บทที่ 3

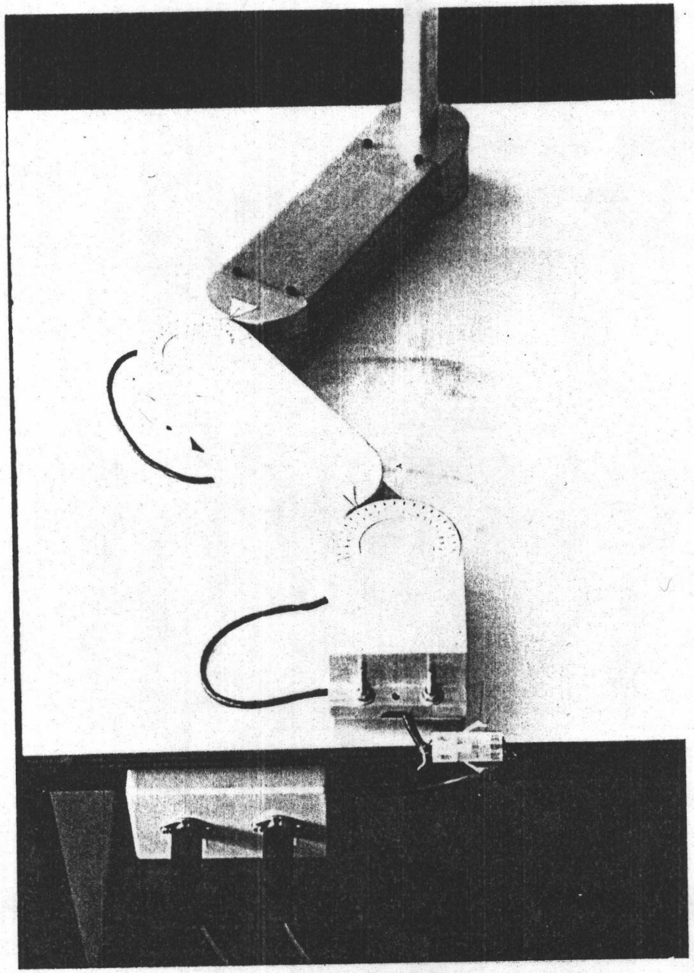
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกล

ลักษณะทั่วไปของแขนกล

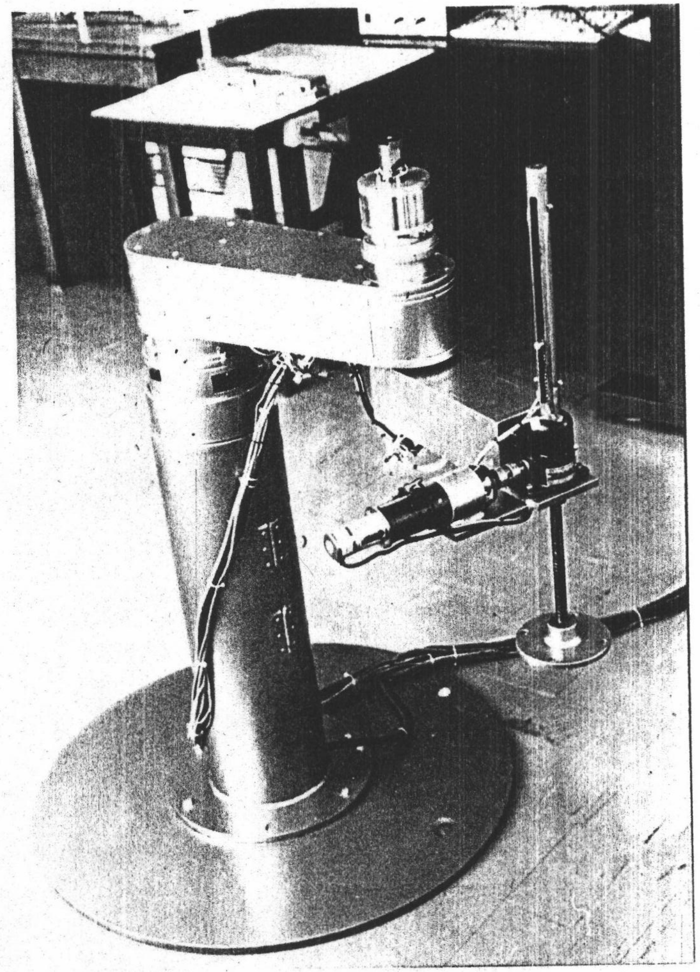
แขนกลที่ใช้ในโครงการวิจัยนี้ มีทั้งหมด 2 ตัว คือ แขนกลที่เคลื่อนที่นำ (MASTER MANIPULATOR ARM) และ แขนกลที่เคลื่อนที่ตาม (SLAVE MANIPULATOR ARM) (ดูรูปที่ 3.1) แขนกลที่เคลื่อนที่นำเป็นแขนกลที่มี 2 ข้อต่อ เป็นข้อต่อแบบหมุน (REVOLUTE JOINT) เคลื่อนที่ไปในแนวระดับด้วยกำลังขับของมนุษย์ผู้ปฏิบัติงาน ที่ตำแหน่งข้อต่อแต่ละข้อต่อจะมีอุปกรณ์การวัดชนิดดิจิตอล (DIGITAL TRANSDUCER) ติดตั้งอยู่ เพื่อใช้วัดตำแหน่งเชิงมุมขณะที่มีการเคลื่อนที่ของแขนกลที่เคลื่อนที่นำเก็บเป็นข้อมูลอ้างอิง ส่วนแขนกลที่เคลื่อนที่ตามจะมีลักษณะโครงสร้างทางกลคล้ายคลึงกับแขนกลที่เคลื่อนที่นำ แต่มีขนาดใหญ่กว่า เคลื่อนที่ไปในแนวระดับด้วยกำลังขับจากมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงชนิดแม่เหล็กถาวร (PERMANENT MAGNET D.C. SERVOMOTOR) ผ่านชุดเกียร์ทดชนิดฮาร์โมนิคไดรฟ์ (HARMONIC DRIVE) ซึ่งมีความหลวม (BACKLASH) น้อยมาก การควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนกลที่เคลื่อนที่ตามให้สามารถเคลื่อนที่ตามการเคลื่อนที่ของแขนกลที่เคลื่อนที่นำจะใช้ระบบควบคุมอัตโนมัติ ซึ่งจะนำข้อมูลอ้างอิงที่เก็บได้จากแขนกลที่เคลื่อนที่นำไปใช้ในการควบคุมให้แขนกลที่เคลื่อนที่ตามเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งเชิงมุมที่ต้องการ การจะวิเคราะห์และออกแบบให้ระบบควบคุมอัตโนมัติทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพนั้น มีความจำเป็นจะต้องทราบคุณลักษณะทางพลศาสตร์ของแขนกลที่เคลื่อนที่ตามด้วย

คุณลักษณะทางพลศาสตร์ของแขนกลที่เคลื่อนที่ตาม

ในการศึกษาหาคุณลักษณะทางพลศาสตร์ของแขนกลที่เคลื่อนที่ตามนั้น จะใช้สมการการเคลื่อนที่ของลากรานจ์ (LAGRANGE EQUATION OF MOTION) สำหรับระบบที่ประกอบไปด้วยแรงที่ไม่อนุรักษ์ (NONCONSERVATIVE SYSTEM) คือ (D'Souza, Garg,



(ก) แขนกลที่เคลื่อนที่นำ (MASTER ARM)



(ข) แขนกลที่เคลื่อนที่ตาม (SLAVