalar) ได้จากนิยาม

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

โดยการใช้สมการ (2.11) และ (2.12) เราจะได้

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] \quad (2.13)$$

2.3 สมการฟรีดมานน์

โรเบิร์ตสัน-วอล์กเกอร์ เมตริก (RW) ในสมการ (2.3) ได้นิยามขึ้นเพื่ออธิบายวิวัฒนาการของเอกภพ โดยพิจารณาจากพฤติกรรมของตัวประกอบมาตราส่วน $a(t)$ เราจะใช้เมตริกอาร์ดับเบิลยู (RW) ในการหาสมการฟรีดมานน์ (Friedmann equations) จากสมการสนามของไอน์สไตน์ แต่ก่อนอื่นจะกล่าวถึงเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม (energy-momentum tensor) ดังต่อไปนี้

2.3.1 เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมของเอกภพ

บนสมมติฐานที่ว่าเอกภพเหมือนกันในทุกทิศทางและทุกตำแหน่ง เราสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของเอกภพในเวลาต่างๆ โดยใช้แบบจำลองของไหลสมบูรณ์ (perfect fluids model) โดยของไหลสมบูรณ์เป็นของไหลที่ไม่สูญเสียพลังงานและไม่เกิดการอัดตลอดท่อการไหล (tube of flow) ในขณะที่เกิดการไหลเมตริกสำหรับของไหลนี้จะเหมือนกันทุกที่ ดังนั้นของไหลจะมองดูเหมือนหยดหนึ่งในระบบพิกัดโคมูฟวิง เราจะได้ความเร็ว 4 มิติ ดังนี้

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (2.14)$$

และเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม สามารถเขียนได้ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นพลังงาน (energy density) และ p คือ ความดัน (pressure) โดยความเร็ว 4 มิติ มีสมบัติดังนี้

$$U_\mu U_\nu g^{\mu\nu} = -1 \quad (2.16)$$

เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์เฉียง (diagonal matrix) ได้ดังนี้

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}p & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

สมการ (2.17) นี้สามารถเขียนอยู่ในรูปที่สะดวกขึ้นได้ดังนี้

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (2.18)$$

จากสมการข้างบน เราสามารถหาเทรซ (trace) ของเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$T = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p \quad (2.19)$$

เพื่อให้สอดคล้องกับหลักจักรวาลวิทยา เราสมมติว่าสสารและพลังงานในเอกภพมีลักษณะเป็นของไหลสมบูรณ์ และสามารถนิยามสมการสถานะ (equation of state) สำหรับสสารแต่ละชนิดได้ โดยสมการสถานะสำหรับสสารแต่ละชนิดจะมีค่าพารามิเตอร์ ω ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างความดัน p และความหนาแน่นพลังงาน ρ แตกต่างกันไป โดยเราสามารถเขียนสมการสถานะได้ดังนี้

$$p = \omega\rho \quad (2.20)$$

เมื่อ ω เป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วย และเป็นค่าคงตัวไม่ขึ้นกับเวลา แต่อย่างไรก็ตามพารามิเตอร์ของสมการสถานะ ω สามารถที่จะเปลี่ยนแปลงหรือมีค่าคงตัวขึ้นอยู่กับปริมาณ p และ ρ ว่าจะมีการเปลี่ยนแปลงหรือไม่ แต่เรายังคงเรียกความสัมพันธ์ $p = \omega\rho$ ว่าเป็นสมการสถานะ

จากที่กล่าวมาข้างต้น ถึงตรงนี้เราสามารถหาสมการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy equation) ได้จากองค์ประกอบที่ศูนย์ (zero components) ของสมการไอน์สไตน์ ดังนี้

$$\Delta_\mu T^\mu{}_0 = 0 \quad (2.21)$$

จากนิยามของอนุพันธ์โควาเรียนท์ (covariant derivative) โดยใช้สัญลักษณ์คริสทอฟเฟลในสมการ (2.8) และเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมในสมการ (2.18) ดังนั้น สมการ (2.21) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_\mu T^\mu{}_0 \\ &= \partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^\lambda{}_0 - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T^\mu{}_\lambda \\ &= -\partial_0 \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) \end{aligned} \quad (2.22)$$

และจากสมการสถานะดังสมการ (2.20) แทนค่าในสมการ (2.22) สมการอนุรักษ์พลังงานสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+\omega) \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.23)$$

ถ้า ω เป็นค่าคงตัวไม่ขึ้นกับเวลา สมการ (2.23) เมื่อทำการหาปริพันธ์แล้วเราจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (2.24)$$

ความสัมพันธ์ข้างต้น เราสนใจค่าของพารามิเตอร์ของสมการสถานะ ω ที่เป็นไปได้ สำหรับสิ่งที่มีอยู่ในเอกภพ ได้แก่ สสาร (matter), รังสี (radiation) และพลังงานสุญญากาศ (vacuum energy) ซึ่งเราจะพิจารณารายละเอียดดังต่อไปนี้

สสาร คือกลุ่มของวัตถุที่ไม่มีการชนกัน (collisionless) เคลื่อนที่ช้าเมื่อเปรียบเทียบกับแสง (nonrelativistic) ดังนั้นในการเคลื่อนที่เรากล่าวถึงวัตถุกลุ่มนี้ไม่มีความดัน ดังนั้น

$$p_M = 0 \quad (2.25)$$

โดยทั่วไปแล้ว สสารมักจะหมายรวมถึง แก๊สที่มีความหนาแน่นต่ำ และอนุภาคที่เคลื่อนที่ช้ากว่าแสง ตัวอย่างเช่น ดวงดาว และกาแล็กซีต่างๆ ความดันของสสารปกติแล้วสามารถตัดออกไปจากการพิจารณาได้ เมื่อเปรียบเทียบกับความหนาแน่นพลังงาน ซึ่งในบางครั้งอาจเรียกว่า ฝุ่น (dust) ในยุคที่ความหนาแน่นพลังงานของเอกภพขึ้นอยู่กับสสาร เรียกยุคนั้นว่า *ยุคอิทธิพลของสสาร (matter-dominated)*

จากสมการ (2.24) สำหรับสสารแล้ว เราพบว่า $\omega_M = 0$ ดังนั้น ความหนาแน่นพลังงานของสสารจะแปรผันดังนี้

$$\rho_M \propto a^{-3} \quad (2.26)$$

จากสมการแสดงให้เห็นว่า ความหนาแน่นพลังงานของสสารลดลงดังนี้ $\rho_M \propto a^{-3} = V^{-1}$ เมื่อ V คือ ปริมาตร นั่นหมายความว่า ความหนาแน่นของอนุภาคลดลงขณะที่เอกภพขยายตัวออก

รังสี คือกลุ่มของรังสี คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและอนุภาคที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วใกล้ความเร็วแสง เช่น อนุภาคที่อยู่ในยุคแรกเริ่มของเอกภพ ได้แก่ โฟตอน เป็นต้น ในการหาสมการสถานะเราจะพิจารณาจากสมบัติของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยเราสามารถเขียนเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic stress-energy-momentum tensor) ได้เป็น [11, 14]

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \quad (2.27)$$

เราสามารถหาเทรซ (trace) ของสมการข้างต้นโดยใช้สมบัติของเมตริกเทนเซอร์ ดังนี้

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \\ T^{\mu}_{\mu} &= F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4} (4) F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

แต่เนื่องจากในวิชาจักรวาลวิทยารังสีเป็นของไหลสมบูรณ์ ดังนั้นเทรซในสมการ (2.28) จะต้องเท่ากับเทรซในสมการ (2.19) เราจะได้สมการสถานะของรังสี ดังนี้

$$p_R = \frac{1}{3} \rho_R \quad (2.29)$$

จากสมการ (2.24) และสมการ (2.29) สำหรับรังสีเราจะได้ $\omega_R = 1/3$ ดังนั้น ความหนาแน่นพลังงานของรังสีจะแปรผัน ดังสมการ

$$\rho_R \propto a^{-4} \quad (2.30)$$

จากสมการ (2.30) แสดงให้เห็นว่า ความหนาแน่นพลังงานของรังสีลดลงโดย $\rho_M \propto a^{-4}$ หมายความว่า ขณะที่เอกภพเกิดการขยายตัวความหนาแน่นพลังงานของรังสีลดลงเร็วกว่าความหนาแน่นพลังงานของสสาร ที่เป็นเช่นนี้เพราะ ความหนาแน่นของจำนวนโฟตอนลดลงเหมือนกรณีของสสารทั่วไป แต่โฟตอนเองมีการสูญเสียพลังงานเนื่องจากการขยายตัวของเอกภพเป็นสัดส่วนกับ a^{-1} (กล่าวคือเมื่อเอกภพขยายตัวจะเกิดปรากฏการณ์เรดชิฟต์ (redshift) ของโฟตอน และ $\Delta E \propto \lambda^{-1} \propto a^{-1}$)

ในยุคที่ความหนาแน่นพลังงานของเอกภพขึ้นอยู่กับรังสี เรียกยุคนี้ว่า *ยุคอิทธิพลของรังสี (radiation-dominated)* ซึ่งเป็นยุคแรกเริ่มของเอกภพ ขณะที่เอกภพยังมีขนาดเล็กมากและการขยายตัวของเอกภพได้รับอิทธิพลจากรังสี

พลังงานสุญญากาศ คือ พลังงานพื้นหลังของเอกภพ ซึ่งในปัจจุบันมีความสำคัญมากในการอธิบายการขยายตัวของเอกภพ ในการศึกษาพลังงานสุญญากาศเราใช้ค่าคงตัวจักรวาลวิทยา โดยในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปค่าคงตัวจักรวาลวิทยา Λ ปรากฏในสมการไอน์สไตน์ ดังนี้

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.31)$$

จะเห็นว่าสมการสนามตามสมการ (2.31) จะอธิบายอวกาศว่างเปล่าหรือพลังงานสุญญากาศ เมื่อ $T_{\mu\nu}$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น เราสามารถเขียนค่าคงตัวจักรวาลวิทยาตามสมการ (2.31) ได้เป็น

$$\Lambda g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}\Lambda & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

นั่นคือ พลังงานสุญญากาศมีลักษณะเหมือนของไหลสมบรูณ์ ซึ่งมีสมการสถานะ คือ $p_\Lambda \propto -\rho_\Lambda$ เราจะได้ว่า $\omega_\Lambda = -1$ ดังนั้น ความหนาแน่นพลังงานของสุญญากาศมีค่าคงตัว

$$p_\Lambda \propto a^0 \quad (2.33)$$

จากการพิจารณาข้างต้น เมื่อเอกภพเกิดการขยายตัว ความหนาแน่นพลังงานของสสารและรังสีจะลดลงเรื่อยๆ ส่วนความหนาแน่นพลังงานของสุญญากาศมีค่าคงตัวตลอดเวลา จนในที่สุดพลังงานสุญญากาศก็มีอิทธิพลต่อการขยายตัวของเอกภพ ในยุคที่ความหนาแน่นพลังงานของเอกภพขึ้นอยู่กับพลังงานสุญญากาศ เรียกยุคนี้ว่า *ยุคอิทธิพลของสุญญากาศ (vacuum-dominated)*

2.3.2 สมการฟรีดมานน์

สมการฟรีดมานน์ (The Friedmann equation) เกิดจากสมมติฐานที่ว่าเอกภพเหมือนกันในทุกทิศทางและทุกตำแหน่ง สมการฟรีดมานน์เป็นผลเฉลยของสมการไอน์สไตน์ ในการหาสมการฟรีดมานน์ เราพิจารณาจากสมการไอน์สไตน์ที่ไม่มีค่าคงตัวจักรวาลวิทยา ซึ่งเขียนได้ดังสมการ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.34)$$

โดยใช้รีชีเทนเซอร์ ในสมการ (2.11) และรีชีสเกลาร์ ในสมการ (2.13) รวมทั้งเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมในสมการ (2.18) เพื่อคำนวณหาสมการฟรีดมานน์ ตามขั้นตอนต่อไปนี้

จากสมการ (2.34) พิจารณาองค์ประกอบที่ $\mu\nu = 00$ จะได้

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} &= 8\pi G T_{00} \\ -3\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{1}{2}\right) \left[6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right) \right] (-1) &= 8\pi G \rho \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

และองค์ประกอบที่ $\mu\nu = ij$ จะได้

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 8\pi G T_{ij}$$

พิจารณาองค์ประกอบ $\mu\nu = 11$ จะได้

$$\begin{aligned} R_{11} - \frac{1}{2} R g_{11} &= 8\pi G T_{11} \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} &= -8\pi G p \end{aligned} \quad (2.36)$$

เราสามารถใส่สมการ (2.35) เพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของสมการ (2.36) จะได้ว่า

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}\right) + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (2.37)$$

เราจะพบว่าในองค์ประกอบ $\mu\nu = ij$ มีผลเฉลยเพียงสมการเดียว สอดคล้องกับสมบัติความเหมือนกันทุกทิศทาง ของเอกภพ จากที่กล่าวมาข้างต้นเราจะได้สองสมการที่สำคัญ ดังนี้

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} \quad (2.38)$$

และ

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.39)$$

สองสมการข้างต้นนี้คือ สมการฟรีดมานน์ ซึ่งเป็นสมการที่อธิบายวิวัฒนาการของเอกภพภายใต้สมมติฐานที่ว่า เอกภพเหมือนกันทุกทิศทางและทุกตำแหน่ง เนื่องจากสมการฟรีดมานน์สามารถคำนวณได้โดยใช้เมตริกในสมการ (2.3) ดังนั้นแบบจำลองจักรวาลแบบนี้รวมเรียกว่า แบบจำลองจักรวาลแบบฟรีดมานน์-โรเบิร์ตสัน-วอล์กเกอร์ (Friedmann-Robertson-Walker: FRW)

2.3.3 พารามิเตอร์จักรวาล

ก่อนที่จะศึกษาในหัวข้อต่อไป จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งเมื่อเราทำความเข้าใจเกี่ยวกับพารามิเตอร์จักรวาล (cosmological parameters) ต่างๆ ในสมการฟรีดมานน์ ดังต่อไปนี้

1) พารามิเตอร์ฮับเบิล (Hubble parameter) คือ อัตราการขยายตัวของเอกภพ ซึ่งนิยามโดย

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.40)$$

พารามิเตอร์ฮับเบิล ไม่ใช่ค่าคงตัว เนื่องจากเอกภพขยายตัวตลอดเวลา แต่ค่าคงตัวฮับเบิล หมายถึงพารามิเตอร์ฮับเบิลที่วัด ณ ปัจจุบัน H_0 ซึ่งจากผลการทดลองในปัจจุบันสามารถวัดค่าคงตัวฮับเบิลได้ดังนี้

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (2.41)$$

เมื่อ $h \approx 0.7$ และ Mpc คือหน่วยเมกะพาร์เซก ค่าคงตัวฮับเบิลมีมิติ (dimension) เป็น $[\text{Time}]^{-1}$ ในหน่วยธรรมชาติ (natural units) ดังนั้น H_0^{-1} มักจะอ้างถึงทั้งความยาวฮับเบิล (Hubble length) $d_H = H_0^{-1}c$ และเวลาฮับเบิล (Hubble time) $t_H = H_0^{-1}$ [11]

2) พารามิเตอร์ความหนาแน่น (Density parameter) คืออัตราส่วนของความหนาแน่นจริง (actual density) ρ กับความหนาแน่นวิกฤต (critical density) ρ_c ของเอกภพแบบเฟร็ดมันน์-เลอแม็ตร์-โรบิร์ตสัน (FRW) พารามิเตอร์ความหนาแน่นเป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วย มักถูกนำเสนอเมื่อกล่าวถึงความหนาแน่นของเอกภพ ซึ่งความหนาแน่นวิกฤตถูกนิยามโดยสมมติให้ค่าคงตัวจักรวาลวิทยา Λ เป็นศูนย์ และพิจารณาในเอกภพแบบแบนราบ (flat universe: $k=0$) ดังนั้นสมการฟรีดมันน์ตามสมการ (2.38) สามารถเขียนอยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \quad (2.42)$$

ดังนั้น เราจะได้ความหนาแน่นวิกฤต

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.43)$$

ปริมาณนี้จะเปลี่ยนแปลงตามเวลา เนื่องจากพารามิเตอร์ของฮับเบิล H เปลี่ยนแปลงตามเวลา จากนิยามเราจะได้พารามิเตอร์ความหนาแน่น ดังสมการ

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho \quad (2.44)$$

สมการฟรีดมันน์ตามสมการ (2.38) สามารถเขียนในรูปของพารามิเตอร์ความหนาแน่น ได้ดังนี้

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (2.45)$$

ข้อสังเกต ถ้าเรารู้ค่าของ Ω เราจะรู้เครื่องหมายของค่าคงตัวความโค้ง k และทราบถึงลักษณะเรขาคณิตของเอกภพ ดังนี้

$$\Omega > 1 \quad \leftrightarrow \quad k > 0 \quad \rightarrow \quad \text{เอกภพแบบปิด (close)}$$

$$\Omega < 1 \quad \leftrightarrow \quad k < 0 \quad \rightarrow \quad \text{เอกภพแบบเปิด (open)}$$

$$\Omega = 1 \quad \leftrightarrow \quad k = 0 \quad \rightarrow \quad \text{เอกภพแบบแบนราบ (flat)}$$

จากการวิเคราะห์ข้างต้นเราพบว่า ถ้า Ω มีมากกว่า 1 อวกาศของเอกภพเป็นแบบปิด กล่าวคือ เอกภพจะหยุดขยายตัว และสุดท้ายเกิดการยุบตัวอีกครั้งหนึ่ง เรียกว่า บิกครันช์ (Big Crunch) ถ้า Ω มีค่าน้อยกว่า 1 อวกาศของเอกภพเป็นแบบเปิด กล่าวคือ เอกภพจะขยายตัวไปเรื่อยๆ เรียกว่า บิกฟรีซ (Big Freeze) หรือ บิกริป (Big Rip) และถ้า Ω มีค่าเท่ากับ 1 อวกาศของเอกภพเป็นแบบแบนราบ เอกภพจะอยู่คงที่ต่อไป ดังนั้นตามแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบเอพอาร์ดับเบิลยู บอกเราได้ว่าเรขาคณิตหรือวิวัฒนาการของเอกภพมีอยู่ 3 แบบดังกล่าวข้างต้น

3) เรดชิฟต์ คือ ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์ (Doppler effect) ทางดาราศาสตร์ เมื่อแหล่งกำเนิดแสง เช่น ดวงดาว เคลื่อนที่ออกจากโลก ความยาวคลื่นของแสงจะเลื่อน (shift) ไปทางเส้นสเปกตรัมสีแดง นักจักรวาลวิทยาใช้เรดชิฟต์ในการสังเกตการขยายตัวของเอกภพ

ในจักรวาลวิทยา เรดชิฟต์ เป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วย เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ z โดยนิยามจาก อัตราการเปลี่ยนแปลงความยาวคลื่นที่สังเกตได้ (observe) กับความยาวคลื่นที่ปล่อยออกมา (emit) ของวัตถุ (แหล่งกำเนิดแสง) ดังนั้น z นิยามโดย [11]

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \quad (2.46)$$

เมื่อ λ_{obs} คือ ความยาวคลื่นที่สังเกตได้ และ λ_{em} คือ ความยาวคลื่นที่ปล่อยออกมาจากแหล่งกำเนิด

ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบมาตราส่วน a และเรดชิฟต์ z เราพิจารณาจากแสงของกาแล็กซีที่ถูกปล่อยออกมาที่เวลา t_e แล้วถูกสังเกตโดยผู้สังเกตที่เวลา t_o เราทราบว่าแสงเคลื่อนที่ตามเส้นนัลล์ จีออเดสิก (null geodesic) ด้วย $ds = 0$ และนัลล์ จีออเดสิก มี θ และ ϕ คงที่ ดังนั้น เมตริกสำหรับแสงที่เดินทางตามเส้นนัลล์ จีออเดสิก ในกาลอวกาศแบบแบนราบ ($k = 0$) สามารถเขียนได้เป็น [13]

$$dt^2 = a(t)^2 dr^2 \quad (2.47)$$

จากสมการข้างต้นสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{a(t)} dt = dr \quad (2.48)$$

ในสมการ (2.48) ด้านซ้ายของสมการเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา ส่วนด้านขวาของสมการเป็นฟังก์ชันที่ไม่ขึ้นกับเวลา เราสนใจลูกคลื่นที่ถูกปล่อยออกจากกาแล็กซีด้วยความยาวคลื่น λ_{em} ที่เวลา t_e แล้วถูกสังเกตโดยผู้สังเกตที่เวลา t_o ดังนั้น

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{1}{a(t)} dt = \int_0^r dr = r \quad (2.49)$$

หลังจากนั้นคลื่นลูกต่อมาถูกปล่อยออกมาที่เวลา $t_e + \lambda_{em}/c$ (c คือความเร็วแสง) และถูกสังเกตที่เวลา $t_o + \lambda_{obs}/c$ ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว $\lambda_{obs} \neq \lambda_{em}$ สำหรับคลื่นลูกที่สองนี้จะได้

$$\int_{t_e + \lambda_{em}/c}^{t_o + \lambda_{obs}/c} \frac{1}{a(t)} dt = \int_0^r dr = r \quad (2.50)$$

จากสมการ (2.49) และสมการ (2.50) เราพบว่า

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{1}{a(t)} dt = \int_{t_e + \lambda_{em}/c}^{t_o + \lambda_{obs}/c} \frac{1}{a(t)} dt \quad (2.51)$$

พิจารณาสมการ (2.51) ด้านขวามือของสมการสามารถแยกหาปริพันธ์ ได้ดังนี้

$$\int_{t_e + \lambda_{em}/c}^{t_o + \lambda_{obs}/c} \frac{1}{a(t)} dt = \int_{t_e}^{t_o} \frac{1}{a(t)} dt - \int_{t_e}^{t_e + \lambda_{em}/c} \frac{1}{a(t)} dt + \int_{t_o}^{t_o + \lambda_{obs}/c} \frac{1}{a(t)} dt \quad (2.52)$$

จากสมการ (2.51) และสมการ (2.52) เราจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\int_{t_e}^{t_e + \lambda_{em}/c} \frac{1}{a(t)} dt = \int_{t_o}^{t_o + \lambda_{obs}/c} \frac{1}{a(t)} dt \quad (2.53)$$

ความสัมพันธ์ดังสมการข้างต้น เราสามารถประมาณได้ว่า $a(t)$ เป็นค่าคงตัว เพราะว่า ช่วงเวลาที่แหล่งกำเนิดแสงปล่อยคลื่นแสงแต่ละลูกห่างกันน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับช่วงเวลาที่เอกภพใช้ในการขยายตัว กล่าวคือ เวลาฮับเบิล มีค่าประมาณ $H_0^{-1} \approx 14 \times 10^9$ ปี (Gyr) ส่วนคาบของคลื่นแสงประมาณ $\lambda/c \approx 2 \times 10^{-15} s \approx 10^{-32} H_0^{-1}$ ดังนั้น สมการ (2.53) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e + \lambda_{em}/c} dt = \frac{1}{a(t_o)} \int_{t_o}^{t_o + \lambda_{obs}/c} dt \quad (2.54)$$

ดังนั้น เราจะได้ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \quad (2.55)$$

จากนิยามของเรดชิฟต์ในสมการ (2.46) เราพบว่าเรดชิฟต์ของแสงมีความสัมพันธ์กับตัวประกอบมาตราส่วน ดังนี้

$$1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \quad (2.56)$$

หรือ

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \quad (2.57)$$

เพื่อความสะดวกเรากำหนดให้ ณ ปัจจุบัน $a_{obs} = a(t_o) = 1$ นั้นแสดงว่า

$$a(t_e) = \frac{1}{1 + z} \quad (2.58)$$

ดังนั้น เรดชิฟต์ของวัตถุใดๆ บอกให้เราทราบขนาดของตัวประกอบมาตราส่วน ในขณะที่โฟตอนนั้นถูกปล่อยออกมา

จากสมการ (2.58) พบว่า ถ้าเราสังเกตกาแล็กซีที่มีเรดชิฟต์ $z = 1$ แสดงว่าแสงนั้นถูกปล่อยออกมา ณ เวลาที่ขนาดของตัวประกอบมาตรา $a(t_e) = 1/2$ ดังนั้น เรดชิฟต์ของวัตถุที่อยู่ตำแหน่งต่างๆ ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบมาตราส่วน ณ เวลาที่ปล่อยแสงออกมา กับช่วงเวลาที่สังเกตได้

2.4 วิวัฒนาการของความหนาแน่นพลังงาน

การศึกษาวิวัฒนาการของเอกภพ เราใช้สมมติฐานที่ว่าเอกภพมีความเหมือนกันในทุกทิศทาง และทุกตำแหน่ง ซึ่งจากสมมติฐานนี้เราได้สมการฟรีดมันน์ ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นพลังงาน ρ , ความดัน p , และตัวประกอบมาตราส่วน a เป็นการยากที่จะศึกษาเอกภพที่ประกอบไปด้วยองค์ประกอบต่างๆ มากมาย เช่น รังสี สสาร และพลังงานสุญญากาศ โดยแต่ละองค์ประกอบมีพารามิเตอร์ของสมการสถานะที่แตกต่างกัน ได้แก่ $\omega=0$, $\omega=1/3$ และ $\omega=-1$ แต่โชคดีที่เราสามารถเขียนความหนาแน่นพลังงานรวม ρ ซึ่งเป็นผลรวมของความหนาแน่นพลังงานย่อย ρ_ω โดย ρ_ω ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ของสมการสถานะของแต่ละองค์ประกอบ ω ดังนี้

$$\rho = \sum_{\omega} \rho_{\omega} \quad (2.59)$$

ดังนั้น ความดันรวม p คือ ผลรวมของความดันแต่ละองค์ประกอบ ดังนี้

$$p = \sum_{\omega} p_{\omega} = \sum_{\omega} \omega \rho_{\omega} \quad (2.60)$$

จากแนวคิดที่ว่าเอกภพมีสมบัติเหมือนของไหลสมบูรณ์ ดังนั้นแต่ละองค์ประกอบของเอกภพจะไม่มีอันตรกิริยาต่อกัน ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนสมการของไหลได้ดังนี้

$$\dot{\rho}_{\omega} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_{\omega} + p_{\omega}) = 0 \quad (2.61)$$

หรือ

$$\dot{\rho}_{\omega} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_{\omega}(1 + \omega) = 0 \quad (2.62)$$

เหมือนกับที่เราได้พิจารณาในหัวข้อ 2.3 เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ (2.62) และได้สมการที่อธิบายวิวัฒนาการของความหนาแน่นพลังงาน ดังนี้

$$\rho_\omega = \rho_o a^{-3(1+\omega)} \quad (2.63)$$

เมื่อ ρ_ω คือ ความหนาแน่นพลังงานของแต่ละองค์ประกอบขึ้นอยู่กับ ω , ρ_o คือความหนาแน่นพลังงาน ณ ปัจจุบัน และเพื่อความสะดวกเราใช้ตัวประกอบมาตราส่วนที่เวลาปัจจุบัน คือ $a_0 = 1$

ดังนั้น เราสามารถสรุปวิวัฒนาการของความหนาแน่นพลังงานสำหรับแต่ละองค์ประกอบของเอกภพได้ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 วิวัฒนาการของความหนาแน่นพลังงานสำหรับแต่ละองค์ประกอบของเอกภพ

	ω	วิวัฒนาการของ ความหนาแน่นพลังงาน
สสาร	0	$\rho_m = \rho_o a^{-3}$
รังสี	$\frac{1}{3}$	$\rho_m = \rho_o a^{-4}$
สุญญากาศ	-1	$\rho_m = \rho_o$

หลังจากที่เราได้ศึกษาวิวัฒนาการของความหนาแน่นพลังงานแล้ว เราจะศึกษาวิวัฒนาการของตัวประกอบมาตราส่วน โดยพิจารณาจากเอกภพแบบแบนราบ $k = 0$ ดังนั้นสมการฟรีดมานน์ตามสมการ (2.38) สามารถเขียนได้เป็น

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_\omega \rho_\omega \quad (2.64)$$

พิจารณาเอกภพที่มีองค์ประกอบเดียว สมการฟรีดมานน์สามารถเขียนอยู่ในรูปอย่างง่าย ดังนี้

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_o a^{-3(1+\omega)} \quad (2.65)$$

หรือ

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a^{-(1+3\omega)} \quad (2.66)$$

การหาผลเฉลยของสมการ (2.66) เราใช้เทคนิคการเดาคำตอบ โดยสมมติให้ตัวประกอบมาตราส่วน อยู่ในรูปของ $a \propto t^q$ ดังนั้น จากสมการ (2.66) เราพบว่า

$$t^{2q-2} \propto t^{-(1+3\omega)q} \quad (2.67)$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการคือ

$$q = \frac{2}{3(1+\omega)} \quad (2.68)$$

โดยที่ $\omega \neq -1$ จากสมการข้างต้นเราจะได้ว่า ตัวประกอบมาตราส่วนสำหรับเอกภพแบบแบนราบที่มีหนึ่งองค์ประกอบ จะแปรผันตามเวลา ดังนี้

$$a \propto t^{2/3(1+\omega)} \quad (2.69)$$

ถ้าเอกภพปัจจุบันมีอายุเป็น t_0 และเราใช้ $a_0 = 1$ เราจะได้

$$a = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3(1+\omega)} \quad (2.70)$$

ดังนั้น เราสามารถสรุปวิวัฒนาการของตัวประกอบมาตราส่วน ของแต่ละองค์ประกอบของเอกภพ ได้ ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 วิวัฒนาการของตัวประกอบมาตราส่วนสำหรับแต่ละองค์ประกอบของเอกภพ

	ω	วิวัฒนาการของ ตัวประกอบมาตราส่วน
รังสี	$\frac{1}{3}$	$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$
สสาร	0	$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$

ความสัมพันธ์ในสมการ (2.69) สามารถเชื่อมกับค่าคงตัวฮับเบิล ได้ดังนี้

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0} = \frac{2}{3(1+\omega)} t_0^{-1} \quad (2.71)$$

จากสมการนี้เราจะได้อายุของเอกภพ คือ

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)} H_0^{-1} \quad (2.72)$$

จากสมการ (2.72) ทำให้เราทราบว่า เอกภพมีอายุน้อยกว่าเวลาฮับเบิล (Hubble time) ถ้า $\omega > -1/3$ และเอกภพมีอายุมากกว่าเวลาฮับเบิล ถ้า $\omega < -1/3$

ข้อมูลจากผลการสังเกตการณ์ในปัจจุบันพบว่าเอกภพกำลังขยายตัวด้วยความเร่ง ตามทฤษฎีแล้วประวัติศาสตร์ของเอกภพเริ่มต้นที่บิกแบง ณ ช่วงเวลาแรกเริ่มเอกภพเต็มไปด้วยรังสี เรียกยุคนี้ว่า ยุคอิทธิพลของรังสี หลังจากนั้นเอกภพได้ขยายตัวออกห่างกันเรื่อยๆ รังสีเริ่มลดบทบาทลง สสารต่างๆ เริ่มก่อตัว ทำให้เอกภพเต็มไปด้วยสสาร ในยุคนี้เรียกว่า ยุคอิทธิพลของสสาร ตามทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปแล้ว การขยายตัวของเอกภพควรจะช้าลงเรื่อยๆ แต่ข้อมูลจากการสังเกตการณ์กลับพบว่าเอกภพกำลังขยายตัวด้วยความเร่ง นักฟิสิกส์ทฤษฎีได้อธิบายปรากฏการณ์นี้ว่า เกิดจากพลังงานมืด จึงเรียกยุคนี้ว่า ยุคอิทธิพลของพลังงานมืด ซึ่งก็คือยุคปัจจุบันนี้ นักฟิสิกส์ได้พยายาม

พัฒนาแบบจำลองต่างๆ ให้มีความเหมาะสมในการอธิบายการขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพ ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ได้ศึกษาแนวคิดและผลของแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น ซึ่งเป็นแบบจำลองที่พยายามอธิบายวิวัฒนาการของเอกภพ ความน่าสนใจของแบบจำลองนี้ คือ ใช้วิธีการศึกษาเอกภพโดยเพิ่มมิติพิเศษเข้ามาในกาลอวกาศ 4 มิติ เป็นกาลอวกาศ 6 มิติ เรียกว่า บัลค์ 6 มิติ มีสมมติฐานที่ว่า กาลอวกาศ 4 มิติที่เราอยู่ มีลักษณะเป็นเบรน เรียกว่า 3-เบรน โดยบัลค์ 6 มิติ ประกอบไปด้วย 4-เบรนฝั่งตัวอยู่ และใน 4-เบรนมี 3-เบรนฝั่งตัวอยู่ลดหลั่นตามลำดับ ดังรายละเอียดอยู่ในบทที่ 4 ของวิทยานิพนธ์เล่มนี้

บทที่ 3

จักรวาลวิทยาแบบเบรน

ในบทที่ผ่านมาเรามีสมมติฐานว่า เอกภพของเราอยู่ในกาลอวกาศ 4 มิติ กล่าวคือ กาลอวกาศประกอบด้วยมิติของเวลาหนึ่งมิติและมิติของอวกาศอีกสามมิติ อย่างไรก็ตามในทฤษฎีสตริง (string theory) ได้แสดงให้เห็นว่าความเป็นไปได้ที่กาลอวกาศจะมีมากกว่า 4 มิติ โดยมิติที่ซ่อนตัวอยู่นี้เรียกว่ามิติพิเศษ เพื่อให้สอดคล้องกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองในปัจจุบันโดยส่วนมากแล้วนักฟิสิกส์จะตั้งสมมติฐานว่า มิติพิเศษเหล่านี้มีปริมาตรจำกัดและมีขนาดเล็กมาก ตัวอย่างเช่นในทฤษฎีสตริงรัศมีของมิติพิเศษมีขนาดเล็กมากอยู่ในระดับความยาวพลังค์ (Planck length) ดังนั้นจึงไม่สามารถวัดหรือตรวจพบมิติพิเศษได้ด้วยเทคโนโลยีปัจจุบัน แต่การศึกษามิติพิเศษเต็มไปด้วยความท้าทาย และมีความน่าสนใจ มีการพัฒนาทฤษฎีที่พิจารณาให้มิติพิเศษมีขนาดใหญ่ และสามารถแก้ปัญหาไฮเออราคิ (hierarchy problem) ได้ [35] และบางทฤษฎีมิติพิเศษนอกจากจะมีขนาดใหญ่แล้ว [5] แต่ยังมีปริมาตรไม่จำกัดด้วย [6] มีแบบจำลองจักรวาลวิทยามากมายที่ได้รับแรงบันดาลใจจากมิติพิเศษขนาดใหญ่ เรารู้จักทฤษฎีเหล่านี้ในชื่อว่า จักรวาลวิทยาแบบเบรน (brane cosmology) หรือ จักรวาลวิทยาในโลกแบบเบรน (brane world cosmology) ในบทนี้และบทถัดไปของวิทยานิพนธ์เล่มนี้เราจะกล่าวถึงผลทางทฤษฎีที่น่าสนใจของจักรวาลวิทยาแบบเบรน

ในบทนี้เราจะนำเสนอแนวคิดโดยย่อเกี่ยวกับจักรวาลวิทยาแบบเบรน ประกอบด้วยแบบจำลองอาร์เอส 1 (RS I) และอาร์เอส 2 (RS II) รวมทั้งการวิเคราะห์แบบจำลองดีจีพี ซึ่งเป็นแบบจำลองจักรวาลวิทยาในกาลอวกาศ 5 มิติ ได้รับการพัฒนามาจากแบบจำลองจักรวาลวิทยามาตรฐานที่ระดับพลังงานต่ำ แบบจำลองนี้ได้ให้ผลทางทฤษฎีที่สำคัญในการอธิบายการขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพ โดยไม่จำเป็นต้องมีพลังงานมืด

3.1 ความโน้มถ่วงในมิติที่สูงขึ้น

แนวคิดเกี่ยวกับมิติพิเศษได้ถูกนำเสนอครั้งแรกในช่วงทศวรรษที่ 1920 โดยคาลูซา (Kaluza) และ ไคลน์ (Klein) [15] พวกเขาพยายามรวมสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและความโน้มถ่วงเข้าด้วยกัน ด้วยการนำเสนออวกาศ 5 มิติ ที่มีมิติพิเศษม้วนตัวเป็นวงกลมอยู่ในกาลอวกาศ 4 มิติ และขนาดของมิติพิเศษเล็กกว่าขนาดนิวเคลียสของอะตอม [16] อยู่ในระดับมาตราส่วนพลังค์ (Planck scale) ต่อมาเมื่อมีทฤษฎีที่พัฒนามาจากแนวคิดตามทฤษฎีของคาลูซา-ไคลน์ (Kaluza-Klein theory)

ตัวอย่างเช่น ทฤษฎีซูเปอร์สตริง (superstring theories) ที่นำไปสู่การพัฒนาทฤษฎีควอนตัมความโน้มถ่วง (quantum gravity) ใน 10 มิติ [17]

วิธีการศึกษาและพัฒนาทฤษฎีเกี่ยวกับมิติพิเศษในปัจจุบันที่สำคัญ มีแนวคิดพื้นฐานมาจากทฤษฎีสตริง และทฤษฎีเอ็ม (M – theory) แนวคิดตามทฤษฎีนี้มีสมมติฐานว่า อนุภาคต่างๆ ในแบบจำลองมาตรฐานถูกขังอยู่บนพื้นผิวไฮเปอร์ (hypersurface) เรียกว่า เบรน โดยที่เบรนฝังตัว (embed) อยู่ในอวกาศที่มีจำนวนมิติมากกว่า เรียกว่า บัลค์ มีเพียงความโน้มถ่วงที่สามารถหลุดออกไปยังมิติพิเศษได้ [18] เอกภพที่เราอาศัยอยู่ถูกสมมติให้เป็นวัตถุคล้ายเบรน เรียกว่า 3-เบรน หรือ เบรน 3 มิติ ที่กล่าวมาทั้งหมดนี้คือหลักการของแบบจำลองโลกแบบเบรน เมื่อหลายปีมาแล้วมีคำถามหนึ่งที่ยังต้องการคำตอบคือ มิติพิเศษต้องมีขนาดเท่าใดจึงจะสอดคล้องกับข้อมูลที่ได้จากการสังเกตการณ์หรือการทดลองในปัจจุบัน

ภายใต้สมมติฐานที่ว่า มิติพิเศษสามารถมีขนาดใหญ่ขึ้นและไม่จำเป็นต้องคอมแพคต์ (non-compact) ดังนั้นหน่วยพื้นฐานในธรรมชาติจึงต้องมีการเปลี่ยนแปลง กล่าวคือ มวลพลังค์ (Planck mass) ใน 4 มิติ $M_p \equiv M_4$ ไม่ใช่หน่วยพื้นฐานอีกต่อไป แต่จะเปลี่ยนเป็น M_{4+N} มวลพลังค์ในมิติที่สูงขึ้นเป็นหน่วยพื้นฐานแทน โดยที่ N คือจำนวนมิติพิเศษที่เพิ่มขึ้นจากกาลอวกาศ 4 มิติ นอกจากนี้หน่วยพื้นฐานเปลี่ยนไปแล้วกฎของแรงโน้มถ่วงในมิติพิเศษก็มีการเปลี่ยนแปลงด้วย จะเห็นได้จากการเปลี่ยนแปลงศักย์โน้มถ่วง ซึ่งสามารถพิจารณาโดยใช้แอกชันความโน้มถ่วงของไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต (Einstein–Hilbert gravitational action) สำหรับโลกแบบเบรน [19] ดังนี้

$$S_{gravity} = \frac{1}{2\kappa_{4+N}^2} \int d^4 x d^N y \sqrt{-g_{4+N}} [R_{4+N} - 2\Lambda_{4+N}] \quad (3.1)$$

และ

$$G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2} R_{4+N} g_{AB} = -\Lambda_{4+N} g_{AB} + \kappa_{4+N}^2 T_{AB} \quad (3.2)$$

เมื่อ $X^A = x^\mu, y^1, \dots, y^N$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), G_{AB} คือไอน์สไตน์เทนเซอร์ (Einstein tensor) ในมิติพิเศษ และ κ_{4+N}^2 คือค่าคงตัวควบคู่ (coupling constant) ของความโน้มถ่วงในมิติพิเศษ ที่นิยามโดย

$$\kappa_{4+N}^2 = 8\pi G_{4+N} = \frac{8\pi}{M_{4+N}^{2+N}} \quad (3.3)$$

เราสมมติให้กาลอวกาศของมิติพิเศษมีลักษณะแบน ดังนั้นเมตริก ของกาลอวกาศ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \delta_{ab} dy^a dy^b \quad (3.4)$$

เมื่อ $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) คือเมตริกเทนเซอร์ในส่วนของกาลอวกาศ 4 มิติ ขึ้นอยู่กับลักษณะของกาลอวกาศ 4 มิติที่เราพิจารณา และ $\delta_{ab} dy^a dy^b$ คือ เมตริกในส่วนของมิติพิเศษที่เพิ่มขึ้น [20] โดยระบบพิกัดของมิติที่เพิ่มขึ้นเขียนแทนด้วย y^a เมื่อ $a = 1, 2, 3, \dots, N$ จากแอกชันในสมการ (3.1) ทำการหาปริพันธ์ (integrate) ในส่วนของมิติพิเศษ เราจะได้แอกชันของความโน้มถ่วงดังนี้

$$S_{gravity} = \frac{L^N}{2\kappa_{4+N}^2} \int d^4x \sqrt{-g_4} [R_4 - 2\Lambda_4] \quad (3.5)$$

เมื่อ L คือ ความยาวหรือรัศมีของมิติพิเศษ และ L^N คือปริมาตรของมิติพิเศษที่ได้จากการหาปริพันธ์ โดยการเปรียบเทียบกับสมการ (3.5) กับแอกชันความโน้มถ่วงมาตรฐานในกาลอวกาศ 4 มิติ เราจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\kappa_4^2 = \frac{\kappa_{4+N}^2}{L^N} \quad (3.6)$$

เมื่อ κ_4^2 คือ ค่าคงตัวควบคู่ของความโน้มถ่วงในกาลอวกาศ 4 มิติ

ความหมายเชิงฟิสิกส์ที่ได้จากข้อสังเกตข้างต้น เราจะพบได้จากการพิจารณาระบบมวลคู่ของ 2 อนุภาคที่มีมวล m_1 และ m_2 ตามลำดับ กำหนดให้ระบบมวลดังกล่าวอยู่บนพื้นผิวไฮเปอร์ $y^a = 0$ และวางที่ตำแหน่งห่างกันเป็นระยะทาง r มวลทั้งสองมีอันตรกิริยาระหว่างกันภายใต้ความโน้มถ่วง โดยพลังค์ของความโน้มถ่วงสามารถกระจายออกไปทั่วกาลอวกาศ $4+N$ มิติ เราแยกพิจารณาระยะระหว่างมวลทั้งสองเป็น 2 กรณี ดังนี้

- 1) ถ้า $r \gg L$ อนุภาคทดสอบทั้งสองอยู่ห่างกันไกลมากเมื่อเทียบกับปริมาตรของมิติพิเศษ พลังค์ของความโน้มถ่วงไม่ได้รับอิทธิพลจากมิติพิเศษ ดังนั้นผู้สังเกตจะเห็นว่า ศักย์ของความโน้มถ่วงเป็นไปตามกฎความโน้มถ่วงในกาลอวกาศ 4 มิติ

$$V_4(r) \propto \frac{\kappa_4^2}{r} \quad (3.7)$$

- 2) ถ้า $r \ll L$ อนุภาคทดสอบทั้งสองอยู่ห่างกันไม่มาก ด้วยระยะทางที่น้อยกว่ารัศมีของมิติพิเศษ ผู้สังเกตจะสามารถรับรู้ผลของพลังค์ความโน้มถ่วงที่หลุดออกไปยังมิติพิเศษ โดยที่ ศักย์โน้มถ่วงจะเปลี่ยนไป ซึ่งศักย์โน้มถ่วงระหว่างอนุภาคในมิติพิเศษ เขียนได้ดังนี้

$$V_{4+N}(r) \propto \frac{\kappa_{4+N}^2}{r^{1+N}} \quad (3.8)$$

จากที่กล่าวมาข้างต้น พบว่า กฎความโน้มถ่วงของนิวตันมีการเปลี่ยนแปลงเมื่อพิจารณาในมิติพิเศษ พฤติกรรมและผลของศักย์ความโน้มถ่วง $V(r)$ ควรจะสามารถสังเกตหรือวัดได้จากการทดลองเมื่อวัดที่ระยะน้อยกว่ารัศมีของมิติพิเศษ L ซึ่งจากการทดลองในปัจจุบันเพื่อทดสอบกฎของแรงโน้มถ่วง ทำการทดลองในระดับต่ำกว่ามิลลิเมตร (sub-millimeter) ยังไม่ตรวจพบสัญญาณใดๆ ที่เกี่ยวข้องกับมิติพิเศษ [21]

ในการวิเคราะห์หาขนาดของมิติพิเศษ เราสามารถพิจารณาจากมวลพลังค์ M_p ซึ่งโดยทั่วไปแล้วถือว่าเป็นหน่วยพื้นฐาน ในทฤษฎีต่างๆ เช่น ทฤษฎีควอนตัมของความโน้มถ่วง (quantum gravity theory) หรือ ทฤษฎีสตริง จากสมการ (3.1) และสมการ (3.6) เราจะได้หน่วยพื้นฐานสัมพันธ์กับปริมาตรของมิติพิเศษดังนี้

$$M_p^2 \sim M_{4+N}^{2+N} L^N \quad (3.9)$$

จากสมการพบว่ามวลพลังค์สำหรับความโน้มถ่วงในกาลอวกาศ 4 มิติ มีขนาดใหญ่กว่ามวลพลังค์ของมิติพิเศษ ถ้าสมมติว่าปริมาตรของมิติพิเศษมีขนาดอยู่ในระดับมาตราส่วนพลังค์ กล่าวคือ $L \sim M_p^{-1}$ เราจะได้ว่า $M_{4+N} \sim M_p$ แต่ถ้ามิติพิเศษมีขนาดใหญ่กว่ามาตราส่วนพลังค์ หน่วยพื้นฐานในมิติพิเศษ M_{4+N} สามารถที่จะมีขนาดเล็กกว่ามวลพลังค์ ซึ่งมีขนาด $M_p \sim 10^{18}$ จิเกอเล็กตรอนโวลต์ (GeV) ในกรณีนี้สามารถอธิบายสาเหตุที่ความโน้มถ่วงมีอันตรกิริยาอ่อนมากในระยะสั้นหรือในขนาดเล็ก เป็นเพราะความโน้มถ่วงสามารถหลุดออกไปในมิติพิเศษ มีเพียงบางส่วนเท่านั้นที่ยังส่งผลต่อโลก 4 มิติ

ดังนั้นเราสามารถแก้ปัญหาไฮเออราคิ ในเรื่องมาตราส่วนพื้นฐานทางฟิสิกส์ได้ ถ้าปริมาตรของมิติพิเศษใหญ่พอ และมวลพลังค์ในมิติพิเศษซึ่งเป็นหน่วยพื้นฐาน มีขนาด อยู่ในระดับมาตราส่วนอิเล็กโตรวีค (electroweak scale) จากสมการ (3.9) เราสามารถประมาณขนาดของมิติพิเศษได้ ตัวอย่างเช่น เรากำหนดให้มวลพลังค์ในมิติพิเศษ M_{4+N} มีขนาดเท่ากับ 1 เทระอิเล็กตรอนโวลต์ (TeV) เราจะได้ว่า

1) สำหรับกรณี $N = 1$ กาลอวกาศมี 5 มิติ

$$\begin{aligned} M_p^2 &\sim M_5^3 L \\ (10^{18} \text{ GeV})^2 &\sim (1 \text{ TeV})^3 L \\ L &\sim 10^{27} \text{ GeV}^{-1} \\ L &\sim 10^{11} \text{ m} \end{aligned}$$

เมื่อเราใช้การเปลี่ยนหน่วยจากหน่วยธรรมชาติ (natural units) เป็น 1 จิกะอิเล็กตรอนโวลต์⁻¹ (GeV^{-1}) = 0.197×10^{-15} เมตร เราจะได้ขนาดของมิติพิเศษมีขนาดเป็น $L \sim 10^{11}$ เมตร ซึ่งความยาวขนาดนี้มีค่าใกล้เคียงกับเส้นผ่านศูนย์กลางของระบบสุริยะ

2) สำหรับกรณี $N = 2$ กาลอวกาศมี 6 มิติ

$$\begin{aligned} M_p^2 &\sim M_6^4 L^2 \\ (10^{18} \text{ GeV})^2 &\sim (1 \text{ TeV})^4 L^2 \\ L &\sim 10^9 \text{ GeV}^{-1} \\ L &\sim 0.2 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

เราจะได้ขนาดของมิติพิเศษอยู่ในระดับมิลลิเมตร $L \sim 0.2$ มิลลิเมตร ซึ่งขนาดนี้เป็นขีดจำกัดและขีดความสามารถในการทดลองปัจจุบัน จากการพิจารณาข้างต้นพบว่า เมื่อจำนวนมิติพิเศษเพิ่มขึ้นจะทำให้ขนาดของมิติพิเศษ L มีค่าลดลง เราหวังว่าในอนาคตอันใกล้นี้เราอาจพบว่ามีมิติพิเศษมีขนาดแตกต่างจากปัจจุบัน หรือมีเรขาคณิตที่เปลี่ยนไป ทำให้เราสามารถตรวจวัดได้ด้วยเทคโนโลยีในอนาคต

3.2 แบบจำลองแรนดัลล์-ซันดรัม

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาแนวคิดและรายละเอียดบางส่วน of แบบจำลองแรนดัลล์-ซันดรัม (Randall-Sundrum (RS) model) โดยเริ่มจากการศึกษาแนวคิดพื้นฐานในการพัฒนาแบบจำลอง หลังจากนั้นเราศึกษาความโน้มถ่วงในแบบจำลองแรนดัลล์-ซันดรัม ดังรายละเอียดต่อไปนี้

3.2.1 แบบจำลองอาร์เอส 1 และอาร์เอส 2

แบบจำลองแรนดัลล์-ซันดรัม เป็นแบบจำลองโลกแบบเบรน ที่สำคัญที่สุดแบบจำลองหนึ่ง [22] โดยมีสมมติฐานที่ว่า อนุภาคมูลฐานทั้งหมดในแบบจำลองมาตรฐาน ในกาลอวกาศ 4 มิติที่เราอาศัยอยู่ ถูกขังอยู่บน 3-เบรน ในขณะที่กราวิตอน (gravitons) สามารถแพร่กระจายเข้าไปในมิติพิเศษ หรือสามารถกล่าวได้ว่า เอกภพ 4 มิติที่เราอาศัยอยู่ มีลักษณะเป็น 3-เบรน ที่ฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศที่มีจำนวนมิติมากกว่า

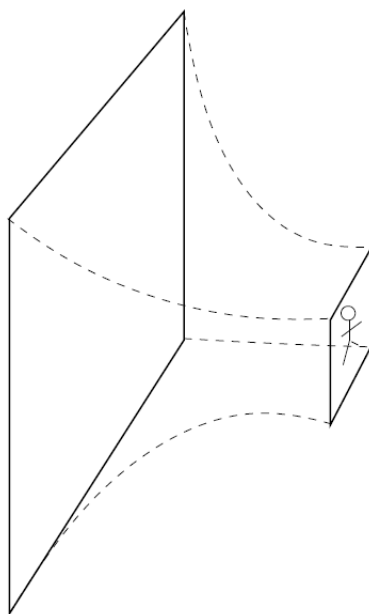
ลิซา แรนดัลล์ และ รามัน ซันดรัม ได้ตีพิมพ์บทความทางวิชาการ 2 ฉบับ [5, 6] ในปี ค.ศ. 1999 พวกเขาได้นำเสนอแบบจำลองความโน้มถ่วงบนเบรนที่มีค่าความตึงคงตัว (constant brane tension) ฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศ 5 มิติ ที่มีลักษณะของกาลอวกาศแบบแอนไท-เดออร์ ซิตเตอร์ (anti-de Sitter spacetime) [23] โดยมีสมมติฐานว่า 3-เบรน ฝังตัวในพิกัดคงตัวตามแกน y (constant y -coordinate) ในระบบพิกัดแบบเกาส์เซียน (Gaussian coordinate system) ดังนั้น เมตริกสำหรับกาลอวกาศ AdS_5 สามารถเขียนได้เป็น

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (3.10)$$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลในสมการ เรียกว่า วอร์ฟ แฟกเตอร์ (warp factor) หมายความว่า ปริมาตรของมิติพิเศษมีขนาดเล็กลงเมื่อ y มีค่ามากขึ้น โดยที่ระบบพิกัดของมิติพิเศษกำหนดโดย $0 \leq y \leq \pi r_c$ เมื่อ r_c คือ รัศมีคอมแพกติฟิเคชัน (compactification radius) และ k คือ ค่าคงตัวมีขนาดในระดับมาตราส่วนพลังค์

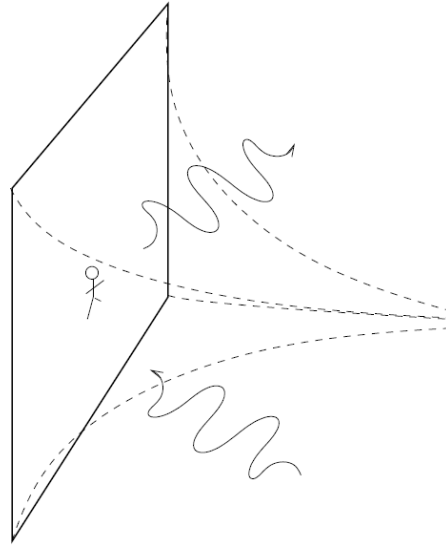
บทความทางวิชาการฉบับแรกของลิซา แรนดัลล์ และ รามัน ซันดรัม เป็นบทความที่นำเสนอแบบจำลองโลกแบบเบรน เรียกว่า แบบจำลองแรนดัลล์-ซันดรัม 1 (Randall - Sundrum I : RS I) [5] แบบจำลองนี้สามารถอธิบายปัญหาไฮเออรากิ เกี่ยวกับมาตราส่วนพื้นฐาน (fundamental scale) ซึ่งมีความแตกต่างกันระหว่างมาตราส่วนวีค (weak scale) ที่อยู่ในระดับเทระอิเล็กตรอนโวลต์ ในขณะที่มาตราส่วนพลังค์มีขนาด 10^{18} จิกะอิเล็กตรอนโวลต์ ปัญหานี้สามารถอธิบายได้ด้วยวอร์ฟ แฟกเตอร์ กล่าวคือ วอร์ฟ แฟกเตอร์ จะทำให้ความแรงของความโน้มถ่วงลดลงอย่างรวดเร็ว เมื่อขนาดที่พิจารณาอยู่ในระดับเดียวกับขนาดของมิติพิเศษ ($y > 0$ จะทำให้ความโน้มถ่วงลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล) เมตริกในสมการ (3.10) ทำให้ได้ผลเฉลยของสมการไอน์สไตน์ โดยพิจารณากาลอวกาศให้มี 3-เบรน จำนวน 2 เบรน อยู่ที่ตำแหน่ง $y=0$ และ $y=\pi r_c$ ตามลำดับ แบบจำลองกาลอวกาศ 2 เบรนนี้ ไม่แตกต่างจากทฤษฎีของคาลูซา-ไคลน์มากนัก เนื่องจากพยายามให้มีมิติคอมแพกต์อยู่ใน

กาลอวกาศ 4 มิติ เพียงแต่ไม่ได้ม้วนตัวเป็นวงกลม ปริมาตรของมิติพิเศษมีขนาดใหญ่พอที่จะทำให้ความโน้มถ่วงมีความแรงน้อยกว่าแรงพื้นฐานชนิดอื่นบนเบรน



ภาพที่ 3.1 โครงสร้างกาลอวกาศตามแบบจำลองแรนดัลล์-ชันดรัม 1 เมื่อความแตกต่างระหว่างมาตราส่วนพลังค์ และมาตราส่วนวิค (เทระอิเล็กตรอนโวลต์) ขึ้นอยู่กับระยะห่างระหว่างเบรนในกาลอวกาศแบบ AdS_5 (ภาพจาก [23])

บทความทางวิชาการฉบับที่สองของลีซา แรนดัลล์ และ รามัน ชันดรัม เป็นบทความที่นำเสนอแบบจำลองโลกแบบเบรนอีกรูปแบบหนึ่ง เรียกว่า แบบจำลองแรนดัลล์-ชันดรัม 2 (Randall - Sundrum II : RS II) [6] ในแบบจำลองนี้กาลอวกาศประกอบไปด้วย 3-เบรน เพียง 1 เบรน และมีมิติพิเศษมีขนาดเป็นอนันต์ ($y \rightarrow \infty$) (สมมติให้ 3-เบรน อีกอันตามแบบจำลองอาร์เอส 1 อยู่ที่ระยะอนันต์) ในบทความนี้พวกเขาได้นำเสนอวิธีการใหม่ที่แสดงถึงเรขาคณิตการม้วนตัวของกาลอวกาศ (บางทีเรียกว่า การม้วนตัวแบบวอร์พ (warped compactification)) และได้แสดงให้เห็นว่ามวลพลังค์สามารถเปรียบเทียบกับขนาดมวลพื้นฐานในทฤษฎีหลายมิติได้



ภาพที่ 3.2 โครงสร้างกาลอวกาศตามแบบจำลองแรนดัล-ชันดรัม 2 เมื่อ เบรินฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศ 5 มิติ (ภาพจาก [23])

3.2.2 ความโน้มถ่วงในแบบจำลองแรนดัล-ชันดรัม 2

ในหัวข้อนี้เราศึกษาความโน้มถ่วงในแบบจำลองแรนดัล-ชันดรัม 2 เมื่อวัดโดยผู้สังเกตที่อยู่บนเบรน โดยผลเฉลยของแบบจำลองแรนดัล-ชันดรัม 2 สามารถพิจารณาได้จากแอกชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต (Einstein-Hilbert action) ในกาลอวกาศ 5 มิติ และแอกชันของเบรน ซึ่งสามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้ [24]

$$S_{EH} = -\int d^5x \sqrt{-g_5} \left(\frac{R_5}{2\kappa_5^2} + \Lambda_5 \right)$$

$$S_{brane} = \int d^4x \sqrt{-g_4} (-\sigma) \quad (3.11)$$

เมื่อ พารามิเตอร์ Λ_5 คือ ค่าคงตัวจักรวาลวิทยาบัลค์ (bulk cosmological constant), σ คือ ค่าความตึงของเบรน พารามิเตอร์ทั้งสองเป็นค่าคงตัว และ κ_5 คือ ค่าคงตัวควบคู่ของความโน้มถ่วงใน 5 มิติ นิยามโดยสมการ (3.3) โดยเบรนอยู่ที่ตำแหน่ง $y=0$ และเรามีสมมติฐานว่าเบรนมีสมมาตรแบบ Z_2 (Z_2 symmetry) กล่าวคือ เป็นสมมาตรของการแปลง $y \rightarrow -y$ ได้ เมตริกสำหรับแบบจำลองนี้คือ

$$ds^2 = e^{-2K(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (3.12)$$

จากผลการศึกษาของพี. แบริซ์ (P. Brax) และซี. แวน เดอ บรูคค์ (C. Van de Bruck) ในปี ค.ศ. 2003 [24] พบว่าผลเฉลยของสมการไอน์สไตน์ที่ได้จากแอคชันข้างบน ที่เกี่ยวข้องกับสมบัติของค่าคงตัวจักรวาลวิทยาบัลค์ 2 สมการ คือ

$$\begin{aligned} 6K'^2 &= -\kappa_5^2 \Lambda_5 \\ 3K'' &= \kappa_5^2 \sigma \delta(y) \end{aligned} \quad (3.13)$$

สมการแรกสามารถหาผลเฉลยได้ดังนี้

$$K = K(y) = \sqrt{-\frac{\kappa_5^2}{6} \Lambda_5} y \equiv ky \quad (3.14)$$

เมื่อ K คือ ฟังก์ชันของ y ตามสมการ (3.12) และ $k \equiv \sqrt{-\frac{\kappa_5^2}{6} \Lambda_5}$ คือ ค่าคงตัวตามสมการ (3.10) จากผลเฉลยที่ได้เราพบว่า Λ_5 จะต้องมีค่าเป็นลบ ถ้าเราทำการหาปริพันธ์ของสมการที่สองในสมการ (3.13) ในช่วงจาก $-\varepsilon$ ถึง $+\varepsilon$ แล้วใช้ค่าลิมิต $\varepsilon \rightarrow 0$ รวมทั้งใช้สมมาตรแบบ Z_2 เราจะได้ว่า

$$6K'|_0 = \kappa_5^2 \sigma \quad (3.15)$$

จากสมการ (3.14) หาอนุพันธ์เทียบกับ y เราจะได้

$$K' = \sqrt{-\frac{\kappa_5^2}{6} \Lambda_5} \quad (3.16)$$

จากความสัมพันธ์ดังสมการ (3.15) และสมการ (3.17) เราพบว่า

$$\Lambda_5 = -\frac{\kappa_5^2}{6} \sigma^2 \quad (3.17)$$

ดังนั้น เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวจักรวาลวิทยา และค่าความตึงของเบรน โดยแบบจำลอง แรนดัล-ชันดรัม ให้ค่าคงตัวจักรวาลวิทยาเป็นลบ หมายความว่าเราพิจารณาในกาลอวกาศแบบ AdS_5

นอกจากนี้ ในแบบจำลองแรนดัล-ชันดรัม 2 แสดงให้เห็นว่า มีโหมดคาลูซา-ไคลน์ (Kaluza-Klein modes) ต่อเนื่องสำหรับสนามโน้มถ่วง ซึ่งนำไปสู่การเกิดแรงระหว่างมวลที่อยู่บนเบรน และพลังงานศักย์โน้มถ่วงระหว่างมวล 2 ก้อน ที่อยู่บนเบรนสามารถเขียนได้ดังนี้ [24]

$$V(r) = \frac{G_N m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{l^2}{r^2} + O(r^{-3}) \right) \quad (3.18)$$

ค่ารัศมีความโค้งของกาลอวกาศ AdS_5 หรือ l มีความสัมพันธ์กับค่าคงตัวจักรวาลวิทยาบัลค์ Λ_5 ดังสมการ $l^2 = -6/(\kappa_5^2 \Lambda_5)$ สมการ (3.18) สอดคล้องกับที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่แล้วที่ว่า ศักย์โน้มถ่วงจะเปลี่ยนแปลงเมื่อพิจารณาที่ระยะน้อยกว่าขนาดของมิติพิเศษ ซึ่งจากผลการทดลองในปัจจุบันพบว่า กฎความโน้มถ่วงของนิวตันยังคงไม่เปลี่ยนแปลงที่ระยะมากกว่า 1 มิลลิเมตร นั่นคือ l จะต้องมีย่านน้อยกว่าระยะที่ใช้ในการทดลองนี้ [24]

3.3 จักรวาลวิทยาแบบเบรน

แบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบเบรนมีแนวคิดพื้นฐานว่า เอกภพของเราอยู่บนเบรน 4 มิติ ที่ฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศที่มีจำนวนมิติสูงกว่า หรือ บัลค์ ซึ่งเป็นแบบจำลองหนึ่งที่มีความน่าสนใจ แบบจำลองนี้กำหนดให้สสารทุกชนิดถูกขังอยู่บนเบรนในขณะที่ความโน้มถ่วงสามารถหลุดออกจากเบรนกระจายไปในบัลค์ได้ แบบจำลองแบบเบรนที่เราจะพิจารณาในหัวข้อนี้คล้ายกับทฤษฎีของคาลูซา-ไคลน์ ที่ว่า มิติพิเศษมีลักษณะคอมแพกต์ดิฟเฟอเรนซ์ เมื่อพิจารณาความโน้มถ่วงตามทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (GR) อาจต้องได้รับการปรับปรุงในระดับพลังงานสูง เพื่อให้สอดคล้องกับผลการทดลองในปัจจุบัน [25]

3.3.1 แบบจำลอง

การศึกษาจักรวาลวิทยานเบรนคล้ายกับในแบบจำลองมาตรฐาน โดยมีสมมติฐานความเป็นเนื้อเดียวกันและเหมือนกันในทุกทิศทางของเอกภพ บทความงานวิจัยที่ศึกษาจักรวาลวิทยานเบรนที่น่าสนใจ คือ บทความของ พี. เบเนทรู (P. Binetruy), ซี. เดฟฟาเยท (C. Deffayet) และ ดี. แลนกลอยส์ (D. Langlois) ซึ่งจะเรียกย่อๆ ว่า บีดีแอล (BDL) ในปี ค.ศ. 2000 [26] พวกเขาได้แรงบันดาลใจจากทฤษฎีสตริง ตามแบบจำลองของโฮรวา-วิทเทน (Horava-Witten) ที่เสนอในปี ค.ศ. 1996 [27] ด้วยแนวคิดที่ว่า มิติที่ 11 ของทฤษฎีเอ็ม ม้วนตัวอยู่ในช่วง $y \in [0,1]$ ดังนั้นมิติพิเศษ

สามารถพิจารณาให้มีลักษณะเป็นวงกลมม้วนตัวอยู่ในช่วง $y \in [-1, 1]$ ภายใต้สมมาตรแบบ Z_2 นั่นคือ $y \rightarrow -y$ จากบทความของ บีดีแอล พวกเขาพิจารณากาลอวกาศในกรณีที่มีมิติพิเศษเพิ่มขึ้น 1 มิติ เป็นกาลอวกาศ 5 มิติ และเขียนแอคชันอยู่ในรูปของ

$$S_5 = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5x \sqrt{-g_5} R_5 + \int d^5x \sqrt{-g_5} \mathcal{L}_{matter} \quad (3.19)$$

เมื่อพจน์แรกคือแอคชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต ใน 5 มิติ และเมตริกเทนเซอร์สำหรับกาลอวกาศ 5 มิติ คือ g_{AB} และ R_5 คือ ริชชีสเกลาร์ 5 มิติ สำหรับเมตริกเทนเซอร์ดังกล่าว ส่วนในพจน์ที่สอง เป็นส่วนของสสารที่อยู่ในกาลอวกาศ \mathcal{L}_{matter} คือ ลากรางเจียน (Lagrangian) ของสสาร ซึ่งเมื่อทำการแปรผัน

เทียบกับเมตริกเทนเซอร์ แล้วจะได้เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม ($T^{MN} = \frac{2}{\sqrt{-g_5}} \frac{\delta(\mathcal{L}_{matter} \sqrt{-g_5})}{\delta g^{MN}}$)

เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนเราจะทบทวนเครื่องหมายและสัญลักษณ์ที่ใช้ในหัวข้อนี้ ได้แก่ ตัวอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ แทนดัชนีใน 5 มิติ ($A = 0, 1, 2, 3, 5$) อักษรกรีกใช้แทนดัชนีใน 4 มิติ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) และเครื่องหมายสำหรับเมตริกเทนเซอร์ g_{AB} คือ $(-++++)$ สุดท้าย ∇_A คือ อนุพันธ์โควาเรียนท์ที่นิยามจากเมตริกเทนเซอร์ g_{AB}

เมตริกของกาลอวกาศ 5 มิติ ที่ บีดีแอล ใช้ศึกษาวิวัฒนาการของเอกภพ เขียนอยู่ในรูปของ

$$ds^2 = -n(t, y)^2 dt^2 + a(t, y)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j + b(t, y)^2 dy^2 \quad (3.20)$$

เมื่อ γ_{ij} คือ เมตริกเทนเซอร์ที่มีสมมาตรใน 3 มิติ ซึ่งประกอบไปด้วย พารามิเตอร์ ที่ระบุลักษณะเรขาคณิตของกาลอวกาศ $k = -1, 0, 1$ (เมตริกเทนเซอร์ 3 มิตินี้ เหมือนกับในสมการ (2.3) เมื่อไม่พิจารณามิติของเวลา) และ y คือพิกัดที่ 5 หรือพิกัดของมิติพิเศษ $n(t, y), a(t, y)$ และ $b(t, y)$ คือ ตัวประกอบมาตราส่วนของเวลา, อวกาศ, และมิติพิเศษ ตามลำดับ จากสมการ (3.2) สมการไอน์สไตน์ 5 มิติ เขียนได้ดังนี้

$$G_{AB} = -\Lambda_5 g_{AB} + \kappa_5^2 T_{AB} \quad (3.21)$$

เมื่อ Λ_5 คือ ค่าคงตัวจักรวาลวิทยาบัลค์ และ T_{AB} คือ เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมในที่นี้เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม มีอยู่ 2 ชนิด ได้แก่ [28]:

1) เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมของบัลค์ เขียนได้เป็น

$$T_B^A|_{Bulk} = \text{diag}(-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_5) \quad (3.22)$$

เมื่อ ความหนาแน่นพลังงาน ρ_B และความดัน P_B และ P_5 ไม่ขึ้นอยู่กับมิติที่ 5

2) เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมของเบรน ในที่นี้เราพิจารณาในกรณีที่เบรนมีความเหมือนกันในทุกทิศทางและเหมือนกันทุกตำแหน่ง ดังนั้นจะได้

$$T_B^A|_{brane} = \frac{\delta(y)}{b} \text{diag}(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0) \quad (3.23)$$

เมื่อ ความหนาแน่นพลังงาน ρ_b และความดัน p_b ไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งภายในเบรน และ $T_B^A|_{brane}$ สอดคล้องกับสสารที่อยู่บนเบรน ($y=0$) ในแบบจำลองนี้ บียูแอล ได้มีสมมติฐานให้เบรนเป็นแผ่นบางมาก ไม่มีความหนา ซึ่งในความเป็นจริงแล้วเบรนสามารถมีความหนาในทิศทางของมิติที่ 5 ได้ อาจจะมีมีความหนาเท่ากับมาตราส่วนพื้นฐาน (มาตราส่วนพลังค์)

3.3.2 วิวัฒนาการของเอกภพบนเบรน

ในการหาผลเฉลยของสมการไอน์สไตน์ 5 มิติ เราพิจารณาจากสมการ (3.21) โดยในกรณีพิเศษ เราสามารถเขียนสมการไอน์สไตน์ อยู่ในรูปดังนี้

$$G_{AB} = \kappa_5^2 T_{AB} \quad (3.24)$$

จากเมตริกสำหรับกาลอวกาศ 5 มิติในสมการ (3.20) เราสามารถคำนวณหาองค์ประกอบที่ไม่เป็นศูนย์ของไอน์สไตน์เทนเซอร์ 5 มิติ G_{AB} ได้แก่

$$G_{00} = 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right) \right) + k \frac{n^2}{a^2} \right\} \quad (3.25)$$

$$G_{ij} = \frac{a^2}{b^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2 \frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2 \frac{a'}{a} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} + \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{n}}{n} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \left(-2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) - \frac{\ddot{b}}{b} \right\} - k \gamma_{ij} \quad (3.26)$$

$$G_{05} = 3 \left\{ \frac{n' \dot{a}}{n a} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right\} \quad (3.27)$$

$$G_{55} = 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) \right) - k \frac{b^2}{a^2} \right\} \quad (3.28)$$

เมื่อ สัญลักษณ์ไพรม์ (primes) เช่น a' แทนการหาอนุพันธ์เทียบกับ y ในขณะที่สัญลักษณ์ดอท (dots) เช่น \dot{a} แทนการหาอนุพันธ์เทียบกับ t สำหรับเรขาคณิตของกาลอวกาศที่ดี เมตริกควรมีความต่อเนื่องข้ามตำแหน่งที่เบรนนอยู่ คือ ตำแหน่ง $y=0$ แต่การหาอนุพันธ์เทียบกับมิติที่ 5 (y) สามารถที่จะไม่ต่อเนื่องได้บนเบรนน ซึ่งจะนำไปสู่ดิแรก เดลตา ฟังก์ชัน (Dirac delta function) ในการหาอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับมิติที่ 5

จากการวิเคราะห์ของ บีตีแอล พจนฺ์ที่ปรากฏเดลตา ฟังก์ชัน ในไอน์สไตน์เทนเซอร์ จะตรงกับองค์ประกอบของเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม ที่สอดคล้องกับสมการไอน์สไตน์ ตัวอย่างเช่น a สามารถเขียนในรูปของการกระจายได้เป็น

$$a'' = \hat{a}'' + [a'] \delta(y) \quad (3.29)$$

เมื่อ \hat{a}'' คือ ส่วนที่ไม่ได้กระจายของอนุพันธ์อันดับสองของ a และ $[a']$ คือ ฟังก์ชันกระโดด (jump) ในอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ข้ามตำแหน่งที่เบรนนอยู่ $y=0$ ซึ่งนิยามโดย

$$[a'] = a'(0^+) - a'(0^-) \quad (3.30)$$

จับคู่ดิแรก เดลตา ฟังก์ชัน ในองค์ประกอบของสมการ (3.25) และ (3.26) ของไอน์สไตน์เทนเซอร์ กับเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัมของเบรนนในสมการ (3.23) เราจะได้ความสัมพันธ์ ดังนี้ [26]

$$\frac{[a']}{b_0 a_0} = -\frac{\kappa_5^2}{3} \rho_b \quad (3.31)$$

$$\frac{[n']}{b_0 n_0} = \frac{\kappa_5^2}{3} (3p_b + 2\rho_b) \quad (3.32)$$

เมื่อ ดัชนีล่าง (subscript) 0 ของ a , b , n หมายความว่า ฟังก์ชันนี้พิจารณาบนเบรนที่ตำแหน่ง $y=0$ จากเอกลักษณ์เบียนชี (Bianchi identity) $\nabla_A G^A_B = 0$ และสมบัติตามสมการ (3.6) เราจะได้สมการอนุรักษ์ ดังนี้

$$\dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}_0}{a_0}(\rho_b + p_b) = 0 \quad (3.33)$$

จากสมการข้างต้นพบว่า สมการที่ได้เหมือนกับสมการอนุรักษ์สำหรับความหนาแน่นพลังงาน ในกาลอวกาศ 4 มิติ โดยแทนค่าฟังก์ชันกระโดดและใช้สมมาตรแบบ $Z_2 (y \rightarrow -y)$ ในสมการ (3.28) เราจะได้สมการความเร่งบนเบรน ดังนี้ [28]

$$\frac{\ddot{a}_0}{a_0} + \frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} = -\frac{\kappa_5^4}{36} \rho_b (\rho_b + 3p_b) - \frac{\kappa_5^2}{3b_0^2} P_5 - \frac{k}{a_0^2} \quad (3.34)$$

ผลที่ได้จากสมการข้างต้น มาจากการเลือกให้ $n_0 = 1$ สมการ (3.34) เป็นสมการฟรีดมานน์รูปแบบใหม่ ที่อธิบายวิวัฒนาการของเอกภพเมื่อพิจารณาบนเบรน เมื่อพิจารณาสมการ (3.34) แล้วจะพบว่า มีความแตกต่างจากสมการฟรีดมานน์มาตรฐานตรงที่ ปรากฏพจน์กำลังสองของความหนาแน่นพลังงานของเบรน ซึ่งอาจให้องค์ความรู้ใหม่ในเชิงฟิสิกส์ ในการอธิบายวิวัฒนาการของเอกภพในปัจจุบัน

3.4 สมการเกาส์ – โคตซ์ซี

ในหัวข้อนี้เราศึกษาเกี่ยวกับลักษณะทางเรขาคณิตของ 3-เบรน ที่ฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศ 5 มิติ โดยศึกษาสมการเกาส์-โคตซ์ซี ซึ่งเป็นเทคนิคที่รู้จักกันดีในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป เป็นสมการพื้นฐานของทฤษฎีที่ศึกษาเกี่ยวกับพื้นผิวไฮเปอร์ ที่ฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศที่มีจำนวนมิติมากกว่า

ความหมายของพื้นผิวไฮเปอร์ คือ กาลอวกาศที่ฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศที่มีจำนวนมิติมากกว่า อยู่หนึ่งมิติ พื้นผิวไฮเปอร์อาจมีความโค้งเมื่อพิจารณาในอวกาศ N มิติ (\mathcal{M}^N) ที่ฝังตัวอยู่ในอวกาศ $N+1$ มิติ (\mathcal{M}^{N+1}) ในการศึกษาลักษณะทางเรขาคณิตของพื้นผิวไฮเปอร์ เรานิยามเวกเตอร์หนึ่งหน่วย n^A ที่ตั้งฉากกับ 3 - เบรน เรียกเวกเตอร์นี้ว่า นอร์มอลเวกเตอร์ (normal vector) ซึ่งเป็นเวกเตอร์อวกาศ (space-like) ดังนั้นเราสามารถนิยามนอร์มอลเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$g_{AB}n^A n^B = 1 \quad (3.35)$$

และนิยามอินดิเมตริก บนเบรนได้ดังนี้

$$h_{AB} = g_{AB} - n_A n_B \quad (3.36)$$

เมื่อเราได้นิยามของเวกเตอร์บนพื้นผิวไฮเปอร์แล้ว เราสามารถวัดความโค้งภายนอกของอวกาศ โดยพิจารณาจากทิศของนอร์มอลเวกเตอร์ n^A เมื่อเทียบกับพื้นผิวไฮเปอร์ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งบนพื้นผิวไฮเปอร์ ซึ่งปริมาณที่บอกความโค้งภายนอกของพื้นผิวไฮเปอร์ เรียกว่า เทนเซอร์ความโค้งภายนอก (the extrinsic curvature tensor) K_{AB} (บางครั้งอาจเรียกว่า รูปแบบพื้นฐานที่สอง (second fundamental form)) โดยนิยามจาก [26]

$$K_{AB} = h_A^C \nabla_C n_B \quad (3.37)$$

เมื่ออนุพันธ์โควาเรียนท์ ในสมการคืออนุพันธ์ใน 5 มิติ เทนเซอร์ความโค้งภายนอก สามารถแสดงถึงความโค้งของเบรน ในกาลอวกาศ 5 มิติ

จากนิยามของปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง สมการเกาส์-โคตซ์ซี สามารถหาได้โดยใช้สมบัติคอมมิวเตเตอร์ (commutator) ของอนุพันธ์โควาเรียนท์ รายละเอียดการคำนวณอยู่ในภาคผนวก ข สมการเกาส์-โคตซ์ซีสามารถเขียนได้ดังนี้

$$R_{LMPQ} e_\mu^L e_\nu^M e_\sigma^P e_\rho^Q = \hat{R}_{\mu\nu\sigma\rho} + \sigma(K_{\mu\nu} K_{\sigma\rho} - K_{\mu\sigma} K_{\nu\rho}) \quad (3.38)$$

และ

$$R_{NQMP} n^N e_\mu^Q e_\nu^M e_\sigma^P = D_\sigma K_{\mu\nu} - D_\nu K_{\mu\sigma} \quad (3.39)$$

เมื่อ e_μ^M คือเวกเตอร์ฐาน (basis vectors) บนพื้นผิวไฮเปอร์ จากสมการ (3.38) ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง เทนเซอร์ความโค้งภายใน (the intrinsic curvature tensor) ของพื้นผิวไฮเปอร์ $\hat{R}_{\mu\nu\sigma\rho}$ และรีมันน์เทนเซอร์ (Riemann tensor) R_{LMPQ} ในกาลอวกาศ 5 มิติ จากความสัมพันธ์ดังสมการทำให้เราทราบว่า เทนเซอร์ความโค้งของกาลอวกาศสามารถเขียนอยู่ในรูปของเทนเซอร์ความโค้งภายในและเทนเซอร์ความโค้งภายนอกของพื้นผิวไฮเปอร์

จากสมการเกาส์ - โคตซ์ซี เราสามารถเขียนริชชีเทนเซอร์ (Ricci tensor) R_{AB} ในรูปแบบการฉาย (projections form) โดยมีรายละเอียดการคำนวณในภาคผนวก ข ได้ดังนี้

$$R_{AB}n^An^B = K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + \nabla_B(n^A\nabla_An^B - n^B\nabla_An^A) \quad (3.40)$$

และริชชีสเกลาร์ R มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$R = \hat{R} + (K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}) + 2(\nabla_B(n^A\nabla_An^B - n^B\nabla_An^A)) \quad (3.41)$$

เมื่อ R คือ ริชชีสเกลาร์ของกาลอวกาศทั้งหมดที่เราพิจารณา และ \hat{R} คือริชชีสเกลาร์ของพื้นผิวไฮเปอร์

ในที่สุด เราสามารถเขียนไอน์สไตน์เทนเซอร์ G_{AB} ในรูปแบบการฉาย ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้ โดยเริ่มจากนิยามของไอน์สไตน์เทนเซอร์

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB} \quad (3.42)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} G_{AB}n^An^B &= R_{AB}n^An^B - \frac{1}{2}Rg_{AB}n^An^B \\ &= R_{AB}n^An^B - \frac{1}{2}R \end{aligned}$$

ความสัมพันธ์ข้างต้นเราใช้นิยามของนอร์มอลเวกเตอร์ตามสมการ (3.35) จากความสัมพันธ์ในสมการ (3.40) และสมการ (3.41) ไอน์สไตน์เทนเซอร์สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} G_{AB}n^An^B &= K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} + \nabla_B(n^A\nabla_An^B - n^B\nabla_An^A) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left\{\hat{R} + (K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}) + 2(\nabla_B(n^A\nabla_An^B - n^B\nabla_An^A))\right\} \\ \therefore G_{AB}n^An^B &= -\frac{1}{2}\hat{R} + \frac{1}{2}(K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

สมการ (3.43) นี้ได้แสดงถึงรูปแบบการฉายของไอน์สไตน์เทนเซอร์ G_{AB}

ริชชีสเกลาร์, ริชชีเทนเซอร์ และไอน์สไตน์เทนเซอร์ ที่กล่าวมาข้างต้น สามารถคำนวณจากสมการเกาส์ - โคตซ์ซี ถือเป็นเครื่องมือที่สำคัญมากในการอธิบายแมนิโฟลด์ย่อย (submanifold) ในปริภูมิรีมันน์ (Riemann space) และปริมาณเหล่านี้มีความสำคัญต่อเทคนิคการลดมิติเพื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงของพื้นผิวไฮเปอร์ ที่ฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศที่มีจำนวนมิติมากกว่า

3.5 แบบจำลองดีจีพี

ในปี ค.ศ. 2000 เจีย ดาวาลี, แกรกอรี กาบาคเตซ และ แมสซิโม พอร์ราติ [7] ได้เสนอบทความวิจัยเกี่ยวกับทฤษฎีการแก้ไขความโน้มถ่วงในกาลอวกาศ $4 + 1$ มิติ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อของ แบบจำลองดีจีพี ทฤษฎีนี้มีแนวความคิดคล้ายกับแบบจำลองอาร์เอส กล่าวคือ พิจารณาให้ 3-เบรนฝังตัวอยู่ในกาลอวกาศ 5 มิติ (บัลค์) และแบบจำลองดีจีพีนี้มีสมมติฐานให้ค่าความตึงของเบรนเป็นศูนย์ใน 5 มิติ แบบจำลองดีจีพีพิจารณากาลอวกาศที่มีแอคชัน ดังนี้

$$S_{DGP} = M_5^3 \int_{bulk} d^4 x dy \sqrt{-g_5} R_5 + M_p^2 \int_{brane} d^4 x \sqrt{-g_4} R_4 \quad (3.44)$$

เมื่อ g_4 และ g_5 คือ ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกใน 4 มิติ และ 5 มิติ ตามลำดับ M_p , M_5 คือ มวลพลังค์ใน 4 มิติ และ 5 มิติ ตามลำดับ และ R_4 , R_5 คือ ริชชีสเกลาร์ใน 4 มิติ และ 5 มิติ ตามลำดับ เมตริกเทนเซอร์สำหรับกาลอวกาศ 5 มิติ นิยามโดย $g_{AB}(x, y)$ และกำหนดให้เบรนอยู่ในตำแหน่ง $y = 0$

แบบจำลองดีจีพีคล้ายกับแบบจำลองอาร์เอส กล่าวคือ สสารทุกชนิดในแบบจำลองมาตรฐาน ถูกขังอยู่บนเบรน แต่สนามโน้มถ่วงสามารถกระจายออกไปในบัลค์ ดังนั้นเทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม ของสสารสามารถเขียนได้เป็น

$$T_{AB} = \begin{pmatrix} T_{\mu\nu}(x) \delta(y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

จากแอคชันในสมการ (3.44) เราพบว่าเมื่อ $M_5 \rightarrow 0$ แอคชันนี้จะอธิบายความโน้มถ่วง 4 มิติบนเบรน และเมื่อ $M_p \rightarrow 0$ แอคชันนี้จะอธิบายความโน้มถ่วง 5 มิติบนบัลค์ และมวลยังผล (effective mass) สำหรับความโน้มถ่วงบนเบรน หรือ คลอสโอเวอร์สเกล (crossover scales) m_5 ของแบบจำลองนี้คือ

$$m_5 = \frac{M_5^3}{M_p^2} \quad (3.46)$$

มวลยังผล นี้ทำให้กฎของแรงโน้มถ่วงมีความแตกต่างกันระหว่างอยู่บนเบรนและอยู่ในบัลค์ ขึ้นอยู่กับมาตราส่วนระยะทาง (distance scale) ต่อไปนี้

$$r_c \sim \frac{M_p^2}{M_5^3} \quad (3.47)$$

เมื่อมาตราส่วนระยะทางที่พิจารณา $r < r_c$ ความโน้มถ่วงจะเหมือนกับในกาลอวกาศ 4 มิติ กล่าวคือ ศักย์โน้มถ่วงบนเบรนจะแปรผันตรงกับ $1/r$ ในขณะที่ $r > r_c$ ความโน้มถ่วงจะเป็นความโน้มถ่วงใน 5 มิติ กล่าวคือ ศักย์โน้มถ่วงบนบัลค์จะแปรผันตรงกับ $1/r^2$

จากผลการศึกษาเมื่อเร็วๆ นี้ [8, 9] พบว่า แบบจำลอง ดิจิพี มีปัญหาเกี่ยวกับความไม่เสถียรแบบโกสต์ (ghost instabilities) หลังจากมีการรบกวน จึงได้มีความพยายามที่จะพัฒนาแบบจำลอง ดิจิพี ให้อยู่ในรูปทั่วไปมากขึ้น ด้วยการเพิ่มจำนวนมิติที่พิจารณามากขึ้น แต่กลับพบว่าการเพิ่มมิติจะเกิดภาวะเอกฐานเปลือย ที่ระยะห่างจากเบรนระยะหนึ่ง เมื่อใช้โคไดเมนชัน $N > 2$ [10] แต่อย่างไรก็ตามปัญหาเรื่องความไม่เสถียรแบบโกสต์สามารถแก้ไขได้โดยให้ 4 - เบรน ตามแบบจำลอง ดิจิพี ผังตัวอยู่ในบัลค์ 6 มิติ (โคไดเมนชัน $N = 2$) และกำหนดให้เบรนมีค่าความตึงสูง [30,31] ดังรายละเอียดในหัวข้อต่อไป

3.5.1 การแก้ปัญหาเกี่ยวกับความไม่มีเสถียรภาพของแบบจำลอง ดิจิพี

จากที่กล่าวมาข้างต้น แบบจำลอง ดิจิพี เป็นทฤษฎีความโน้มถ่วงในกาลอวกาศ 5 มิติ แบบจำลองนี้มีปัญหาเกี่ยวกับความไม่เสถียรแบบโกสต์ หลังจากมีการรบกวน แนวทางหนึ่งในการแก้ปัญหา คือ การพัฒนาแบบจำลอง ดิจิพี ให้อยู่ในรูปทั่วไปมากขึ้น ด้วยการเพิ่มจำนวนมิติที่พิจารณามากขึ้น เป็นกาลอวกาศ 6 มิติ โดยมีแอคชัน ดังนี้ [30, 39, 40]

$$S_{6D} = \frac{M_6^4}{2} \int_{bulk} d^6x \sqrt{-g_6} R_6 + \frac{M_5^3}{2} \int_{4-brane} d^5x \sqrt{-g_5} R_5 + \int_{3-brane} d^4x \sqrt{-g_4} \left(\frac{M_4^2}{2} R_4 + \mathcal{L}_{matter} \right) \quad (3.48)$$

จากสมการข้างต้นกำหนดให้ R_6, R_5 คือ ริชชี สเกลาร์ ของบัลค์ โดยเมตริก 6 มิติ และ เวิร์ดวอลุ่ม (world volume) ของ 4-เบรน เขียนได้เป็น $g_{(6)\hat{A}\hat{B}} = g_{\hat{A}\hat{B}}$ เมื่อ $\hat{A}, \hat{B} = 0, 1, 2, 3, 5, 6$ และ $g_{(5)AB} = g_{AB}$ เมื่อ $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$ ตามลำดับ และ R_4 คือ ริชชี สเกลาร์ ของอินดิวิเดียมเมตริก ซึ่งนิยามจาก $h_{AB} = g_{AB} - n_A n_B$ โดยมีคลอสโอเวอร์สเกล 2 ส่วน ได้แก่

$$m_5 = \frac{M_5^3}{M_4^2} \text{ และ } m_6 = \frac{M_6^4}{M_5^3} \quad (3.49)$$

ปัญหาความไม่เสถียรแบบโกสต์ หรือเรียกว่า โกสต์ (ghost) เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นเมื่อทำการรบกวนสมการรอบๆ อวกาศแบนราบของเบรนว่าง (ไม่พิจารณาผลของมวลสารที่อยู่บนเบรน) โดยเราอาจทำการรบกวนสมการโดยใช้เมตริกเทนเซอร์ที่ประกอบด้วยส่วนที่เป็น สเกลาร์ และเมตริกส่วนที่อยู่ใน 4 มิติและไม่มีเทรซ (หรือใช้สัญลักษณ์ TT) ดังนี้

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{TT} + \pi\eta_{\mu\nu} + \text{gauge terms} \quad (3.50)$$

จากเมตริกนี้สามารถหาสมการการเคลื่อนที่บนเบรน และได้ผลเฉลยสำหรับ $h_{\mu\nu}^{TT}$ และสเกลาร์ π ดังนี้ (ตามรายละเอียดใน [40])

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \frac{2}{M_4^2} \frac{1}{-\square_4 + g(-\square_4)} \left(T_{\mu\nu}^{(4)} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T^{(4)} \right) \quad (3.51)$$

และ

$$\pi = \frac{2}{M_4^2} \frac{1}{\frac{1}{2}\square_4 + g(-\square_4)} \cdot \frac{1}{12} T^{(4)} \quad (3.52)$$

จากผลเฉลยข้างต้น เราจะพบโหมดของโกสต์สเกลาร์แพร่ออกไป (ghost scalar mode propagate) ซึ่งเป็นโครงสร้างเทนเซอร์ที่แสดงการแลกเปลี่ยนแอมพลิจูด ของกราวิตรอน 1 ตัวระหว่าง 2 แหล่งกำเนิด $T_{\mu\nu}$ และ $T'_{\mu\nu}$ บนเบรน ดังนี้ [30, 40]

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\sim \int d^4x \left(h_{\mu\nu}^{(4)TT} + \pi\eta_{\mu\nu} \right) T'^{\mu\nu} \\ &\sim T_4^{\mu\nu} \cdot \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \cdot \left(T'_{4\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T'_4 \right) - \frac{1}{6} T_4 \cdot \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \cdot T'_4 \end{aligned} \quad (3.53)$$

เมื่อเราใช้ผลเฉลยตามสมการ (3.51) และ (3.52) จากค่าแอมพลิจูดที่ได้เป็นการแยกส่วนอย่างชัดเจนระหว่าง พจน์ของอนุภาคที่มีสปิน 2 คือพจน์ที่มีสัมประสิทธิ์ $1/3$ รวมกับพจน์ที่เป็นสเกลาร์ π คู่ควบแบบคอนฟอร์มอล (conformally-coupled scalar) ปัญหาเกิดขึ้นที่โหมดสเกลาร์ ดังแสดงในพจน์ที่ 2 ซึ่งมีค่าเป็นลบ ส่งผลให้ π เป็นโกสต์ ซึ่งปัญหาเดียวกันนี้เกิดขึ้นกับในกรณีที่เพิ่มจำนวนมิติมากขึ้นไปอีก (โคไดเมนชัน $N > 2$ [8,9])

แต่อย่างไรก็ตาม ปัญหาโกสต์นี้สามารถขจัดออกได้เมื่อพิจารณาให้เบรรมีค่าความตึงสูง λ [30] จากสมการ (3.53) เราสามารถเปลี่ยนขนาดของแอมพลิจูดได้โดยให้ขึ้นอยู่กับค่าของ λ ดังนี้ [40]

$$\mathcal{A} \sim T_4^{\mu\nu} \cdot \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \cdot \left(T'_{4\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T'_4 \right) + \frac{1}{6} \frac{1}{\left(\frac{3\lambda}{2m_6^2 M_4^2} - 1 \right)} T_4 \cdot \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} \cdot T'_4 \quad (3.54)$$

ซึ่งจะพบว่าพจน์ของสเกลาร์ π จะไม่เป็นโกสต์ หรือโกสต์จะหายไป โดยมีเงื่อนไขว่า

$$\lambda \geq \frac{2}{3} m_6^2 M_4^2 \quad (3.55)$$

เมื่อ m_6^2 มีนิยามตามสมการ (3.49) นอกจากนี้ยังมีความพยายามที่จะแก้ปัญหาโกสต์โดยไม่ต้องใช้เงื่อนไขให้เบรรมีค่าความตึงสูง แต่สุดท้ายก็ให้ผลคล้ายเดิมคือต้องเพิ่มพจน์จลน์ที่ประกอบไปด้วยค่าความตึงของเบรรม λ ค่าเดียวกันนี้ [31]

หลักการพัฒนาแบบจำลอง ดีจีพี ให้อยู่ในรูปทั่วไปโดยการเพิ่มจำนวนมิติให้มากขึ้นนี้ เป็นหลักการที่ใช้พัฒนาแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น แล้วนำไปสู่การศึกษาการเปลี่ยนแปลงและวิวัฒนาการของเอกภพ

บทที่ 4

จักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น

4.1 ความโน้มถ่วงแบบลดหลั่น

ความโน้มถ่วงแบบลดหลั่น ความโน้มถ่วงของแบบจำลองจักรวาลวิทยาที่พัฒนาขึ้นจากแบบจำลอง ดีจีพี ด้วยการเพิ่มจำนวนมิติมากขึ้น เป็นการศึกษากาลอวกาศ 6 มิติ [31-33] โดยมีสมมติฐานว่า กาลอวกาศ 6 มิติ หรือเรียกว่า บัลค์ 6 มิติ ประกอบไปด้วย 4-เบรน ฝังตัวอยู่ และใน 4-เบรน มี 3-เบรน หรือกาลอวกาศ 4 มิติที่เราอาศัยอยู่ ฝังตัวอยู่ลดหลั่นตามลำดับ แอคชันของแต่ละเบรนจะมี ริชชี สเกลาร์ ในพจน์ไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต (Einstein-Hilbert term) สำหรับบอกลักษณะทางเรขาคณิตของกาลอวกาศของตัวเอง การเพิ่มจำนวนมิติพิเศษสามารถช่วยแก้ปัญหาความไม่เสถียรแบบโกสตีในแบบจำลอง ดีจีพี ดังรายละเอียดที่ได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 3 แอคชันของแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น สำหรับอธิบายกาลอวกาศ 6 มิติ สามารถเขียนในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้ [31]

$$S_{\text{cascade}} = \int_{\text{bulk}} d^6x \sqrt{-g_6} \frac{M_6^4}{2} R_6 + \int_{4\text{-brane}} d^5x \sqrt{-g_5} \frac{M_5^3}{2} R_5 + \int_{3\text{-brane}} d^4x \sqrt{-g_4} \left(\frac{M_4^2}{2} R_4 + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right) \quad (4.1)$$

จากสมการข้างต้นกำหนดให้ R_6 , R_5 คือ ริชชี สเกลาร์ ของบัลค์ และ 4-เบรน โดยเมตริก 6 มิติ และเวกเตอร์ดวลของ 4-เบรน เขียนได้เป็น $g_{(6)\hat{A}\hat{B}} = g_{\hat{A}\hat{B}}$ เมื่อ $\hat{A}, \hat{B} = 0, 1, 2, 3, 5, 6$ และ $g_{(5)AB} = g_{AB}$ เมื่อ $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$ ตามลำดับ และ R_4 คือ ริชชี สเกลาร์ ของเมตริกบนเบรน ซึ่งนิยามจาก $h_{AB} = g_{AB} - n_A n_B$ โดยที่ n^A คือ นอร์มอลเวกเตอร์ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเบรน จากแอคชันในสมการข้างบนนี้ เรามีคอสโมโลยีสเกล 2 ส่วน ได้แก่

$$m_5 = \frac{M_5^3}{M_4^2} \quad \text{และ} \quad m_6 = \frac{M_6^4}{M_5^3}$$

โดยเรากำหนดให้ $m_6 \ll m_5$ ปริมาณนี้ คือ อัตราส่วนมวลพลังค์ ในมิติพิเศษ ซึ่งอัตราส่วนมวลนี้บอกให้ทราบถึงขอบเขตระหว่างเบรนและบัลค์ (รัศมีของมิติพิเศษอาจหาได้จาก $r_5 = M_4^2/M_5^3$ และ $r_6 = M_5^3/M_6^4$) ที่มีการเปลี่ยนแปลงศักย์โน้มถ่วง โดยที่ศักย์โน้มถ่วงจะมีการลดหลั่นตามลำดับดังนี้ ศักย์ความโน้มถ่วงที่ระยะไมโครหรืออยู่บน 3-เบรน จะแปรผันตรงกับ $1/r$ ศักย์โน้มถ่วงในระยะกลาง

หรืออยู่บน 4-เบรน จะแปรผันตรงกับ $1/r^2$ และศักย์โน้มถ่วงที่ระยะไกลหรืออยู่ในบัลค์ 6 มิติ จะแปรผันตรงกับ $1/r^3$ ตามลำดับ ดังนั้นเราจึงเรียกแบบจำลองแบบนี้ว่า แบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น

4.2 จักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น

การศึกษาจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น [34] ศึกษาจากโลกแบบเบรน 5 มิติที่เป็นตัวแทนของโลกแบบเบรน 6 มิติ เป็นการศึกษาโดยใช้เทคนิคการลดจำนวนมิติ ด้วยการใช้อนุภาคสเกลาร์ เทนเซอร์ของความโน้มถ่วงในบัลค์ 5 มิติ ซึ่งการลดจำนวนมิตินั้นจะทำให้เราได้สนามสเกลาร์ π เพิ่มขึ้นมาในทฤษฎี เราเรียกสนามดังกล่าวว่า โหมดเบรนดัดโค้ง สนามสเกลาร์นี้เกิดขึ้นเช่นเดียวกับในแบบจำลอง ดีจีพี หรือในกรณีของ โกลด์สโตน โบซอน (Goldstones boson) ในแบบจำลองวิทยาแบบลดหลั่นสนามสเกลาร์นี้ เป็นปริมาณที่สำคัญในการอธิบายถึงวิวัฒนาการของเอกภพ

4.2.1 พจน์ขอบเขต

พิจารณาแอกชันตามสมการ (4.1) หลังจากใช้เทคนิคการลดมิติแล้ว จำเป็นต้องเพิ่มพจน์ขอบเขต (boundary term) เพื่อให้การแปรผันแอกชันเป็นศูนย์ หรือ การแปรผันแอกชันมีค่าเป็นที่สุด (extremum) พจน์ที่เพิ่มขึ้นนี้เรียกว่า พจน์กิบบอน-ฮอว์กิง-ยอร์ก (Gibbons-Hawking-York term: GHY) [36,37] ซึ่งในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป พจน์กิบบอน-ฮอว์กิง-ยอร์ก จำเป็นต้องเพิ่มเข้ามาในแอกชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต เมื่อกาลอวกาศที่เราพิจารณามีขอบเขต ทั้งนี้เนื่องจากแอกชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต จะอธิบายลักษณะของกาลอวกาศที่มีแมนิโฟลด์แบบปิด (close manifold) \mathcal{M} ซึ่งเป็นกาลอวกาศที่ไม่มีขอบ แต่ถ้ากาลอวกาศเป็นแมนิโฟลด์ที่มีขอบ $\partial\mathcal{M}$ จำเป็นต้องเพิ่มพจน์ขอบเขตเพื่อให้การแปรผันแอกชันเป็นศูนย์ เราสามารถเขียนแอกชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต ในกรณีที่กาลอวกาศ 4 มิติ เป็นกาลอวกาศที่มีขอบเขตได้ดังสมการ

$$S_{EH} + S_{GHY} = \frac{M_4^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g_4} R_4 + M_4^2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} K \quad (4.2)$$

เมื่อ $h_{\mu\nu}$ คืออินดิเมตริก บนพื้นผิวไฮเปอร์ ซึ่งนิยามโดย $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$ เมื่อ n^μ คือ นอร์มอลเวกเตอร์ ที่ตั้งฉากกับพื้นผิวไฮเปอร์ และ $K \equiv h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ โดยที่ $K_{\mu\nu}$ คือ เทนเซอร์ความโค้งภายนอก และดัชนี $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

เพื่อพิสูจน์สมบัติของพจน์ขอบเขตหรือ พจน์กิบบอน-ฮอว์กิง-ยอร์ก เราพิจารณาเมตริกที่มีการแปรผันเล็กน้อย กล่าวคือ $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ แอคชันตามสมการ (4.2) จะมีการแปรผัน ดังนี้ เริ่มจากพิจารณาการแปรผันแอคชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต ในพจน์แรก จะได้

$$\delta S_{EH} = \frac{M_4^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(\delta \sqrt{-g_4} R_4 + \sqrt{-g_4} \delta R_4 \right) \quad (4.3)$$

เราใช้สมบัติการแปรผันเมตริก และการแปรผันริชชีเทนเซอร์ ที่สามารถพิสูจน์ได้ตามรายละเอียดการคำนวณในภาคผนวก ค ดังนี้

$$\delta \sqrt{-g_4} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g_4} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (4.4)$$

และการแปรผันริชชีเทนเซอร์ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta R_4 &= g_{\mu\nu} \square_4 \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\mu \left(g_{\nu\lambda} \nabla^\mu \delta g^{\nu\lambda} - \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \right) + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.5)$$

แทนค่าตามสมการ (4.4) และ (4.5) ในสมการ (4.3) จะได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{M_4^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g_4} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) R_4 \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g_4} \left(\nabla_\mu \left(g_{\nu\lambda} \nabla^\mu \delta g^{\nu\lambda} - \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \right) + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \right] \\ &= \frac{M_4^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g_4} \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_4 \right) \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu \left(g_{\nu\lambda} \nabla^\mu \delta g^{\nu\lambda} - \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \right) \right] \end{aligned}$$

ทำการหาปริพันธ์ โดยใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (Divergence theorem) ในพจน์สุดท้าย จะได้การแปรผันแอคชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต ที่มีพจน์ขอบเขตไม่เป็นศูนย์ ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{M_4^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g_4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_4 \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + M_4^2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \frac{1}{2} n_\mu \left(g_{\nu\lambda} \nabla^\mu \delta g^{\nu\lambda} - \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

จากสมการ (4.6) เราจะพบว่าสำหรับกาลอวกาศที่มีขอบเขต หลังจากทำการแปรผันแล้วจะได้พจน์ขอบเขตไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องเพิ่มพจน์เพื่อให้พจน์ขอบเขตเป็นศูนย์ เข้ามาในแอกชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต ดังในพจน์ที่สองของสมการ (4.2)

พิจารณาการแปรผันพจน์กิบบอน-ฮอว์กิง-ยอร์ก หรือพจน์ที่สองของสมการ (4.2) ได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned}\delta S_{GHY} &= M_4^2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \left(\delta\sqrt{-h}K + \sqrt{-h}\delta K \right) \\ &= M_4^2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(-\frac{1}{2} h_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} K + \delta K \right)\end{aligned}\quad (4.7)$$

เมื่อเราใช้สมบัติของการแปรผัน $\delta\sqrt{-h}$ ตามสมการ (4.4) การแปรผันแอกชันตามสมการ (4.7) เราพบพจน์การแปรผัน δK ซึ่งเราหาค่าได้ดังนี้

โดยใช้นิยามของเทรซของเทนเซอร์ความโค้งภายนอก จะได้ [41]

$$\begin{aligned}K &= \nabla_{\mu} n^{\mu} \\ &= g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu} \\ &= (h^{\mu\nu} + n^{\mu} n^{\nu}) \nabla_{\mu} n_{\nu} \\ &= h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\delta K &= \delta h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu} + h^{\mu\nu} \delta(\nabla_{\mu} n_{\nu}) \\ &= \frac{1}{2} K_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \delta(\partial_{\mu} n_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} n_{\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} K_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} n_{\lambda}\end{aligned}\quad (4.8)$$

เมื่อเราใช้นิยามของเทนเซอร์ความโค้งภายนอก $K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\mu\nu}$ จากสมการ (4.8) เนื่องจากเรามีผลการแปรผันสัญลักษณ์คริสทอฟเฟล ดังรายละเอียดในภาคผนวก ค จะได้

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -\frac{1}{2} (g_{\nu\rho} \nabla_{\mu} \delta g^{\lambda\rho} + g_{\mu\rho} \nabla_{\nu} \delta g^{\lambda\rho} - g^{\lambda\rho} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla_{\rho} \delta g^{\alpha\beta})$$

แทนค่า $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ ในสมการ (4.8) จะได้

$$\begin{aligned}\delta K &= \frac{1}{2} K_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} n_{\lambda} \\ &= \frac{1}{2} K_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \left(g_{\nu\rho} \nabla_{\mu} \delta g^{\lambda\rho} + g_{\mu\rho} \nabla_{\nu} \delta g^{\lambda\rho} - g^{\lambda\rho} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla_{\rho} \delta g^{\alpha\beta} \right) n_{\lambda} \\ \therefore \delta K &= \frac{1}{2} K_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} n_{\mu} \left(g_{\nu\lambda} \nabla^{\mu} \delta g^{\nu\lambda} - 2 \nabla_{\nu} \delta g^{\mu\nu} \right)\end{aligned}\quad (4.9)$$

ดังนั้นเราจะได้การแปรผันพจน์กิบบอน-ฮอว์กิง-ยอร์ก โดยแทนค่าตามสมการ (4.9) ในสมการ (4.7) ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta S_{GHY} &= M_4^2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{1}{2} (K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} K) \delta g^{\mu\nu} \right) \\ &\quad - M_4^2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \frac{1}{2} n_{\mu} \left(g_{\nu\lambda} \nabla^{\mu} \delta g^{\nu\lambda} - 2 \nabla_{\nu} \delta g^{\mu\nu} \right)\end{aligned}\quad (4.10)$$

ในที่สุดเราจะได้การแปรผันแอคชัน ตามสมการ (4.2) โดยใช้ผลการแปรผันตามสมการ (4.6) และ (4.10) ได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta S_{EH} + \delta S_{GHY} \\ &= \frac{M_4^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g_4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_4 \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + M_4^2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \left(\frac{1}{2} (K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} K) \delta g^{\mu\nu} + \nabla_{\nu} (n_{\mu} \delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\nu} n_{\mu} \delta g^{\mu\nu} \right)\end{aligned}\quad (4.11)$$

จากสมการ (4.11) สามารถตัด $\nabla_{\nu} (n_{\mu} \delta g^{\mu\nu})$ ซึ่งเป็นอนุพันธ์รวมบนขอบเขตทั้งหมดได้ [41] ซึ่งจะทำให้แอคชันที่ปรับปรุงแล้วตามสมการ (4.2) มีการแปรผันเป็นศูนย์ หรือ การแปรผันแอคชันมีค่าเป็นที่สุด

4.2.2 สมการการเคลื่อนที่

จากหลักการดังกล่าวข้างต้น เราสามารถเขียนแอคชันสำหรับแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น ซึ่งกาลอวกาศเป็นแมนิโฟลด์ที่มีขอบ ได้ดังนี้ [34]

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5 x \sqrt{-g_5} \left[e^{-3\pi/2} R_5 - \frac{27}{16m_6^2} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right] \\
 & - M_5^3 \int_{brane} d^4 x \sqrt{-q} \left[e^{-3\pi/2} K + \frac{27}{32m_6^2} \left(\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi \mathcal{L}_n \pi + \frac{1}{3} (\mathcal{L}_n \pi)^3 \right) \right] \\
 & + \int_{3-brane} d^4 x \sqrt{-q} \left(\frac{M_4^2}{2} R_4 + \mathcal{L}_{matter} \right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

เหมือนกับที่นิยามไว้ก่อนหน้านี้ $K \equiv h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ โดยที่ $K_{\mu\nu}$ คือ เทนเซอร์ความโค้งภายนอก และ \mathcal{L}_n คือ อนุพันธ์ลี (Lie derivative) เทียบกับนอโมลเวอริเตอร์ ซึ่งหาได้จาก $\mathcal{L}_n \pi = n^M \partial_M \pi$

ในการศึกษาวิวัฒนาการของเอกภพตามแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น เริ่มจากการหาสมการการเคลื่อนที่บนกาลอวกาศ 5 มิติ (บัลค์) โดยใช้หลักการแปรผัน ซึ่งสมการ (4.12) ทำการแปรผันแอคชัน ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \delta S_{bulk} = & \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5 x \left[\delta \sqrt{-g_5} \left(e^{-3\pi/2} R_5 - \frac{27}{16m_6^2} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right) \right. \\
 & \left. + \sqrt{-g_5} \delta \left(e^{-3\pi/2} R_5 - \frac{27}{16m_6^2} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right) \right] \\
 = & \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5 x \left[\delta \sqrt{-g_5} \left(e^{-3\pi/2} R_5 - \frac{27}{16m_6^2} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right) \right. \\
 & \left. + \sqrt{-g_5} \left(-\frac{3}{2} e^{-3\pi/2} R_5 \delta\pi + e^{-3\pi/2} \delta R_5 - \frac{27}{16m_6^2} \left(\delta (\partial\pi)^2 \square_5 \pi + (\partial\pi)^2 \delta (\square_5 \pi) \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

จากผลที่ได้ตามสมการ (4.13) พบว่า มีพจน์ที่ต้องใช้ผลจากการแปรผันเมตริก และการแปรผันริชชีเทนเซอร์ ดังรายละเอียดการคำนวณในภาคผนวก ค ซึ่งการแปรผันเมตริกได้ผลดังนี้

$$\delta \sqrt{-g_5} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g_5} g_{MN} \delta g^{MN} \tag{4.14}$$

และการแปรผันรีซชีเทนเซอร์ ได้ดังนี้

$$\delta R_5 = g_{MN} \square_5 \delta g^{MN} - \nabla_M \nabla_N \delta g^{MN} + R_{MN} \delta g^{MN} \quad (4.15)$$

แทนค่าสมการ (4.14) และ (4.15) ลงในสมการ (4.13) จะได้

$$\begin{aligned} \delta S_{bulk} &= \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5 x \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g_5} g_{MN} \delta g^{MN} \left(e^{-3\pi/2} R_5 - \frac{27}{16m_6^2} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right) \right. \\ &\quad + \sqrt{-g_5} \left(-\frac{3}{2} e^{-3\pi/2} R_5 \delta\pi + e^{-3\pi/2} (g_{MN} \square_5 \delta g^{MN} - \nabla_M \nabla_N \delta g^{MN} + R_{MN} \delta g^{MN}) \right) \\ &\quad \left. - \frac{27}{16m_6^2} (\delta(\partial\pi)^2 \square_5 \pi + (\partial\pi)^2 \delta(\square_5 \pi)) \right] \\ &= \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5 x \sqrt{-g_5} \left[\left(e^{-3\pi/2} \left(R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R_5 \right) + \frac{27}{16m_6^2} \left(\frac{1}{2} g_{MN} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right) \right) \delta g^{MN} \right. \\ &\quad - \frac{3}{2} e^{-3\pi/2} R_5 \delta\pi + e^{-3\pi/2} (g_{MN} \square_5 - \nabla_M \nabla_N) \delta g^{MN} \\ &\quad \left. - \frac{27}{16m_6^2} (\delta(g^{MN} \partial_M \pi \partial_N \pi) \square_5 \pi + (\partial\pi)^2 \delta(g^{MN} \nabla_M \nabla_N \pi)) \right] \quad (4.16) \end{aligned}$$

พิจารณาพจน์สุดท้ายของสมการ (4.16) เราพบว่า (เนื่องจาก $(\partial\pi)^2 = g^{MN} \partial_M \pi \partial_N \pi$)

$$\begin{aligned} & -\frac{27}{16m_6^2} (\delta(g^{MN} \partial_M \pi \partial_N \pi) \square_5 \pi + (\partial\pi)^2 \delta(g^{MN} \nabla_M \nabla_N \pi)) \\ &= -\frac{27}{16m_6^2} \left[\delta g^{MN} (\partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi) + 2g^{MN} (\partial_M (\delta\pi) \partial_N \pi) \square_5 \pi \right. \\ &\quad \left. + (\partial\pi)^2 \delta(g^{MN} \nabla_M \nabla_N \pi) \right] \\ &= -\frac{27}{16m_6^2} \left[\delta g^{MN} (\partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi) + 2g^{MN} (\partial_M (\delta\pi) \partial_N \pi) \square_5 \pi \right. \\ &\quad \left. + \delta g^{MN} (\partial\pi)^2 (\nabla_M \nabla_N \pi) + g^{MN} (\partial\pi)^2 \nabla_M \nabla_N \delta\pi \right] \quad (4.17) \end{aligned}$$

โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติสมมาตรของอนุพันธ์รวม (total derivative) สมการ (4.17) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
& -\frac{27}{16m_6^2} \left(\delta \left(g^{MN} \partial_M \pi \partial_N \pi \right) \square_5 \pi + (\partial \pi)^2 \delta \left(g^{MN} \nabla_M \nabla_N \pi \right) \right) \\
& = -\frac{27}{16m_6^2} \left[\delta g^{MN} \left(\partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi \right) + 2g^{MN} \left(\partial_M (\delta \pi) \partial_N \pi \right) \square_5 \pi \right. \\
& \quad + \delta g^{MN} (\partial \pi)^2 \frac{1}{2} \left(\partial_M \partial_N \pi + \partial_N \partial_M \pi \right) \\
& \quad \left. + g^{MN} (\partial \pi)^2 \nabla_M \nabla_N \delta \pi \right] \\
& = -\frac{27}{16m_6^2} \left[\delta g^{MN} \left(\partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi \right) + 2g^{MN} \left(\partial_M (\delta \pi) \partial_N \pi \right) \square_5 \pi \right. \\
& \quad + \delta g^{MN} \frac{1}{2} \left((\partial \pi)^2 \partial_M \partial_N \pi + (\partial \pi)^2 \partial_N \partial_M \pi \right) \\
& \quad \left. + g^{MN} (\partial \pi)^2 \nabla_M \nabla_N \delta \pi \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

จากสมการ (4.18) แทนค่าในสมการ (4.16) จะได้

$$\begin{aligned}
\delta S_{bulk} & = \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5 x \sqrt{-g_5} \left[\left(e^{-3\pi/2} G_{MN} + \frac{27}{16m_6^2} \left(\frac{1}{2} g_{MN} (\partial \pi)^2 g^{MK} \partial_M \partial_K \pi \right) \right) \delta g^{MN} \right. \\
& \quad - \frac{3}{2} e^{-3\pi/2} R_5 \delta \pi + e^{-3\pi/2} \left(g_{MN} \square_5 - \nabla_M \nabla_N \right) \delta g^{MN} \\
& \quad - \frac{27}{16m_6^2} \left(\delta g^{MN} \left(\partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi \right) + 2g^{MN} \left(\partial_M (\delta \pi) \partial_N \pi \right) \square_5 \pi \right. \\
& \quad + \delta g^{MN} \left(\frac{1}{2} \left((\partial \pi)^2 \partial_M \partial_N \pi + (\partial \pi)^2 \partial_N \partial_M \pi \right) \right. \\
& \quad \left. \left. + g^{MN} (\partial \pi)^2 \nabla_M \nabla_N \delta \pi \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

จัดรูปสมการ (4.19) ใหม่ จะได้

$$\begin{aligned}
\delta S_{bulk} & = \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5 x \sqrt{-g_5} \left[\left(e^{-3\pi/2} G_{MN} \right) \delta g^{MN} - \frac{3}{2} e^{-3\pi/2} R_5 \delta \pi + e^{-3\pi/2} \left(g_{MN} \square_5 - \nabla_M \nabla_N \right) \delta g^{MN} \right. \\
& \quad + \frac{27}{16m_6^2} \left(\frac{1}{2} g_{MN} (\partial \pi)^2 \partial^K \partial_K \pi - \frac{1}{2} \left((\partial \pi)^2 \partial_M \partial_N \pi + (\partial \pi)^2 \partial_N \partial_M \pi \right) - \partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi \right) \delta g^{MN} \\
& \quad \left. - \frac{27}{16m_6^2} \left(2g^{MN} \left(\partial_M (\delta \pi) \partial_N \pi \right) \square_5 \pi + g^{MN} (\partial \pi)^2 \nabla_M \nabla_N \delta \pi \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

จากสมการ (4.20) เมื่อทำการหาปริพันธ์ทีละส่วน (integration by parts) จะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\int_{bulk} d^5x \sqrt{-g_5} \left(\frac{1}{2} g_{MN} (\partial\pi)^2 \partial^K \partial_K \pi \right) &= -\int_{bulk} d^5x \sqrt{-g_5} \left(\frac{1}{2} g_{MN} \partial^K (\partial\pi)^2 \partial_K \pi \right) + \text{boundary terms} \\
\int_{bulk} d^5x \sqrt{-g_5} \left(-\frac{1}{2} (\partial\pi)^2 \partial_M \partial_N \pi \right) &= \int_{bulk} d^5x \sqrt{-g_5} \left(\frac{1}{2} \partial_M (\partial\pi)^2 \partial_N \pi \right) + \text{boundary terms} \\
\int_{bulk} d^5x \sqrt{-g_5} \left(-\frac{1}{2} (\partial\pi)^2 \partial_N \partial_M \pi \right) &= \int_{bulk} d^5x \sqrt{-g_5} \left(\frac{1}{2} \partial_N (\partial\pi)^2 \partial_M \pi \right) + \text{boundary terms}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

ดังนั้น ผลลัพธ์ที่ได้จากการแปรผันแอคชัน δS_{bulk} จะเป็นดังสมการ

$$\begin{aligned}
\delta S_{bulk} &= \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5x \sqrt{-g_5} \left[(e^{-3\pi/2} G_{MN}) \delta g^{MN} - \frac{3}{2} e^{-3\pi/2} R_5 \delta\pi + e^{-3\pi/2} (g_{MN} \square_5 - \nabla_M \nabla_N) \delta g^{MN} \right. \\
&\quad + \frac{27}{16m_6^2} \left(\frac{1}{2} (\partial_M (\partial\pi)^2 \partial_N \pi + \partial_N (\partial\pi)^2 \partial_M \pi) - \frac{1}{2} g_{MN} \partial^K (\partial\pi)^2 \partial_K \pi - \partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi \right) \delta g^{MN} \\
&\quad \left. - \frac{27}{16m_6^2} (2g^{MN} (\partial_M (\delta\pi) \partial_N \pi) \square_5 \pi + g^{MN} (\partial\pi)^2 \nabla_M \nabla_N \delta\pi) \right]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

เมื่อทำการแปรผันสมการ (4.22) เทียบกับเมตริก เราจะได้สมการการเคลื่อนที่ในกาลอวกาศ 5 มิติ ดังนี้

$$\begin{aligned}
e^{-3\pi/2} G_{MN} &= -\frac{27}{16m_6^2} \left[\partial_{(M} (\partial\pi)^2 \partial_{N)} \pi - \frac{1}{2} g_{MN} \partial^K (\partial\pi)^2 \partial_K \pi - \partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi \right] \\
&\quad - (g_{MN} \square_5 - \nabla_M \nabla_N) e^{-3\pi/2}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

เมื่อ G_{MN} คือไอน์สไตน์เทนเซอร์ใน 5 มิติ ดัชนี $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$ และสมบัติสมมาตร $X_{(MN)} \equiv \frac{1}{2} (X_{MN} + X_{NM})$ สมการ (4.23) คือสมการการเคลื่อนที่ของบัลด์สมการแรก ซึ่งเป็นสมการสนามของความโน้มถ่วง จากแอคชันของแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดทอนในสมการ (4.12) ทำการแปรผันเทียบกับสนามสเกลาร์ π จะได้สมการการเคลื่อนที่สำหรับสนามสเกลาร์ π ดังต่อไปนี้

ในการหาสมการการเคลื่อนที่สำหรับสนามสเกลาร์ π เริ่มจากสมการ (4.16) จัดรูปสมการใหม่ และสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\delta S_{bulk} = & \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5x \sqrt{-g_5} \left[(e^{-3\pi/2} G_{MN} + \frac{27}{16m_6^2} (\frac{1}{2} g_{MN} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi)) \delta g^{MN} \right. \\
& - \frac{3}{2} e^{-3\pi/2} R_5 \delta\pi + e^{-3\pi/2} (g_{MN} \square_5 - \nabla_M \nabla_N) \delta g^{MN} \\
& - \frac{27}{16m_6^2} (\delta g^{MN} \partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi + (\partial\pi)^2 (\nabla_M \nabla_N \pi) \delta g^{MN} \\
& \left. - \frac{27}{16m_6^2} ((2g^{MN} \partial_M (\delta\pi) \partial_N \pi) \square_5 \pi + g^{MN} (\partial\pi)^2 \nabla_M \nabla_N \delta\pi) \right]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

เนื่องจาก π เป็นปริมาณสเกลาร์ กล่าวคือ อนุพันธ์โควาเรียนท์ เทียบกับ สเกลาร์จะเท่ากับอนุพันธ์รวม ดังนั้นพจน์สุดท้ายของสมการ (4.24) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
& - \frac{27}{16m_6^2} ((2g^{MN} \partial_M (\delta\pi) \partial_N \pi) \square_5 \pi + g^{MN} (\partial\pi)^2 \nabla_M \nabla_N \delta\pi) \\
& = - \frac{27}{16m_6^2} (2(g^{MN} \nabla_M (\delta\pi) \nabla_N \pi) \square_5 \pi + \delta\pi g^{MN} \nabla_N \nabla_M (\partial\pi)^2) \\
& = - \frac{27}{16m_6^2} (2(g^{MN} \nabla_M (\delta\pi) \nabla_N \pi) \square_5 \pi + \delta\pi g^{MN} \nabla_N \nabla_M (\partial^N \pi \partial_N \pi)) \\
& = - \frac{27}{16m_6^2} (2(g^{MN} \nabla_M (\delta\pi) \nabla_N \pi) \square_5 \pi + 2\delta\pi (\nabla_N \nabla_M \partial^N \pi \partial^M \pi)) \\
& = - \frac{27}{8m_6^2} [(g^{MN} \nabla_M (\delta\pi) \nabla_N \pi) \square_5 \pi + \delta\pi (\nabla_M \nabla_N \partial^N \pi \partial^M \pi) \\
& \quad + \delta\pi (\nabla_N \nabla_M \partial^N \pi \partial^M \pi - \nabla_M \nabla_N \partial^N \pi \partial^M \pi)] \\
& = - \frac{27}{8m_6^2} [(g^{MN} \nabla_M (\delta\pi) \nabla_N \pi) \square_5 \pi + \delta\pi (\nabla_M \nabla_N \partial^N \pi \partial^M \pi) \\
& \quad + \delta\pi ([\nabla_N, \nabla_M] \partial^N \pi \partial^M \pi)]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ดังนั้นสมการ (4.24) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\delta S_{bulk} = & \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5 x \sqrt{-g_5} \left[\left(e^{-3\pi/2} G_{MN} + \frac{27}{16m_6^2} \left(\frac{1}{2} g_{MN} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right) \right) \delta g^{MN} \right. \\
& - \frac{3}{2} e^{-3\pi/2} R_5 \delta\pi + e^{-3\pi/2} (g_{MN} \square_5 - \nabla_M \nabla_N) \delta g^{MN} \\
& - \frac{27}{16m_6^2} (\delta g^{MN} \partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi + (\partial\pi)^2 (\nabla_M \nabla_N \pi) \delta g^{MN} \\
& - \frac{27}{8m_6^2} ((g^{MN} \nabla_M (\delta\pi) \nabla_N \pi) \square_5 \pi + \delta\pi \nabla_N \nabla_M \partial^M \pi \partial^N \pi \\
& \left. + \delta\pi [\nabla_M, \nabla_N] \partial^M \pi \partial^N \pi) \right] \quad (4.26)
\end{aligned}$$

จากสมการ (4.26) เมื่อทำการหาปริพันธ์ทีละส่วน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \int_{bulk} d^5 x \sqrt{-g_5} \left((g^{MN} \nabla_M (\delta\pi) \nabla_N \pi) \square_5 \pi \right) \\
& = - \int_{bulk} d^5 x \sqrt{-g_5} \left((\delta\pi g^{MN} \nabla_M \nabla_N \pi) \square_5 \pi \right) + boundary \ terms \quad (4.27)
\end{aligned}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\delta S_{bulk} = & \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5 x \sqrt{-g_5} \left[\left(e^{-3\pi/2} G_{MN} + \frac{27}{16m_6^2} \left(\frac{1}{2} g_{MN} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right) \right) \delta g^{MN} \right. \\
& - \frac{3}{2} e^{-3\pi/2} R_5 \delta\pi + e^{-3\pi/2} (g_{MN} \square_5 - \nabla_M \nabla_N) \delta g^{MN} \\
& - \frac{27}{16m_6^2} (\delta g^{MN} \partial_M \pi \partial_N \pi \square_5 \pi + (\partial\pi)^2 (\nabla_M \nabla_N \pi) \delta g^{MN} \\
& \left. - \frac{27}{8m_6^2} (-\delta\pi (\square_5 \pi)^2 + \delta\pi (\nabla_M \partial_N \pi)^2 + \delta\pi R^{MN} \partial_M \pi \partial_N \pi) \right] \quad (4.28)
\end{aligned}$$

เมื่อ R_{MN} คือริชชีเทนเซอร์ใน 5 มิติ ที่นิยามโดย $[\nabla_M, \nabla_N] \partial^M \pi \partial^N \pi = R_{MN} \partial^M \pi \partial^N \pi$ ดังนั้นทำการแปรผันสมการ (4.28) เทียบกับ π เราจะได้สมการการเคลื่อนที่สำหรับสนามสเกลาร์ ดังนี้

$$(\square_5 \pi)^2 - (\nabla_M \partial_N \pi)^2 - R^{MN} \partial_M \pi \partial_N \pi = \frac{4}{9} m_6^2 e^{-3\pi/2} R_5 \quad (4.29)$$

เมื่อ R_5 คือริชชีสเกลาร์ใน 5 มิติ โดยใช้ความสัมพันธ์ดังสมการ (4.23) และ (4.29) และเงื่อนไขรอยต่อ (junction conditions) ที่เหมาะสม เราสามารถศึกษาวิวัฒนาการของเอกภพบนเบรนของจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่นได้ดังหัวข้อต่อไป

4.3 วิวัฒนาการของเอกภพในจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น

ในการศึกษาวิวัฒนาการของเอกภพในแบบจำลองวิทยาแบบลดหลั่น เราจำเป็นต้องทราบสมการการเคลื่อนที่หรือสมการฟรีดมานน์บน 3-เบรน โดยอาศัยสมมติฐานที่ว่า เอกภพมีความเป็นเนื้อเดียวกันและมองจากทางไหนก็เหมือนกันหมด ซึ่งการหาสมการฟรีดมานน์เราต้องมีความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตของบัลค์ที่เราศึกษา ในกรณีของจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่นนี้ เรามีสมมติฐานให้เรขาคณิตของเอกภพขึ้นอยู่กับมิติพิเศษ ดังนั้นเราสามารถเขียนเมตริกสำหรับกาลอวกาศแบบนี้ได้ว่า

$$ds_{bulk}^2 = a^2(y)(-d\tau^2 + d\vec{x}^2) + dy^2 \quad (4.30)$$

เมื่อ $a(y)$ คือ ตัวประกอบมาตราส่วน เมื่อแทนค่าเมตริกในสมการ (4.30) ลงในสมการการเคลื่อนที่ของบัลค์ สมการ (4.23) และ (4.29) เราสามารถหาสมการคล้ายฟรีดมานน์ ซึ่งสำหรับในองค์ประกอบที่ (5.5) นั้นจะเขียนได้เป็น

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{a'}{a} \pi' \left(\frac{9}{8m_6^2} e^{3\pi/2} \pi'^2 + 1 \right) \quad (4.31)$$

และสำหรับในองค์ประกอบที่ (μ, ν) เขียนได้เป็น

$$\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{9}{16m_6^2} e^{3\pi/2} \pi'^2 \pi'' - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \pi'^2 - 3 \frac{a'}{a} \pi' - \pi'' \right) \quad (4.32)$$

ในการหาผลเฉลยของสมการคล้ายฟรีดมานน์ทั้งสองสมการนี้ จำเป็นต้องใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข [34] เพื่อดูแนวโน้มและวิวัฒนาการของเอกภพ ตามการเปลี่ยนแปลงของตัวประกอบมาตราส่วน

พิจารณาสมการความต่อเนื่อง (continuity equations) ในรูปมาตรฐานแล้วจะประกอบไปด้วยปริมาณเหล่านี้ได้แก่ ความหนาแน่นพลังงาน $\rho_m^{(i)}$ และความดัน $P_m^{(i)}$ ของสสาร โดยสมการความต่อเนื่องสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$\frac{d\rho_m^{(i)}}{dt} + 3H(\rho_m^{(i)} + P_m^{(i)}) = 0 \quad (4.33)$$

เมื่อ $H \equiv d \ln a / dt$ คือ พารามิเตอร์ฮับเบิลบนเบรน จากการใช้เงื่อนไขรอยต่อ และสมการคล้ายฟรีดมันน์ (4.31) และสมการ (4.32) เราสามารถเขียนสมการฟรีดมันน์ในรูปสมการมาตรฐานได้ดังนี้

$$3H^2 M_4^2 = \sum_i \rho_m^{(i)} + \rho_\pi = 0 \quad (4.34)$$

เมื่อ

$$\rho_\pi \equiv M_5^3 \sqrt{a'^2 + a^2 H^2} \left\{ \frac{9}{8m_6^2} \left(2 \left(\frac{aH}{a'} \right)^2 - 1 \right) \frac{\pi'^3}{a'} - 6e^{-3\pi/2} \left(\frac{\pi'}{2a'} - \frac{1}{a} \right) \right\} \quad (4.35)$$

จากสมการ ρ_π คือ ความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ π ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเป็นความหนาแน่นพลังงานที่มีความซับซ้อน ดังนั้น แบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่นได้ให้ข้อมูลที่เป็นองค์ความรู้ใหม่ทางฟิสิกส์ ในการอธิบายข้อมูลที่ได้จากสมการนี้ เราแบ่งพิจารณาออกเป็น 2 ช่วงเวลา กล่าวคือ เรามีสมมติฐานว่า ในช่วงเริ่มแรกหลังบิกแบงเอกภพเต็มไปด้วยรังสีที่มีพลังงานสูง จากนั้นเอกภพได้ขยายตัว อุณหภูมิลดลงและเกิดมวลสารต่างๆ ขึ้น ในช่วงนี้เองสนามสเกลาร์ π ถูกควบคู่อย่างรุนแรง จึงยังไม่มีอิทธิพลมากนักต่อการขยายตัวของเอกภพ เราเรียกยุคนี้ว่า ยุคควบคู่อย่างเข้ม และในปัจจุบันเอกภพมีอุณหภูมิต่ำมาก และกำลังขยายตัวด้วยความเร่ง สนามสเกลาร์เริ่มมีอิทธิพลต่อการขยายตัวของเอกภพ ซึ่งอาจเป็นพลังงานมืดที่ขับเคลื่อนให้ เอกภพขยายตัวด้วยความเร่ง เราเรียกยุคนี้ว่า ยุคควบคู่อย่างอ่อน

4.3.1 ยุคควบคู่อย่างเข้ม

ในยุคนี้เป็นช่วงเวลาที่เอกภพเต็มไปด้วยรังสี และสสาร สนามสเกลาร์ π ยังมีอิทธิพลต่อการขยายตัวของเอกภพไม่มาก ดังนั้น เราสามารถพิจารณาเฉพาะพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (non-linear terms) ของ π หรือพจน์ที่มีกำลังสูงสุดในสมการ เนื่องจากยุคนี้ถือได้ว่าเป็นยุคของรังสี และสสาร ซึ่งความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ ρ_π มีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับความหนาแน่นพลังงานของรังสี และความหนาแน่นพลังงานของสสาร ดังนั้น เราพิจารณาได้ว่า สนามสเกลาร์ π มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ($|\Delta\pi| \ll 1$) จึงสามารถประมาณได้ว่า $e^{3\pi/2} \approx 1$.

ดังนั้นในยุคควบคู่อย่างเข้มสมการ (4.31) และ (4.32) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{a'}{a} = \frac{9}{8m_6^2} \pi'^3$$

$$\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{9}{16m_6^2} \pi'^2 \pi''$$
(4.36)

จากสมการ (4.36) เราสามารถหาผลเฉลยของ $\pi(y)$ และ $a(y)$ ได้ดังนี้

$$\frac{a'}{a} = \frac{9}{8m_6^2} \pi'^3$$
(4.37)

หาอนุพันธ์ของ (4.37) เทียบกับ y จะได้

$$\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{27}{8m_6^2} \pi'^2 \pi''$$
(4.38)

และเรามีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{9}{16m_6^2} \pi'^2 \pi''$$
(4.39)

โดยการพิจารณาสมการ (4.38) และ (4.39) เราจะได้ว่า

$$\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 6 \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \right)$$

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{a'}{a} \right) = 6 \left(\frac{d}{dy} \left(\frac{a'}{a} \right) + 2 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right)$$

$$5 \frac{d}{dy} \left(\frac{a'}{a} \right) = -12 \left(\frac{a'}{a} \right)^2$$

เมื่อจัดรูปใหม่ แล้วทำการหาปริพันธ์ จะได้

$$\frac{a'}{a} = \frac{5}{12y}$$

จากนั้นจึงทำการหาปริพันธ์อีกครั้งซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็น

$$\int \frac{1}{a} da = \frac{5}{12} \int \frac{1}{y} dy$$

$$\ln a = \frac{5}{12} \ln y$$

$$a = y^{5/12}$$

เพื่อให้ตัวประกอบมาตราส่วน $a(y)$ เป็นสัดส่วนกับมวล m_6 ดังนั้นจากผลลัพธ์ที่ได้เราสามารถเขียนได้เป็น

$$a(y) = \left(\frac{12}{5} m_6 |y| \right)^{5/12} \quad (4.40)$$

สำหรับผลเฉลยของ $\pi(y)$ หาได้โดยเริ่มจาก หานุพันธ์สมการ (4.40) แล้วจัดรูปใหม่ได้

$$a(y) = \left(\frac{12}{5} m_6 |y| \right)^{5/12}$$

$$a' = \left(\frac{12}{5} m_6 \right)^{5/12} \frac{5}{12} y^{\frac{5}{12}-1}$$

ดังนั้น

$$\frac{a'}{a} = \frac{5}{12y} \quad (4.41)$$

แทนค่า สมการ (4.41) ลงในสมการ (4.37) จะได้

$$\frac{5}{12} \frac{1}{y} = \frac{9}{8m_6^2} \pi'^3$$

$$\pi' = \left(\frac{5}{12} \left(\frac{8m_6^2}{9} \right) \right)^{1/3} \frac{1}{y^{1/3}}$$

โดยการหาปริพันธ์ จะได้

$$\pi = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{12} \left(\frac{8m_6^2}{9} \right) \right)^{1/3} y^{2/3}$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้ผลเฉลยของ π เขียนได้เป็น

$$\pi(y) = \left(\sqrt{\frac{5}{4}} m_6 |y| \right)^{2/3} \quad (4.42)$$

จากผลเฉลยสำหรับ $a(y)$ และ $\pi(y)$ ตามสมการ (4.40) และ (4.42) เราสามารถประมาณค่าความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ในยุคควบคู่อย่างเข้ม ซึ่งเราสามารถเลือกพิจารณาเฉพาะพจน์ π'^3 / m_6^2 เนื่องจาก π มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ดังนั้น จากสมการ (4.35) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \rho_\pi &\approx M_5^3 \sqrt{a'^2 + a^2 H^2} \left\{ \frac{9}{8m_6^2} \left(2 \left(\frac{aH}{a'} \right)^2 - 1 \right) \frac{\pi'^3}{a'} + \frac{6}{a} \right\} \\ &\approx M_5^3 a \sqrt{\left(\frac{a'}{a} \right)^2 + H^2} \left\{ \frac{9}{8m_6^2} \left(2 \left(\frac{aH}{a'} \right)^2 - 1 \right) \frac{\pi'^3}{a'} + \frac{6}{a} \right\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

จากสมการ (4.37) เราพบว่า

$$\pi'^3 = \frac{a' 8m_6^2}{a 9} \quad (4.44)$$

แทนค่าสมการ (4.44) ในสมการ (4.43) จะได้

$$\begin{aligned} \rho_\pi &\approx M_5^3 a \sqrt{\left(\frac{a'}{a} \right)^2 + H^2} \left\{ \frac{9}{8m_6^2} \left(2 \left(\frac{aH}{a'} \right)^2 - 1 \right) \left(\frac{a' 8m_6^2}{a 9} \right) \frac{1}{a'} + \frac{6}{a} \right\} \\ &\approx M_5^3 \left\{ 2 \left(\frac{a}{a'} H \right)^2 + 5 \right\} \sqrt{\left(\frac{a'}{a} \right)^2 + H^2} \end{aligned} \quad (4.45)$$

จากสมการ (4.40) เราสามารถเขียนได้ว่า

$$y = \frac{5}{12} \frac{a^{12/5}}{m_6} \quad (4.46)$$

แทนค่าสมการ (4.46) ในสมการ (4.41) จะได้

$$\frac{a'}{a} = \frac{m_6}{a^{12/5}} \quad (4.47)$$

แทนค่าสมการ (4.47) ลงในสมการ (4.45) เราจะได้ค่าความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ในยุคควบคู่อย่างเข้ม ดังนี้

$$\rho_\pi \approx M_5^3 \left\{ 2 \frac{H^2}{m_6^2} a^{24/5} + 5 \right\} \sqrt{H^2 + \left(\frac{m_6}{a^{12/5}} \right)^2} \quad (4.48)$$

จากค่าความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ข้างต้น เมื่อรวมกับค่าความหนาแน่นพลังงานของสสาร เราจะได้สมการคล้ายฟรีดมานน์ที่สมบูรณ์ สามารถใช้อธิบายวิวัฒนาการของเอกภพในยุคควบคู่อย่างเข้ม ดังนั้น สมการ (4.34) สามารถเขียนได้เป็น

$$H^2 \approx \frac{1}{3M_4^2} \sum_i \rho_m^{(i)} + m_5 \left\{ \frac{2}{3} \frac{H^2}{m_6^2} a^{24/5} + \frac{5}{3} \right\} \sqrt{H^2 + \left(\frac{m_6}{a^{12/5}} \right)^2} \quad (4.49)$$

พิจารณาสมการ (4.48) ถ้า $H \gg m_6 / a^{12/5}$ ความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ จะเขียนได้เป็น

$$\rho_\pi \approx 2M_5^3 \frac{a^{24/5} H^3}{m_6^2} \quad (4.50)$$

เนื่องจากเอกภพประกอบไปด้วยสสารต่างๆ ที่มีสมการสถานะ แตกต่างกัน โดยในบทที่ 2 เราได้นิยามพารามิเตอร์ของสมการสถานะในรูปทั่วไปคือ ω ดังนั้น จากสมการฟรีดมานน์มาตรฐาน เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ฮับเบิลและตัวประกอบมาตราส่วน เป็นดังนี้

$$H \sim a^{-3(1+\omega)/2} \quad (4.51)$$

โดยกำหนดให้ปัจจุบัน $a_0 = 1$ แทนค่าสมการ (4.51) ในสมการ (4.50) เราจะได้

$$\begin{aligned}\rho_\pi &\sim a^{24/5} \left(a^{-3(1+\omega)/2} \right)^3 \\ &\sim a^{3(1-15\omega)/10}\end{aligned}\quad (4.52)$$

ความสัมพันธ์ในสมการ (4.52) เราสามารถหาพารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับสนามสเกลาร์ π โดยนิยามจาก

$$\frac{d \ln \rho_\pi}{d \ln a} \equiv -3(1 + \omega_\pi) \quad (4.53)$$

จากสมการ (4.52) เราพบว่า

$$\frac{d \ln \rho_\pi}{d \ln a} = \frac{3}{10}(1 - 15\omega)$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}\frac{3}{10}(1 - 15\omega) &= -3(1 + \omega_\pi) \\ \omega_\pi &= -\frac{11}{10} + \frac{3}{2}\omega\end{aligned}\quad (4.54)$$

เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับสนามสเกลาร์ และพารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับองค์ประกอบทั่วไปของเอกภพ เมื่อพิจารณาเอกภพในยุคที่สสารหรืออนุภาคต่างๆ มีอิทธิพลต่อการขยายตัวของเอกภพ ($\omega = 0$) พบว่า พารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับสนามสเกลาร์ มีค่าเป็น $\omega_\pi = -11/10$ แสดงว่าสนามสเกลาร์สามารถที่จะเป็นพลังงานมืด ที่เชื่อว่าเป็นสาเหตุที่ทำให้เอกภพขยายตัวด้วยความเร่ง

พิจารณาสมการ (4.48) ถ้า $H \ll m_6 / a^{12/5}$ ความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ จะเขียนได้เป็น

$$\rho_\pi \approx 5M_5^3 \frac{m_6}{a^{12/5}} \quad (4.55)$$

หรือ

$$\rho_\pi \sim a^{-12/5} \quad (4.56)$$

ดังนั้น เราสามารถหาพารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับสนามสเกลาร์ π ในกรณีนี้จากนิยาม $d \ln \rho_\pi / d \ln a \equiv -3(1 + \omega_\pi)$ และจากสมการ (4.56) เราพบว่า

$$\frac{d \ln \rho_\pi}{d \ln a} = -\frac{12}{5}$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} -\frac{12}{5} &= -3(1 + \omega_\pi) \\ \omega_\pi &= -\frac{1}{5} \end{aligned} \quad (4.57)$$

แสดงว่าในกรณีนี้พารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับสนามสเกลาร์ π มีค่าคงตัว ไม่ขึ้นอยู่กับสสารที่อยู่บนเบรน

4.3.2 ยุคควบคู่อย่างอ่อน

หลังจากยุคแรกเริ่มเอกภพขยายตัวอย่างต่อเนื่อง และขยายตัวด้วยความเร่งในปัจจุบัน ซึ่งเป็นยุคที่เชื่อว่าการขยายตัวของเอกภพมีสาเหตุมาจากพลังงานมืด ในยุคนี้สนามสเกลาร์ π มีค่าน้อยกว่ายุคควบคู่อย่างเข้ม เราสามารถตัดพจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น ของ π ได้ (เนื่องจากค่า $\pi \ll 1$ เมื่อยกกำลังสองหรือยกกำลังสามยังมีค่าน้อยลง) ดังนั้น ในยุคควบคู่อย่างอ่อน สมการ (4.31) และ (4.32) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{a'}{a} = \pi' \quad (4.58)$$

$$\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \pi'^2 - 3 \frac{a'}{a} \pi' - \pi'' \right) \quad (4.59)$$

เราสามารถหาผลเฉลยของ $\pi(y)$ และ $a(y)$ สำหรับยุคนี้ โดยเริ่มพิจารณาสมการ (4.58) หาอนุพันธ์เทียบกับมิติพิเศษ y จะได้

$$\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \pi'' \quad (4.60)$$

แทนค่า π' , π'' จากสมการ (4.58) และ (4.60) ลงในสมการ (4.59) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 - 3 \left(\frac{a'}{a}\right)^2 - \left(\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{a''}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \right) \\ \frac{d}{dy} \left(\frac{a'}{a}\right) + 2 \left(\frac{a'}{a}\right)^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dy} \left(\frac{a'}{a}\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \right) \\ \therefore \frac{d}{dy} \left(\frac{a'}{a}\right) &= -\frac{5}{2} \left(\frac{a'}{a}\right)^2\end{aligned}$$

จัดรูปใหม่ แล้วทำการหาปริพันธ์ จะได้

$$\frac{a'}{a} = \frac{2}{5} \frac{1}{y} \tag{4.61}$$

จัดรูปแล้วหาปริพันธ์อีกครั้ง จะได้

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a} da &= \frac{2}{5} \int \frac{1}{y} dy \\ \ln a &= \frac{2}{5} \ln y \\ a &= y^{2/5}\end{aligned}$$

ในการทำงานเดียวกันกับที่พิจารณาก่อนหน้านี้ เพื่อให้ตัวประกอบมาตราส่วน $a(y)$ เป็นสัดส่วนกับมวล m_6 ดังนั้นจากผลลัพธ์ที่ได้เราสามารถเขียนได้เป็น

$$a(y) = \left(\frac{12}{5} m_6 |y| \right)^{2/5} \tag{4.62}$$

สำหรับผลเฉลยของ $\pi(y)$ หาได้โดยเริ่มจาก แทนค่าสมการ (4.61) ในสมการ (4.58) จะได้

$$\frac{2}{5} \frac{1}{y} = \pi' \tag{4.63}$$

โดยการหาปริพันธ์ จะได้

$$\pi = \frac{2}{5} \ln y$$

เพื่อให้สนามสเกลาร์ π เป็นสัดส่วนกับมวล m_6 ดังนั้นจากผลลัพธ์ที่ได้เราสามารถเขียนได้เป็น

$$\pi(y) = \frac{2}{5} \ln(m_6 |y|) \quad (4.64)$$

จากผลเฉลยสำหรับ $a(y)$ และ $\pi(y)$ ตามสมการ (4.62) และ (4.64) เราสามารถประมาณค่าความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ในยุคควบคู่อย่างอ่อน โดยตัดพจน์ π'^3 / m_6^2 เนื่องจาก $\pi \ll 1$ ดังนั้น สมการ (4.35) เราจะได้ว่า

$$\rho_\pi \approx M_5^3 \sqrt{a'^2 + a^2 H^2} \left\{ \frac{9}{8m_6^2} \left(2 \left(\frac{aH}{a'} \right)^2 \right) \frac{\pi'^3}{a'} - 6e^{-3\pi/2} \left(\frac{\pi'}{2a'} - \frac{1}{a} \right) \right\} \quad (4.65)$$

พิจารณาพจน์ $e^{-3\pi/2}$ ของสมการ (4.65) แทนค่า π จากสมการ (4.64) จะได้

$$\begin{aligned} e^{-3\pi/2} &= e^{-\frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \ln(m_6 y) \right)} \\ &= (m_6 y)^{-3/5} \end{aligned}$$

จากสมการ (4.62) เราพบว่า

$$y = \frac{5}{12} \frac{a^{5/2}}{m_6} \quad (4.66)$$

ดังนั้น

$$e^{-3\pi/2} = \left(\frac{12}{5} \right)^{3/5} \frac{1}{a^{3/2}} \quad (4.67)$$

จากความสัมพันธ์ $\frac{a'}{a} = \pi'$ ตามสมการ (4.49) และความสัมพันธ์ตามสมการ (4.67) ดังนั้น สมการ (4.65) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\rho_\pi &\approx M_5^3 a \sqrt{\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + H^2} \left\{ \frac{9}{4m_6^2} \left(\frac{aH}{a'}\right)^2 \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \frac{1}{a'} - 6 \left(\left(\frac{12}{5}\right)^{3/5} \frac{1}{a^{3/2}}\right) \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a}\right) \right\} \\
&\approx M_5^3 \sqrt{\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + H^2} \left\{ \frac{9}{4m_6^2} H^2 + 3 \left(\left(\frac{12}{5}\right)^{3/5} \frac{1}{a^{3/2}}\right) \right\} \quad (4.68)
\end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์ตามสมการ (4.61) แทนค่า y ตามสมการ (4.66) จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{a'}{a} &= \frac{2}{5} \frac{1}{\left(\frac{5}{12} \frac{a^{5/2}}{m_6}\right)} \\
&= \frac{24}{25} \frac{m_6}{a^{5/2}} \quad (4.69)
\end{aligned}$$

ดังนั้น จากสมการ (4.69) และสมการ (4.68) เราจะได้ค่าความหนาแน่นพลังงานสำหรับสนามสเกลาร์ π ในยุคควบคู่อย่างอ่อน ดังสมการ

$$\rho_\pi \approx 3M_5^3 \left\{ \left(\frac{12}{5}\right)^{3/5} \frac{1}{a^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{H^2}{m_6^2} \right\} \sqrt{H^2 + \left(\frac{24}{25} \frac{m_6}{a^{5/2}}\right)^2} \quad (4.70)$$

พิจารณาสมการ (4.70) ในกรณีที่ $H \gg m_6 / a^{5/2}$ ความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ จะเขียนได้เป็น

$$\rho_\pi \approx \frac{9}{4} \frac{M_5^3}{m_6^2} H^3 \quad (4.71)$$

เช่นเดียวกับที่เราพิจารณาก่อนหน้านี้ ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ฮับเบิลและตัวประกอบมาตราส่วน เขียนได้เป็น $H \sim a^{-3(1+\omega)/2}$ ดังนั้น ความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์มีความสัมพันธ์กับตัวประกอบมาตราส่วน ดังนี้

$$\rho_\pi \sim a^{-9(1+\omega)/2} \quad (4.72)$$

ความสัมพันธ์ในสมการ (4.72) เราสามารถหาพารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับสนามสเกลาร์ π โดยใช้นิยาม $d \ln \rho_\pi / d \ln a \equiv -3(1 + \omega_\pi)$ เราพบว่า

$$\frac{d \ln \rho_\pi}{d \ln a} = -\frac{9}{2}(1 + \omega)$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} -\frac{9}{2}(1 + \omega) &= -3(1 + \omega_\pi) \\ \omega_\pi &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\omega \end{aligned} \quad (4.73)$$

เราได้รับความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับสนามสเกลาร์ และพารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับองค์ประกอบทั่วไปของเอกภพ จากสมการ (4.64) พบว่า ในกรณีที่พารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับค่าคงตัวจักรวาลวิทยา ซึ่งมีค่าเป็น $\omega = -1$ จะได้ $\omega_\pi = -1$ ด้วย นั่นคือ สนามสเกลาร์ π สามารถที่จะให้ผลที่คล้ายกับค่าคงตัวจักรวาลวิทยา

พิจารณาสมการ (4.70) ถ้า $H \ll m_6 / a^{5/2}$ ความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ จะเขียนได้เป็น

$$\rho_\pi \approx \frac{72}{25} \left(\frac{12}{5} \right)^{3/5} \frac{M_5^3 m_6}{a^4} \quad (4.74)$$

หรือ

$$\rho_\pi \sim a^{-4} \quad (4.75)$$

ดังนั้น เราสามารถหาพารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับสนามสเกลาร์ π ในกรณีนี้จากนิยาม $d \ln \rho_\pi / d \ln a = -3(1 + \omega_\pi)$ และจากสมการ (4.75) เราพบว่า

$$\frac{d \ln \rho_\pi}{d \ln a} = -4$$

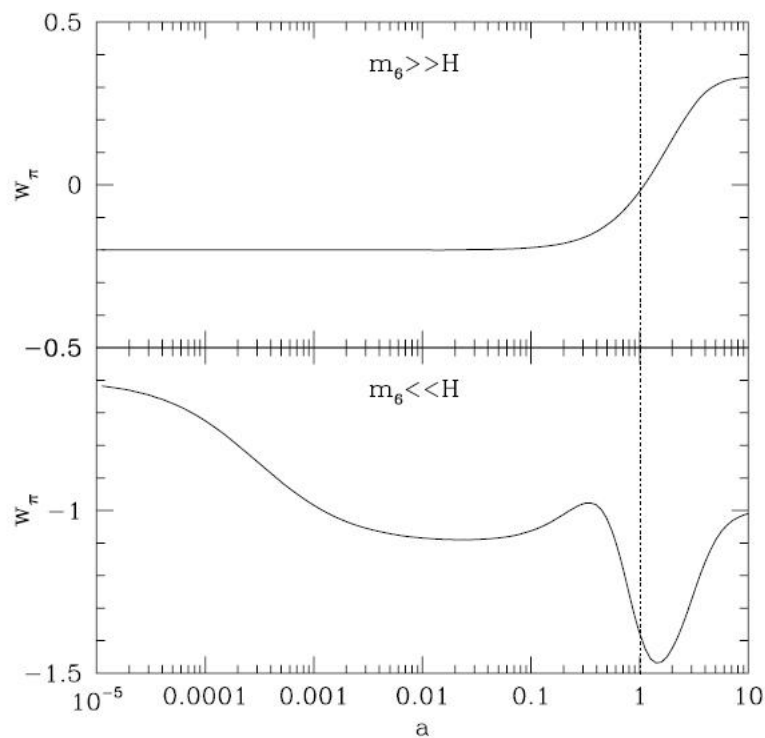
ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} -4 &= -3(1 + \omega_\pi) \\ \omega_\pi &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (4.76)$$

แสดงว่าในกรณีนี้พารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับสนามสเกลาร์ π มีค่าคงตัว และให้ผลเหมือนกับในกรณีของรังสี ไม่ขึ้นกับสสารที่อยู่บนเบรน

4.3.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

จากสมการการเคลื่อนที่ของบัลค์ตามสมการ (4.31) และ (4.32) ทำให้เราได้สมการคล้ายฟรีดมันน์ ตามสมการ (4.34) และ (4.35) ซึ่งเป็นสมการที่ไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยตรง เราจึงได้ใช้การประมาณค่า โดยแบ่งออกเป็น 2 ช่วง คือ ยุคควบคู่อย่างเข้ม และ ยุคควบคู่อย่างอ่อน ตามหัวข้อที่ผ่านมา ในการดูแนวโน้มผลเฉลยโดยรวมต้องใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขในการหาผลเฉลย จาก การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของ นิชานต์ อาการ์วาล (Nishant Agarwal), ราเชล บีน (Rachel Bean), จัสติน คอวรี (Justin Khoury) และมาร์ค ทรอดเดน (Mark Trodden) (2010)[34] ได้ผลดังภาพที่ 4.1



ภาพที่ 4.1: ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ผลเฉลยของสมการคล้ายฟรีดมันน์สำหรับสนามสเกลาร์ π ตามสมการ (4.35) (ภาพจาก [34])

จากผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขดังภาพที่ 4.1 พบว่า สนามสเกลาร์ π สามารถให้ผลคล้ายกับพลังงานมืด กล่าวคือ ในกรณีที่ $m_6 \ll H$ ในยุคควบคู่อย่างเข้ม หรือยุคที่รังสี และสสารมีอิทธิพลต่อการขยายตัวของเอกภพ ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ ω_π จะลู่เข้าสู่ -0.6 ในช่วงแรก และต่อมาลู่เข้าสู่ -1.1 และในยุคควบคู่อย่างอ่อน หรือยุคที่พลังงานมืดมีอิทธิพลต่อการขยายตัวของ เอกภพ ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ ω_π จะลู่เข้าสู่ -1 ส่วนในกรณีที่ $m_6 \gg H$ ในยุคควบคู่อย่างเข้ม

ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ $\omega_\pi = -0.2$ และ ในยุคควบคู่อย่างอ่อน ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ $\omega_\pi = 1/3$

จากการหาผลเฉลยโดยการประมาณและการวิเคราะห์เชิงตัวเลข พบว่า สนามสเกลาร์ π ให้ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะเป็นลบ (-) ในยุคที่สสารมีอิทธิพลต่อการขยายตัวของเอกภพ ($m_0 \ll H$) ดังนั้นจึงมีความเป็นไปได้ที่การขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพในปัจจุบันสามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น โดยไม่ต้องใช้ค่าคงตัวจักรวาลวิทยาตามแบบจำลองแลมดาซีดีเอ็ม (Λ CDM model)

แต่อย่างไรก็ตามจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขดังภาพที่ 4.1 พบว่า เมื่อ $a_0 = 1$ (ปัจจุบัน) ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ $\omega_\pi \approx -1.4$ เป็นค่าที่แตกต่างจากผลการสังเกตการณ์ในปัจจุบัน ซึ่งค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ $\omega_0 \approx -1.09 \pm 0.17$ [38] แสดงว่าแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่นยังต้องมีการพัฒนาแบบจำลองต่อไปเพื่อให้ได้ผลตรงกับผลการสังเกตการณ์ในปัจจุบัน โดยอาจต้องพิจารณาผลของมวลสารที่อยู่บนเบรน ซึ่งอาจจะให้สมการการเคลื่อนที่แตกต่างจากสมการ (4.31) และ (4.32) หรือพิจารณาผลของการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างเบรนกับบัลค์ ซึ่งอาจสามารถให้ผลการทดลองที่ใกล้เคียงกับผลการสังเกตการณ์ในปัจจุบันมากขึ้น

บทที่ 5

สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุป และอภิปราย

ข้อมูลจากการสังเกตซูเปอร์โนวาชนิด 1a และข้อมูลจากการสังเกตการณ์ทางจักรวาลวิทยาอื่นๆ พบว่าปัจจุบันเอกภพกำลังขยายตัวด้วยความเร่ง มีหลายทฤษฎีที่พยายามอธิบายสาเหตุของการขยายตัวด้วยความเร่งของเอกภพ ได้แก่ แบบจำลองสนามสเกลาร์ แบบจำลองความโน้มถ่วงดัดแปลง เช่น เอฟอาร์ กราวิตี และแบบจำลองมิติพิเศษ (extra dimensional models) เช่น แบบจำลองโลกแบบเบรน ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ได้ทำการศึกษาแบบจำลองโลกแบบเบรน โดยมีสมมติฐานให้โลก 4 มิติที่เราอาศัยอยู่ มีลักษณะเป็นโลกแบบเบรน เรียกว่า 3-เบรน ผังตัวอยู่ในบัลค์ที่มีจำนวนมิติมากกว่า และอนุภาคต่างๆ ในแบบจำลองมาตรฐานถูกขังไว้บนเบรน ส่วนความโน้มถ่วงสามารถหลุดออกไปในมิติพิเศษ

แบบจำลองโลกแบบเบรนแบบจำลองแรกคืออาร์เอส 1 และ อาร์เอส 2 เป็นแบบจำลองที่เพิ่มมิติพิเศษขึ้นมาอีกหนึ่งมิติ เป็นกาลอวกาศ 5 มิติ ต่อมาได้รับการพัฒนาให้อยู่ในรูปทั่วไปมากยิ่งขึ้นด้วยแบบจำลอง ดีจีพี แต่แบบจำลอง ดีจีพี มีปัญหาเรื่องความไม่เสถียร หลังจากการรบกวนสมมูลและมีปัญหาเกี่ยวกับภาวะเอกฐานเปลือย ที่ระยะห่างจากเบรนระยะหนึ่ง ดังที่เราได้วิเคราะห์ในบทที่ 3 เพื่อแก้ปัญหาที่พบในแบบจำลอง ดีจีพี ได้มีการนำเสนอความโน้มถ่วงแบบลดหลั่น ซึ่งเป็นแบบจำลองที่พิจารณากาลอวกาศ 6 มิติ เรียกว่า บัลค์ 6 มิติ ประกอบไปด้วย 4-เบรน ผังตัวอยู่ใน 4-เบรนมี 3-เบรน ผังตัวอยู่ลดหลั่นเป็นลำดับ เบรนแต่ละแผ่นมีริชชีสเกลาร์สำหรับอธิบายเรขาคณิตของตัวเอง แนวความคิดของความโน้มถ่วงแบบลดหลั่นนี้ได้ถูกนำไปศึกษาวิวัฒนาการของเอกภพ เรียกว่า แบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น เป็นแบบจำลองที่พยายามอธิบายการเปลี่ยนแปลงของเอกภพในแต่ละช่วงเวลา

แบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น เป็นแบบจำลองที่ศึกษาโลกแบบเบรน 5 มิติที่เป็นตัวแทน ของโลกแบบเบรน 6 มิติ โดยใช้ทฤษฎีสเกลาร์เท็นเซอร์ของความโน้มถ่วง ซึ่งเป็นเทคนิคการกระจายริชชีสเกลาร์ 6 มิติ (R_6) ออกพิจารณาเป็น 2 ส่วน คือ ริชชีสเกลาร์ 5 มิติ (R_5) ซึ่งเป็นความโน้มถ่วงภายใน รวมกับเท็นเซอร์ความโค้งภายนอก ($K_{\mu\nu}$) หลักการนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้สมการเกาส์-โคคซ์ซี ดังรายละเอียดในบทที่ 3 ดังนั้นเราใช้เทคนิคนี้ในการศึกษาโลกแบบเบรน 5 มิติที่เป็นตัวแทนของโลกแบบเบรน 6 มิติในแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น การศึกษาวิวัฒนาการของเอกภพตามแบบจำลองนี้ ศึกษาจากสนาม สเกลาร์ π ซึ่งสามารถแสดงพฤติกรรมคล้ายกับ

พลังงานมืด ทำให้แบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่นนี้มีความน่าสนใจ ซึ่งอาจสามารถอธิบายการขยายตัวของเอกภพด้วยความเร่งในปัจจุบันได้

จากการศึกษาวิวัฒนาการของเอกภพในแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น พบว่า เราสามารถหาสมการคล้ายฟรีดแมนน์ ได้ตั้งสมการ (4.31) และสมการ (4.32) ตลอดจนความหนาแน่นพลังงานของสนามสเกลาร์ (ρ_π) ตามสมการ (4.35) ซึ่งแสดงให้เห็นว่า แบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่นได้ให้ข้อมูลที่เป็นองค์ความรู้ใหม่ทางฟิสิกส์ ในการอธิบายข้อมูลที่ได้จากสมการนี้ เราไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวเชิงการวิเคราะห์ได้โดยตรง จึงใช้การประมาณโดยแบ่งพิจารณาออกเป็น 2 ช่วงเวลา คือ ยุคควบคู่อย่างเข้ม และ ยุคควบคู่อย่างอ่อน และใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขในการดูแนวโน้มผลเฉลยโดยรวม

ในยุคควบคู่อย่างเข้ม เป็นยุคที่รังสีและสสารมีอิทธิพลต่อการขยายตัวของเอกภพ สนามสเกลาร์ π ถูกควบคู่อย่างรุนแรง จึงยังไม่มีอิทธิพลมากนักต่อการขยายตัวของเอกภพ จากการวิเคราะห์พบว่า ในยุคที่สสารหรืออนุภาคต่างๆ มีอิทธิพลต่อการขยายตัวของเอกภพ ($\omega = 0$) พารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับสนามสเกลาร์ มีค่าเป็น $\omega_\pi = -1.1$ แสดงว่าสนามสเกลาร์สามารถที่จะเป็นพลังงานมืด ที่เชื่อว่าเป็นสาเหตุที่ทำให้เอกภพขยายตัวด้วยความเร่ง และในยุคควบคู่อย่างอ่อน หรือยุคปัจจุบัน เอกภพมีอุณหภูมิต่ำมากและกำลังขยายตัวด้วยความเร่ง สนามสเกลาร์เริ่มมีอิทธิพลต่อการขยายตัวของเอกภพ จากการวิเคราะห์พบว่า ในกรณีที่พารามิเตอร์ของสมการสถานะสำหรับค่าคงตัวจักรวาลวิทยา ซึ่งมีค่าเป็น $\omega = -1$ จะได้ $\omega_\pi = -1$ ด้วย นั่นคือ สนามสเกลาร์ π สามารถที่จะให้ผลที่คล้ายกับค่าคงตัวจักรวาลวิทยา

จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของ นิซันต์ อาการ์วาล, ราเชล ปีน, จัสติน คอวี และ มาร์ค ทรอดเดน ในปี ค.ศ. 2010 [34] พบว่า สนามสเกลาร์ π สามารถให้ผลคล้ายกับพลังงานมืด กล่าวคือ ในกรณีที่ $m_0 \ll H$ ในยุคควบคู่อย่างเข้ม ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ ω_π จะลู่เข้าสู่ -0.6 ในช่วงแรก และต่อมาลู่เข้าสู่ -1.1 และในยุคควบคู่อย่างอ่อน ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ ω_π จะลู่เข้าสู่ -1 ส่วนในกรณีที่ $m_0 \gg H$ ในยุคควบคู่อย่างเข้ม ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ $\omega_\pi = -0.2$ และ ในยุคควบคู่อย่างอ่อน ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ $\omega_\pi = 1/3$ แต่อย่างไรก็ตาม จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขนี้พบว่า เมื่อ $a_0 = 1$ ค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ $\omega_\pi \approx -1.4$ เป็นค่าที่แตกต่างจากผลการสังเกตการณ์ในปัจจุบัน ซึ่งค่าพารามิเตอร์ของสมการสถานะ $\omega_0 \approx -1.09 \pm 0.17$ [38] แสดงว่าแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่นยังต้องมีการพัฒนาแบบจำลองต่อไปเพื่อให้ได้ผลตรงกับผลการสังเกตการณ์ในปัจจุบัน

จากการศึกษาแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น สรุปได้ว่า แบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่นนี้ได้ให้ข้อมูลและแนวคิดใหม่ทางฟิสิกส์ จากการวิเคราะห์ด้วยการประมาณและการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่า สนามสเกลาร์ ได้สนับสนุนการมีอยู่ของพลังงานมืด และผลเฉลยในรูปแบบสมการฟรีดมานน์ ให้ผลแตกต่างจากแบบจำลองค่าคงตัวจักรวาลวิทยา ผลจากการศึกษานี้สามารถอธิบายการขยายตัวของเอกภพด้วยความเร่ง โดยไม่ต้องใช้ค่าคงตัวจักรวาลวิทยา

5.2 ข้อเสนอแนะและการศึกษาในปัจจุบัน

แบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น เป็นแบบจำลองที่มีแนวคิดในการอธิบายการขยายตัวของเอกภพที่น่าสนใจ ในปัจจุบันได้มีการนำแนวคิดและทฤษฎีไปศึกษาผลด้านอื่นๆ ของแบบจำลองดังต่อไปนี้

คลอเดีย เดอ แรห์ม (Claudia de Rham), จัสติน คอว์รี และ แอนดรูว์ เจ. ทอลเลย์ (Andrew J. Tolley) (2010) [31] ได้เสนอบทความงานวิจัยเรื่อง “Cascading Gravity is Ghost Free” เป็นบทความที่นำเสนอผลการวิเคราะห์เสถียรภาพที่ถูกรบกวน (perturbative stability analysis) ของแบบจำลองความโน้มถ่วงแบบลดหลั่นใน 6 มิติ โดยทำการวิเคราะห์ผลการรบกวนสมมูล 3 รูปแบบ ได้แก่ การรบกวนแบบเทนเซอร์และเวกเตอร์ (tensor and vector perturbations) และการรบกวนแบบสเกลาร์ (scalar perturbations) ผลการศึกษาพบว่า เมื่อกำหนดให้เบรนมีความตึงสูง กล่าวคือ $\lambda \geq \frac{2}{3} m_0^2 M_4^2$ เมื่อ λ คือ ความตึงของเบรน แล้วเบรนจะไม่มีปัญหาในเรื่องของการรักษาสมมูล หรือปราศจากโกสต์ (ghost free)

นิขานต์ อาการ์วาล, ราเชล บิน, จัสติน คอว์รี และ มาร์ค ทรอดเดน (2011) [39] ได้เสนอบทความงานวิจัยเรื่อง “Screening bulk curvature in the presence of large brane tension” เป็นบทความที่นำเสนอผลการวิเคราะห์ผลเฉลยในแบบจำลองความโน้มถ่วงแบบลดหลั่น ด้วยแอกชัน 5 มิติ ที่เป็นตัวแทนของกาลอวกาศ 6 มิติ ซึ่งเป็นการหาผลเฉลยโดยใช้กลไกคัดกรอง (screening mechanism) ผลการศึกษาพบว่า ผลจากการรบกวน ของแอกชันที่มีค่าความตึงของเบรนเป็นบวก แบบจำลองความโน้มถ่วงแบบลดหลั่นจะมีปัญหาความไม่มีเสถียรแบบโกสต์ แต่ปัญหานี้จะไม่เกิดขึ้นเมื่อเรากำหนดให้ค่าความตึงของเบรนมีค่าเป็นลบ

จากการศึกษาแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น พบว่าเป็นแบบจำลองที่ให้ผลที่น่าสนใจอีกแบบจำลองหนึ่งในการอธิบายวิวัฒนาการของเอกภพ แต่อย่างไรก็ตามแบบจำลองนี้ยังให้ผลที่แตกต่างจากผลการสังเกตการณ์ในปัจจุบันเล็กน้อย ดังนั้นเพื่อให้ได้ผลตรงกับผลการสังเกตการณ์ในปัจจุบันจำเป็นต้องพัฒนาแบบจำลองให้ดีขึ้น แนวทางหนึ่งในการศึกษาและพัฒนาแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น ที่ผู้วิจัยจะศึกษาต่อไปในอนาคต คือ การพิจารณาผลของมวลสารที่อยู่บนเบรน ซึ่งอาจจะให้สมการการเคลื่อนที่แตกต่างจากสมการ (4.23) และ (4.29) และเพิ่มการพิจารณาผลของการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างเบรนกับบัลค์ ซึ่งอาจสามารถอธิบายวิวัฒนาการของเอกภพได้ใกล้เคียงกับผลการสังเกตการณ์ในปัจจุบันมากขึ้น

รายการอ้างอิง

- [1] Kowalski, M., et al. Improved cosmological constraints from new, old and combined supernova datasets. *Astrophys.J.* 686 (2008): 749-778. [arXiv:astro-ph/0804.4142].
- [2] Komatsu, E., et al. Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations; cosmological interpretation. *Astrophys.J.Suppl.* 180 (2009): 330-376. [arXiv:astro-ph/0803.0547].
- [3] Tegmark, M., et al. Cosmological constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies. *Phys.Rev.* D74 (2006): 123507. [arXiv:astro-ph/0608632].
- [4] Copeland, E.J., Sami, M., and Tsujikawa, S. Dynamics of dark energy. *Int.J.Mod.Phys.* D15 (2006): 1753-1936. [arXiv:hep-th/0603057v3].
- [5] Randall, L., and Sundrum, R. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys.Rev.Lett.* 83 (1999): 3370-3373. [arXiv:hep-ph/9905221].
- [6] Randall, L., and Sundrum, R. An alternative to compactification. *Phys.Rev.Lett.* 83 (1999): 4690-4693. [arXiv:hep-th/9906064].
- [7] Dvali, G.R., Gabadadze, G., and Porrati, M. 4D gravity on a brane in 5D Minkowski Space. *Phys.Rev.Lett.* B485 (2000): 208-214. [arXiv: hep-th/0005016].
- [8] Dubovsky, S.L., and Rubakov, V.A., Brane-induced gravity in more than one extra dimensions; violation of equivalence principle and ghost. *Phys.Rev.* D67 (2003): 104014. [arXiv:hep-th/0212222].
- [9] Gabadadze, G., and Shifman, M. Softly massive gravity. *Phys.Rev.* D69 (2004): 124032. [arXiv:hep-th/0312289].
- [10] Dvali, G.R., Gabadadze, G., and Shifman, M. Diluting cosmological constant in infinite volume extra dimensions. *Phys.Rev.D67* (2003): 044020. [arXiv:hep-th/0202174].
- [11] Carroll, S.M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* Chicago: Addison-Wesley, 2004.
- [12] Hinshaw, G., et al. Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: temperature analysis. *Astrophys.J.Suppl.* 170 (2007): 288. [arXiv:astro-ph/0603451v2].

- [13] Ryden, B. Introduction to Cosmology. San Francisco: Addison-Wesley, 2003.
- [14] Jackson, J.D. Classical Electrodynamics. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [15] Kaluza, T. Sitzungsber.Preuss.Akad. Wiss.Berlin (Math.Phys.) K1 (1921): 966, Klein, O. Z. Phys. 37 (1926): 895, Cited in Brax, P., et. al. Brane world cosmology. Rep.Prog.Phys. 67 (2004): 2183-2232. [arXiv:hep-th/0404011].
- [16] Brax, P., et. al. Brane world cosmology. Rep.Prog.Phys. 67 (2004): 2183-2232. [arXiv:hep-th/0404011].
- [17] Polchinski, J. String theory, two volumes, Cambridge University Press, 1999.
- [18] Maia, D. Brane-worlds and cosmology. Inquiring the Universe Frontiers Group. (2004). [arXiv:gr-qc/0401032].
- [19] Maartens, R., Koyama, K. Brane-world gravity. Living Rev.Relativity, 13 (2010): 5. [arXiv: hep-th/1004.3962v2].
- [20] Perez-Lorenzana, A. An introduction to the brane world. (2004). [arXiv:hep-ph/0406279v2].
- [21] Hoyle, C.D., et al. Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law. Phys.Rev. D70 (2004): 042004. [arXiv:hep-ph/0405262].
- [22] Gopakumar, P., and Vijayagovindan, G.V. Brane world dynamics and adiabatic matter creation. Int.J.Mod.Phys. D15 (2006): 321-334. [arXiv:astro-ph/0603666v2].
- [23] Wands, D. Brane-world cosmology. ERE2005 proceeding, the XXVIII Spanish Relativity Meeting. Oviedo, Spain, (2006). [arXiv:gr-qc/0601078].
- [24] Brax, P. and Van de Bruck, C. Cosmology and brane worlds; a review. Class.Quant.Grav. 20 (2003): R201-R232. [arXiv:hep-th/0303095v1].
- [25] Coley, A.A. The dynamics of brane-world cosmological models. Einstein Centennial Review Article (2004). [arXiv:astro-ph/0504226].
- [26] Binetruy, P., Deffayet, C., and Langlois, D. Non-conventional cosmology from a brane-universe. Nucl.Phys. B565 (2000): 269-287. [arXiv:hep-th/9905012].
- [27] Horava, P., and Witten, E. Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary. Nucl.Phys. B475 (1996): 94-114. [arXiv:hep-th/9603142].

- [28] Saaidi, Kh., and Mohammadi, A. Brane cosmology with generalized Chaplygin gas in the bulk. Mod.Phys.Lett. A25 (2010): 3061-3068. [arXiv: gr-qc/1006.1847v1].
- [29] Cline, J.M. Brane cosmology. PoSstringsLHC: 011 (2006). [arXiv: hep-th/0704.2198].
- [30] Rham, C., et al. Cascading DGP. Phys.Rev.Lett. 100 (2008): 251603. [arXiv: hep-th/0711.2072].
- [31] Rham, C., Khoury, J., and Tolley, A.J. Cascading gravity is ghost Free. Phys.Rev. D 81 (2010): 124027. [arXiv: hep-th/1002.1075].
- [32] Rham, C., Khoury, J. and Tolley, A.J. Flat 3-brane with tension in cascading gravity. Phys.Rev.Lett. 103 (2009): 161601. [arXiv:hep-th/0907.0473].
- [33] Minamitsuji, M. Self-accelerating solutions in the cascading DGP braneworld. Phys.Lett. B684 (2010): 92-95. [arXiv:gr-qc/0806.2390v3].
- [34] Agarwal, N., Bean, R., Khoury, J., and Trodden, M. Cascading cosmology. Phys.Rev. D81 (2010): 084020. [arXiv:hep-th/0912.3798v2].
- [35] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G.R. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. Phys.Rev.Lett. B429 (1998): 263-272. [arXiv: hep-ph/9803315]
- [36] York, J.W. Phys.Rev.Lett. 28 (1972): 1082.
- [37] Gibbons, G.W., and Hawking, S.W. Phys. Rev. D15 (1977): 2752.
- [38] Blake, C., et al. The WiggleZ dark energy survey: mapping the distance-redshift relation with baryon acoustic oscillations. MNRAS in press. (2011). [arXiv: astro-ph.CO/1108.2635].
- [39] Agarwal, N., Bean, R., Khoury, J. and Trodden, M. Screening bulk curvature in the presence of large brane tension. Phys.Rev. D83 (2011): 124004. [arXiv: hep-th/1102.5091].
- [40] Rham, C., Hofmann, S., Khoury, J., and Tolley, A.J. Cascading gravity and degravitation. JCAP 0802 (2008): 011. [arXiv: hep-th/0712.2821].
- [41] Guarnizo, A., Castaneda, L., and Tejeiro, J.M. Boundary Term in Metric f(R) Gravity: Field Equations in the Metric Formalism. Gen.Rel.Grav. 42 (2010): 2713-2728. [arXiv: gr-qc/ 1002.0617].

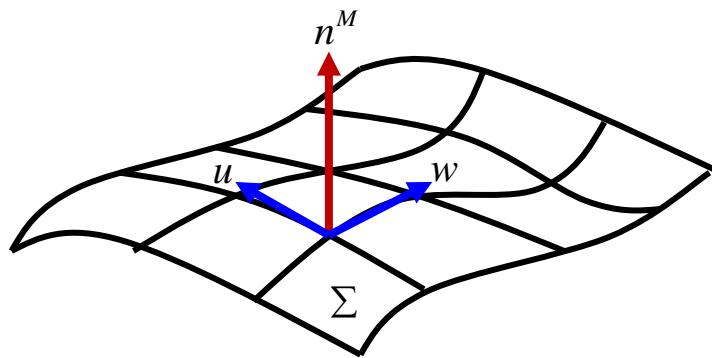
ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การหาอนุพันธ์ของสนามเวกเตอร์สัมผัส

ก.1 อินดิเคเตอร์

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาสมบัติของพื้นผิวไฮเปอร์ โดยทั่วไปแล้วในการอธิบายเรขาคณิตของพื้นผิวไฮเปอร์ มักจะกล่าวถึงเวกเตอร์สัมผัส (tangent vector) และนอร์มอลเวกเตอร์ เพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้นเราสามารถเขียนภาพของเวกเตอร์ทั้งสองชนิดบนพื้นผิวไฮเปอร์ ดังภาพ



ภาพที่ 1 แสดงพื้นผิวไฮเปอร์ที่ประกอบไปด้วยเวกเตอร์สัมผัส u, w และเวกเตอร์ตั้งฉาก n^M

เราพิจารณาพื้นผิวไฮเปอร์ Σ โดยมีเทนเซอร์ $A^{MN\dots}$ เป็นเทนเซอร์ที่อยู่บนพื้นผิวไฮเปอร์ และมีเฉพาะองค์ประกอบที่สัมผัสกับพื้นผิวไฮเปอร์ ดังนั้น สามารถเขียนองค์ประกอบของเทนเซอร์นี้ได้ดังนี้

$$A^{MN\dots} = A^{\mu\nu\dots} e_{\mu}^M e_{\nu}^N \quad (1)$$

เมื่อ $e_{\mu}^M = \partial x^M / \partial y^{\mu}$ คือเวกเตอร์ฐาน บนพื้นผิวไฮเปอร์ Σ สมการ (1) จะมีสมบัติที่ว่า $A^{MN\dots} n_M = A^{MN\dots} n_N = 0$ เมื่อ n_M คือ นอร์มอลเวกเตอร์ ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่า $A^{MN\dots}$ เป็นเทนเซอร์สัมผัส (tangent tensor) บนพื้นผิวไฮเปอร์

ในที่นี้เรากล่าวถึงอินดิเมตริก บนพื้นผิวไฮเปอร์ เป็นเมตริกที่สำคัญมากในการศึกษากาลอวกาศที่มีมิติพิเศษ อินดิเมตริกทำหน้าที่ในการฉายเทนเซอร์ลงมาสัมพันธ์กับพื้นผิวไฮเปอร์ Σ ซึ่งนิยามโดย

$$h^{MN} \equiv h^{\mu\nu} e_\mu^M e_\nu^N = g^{MN} - \sigma n^M n^N \quad (2)$$

เมื่อ $\sigma = n_M n^M = +1$ สำหรับพื้นผิวของเวลา
 $= -1$ สำหรับพื้นผิวของอวกาศ

จากนิยามแล้วชัดเจนว่า $h_p^M h_{q\dots}^N T^{pq\dots}$ สัมพันธ์กับพื้นผิวไฮเปอร์

การฉายเทนเซอร์ ทำให้เราสามารถเขียนองค์ประกอบของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$A_{MN\dots} e_\mu^M e_{\nu\dots}^N = A_{\mu\nu\dots} = h_{\mu\rho} h_{\nu\sigma\dots} A^{\rho\sigma\dots} \quad (3)$$

โดยเทนเซอร์ $A^{\mu\nu\dots}$ เป็นส่วนหนึ่งของเทนเซอร์ $A^{MN\dots}$ โดยเราสามารถยกดัชนีขึ้นหรือลงด้วยอินดิเมตริก $h_{\mu\nu}$ และ $h^{\mu\nu}$ ตามลำดับ จากสมการ (1) และ (3) แสดงให้เห็นว่า เราสามารถเปลี่ยนกลับไปกลับมาได้ระหว่างเทนเซอร์สัมพันธ์ $A^{MN\dots}$ และเทนเซอร์สัมพันธ์บนพื้นผิวไฮเปอร์ $A^{\mu\nu\dots}$

ในการศึกษาสมบัติของอินดิเมตริก เริ่มจากเวกเตอร์ทั่วไป V^M ในพื้นผิวแมนิโฟลด์ $T_p M$ พบว่า h_{MN} สามารถทำการฉายเวกเตอร์นี้ให้สัมพันธ์กับพื้นผิวไฮเปอร์ได้ นั่นคือ เวกเตอร์นี้ตั้งฉากกับ n^M

$$\begin{aligned} (h_{MN} V^M) n^N &= g_{MN} V^M n^N - \sigma n_M n_N V^M n^N \\ &= V^M n_M - \sigma^2 V^M n_M \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

เมื่ออินดิเมตริกกระทำต่อ 2 เวกเตอร์ใดๆ V^M และ W^N ที่สัมพันธ์กับพื้นผิวไฮเปอร์ การฉายของเทนเซอร์นี้จะเหมือนกันเมตริกเทนเซอร์ทั่วไป ดังนี้

$$\begin{aligned} h_{MN} V^M W^N &= g_{MN} V^M W^N - \sigma n_M n_N V^M W^N \\ &= g_{MN} V^M W^N \end{aligned} \quad (5)$$

สมบัติที่สำคัญอีกอย่างของอินดิวิเมตริก คือ สมบัติไอดีมโปเทนต์ (idempotent) กล่าวคือ การทำการฉายสองครั้งจะให้ผลเท่ากับทำการฉายครั้งเดียว ดังแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 h^M_N h^N_P &= (\delta^M_N - \sigma n^M n_N) (\delta^N_P - \sigma n^N n_P) \\
 &= \delta^M_P - \sigma n^M n_P - \sigma n^M n_P + \sigma^3 n^M n_P \\
 &= \delta^M_P - \sigma n^M n_P \\
 \therefore h^M_N h^N_P &= h^M_P \tag{6}
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ h_{MN} บางครั้งเรียกว่า รูปแบบพื้นฐานรูปแบบที่หนึ่ง (the first fundamental form) ของพื้นผิวไฮเปอร์

ก.2 อนุพันธ์โควาเรียนท์ภายใน

เราสามารถนิยามอนุพันธ์โควาเรียนท์ภายใน (intrinsic covariant derivative) ของเวกเตอร์สนามบนพื้นผิวไฮเปอร์ A_μ ด้วยการฉายอนุพันธ์โควาเรียนท์ทั่วไป $\nabla_M A_N$ ลงบนพื้นผิวไฮเปอร์

$$\hat{\nabla}_\mu A_\nu = \nabla_M A_N e_\mu^M e_\nu^N \tag{7}$$

เมื่อ $\hat{\nabla}_\mu$ คืออนุพันธ์โควาเรียนท์ที่อยู่บนพื้นผิวไฮเปอร์ เพื่อพิสูจน์สมบัตินี้ เราเริ่มจากพิจารณาด้านขวามือของสมการ (7)

$$\begin{aligned}
 \nabla_M A_N e_\mu^M e_\nu^N &= \nabla_m (A_N e_\nu^N) e_\mu^M - A_N (\nabla_M e_\nu^N) e_\mu^M \\
 &= \partial_M A_\nu e_\mu^M - A_N h^{NP} \nabla_M e_{P\nu} e_\mu^M \\
 &= \frac{\partial A_\nu}{\partial x^M} \frac{\partial x^M}{\partial y^\mu} - A^\rho e_\rho^P \nabla_M e_{P\nu} e_\mu^M \\
 &= \partial_\mu A_\nu - e_\rho^P \nabla_M e_{P\nu} e_\mu^M A^\rho \\
 &= \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\rho\mu\nu} A^\rho
 \end{aligned}$$

เมื่อเรานิยาม

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = e_\rho^P \nabla_M e_{\mu P} e_\nu^M \tag{8}$$

ดังนั้นสมการ (7) จะทำให้เราได้สมบัติดังนี้

$$\hat{\nabla}_{\mu} A_{\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \Gamma_{\rho\mu\nu} A^{\rho} \quad (9)$$

นี่คืออนุพันธ์โควาเรียนท์บนพื้นผิวไฮเปอร์

จากสัญลักษณ์คอนเนคชัน (connection) ที่ถูกนิยามโดยสมการ (8) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า สัญลักษณ์นี้สามารถหาค่าได้จากอินดิเคเตอร์ (ในการทำงานเดียวกับสัญลักษณ์คริสทอฟเฟล ที่นิยามจากเมตริกเทนเซอร์) เนื่องจากเรามีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = e_{\rho}^M \nabla_N e_{\mu M} e_{\nu}^N$$

เวกเตอร์มูลฐานมีสมบัติการแปลงลี (Lie transport) ดังนี้

$$(\nabla_M e_{\mu}^N) e_{\nu}^M = (\nabla_M e_{\nu}^N) e_{\mu}^M \quad (10)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2} (e_{\rho}^M \nabla_N e_{\mu M} e_{\nu}^N + e_{\rho}^M \nabla_N e_{\nu M} e_{\mu}^N) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_N (e_{\rho}^M e_{\mu M}) e_{\nu}^N - e_{\mu M} \nabla_N e_{\rho}^M e_{\nu}^N + \nabla_N (e_{\rho}^M e_{\nu M}) e_{\mu}^N - e_{\nu M} \nabla_N e_{\rho}^M e_{\mu}^N) \end{aligned}$$

จากสมบัติ $e_{\rho}^M e_{\mu M} = h_{\mu\sigma} e_{\rho}^{\sigma} e_{\mu}^{\sigma} = h_{\mu\sigma} \delta_{\rho}^{\sigma} = h_{\rho\mu}$ ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_N h_{\rho\mu} e_{\nu}^N + \partial_N h_{\rho\nu} e_{\mu}^N - e_{\mu M} \nabla_N e_{\rho}^M e_{\nu}^N - e_{\nu M} \nabla_N e_{\rho}^M e_{\mu}^N) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\mu} h_{\rho\nu} + \partial_{\nu} h_{\rho\mu} - \nabla_N (e_{\mu M} e_{\nu}^M) e_{\rho}^N) \\ \therefore \Gamma_{\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_{\mu} h_{\rho\nu} + \partial_{\nu} h_{\rho\mu} - \partial_{\rho} h_{\mu\nu}) \quad (11) \end{aligned}$$

สมการ (11) แสดงถึงสมบัติของสัญลักษณ์คอนเนคชันบนพื้นผิวไฮเปอร์ และยังพบอีกว่า

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}_\rho h_{\mu\nu} &= \nabla_P h_{MN} e_\rho^P e_\mu^M e_\nu^N \\
&= \nabla_P (g_{MN} - \sigma n_M n_N) e_\rho^P e_\mu^M e_\nu^N \\
&= -\sigma (n_N \nabla_P n_M + n_M \nabla_P n_N) e_\rho^P e_\mu^M e_\nu^N \\
\therefore \hat{\nabla}_\rho h_{\mu\nu} &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

(เนื่องจาก $n_M e_\mu^M = 0$)

ก.3 เทนเซอร์ความโค้งภายนอก

จากที่เราได้ศึกษาในหัวข้อที่ผ่านมา ปริมาณ $\hat{\nabla}_\mu A_\nu = \nabla_M A_N e_\mu^M e_\nu^N$ คือองค์ประกอบแนวสัมผัส (tangential component) ของเวกเตอร์ $\nabla_M A^N e_\mu^M$ เราสามารถที่จะหาองค์ประกอบแนวฉาก (normal component) ของเวกเตอร์นี้ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\nabla_M A^N e_\mu^M &= g_P^N \nabla_M A^P e_\mu^M \\
&= (h_P^N + \sigma n^N n_P) \nabla_M A^P e_\mu^M \\
&= (h^{\rho\sigma} e_\rho^N e_{\sigma P} + \sigma n^N n_P) \nabla_M A^P e_\mu^M \\
&= h^{\rho\sigma} (\nabla_M A_P e_\sigma^P e_\mu^M) e_\rho^N + \sigma (n_P \nabla_M A^P e_\mu^M) n^N \\
&= h^{\rho\sigma} \hat{\nabla}_\mu A_\sigma e_\rho^N + \sigma (\nabla_M (n_P A^P) e_\mu^M n^N - A^P \nabla_M n_P e_\mu^M n^N)
\end{aligned}$$

จากสมบัติที่ว่า n_P ตั้งฉากกับ A^P ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\nabla_M A^N e_\mu^M &= h^{\rho\sigma} \hat{\nabla}_\mu A_\sigma e_\rho^N - \sigma A^P \nabla_M n_P e_\mu^M n^N \\
&= h^{\rho\sigma} \hat{\nabla}_\mu A_\sigma e_\rho^N - \sigma A^P \nabla_M n_P e_\mu^P e_\mu^M n^N \\
&= \hat{\nabla}_\mu A^P e_\rho^N - \sigma A^P (\nabla_M n_P e_\rho^P e_\mu^M) n^N
\end{aligned}$$

ดังนั้นเราจะได้เทนเซอร์ ที่นิยามโดย

$$K_{\mu\nu} = \nabla_M n_N e_\mu^M e_\nu^N \tag{13}$$

เทนเซอร์นี้เรียกว่า เทนเซอร์ความโค้งภายนอก หรือ รูปแบบพื้นฐานรูปแบบที่สอง ของพื้นผิวไฮเปอร์ Σ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\nabla_M A^N e_\mu^M = \hat{\nabla}_\mu A^N e_\nu^N - \sigma A^\nu K_{\mu\nu} n^N \quad (14)$$

ซึ่งพบว่า $\nabla_M A^N$ สามารถให้องค์ประกอบที่สัมพันธ์กับพื้นผิวไฮเปอร์ ในขณะที่ $-\sigma A^\nu K_{\mu\nu}$ แสดงถึงองค์ประกอบที่ตั้งฉากกับพื้นผิวไฮเปอร์

ข้อสังเกต ถ้าเราแทนค่า e_μ^N ลงแทนตำแหน่งของ A^N ในสมการ (14)

$$\nabla_M e_\mu^N e_\nu^M = \hat{\nabla}_\nu e_\mu^\rho e_\rho^N - \sigma e_\mu^\rho K_{\rho\nu} n^N$$

จากสมการ (9) เราพบว่า

$$\hat{\nabla}_\nu e_\mu^\rho = \partial_\nu e_\mu^\rho + \Gamma_{\sigma\nu}^\rho e_\mu^\sigma$$

ดังนั้น

$$\nabla_M e_\mu^N e_\nu^M = \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^N - \sigma K_{\mu\nu} n^N \quad (15)$$

สมการนี้รู้จักกันในนามของ สมการเกาส์-เวิงเกน (Gauss-Weingarten equation)

เทนเซอร์ความโค้งภายนอกเป็นปริมาณที่สำคัญมากในการศึกษาเรขาคณิตของพื้นผิวไฮเปอร์ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าปริมาณนี้มีสมมาตร ดังนี้

$$K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu} \quad (16)$$

โดยพิจารณาจาก

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \nabla_M n_N e_\mu^M e_\nu^N \\ &= \nabla_M (n_N e_\nu^N) e_\mu^M - \nabla_M e_\nu^N n_N e_\mu^M \\ &= -n_N \nabla_M e_\nu^N e_\mu^M \\ &= -n_N \nabla_M e_\mu^N e_\nu^M \\ &= \nabla_M n_N e_\nu^M e_\mu^N \\ &= K_{\nu\mu} \end{aligned}$$

สมบัติสมมาตรของเทนเซอร์ความโค้งภายนอก ทำให้เราได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu} &= \nabla_{(M} n_{N)} e_{\mu}^M e_{\nu}^N \\
&= \frac{1}{2} (\mathcal{L}_n g_{MN}) e_{\mu}^M e_{\nu}^N \\
\therefore K_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{17}$$

เมื่อ $h_{\mu\nu} = g_{MN} e_{\mu}^M e_{\nu}^N$ และ $K_{\mu\nu}$ มีความสัมพันธ์กับเมตริกเทนเซอร์ผ่านอนุพันธ์ลี

อีกสมบัตินึ่งที่สำคัญคือ

$$K = h^{\mu\nu} k_{\mu\nu} \tag{18}$$

ซึ่งเราพิสูจน์ได้จาก

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu} &= \nabla_M n_N e_{\mu}^M e_{\nu}^N \\
h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} &= \nabla_M n_N h^{\mu\nu} e_{\mu}^M e_{\nu}^N \\
&= \nabla_M n_N h^{MN} \\
&= \nabla_M n_N (g^{MN} - \sigma n^M n^N) \\
&= g^{MN} \nabla_M n_N \\
&= \nabla_M n^M
\end{aligned}$$

โดยใช้สมบัติ

$$n^M \nabla_M n_N = 0 \tag{19}$$

นี่คือสมการจีโอเดสิก ดังนั้นเราจะได้

$$K \equiv h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \nabla_M n^M \tag{20}$$

ภาคผนวก ข

สมการเกาส์-โคตซ์ซี

ข.1 สมการเกาส์-โคตซ์ซี

ในบทที่ 3 เราใช้สมบัติของอินดิเคเตอร์ $h_{\mu\nu}$ และอนุพันธ์ความโค้งภายใน ในการศึกษาเรขาคณิตของเบรน ในหัวข้อนี้เราจะแสดงรายละเอียดการคำนวณปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับ การศึกษาพื้นผิวไฮเปอร์ โดยเริ่มจากการพิจารณาสมบัติคอมมิวเตเตอร์ ของอนุพันธ์โควาเรียนท์ ภายใน ที่กระทำต่อเวกเตอร์สนาม A^μ ซึ่งเป็นเวกเตอร์สัมผัสพื้นผิวไฮเปอร์ ดังนี้

$$[\hat{\nabla}_\mu, \hat{\nabla}_\nu] A^\rho = \hat{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} A^\sigma \quad (21)$$

จากนิยามของเทนเซอร์ความโค้งภายใน

$$\hat{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (22)$$

นี่คือ ริมันน์เทนเซอร์ บนพื้นผิวไฮเปอร์ และเราต้องการที่จะแสดงให้เห็นว่า $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ เป็นปริมาณที่อยู่บนพื้นผิวไฮเปอร์ เราเริ่มจากสมบัตินี้

$$\nabla_P (\nabla_M e_\mu^N e_\nu^M) e_\sigma^P = \nabla_P (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda^N - \sigma K_{\mu\nu} n^N) e_\sigma^P \quad (23)$$

ซึ่งได้จากการใช้สมการเกาส์-วินคาเทน ในลำดับแรกเราพิจารณาด้านซ้ายมือของสมการ พบว่า

$$\begin{aligned} \nabla_P (\nabla_M e_\mu^N e_\nu^M) e_\sigma^P &= \nabla_P \nabla_M e_\mu^N e_\nu^M e_\sigma^P + \nabla_M e_\mu^N \nabla_P e_\nu^M e_\sigma^P \\ &= \nabla_P \nabla_M e_\mu^N e_\nu^M e_\sigma^P + \nabla_M e_\mu^N (\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} e_\lambda^M - \sigma K_{\nu\sigma} n^M) \\ &= \nabla_P \nabla_M e_\mu^N e_\nu^M e_\sigma^P + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \nabla_M e_\mu^N e_\lambda^M - \sigma K_{\nu\sigma} \nabla_M e_\mu^N n^M \\ &= \nabla_P \nabla_M e_\mu^N e_\nu^M e_\sigma^P + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} (\Gamma^\rho_{\mu\lambda} e_\rho^N - \sigma K_{\mu\lambda} n^N) - \sigma K_{\nu\sigma} \nabla_M e_\mu^N n^M \end{aligned}$$

ต่อมาพิจารณาด้านขวามือของสมการ

$$\begin{aligned}
\nabla_P (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^N - \sigma K_{\mu\nu} n^N) e_\sigma^P &= \nabla_P (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^N) e_\sigma^P - \sigma \nabla_P (K_{\mu\nu} n^N) e_\sigma^P \\
&= \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^N + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_P e_\lambda^N e_\sigma^P - \sigma \partial_\sigma K_{\mu\nu} n^N - \sigma K_{\mu\nu} \nabla_P n^N e_\sigma^P \\
&= \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^N + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho e_\rho^N - \sigma K_{\lambda\sigma} n^N) - \sigma \partial_\sigma K_{\mu\nu} n^N - \sigma K_{\mu\nu} \nabla_P n^N e_\sigma^P
\end{aligned}$$

เปรียบทั้งสองข้างของสมการ (23) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(\nabla_P \nabla_M e_\mu^N) e_\nu^M e_\sigma^P &= \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^N + (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho) e_\rho^N + \sigma (K_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - K_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) n^N \\
&\quad - \sigma \partial_\sigma K_{\mu\nu} n^N + \sigma K_{\nu\sigma} \nabla_M e_\mu^N n^M - \sigma K_{\mu\nu} \nabla_P n^N e_\sigma^P
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน เราพบว่า

$$\begin{aligned}
(\nabla_M \nabla_P e_\mu^N) e_\sigma^P e_\nu^M &= \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda e_\lambda^N + (\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho) e_\rho^N + \sigma (K_{\mu\lambda} \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - K_{\lambda\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) n^N \\
&\quad - \sigma \partial_\nu K_{\mu\sigma} n^N + \sigma K_{\sigma\nu} \nabla_P e_\mu^N n^P - \sigma K_{\mu\sigma} \nabla_M n^N e_\nu^M
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
[\nabla_M, \nabla_P] e_\mu^N e_\sigma^P e_\nu^M &= (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) e_\lambda^N + (\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho) e_\rho^N + \sigma (-K_{\lambda\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + K_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) n^N \\
&\quad + \sigma (\partial_\sigma K_{\mu\nu} - \partial_\nu K_{\mu\sigma}) n^N + \sigma K_{\mu\nu} \nabla_P n^N e_\sigma^P - \sigma K_{\mu\sigma} \nabla_M n^N e_\nu^M
\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
[\nabla_M, \nabla_P] e_\mu^N e_\sigma^P e_\nu^M &= (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho) e_\lambda^N \\
&\quad + \sigma ((\partial_\sigma K_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda K_{\lambda\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda K_{\lambda\mu}) - (\partial_\nu K_{\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda K_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda K_{\lambda\mu})) n^N \\
&\quad + \sigma K_{\mu\nu} \nabla_P n^N e_\sigma^P - \sigma K_{\mu\sigma} \nabla_M n^N e_\nu^M
\end{aligned} \tag{24}$$

จากสมการ (24) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
R_{QMP}^N e_\mu^Q e_\nu^M e_\sigma^P &= \hat{R}_{\mu\nu\sigma}^\lambda e_\lambda^N + \sigma (D_\sigma K_{\mu\nu} - D_\nu K_{\mu\sigma}) n^N \\
&\quad + \sigma K_{\mu\nu} \nabla_P n^N e_\sigma^P - \sigma K_{\mu\sigma} \nabla_M n^N e_\nu^M
\end{aligned} \tag{25}$$

เมื่ออนุพันธ์โควาเรียนท์ใน 4 มิติ นิยามโดย

$$D_\sigma K_{\mu\nu} = \partial_\sigma K_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda K_{\lambda\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda K_{\lambda\mu} \quad (26)$$

สมการ (25) ทำการฉายตามทิศของ $e_{\rho N}$ และใช้สมบัติ $n_N e_\rho^N = 0$ เราจะได้

$$R_{QMP}^N e_\mu^Q e_\nu^M e_\sigma^P e_{\rho N} = \hat{R}_{\mu\nu\sigma}^\lambda e_\lambda^N e_{\rho N} + \sigma K_{\mu\nu} \nabla_P n^N e_\sigma^P e_{\rho N} - \sigma K_{\mu\sigma} \nabla_M n^N e_\nu^M e_{\rho N}$$

หรือ

$$R_{LMPQ} e_\mu^L e_\nu^M e_\sigma^P e_\rho^Q = \hat{R}_{\mu\nu\sigma}^\lambda e_\lambda^N e_{\rho N} + \sigma K_{\mu\nu} \nabla_P n^N e_\sigma^P e_{\rho N} - \sigma K_{\mu\sigma} \nabla_M n^N e_\nu^M e_{\rho N} \quad (27)$$

จากนิยามของเทนเซอร์ความโค้งภายนอก

$$K_{\mu\nu} = \nabla_M n_N e_\mu^M e_\nu^N \quad (28)$$

สมการ (27) สามารถเขียนได้เป็น

$$R_{LMPQ} e_\mu^L e_\nu^M e_\sigma^P e_\rho^Q = \hat{R}_{\mu\nu\sigma\rho} + \sigma (K_{\mu\nu} K_{\sigma\rho} - K_{\mu\sigma} K_{\nu\rho}) \quad (29)$$

นี่คือความสัมพันธ์ระหว่าง $\hat{R}_{\mu\nu\sigma\rho}$ เทนเซอร์ความโค้งบนพื้นผิวไฮเปอร์ และรีมันน์เทนเซอร์เต็มรูป (full Riemann tensor) ในทำนองเดียวกัน ทำการฉายสมการ (25) ตามทิศของ n_N เราจะได้

$$R_{NQMP} n^N e_\mu^Q e_\nu^M e_\sigma^P = D_\sigma K_{\mu\nu} - D_\nu K_{\mu\sigma} \quad (30)$$

เมื่อเราใช้สมบัติ $n_N e_\rho^N = 0$, $n_N n^N = \sigma$ และ $n_N \nabla_P n^N = 0$ (สมการจีโอเดสิก) ความสัมพันธ์ตามสมการ (29) และ (30) คือ สมการเกาส์-โคตซ์ซี ความสัมพันธ์ตามสมการนี้ทำให้เราทราบว่า สามารถเขียนองค์ประกอบของเทนเซอร์ความโค้ง กาลอวกาศ ในรูปของเทนเซอร์ความโค้งภายในและเทนเซอร์ความโค้งภายนอกของพื้นผิวไฮเปอร์

ข.2 ริชชีสเกลาร์บนพื้นผิวไฮเปอร์

ในกาลอวกาศทั่วไป ริชชีเทนเซอร์ สามารถหาได้จาก

$$\begin{aligned} R_{MN} &= g^{PQ} R_{PMQN} \\ &= (\sigma n^P n^Q + h^{\sigma\rho} e_\sigma^P e_\rho^Q) R_{PMQN} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$R_{MN} = \sigma R_{PMQN} n^P n^Q + h^{\sigma\rho} R_{PMQN} e_\sigma^P e_\rho^Q \quad (31)$$

และริชชีสเกลาร์ สามารถหาได้จาก

$$\begin{aligned} R &= g^{MN} R_{MN} \\ &= (\sigma n^M n^N + h^{\mu\nu} e_\mu^M e_\nu^N) (\sigma R_{PMQN} n^P n^Q + h^{\sigma\rho} R_{PMQN} e_\sigma^P e_\rho^Q) \\ R &= R_{PMQN} n^P n^M n^Q n^N + \sigma h^{\mu\nu} R_{PMQN} n^P e_\mu^M n^Q e_\nu^N \\ &\quad + \sigma h^{\sigma\rho} R_{PMQN} e_\sigma^P n^M e_\rho^Q n^N + h^{\mu\nu} h^{\sigma\rho} R_{PMQN} e_\sigma^P e_\mu^M e_\rho^Q e_\nu^N \\ \therefore R &= 2\sigma h^{\mu\nu} R_{PMQN} n^P e_\mu^M n^Q e_\nu^N + h^{\mu\nu} h^{\sigma\rho} R_{PMQN} e_\sigma^P e_\mu^M e_\rho^Q e_\nu^N \\ &= 2\sigma R_{PQ} n^P n^Q + h^{\mu\nu} h^{\sigma\rho} R_{PMQN} e_\sigma^P e_\mu^M e_\rho^Q e_\nu^N \end{aligned} \quad (32)$$

เราสามารถเขียนอยู่ในรู้อย่างง่ายดังสมการ (32) โดยใช้ความสัมพันธ์ความบริบูรณ์(completeness relations) $(g^{MN} = \sigma n^M n^N + h^{\mu\nu} e_\mu^M e_\nu^N)$ และสมบัติ $R_{PMQN} n^P n^M n^Q n^N = 0$.

โดยใช้นิยามของรีมันน์เทนเซอร์

$$[\nabla_M, \nabla_N] n^P = R_{QMN}^P n^Q \quad (33)$$

นั่นคือ

$$R_{MN} n^M = [\nabla_M, \nabla_N] n^M \quad (34)$$

ดังนั้นจากความสัมพันธ์ข้างต้นรีมันน์เทนเซอร์สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} R_{PQ} n^P n^Q &= [\nabla_P, \nabla_Q] n^P n^Q \\ &= (\nabla_P \nabla_Q n^P) n^Q - (\nabla_Q \nabla_P n^P) n^Q \\ &= \nabla_P (\nabla_Q n^P n^Q) - \nabla_Q (n^P \nabla_P n^Q) - \nabla_Q (\nabla_P n^P n^Q) + \nabla_P n^P \nabla_Q n^Q \end{aligned}$$

พจน์ที่ 4 สามารถเขียนได้เป็น K^2 เมื่อ $K = \nabla_M n^M$ นี้คือเทรซ ของเทนเซอร์ความโค้งภายนอก
พิจารณาพจน์ที่ 2 เราพบว่า

$$\begin{aligned}\nabla_Q n^P \nabla_P n^Q &= g^{QM} g^{PN} \nabla_P n_M \nabla_Q n_N \\ &= (\sigma n^Q n^M + h^{QM}) (\sigma n^P n^N + h^{PN}) \nabla_P n_M \nabla_Q n_N\end{aligned}$$

(เนื่องจาก $n^N \nabla_Q n_N = \frac{1}{2} (\nabla_Q (n^N n_N)) = 0$)

$$\begin{aligned}\nabla_Q n^P \nabla_P n^Q &= (\sigma n^Q n^M + h^{QM}) h^{PN} \nabla_P n_M \nabla_Q n_N \\ &= h^{QM} h^{PN} \nabla_P n_M \nabla_Q n_N \\ &= h^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} \nabla_P n_M e_\nu^P e_\rho^M \nabla_Q n_N e_\mu^Q e_\sigma^N\end{aligned}$$

(เนื่องจาก $K_{\mu\nu} = \nabla_M n_N e_\mu^M e_\nu^N$)

$$\begin{aligned}\nabla_Q n^P \nabla_P n^Q &= h^{\mu\rho} h^{\nu\sigma} K_{\nu\rho} K_{\mu\sigma} \\ &= K_{\nu\rho} k^{\nu\rho} \\ &= K^{\nu\rho} K_{\nu\rho}\end{aligned}\tag{35}$$

และในขั้นตอนสุดท้ายนี้เราใช้สมบัติที่ว่า $K_{\mu\nu}$ เป็นเทนเซอร์ที่มีสมมาตร

เมื่อแทนค่าต่างๆ ที่ผ่านมา เราจะได้

$$2\sigma R_{PQ} n^P n^Q = 2\sigma (K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} + \nabla_P (\nabla_Q n^P n^Q) - \nabla_Q (\nabla_P n^P n^Q))\tag{36}$$

พจน์ที่สามของสมการ (36) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\begin{aligned}\nabla_P (\nabla_Q n^P n^Q) &= \nabla_P \nabla_Q n^P n^Q + \nabla_Q n^P \nabla_P n^Q \\ &= \nabla_Q \nabla_P n^P n^Q + \nabla_Q n^P \nabla_P n^Q \\ &= n^Q \nabla_Q \nabla_P n^P + \nabla_Q (n^P \nabla_P n^Q) - n^P \nabla_Q \nabla_P n^Q \\ &= \nabla_Q (n^P \nabla_P n^Q)\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการ (36) สามารถเขียนได้เป็น

$$2\sigma R_{PQ}n^P n^Q = 2\sigma \left(K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} + \nabla_Q (n^P \nabla_P n^Q - n^Q \nabla_P n^P) \right) \quad (37)$$

พิจารณาพจน์ที่สองของสมการ (32) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย โดยแทนค่าตามสมการเกาส์-โคตซ์ซี ด้านล่างนี้

$$R_{LMPQ} e_\mu^L e_\nu^M e_\sigma^P e_\rho^Q = \hat{R}_{\mu\nu\sigma\rho} + \sigma (K_{\mu\nu} K_{\sigma\rho} - K_{\mu\sigma} K_{\nu\rho}).$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} h^{\mu\nu} h^{\sigma\rho} R_{PMQN} e_\sigma^P e_\mu^M e_\rho^Q e_\nu^N \\ = h^{\mu\nu} h^{\sigma\rho} \left(\hat{R}_{\sigma\mu\rho\nu} + \sigma (K_{\sigma\mu} K_{\rho\nu} - K_{\sigma\rho} K_{\mu\nu}) \right) \\ = \hat{R} + \sigma (K_{\sigma\mu} K^{\sigma\mu} - K^2) \end{aligned} \quad (38)$$

แทนค่าปริมาณที่กล่าวมาข้างต้นในสมการ (32) เราจะได้ริชชีสเกลาร์

$$R = 2\sigma (K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}) + 2\sigma (\nabla_Q (n^P \nabla_P n^Q - n^Q \nabla_P n^P)) + \hat{R} + \sigma (K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - K^2)$$

หรือ

$$R = \hat{R} + \sigma (K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}) + 2\sigma (\nabla_Q (n^P \nabla_P n^Q - n^Q \nabla_P n^P)) \quad (39)$$

นี่คือริชชีสเกลาร์เต็มรูปที่สามารถแสดงในรูปของริชชีสเกลาร์ และเทนเซอร์ความโค้งภายนอกที่พิจารณาบนพื้นผิวไฮเปอร์ Σ

ภาคผนวก ค

การแปรผันริชชีสเกลาร์

ในการศึกษาวิวัฒนาการของเอกภพตามแบบจำลองจักรวาลวิทยาแบบลดหลั่น เริ่มจากการหาสมการการเคลื่อนที่บนบัลค์ โดยใช้หลักการแปรผัน ในบทที่ 4 เราได้ทำการแปรผันแอคชัน ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta S_{bulk} &= \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5x \left[\delta \sqrt{-g_5} \left(e^{-3\pi/2} R_5 - \frac{27}{16m_6^2} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g_5} \delta \left(e^{-3\pi/2} R_5 - \frac{27}{16m_6^2} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right) \right] \\ &= \frac{M_5^3}{2} \int_{bulk} d^5x \left[\delta \sqrt{-g_5} \left(e^{-3\pi/2} R_5 - \frac{27}{16m_6^2} (\partial\pi)^2 \square_5 \pi \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g_5} \left(-\frac{3}{2} e^{-3\pi/2} R_5 \delta\pi + e^{-3\pi/2} \delta R_5 - \frac{27}{16m_6^2} (\delta(\partial\pi)^2 \square_5 \pi + (\partial\pi)^2 \delta(\square_5 \pi)) \right) \right]\end{aligned}$$

ในภาคผนวก ค นี้เราจะแสดงรายละเอียดการแปรผันริชชีสเกลาร์ ที่พบในสมการข้างต้น โดยเริ่มจากการแปรผัน $\delta \sqrt{-g_5}$ ที่พบในสมการข้างต้น ดังนี้
เนื่องจาก

$$\delta \sqrt{-g_5} = -\frac{1}{2\sqrt{-g_5}} \delta g_5 \quad (40)$$

เราใช้สมบัติของเมทริกซ์ที่สามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ได้ M โดยที่

$$\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M) \quad (41)$$

ดังนั้นเราจะได้

$$\frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M) \quad (42)$$

สำหรับเมตริกเทนเซอร์ g_{MN} เราจะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{\det g_{MN}} \delta(\det g_{MN}) &= \text{Tr}(g^{MN} \delta g_{MN}) \\ \delta g &= g_5 (g^{MN} \delta g_{MN})\end{aligned}\quad (43)$$

จากนั้นหาค่า δg_{MN} จากสมบัติของเมตริกเทนเซอร์

$$g^{AB} g_{BN} = \delta_N^A$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}g^{AB} \delta g_{BN} + g_{BN} \delta g^{AB} &= 0 \\ g^{AB} \delta g_{BN} &= -g_{BN} \delta g^{AB} \\ g_{AM} g^{AB} \delta g_{BN} &= -g_{AM} g_{BN} \delta g^{AB} \\ \delta_M^B \delta g_{BN} &= -g_{AM} g_{BN} \delta g^{AB}\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\delta g_{MN} = -g_{AM} g_{BN} \delta g^{AB} \quad (44)$$

แทนค่า สมการ (44) ในสมการ (43) จะได้

$$\begin{aligned}\delta g &= -g_5 (g^{MN} g_{MA} g_{NB} \delta g^{AB}) \\ &= -g_5 (\delta_A^N g_{NB} \delta g^{AB}) \\ &= -g_5 (g_{AB} \delta g^{AB})\end{aligned}\quad (45)$$

แทนค่า สมการ (45) ในสมการ (40) จะได้

$$\begin{aligned}\delta \sqrt{-g_5} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g_5}} (-g_5 (g_{AB} \delta g^{AB})) \\ \delta \sqrt{-g_5} &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g_5} g_{AB} \delta g^{AB}\end{aligned}\quad (46)$$

ในการหาค่า δR_5 เราเริ่มจากการพิจารณานิยามของริชชีสเกลาร์ R_5 ที่นิยามโดย

$$R_5 = g^{MN} R_{MN}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\delta R_5 &= \delta(g^{MN} R_{MN}) \\ &= g^{MN} \delta R_{MN} + R_{MN} \delta g^{MN}\end{aligned}\quad (47)$$

เราพบว่าจะมีพจน์ δR_{MN} ในสมการ ดังนั้นเราสามารถหาค่าของพจน์นี้ได้จากนิยามของริชชีเทนเซอร์

$$R_{MN} = \partial_A \Gamma_{MN}^A - \partial_N \Gamma_{MA}^A + \Gamma_{BA}^A \Gamma_{MN}^B - \Gamma_{BN}^A \Gamma_{MA}^B$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\delta R_{MN} &= \partial_A \delta \Gamma_{MN}^A - \partial_N \delta \Gamma_{MA}^A + \Gamma_{BA}^A \delta \Gamma_{MN}^B + \delta \Gamma_{BA}^A \Gamma_{MN}^B - \Gamma_{BN}^A \delta \Gamma_{MA}^B - \delta \Gamma_{BN}^A \Gamma_{MA}^B \\ &= \partial_A \delta \Gamma_{MN}^A + \Gamma_{AB}^A \delta \Gamma_{MN}^B - \Gamma_{AM}^B \delta \Gamma_{BN}^A - \Gamma_{AN}^B \delta \Gamma_{MB}^A \\ &\quad - \partial_N \delta \Gamma_{MA}^A - \Gamma_{NB}^A \delta \Gamma_{MA}^B + \Gamma_{NM}^B \delta \Gamma_{BA}^A + \Gamma_{NA}^B \delta \Gamma_{MB}^A \\ \therefore \delta R_{MN} &= \nabla_A \delta \Gamma_{MN}^A - \nabla_N \delta \Gamma_{MA}^A\end{aligned}\quad (48)$$

เราพบว่าจะมีพจน์ $\delta \Gamma_{MN}^A$ ในสมการ พจน์นี้คือการหาการแปรผันของสัญลักษณ์คริสตอฟเฟล ซึ่งหาค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta \Gamma_{MN}^A &= \frac{1}{2} \delta [g^{AB} (\partial_M g_{NB} + \partial_N g_{BM} - \partial_B g_{MN})] \\ &= \frac{1}{2} [\delta g^{AB} (\partial_M g_{NB} + \partial_N g_{BM} - \partial_B g_{MN}) + g^{AB} (\partial_M \delta g_{NB} + \partial_N \delta g_{BM} - \partial_B \delta g_{MN})]\end{aligned}\quad (49)$$

แทนค่า δg_{MN} ตามสมการ (44) ดังนั้น $\partial_M \delta g_{NB}$ สามารถกระจายได้เป็น

$$\begin{aligned}\partial_M \delta g_{NB} &= -\partial_M (g_{NP} g_{BC} \delta g^{PC}) \\ &= -(\partial_M g_{NP}) g_{BC} \delta g^{PC} - g_{NP} (\partial_M g_{BC}) \delta g^{PC} - g_{NP} g_{BC} \partial_M \delta g^{PC}\end{aligned}$$

แทนค่าในสมการ (49) เราจะได้

$$\begin{aligned}\delta \Gamma_{MN}^A &= \frac{1}{2} \left\{ [\partial_M g_{NB} + \partial_N g_{BM} - \partial_B g_{MN}] \delta g^{AB} + g^{AB} [-(\partial_M g_{NP}) g_{BC} \delta g^{PC} \right. \\ &\quad - g_{NP} (\partial_M g_{BC}) \delta g^{PC} - g_{NP} g_{BC} \partial_M \delta g^{PC} - (\partial_N g_{BP}) g_{MC} \delta g^{PC} - g_{BP} (\partial_N g_{MC}) \delta g^{PC} \\ &\quad \left. - g_{BP} g_{MC} \partial_N \delta g^{PC} + (\partial_B g_{MP}) g_{NC} \delta g^{PC} + g_{MP} (\partial_B g_{NC}) \delta g^{PC} + g_{MP} g_{NC} \partial_B \delta g^{PC} \right\}\end{aligned}$$

จากสมบัติ $g^{AB} g_{BN} = \delta_N^A$ จะได้

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{MN}^A = & \frac{1}{2} \left\{ [\partial_M g_{NB} + \partial_N g_{BM} - \partial_B g_{MN}] \delta g^{AB} - (\partial_M g_{NP}) \delta g^{PA} - g^{AB} g_{NP} (\partial_M g_{BC}) \delta g^{PC} \right. \\ & - g_{NP} \partial_M \delta g^{PA} - (\partial_N g_{BP}) g^{AB} g_{MC} \delta g^{PC} - (\partial_N g_{MC}) \delta g^{AC} - g_{MC} \partial_N \delta g^{AC} \\ & \left. + (\partial_B g_{MP}) g^{AB} g_{NC} \delta g^{PC} + g^{AB} g_{MP} (\partial_B g_{NC}) \delta g^{PC} + g^{AB} g_{MP} g_{NC} \partial_B \delta g^{PC} \right\} \end{aligned}$$

จะพบว่ามีบางพจน์ที่สามารถหักล้างกันได้ จะเหลือเพียงบางพจน์ ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{MN}^A = & \frac{1}{2} \left[-(\partial_B g_{MN}) \delta g^{AB} - g^{AB} g_{NP} (\partial_M g_{BC}) \delta g^{PC} - g_{NB} \partial_M \delta g^{AB} \right. \\ & - (\partial_N g_{BP}) g^{AB} g_{MC} \delta g^{PC} - g_{MB} \partial_N \delta g^{AB} + (\partial_B g_{MP}) g^{AB} g_{NC} \delta g^{PC} \\ & \left. + g^{AB} g_{MP} (\partial_B g_{NC}) \delta g^{PC} + g^{AB} g_{MP} g_{NC} \partial_B \delta g^{PC} \right] \end{aligned}$$

จากสมบัติของเมตริกเทนเซอร์ $\nabla_P g_{MN} = 0$ ทำให้เราได้ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\partial_P g_{MN} = \Gamma_{PM}^K g_{KN} + \Gamma_{PN}^K g_{MK} \quad (50)$$

ดังนั้น แทนค่าตามสมการ (50) จะได้

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{MN}^A = & \frac{1}{2} \left[-\Gamma_{BM}^K g_{KN} \delta g^{AB} - \Gamma_{BN}^K g_{MK} \delta g^{AB} - g^{AB} g_{NP} \Gamma_{MB}^K g_{KC} \delta g^{PC} - g^{AB} g_{NP} \Gamma_{MC}^K g_{BK} \delta g^{PC} \right. \\ & - g_{NB} \partial_M \delta g^{AB} - \Gamma_{NB}^K g_{KP} g^{AB} g_{MC} \delta g^{PC} - \Gamma_{NP}^K g_{BK} g^{AB} g_{MC} \delta g^{PC} - g_{MB} \partial_N \delta g^{AB} \\ & + \Gamma_{BM}^K g_{KP} g^{AB} g_{NC} \delta g^{PC} + \Gamma_{BP}^K g_{MK} g^{AB} g_{NC} \delta g^{PC} \\ & \left. + g^{AB} g_{MP} \Gamma_{BN}^K g_{KC} \delta g^{PC} + g^{AB} g_{MP} \Gamma_{BC}^K g_{NK} \delta g^{PC} + g^{AB} g_{MP} g_{NC} \partial_B \delta g^{PC} \right] \end{aligned}$$

จากสมการข้างต้นมีบางพจน์ที่สามารถหักล้างกันได้ เหลือเพียงบางพจน์ ซึ่งสามารถจัดรูปสมการใหม่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{MN}^A = & \frac{1}{2} \left[-\Gamma_{MK}^B g_{BN} \delta g^{AK} - \Gamma_{NK}^B g_{MB} \delta g^{AK} - g_{NB} \Gamma_{MK}^A \delta g^{KB} - g_{NB} \partial_M \delta g^{AB} - \Gamma_{NK}^A g_{MB} \delta g^{KB} \right. \\ & \left. - g_{MB} \partial_N \delta g^{AB} + \Gamma_{BK}^P g_{MP} g^{AB} g_{NC} \delta g^{KC} + g^{AB} g_{MP} \Gamma_{BK}^C g_{NC} \delta g^{PK} + g^{AB} g_{MP} g_{NC} \partial_B \delta g^{PC} \right] \\ = & \frac{1}{2} \left[-g_{NB} \partial_M \delta g^{AB} - \Gamma_{MK}^B g_{BN} \delta g^{AK} - g_{NB} \Gamma_{MK}^A \delta g^{KB} \right. \\ & - g_{MB} \partial_N \delta g^{AB} - \Gamma_{NK}^B g_{MB} \delta g^{AK} - \Gamma_{NK}^A g_{MB} \delta g^{KB} \\ & \left. + g^{AB} g_{MP} g_{NC} \partial_B \delta g^{PC} + \Gamma_{BK}^P g_{MP} g^{AB} g_{NC} \delta g^{KC} + g^{AB} g_{MP} \Gamma_{BK}^C g_{NC} \delta g^{PK} \right] \\ \therefore \delta\Gamma_{MN}^A = & -\frac{1}{2} \left[g_{NB} \nabla_M \delta g^{AB} + g_{MB} \nabla_N \delta g^{AB} - g^{AB} g_{MP} g_{NC} \nabla_B \delta g^{PC} \right] \quad (51) \end{aligned}$$

จากการแปรผันสัญลักษณ์คริสทอฟเฟล $\delta\Gamma_{MN}^A$ ที่ได้ตามสมการ (51) เราสามารถหาการแปรผันของ ริชชีเทนเซอร์ โดยการแทนค่าที่ได้ในสมการ (48) จะได้

$$\begin{aligned}
\delta R_{MN} &= \nabla_A \delta\Gamma_{MN}^A - \nabla_N \delta\Gamma_{MA}^A \\
&= -\frac{1}{2} \nabla_A (g_{NB} \nabla_M \delta g^{AB} + g_{MB} \nabla_N \delta g^{AB} - g^{AB} g_{MP} g_{NC} \nabla_B \delta g^{PC}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \nabla_N (g_{AB} \nabla_M \delta g^{AB} + g_{MB} \nabla_A \delta g^{AB} - g^{AB} g_{MP} g_{AC} \nabla_B \delta g^{PC}) \\
&= -\frac{1}{2} (g_{NB} \nabla_A \nabla_M \delta g^{AB} + g_{MB} \nabla_A \nabla_N \delta g^{AB} - g^{AB} g_{MP} g_{NC} \nabla_A \nabla_B \delta g^{PC}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (g_{AB} \nabla_N \nabla_M \delta g^{AB} + g_{MB} \nabla_N \nabla_A \delta g^{AB} - g^{AB} g_{MP} g_{AC} \nabla_N \nabla_B \delta g^{PC}) \\
&= -\frac{1}{2} (g_{NB} \nabla_A \nabla_M \delta g^{AB} - g_{MP} g_{NC} \square_5 \delta g^{PC}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (g_{AB} \nabla_N \nabla_M \delta g^{AB} - \delta_C^B g_{MP} \nabla_N \nabla_B \delta g^{PC}) \\
\therefore \delta R_{MN} &= \frac{1}{2} (g_{AB} \nabla_N \nabla_M \delta g^{AB} - g_{MP} \nabla_N \nabla_C \delta g^{PC} - g_{NB} \nabla_A \nabla_M \delta g^{AB} + g_{MP} g_{NC} \square_5 \delta g^{PC})
\end{aligned} \tag{52}$$

สุดท้ายเราจะได้การแปรผันของริชชีสเกลาร์ โดยการแทนค่าการแปรผันริชชีเทนเซอร์ ตามสมการ (52) ในสมการ (47) ได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta R_5 &= g^{MN} \delta R_{MN} + R_{MN} \delta g^{MN} \\
&= \frac{1}{2} g^{MN} (g_{AB} \nabla_N \nabla_M \delta g^{AB} - g_{MP} \nabla_N \nabla_C \delta g^{PC} - g_{NB} \nabla_A \nabla_M \delta g^{AB} + g_{MP} g_{NC} \square_5 \delta g^{PC}) \\
&\quad + R_{MN} \delta g^{MN} \\
&= \frac{1}{2} [g_{AB} \square_5 \delta g^{AB} - \delta_P^N \nabla_N \nabla_C \delta g^{PC} - \delta_B^M \nabla_A \nabla_M \delta g^{AB} + \delta_P^N g_{NC} \square_5 \delta g^{PC}] + R_{MN} \delta g^{MN} \\
&= \frac{1}{2} [g_{AB} \square_5 \delta g^{AB} - \nabla_P \nabla_C \delta g^{PC} - \nabla_A \nabla_B \delta g^{AB} + g_{PC} \square_5 \delta g^{PC}] + R_{MN} \delta g^{MN} \\
\therefore \delta R_5 &= g_{MN} \square_5 \delta g^{MN} - \nabla_M \nabla_N \delta g^{MN} + R_{MN} \delta g^{MN}
\end{aligned} \tag{53}$$

สรุปได้ว่า เราได้ผลการแปรผันของปริมาณที่เกี่ยวข้องในการศึกษาเรขาคณิตของกาลอวกาศ สามารถนำไปใช้ในการแปรผันแอมพลิจูด เพื่อคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g_5} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g_5}g_{AB}\delta g^{AB} \\ \delta\Gamma_{MN}^A &= -\frac{1}{2}\left(g_{NB}\nabla_M\delta g^{AB} + g_{MB}\nabla_N\delta g^{AB} - g^{AB}g_{MP}g_{NC}\nabla_B\delta g^{PC}\right) \\ \delta R_{MN} &= \frac{1}{2}\left(g_{AB}\nabla_N\nabla_M\delta g^{AB} - g_{MP}\nabla_N\nabla_C\delta g^{PC} \right. \\ &\quad \left. - g_{NB}\nabla_A\nabla_M\delta g^{AB} + g_{MP}g_{NC}\square_5\delta g^{PC}\right) \\ \delta R_5 &= g_{MN}\square_5\delta g^{MN} - \nabla_M\nabla_N\delta g^{MN} + R_{MN}\delta g^{MN}\end{aligned}$$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสมศักดิ์ เสนาใหญ่ เกิดเมื่อวันที่ 30 เมษายน 2525 จังหวัดอุบลราชธานี สำเร็จ การศึกษาระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนพังโคนพิทยาศาสตร์ จังหวัดอุบลราชธานี และรับทุนในโครงการ ส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถพิเศษทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ (สควค.) เข้าศึกษา ใน ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานี และสำเร็จการศึกษาวิทยา ศาสตร์บัณฑิต (วท.บ.) สาขาวิชาฟิสิกส์ เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง ในปีการศึกษา 2547 และสำเร็จ การศึกษาในหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพครู (ป.บัณฑิต) คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏ อุบลราชธานี ในปีการศึกษา 2548 ได้เข้าศึกษาต่อหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และสำเร็จการศึกษาในปีการศึกษา 2555

การนำเสนอและตีพิมพ์ผลงานทางวิชาการ

- 2011 A. Chatrabhuti and S. Senayai. Accelerated Expansion of the Universe in Cascading Cosmology Model. The 23rd National Graduate Research Conference. Nakorn Ratchasima, Thailand (December 23-24, 2011).

การเข้าร่วมประชุมทางวิชาการระดับนานาชาติ

1. เข้าร่วม “1st CERN School Thailand 2010,” Department of Physics, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Thailand (October 4-13, 2010).
2. เข้าร่วมสัมมนาและนำเสนอผลงานเรื่อง “Accelerated expansion of the universe in cascading cosmology” ในงาน XVII-Vietnam School of Physics (VSOP-17) “Particle and astroparticle physics at the dawn of the LHC era,” Hue University’s College of Education, Hue City, Vietnam. (July 18-24, 2011).
3. เข้าร่วมสัมมนาในงาน “The 2011 BCVSPIN Advanced Study Institute in Particle Physics and Cosmology,” Hue University’s College of Education, Hue City, Vietnam. (July 25-31, 2011).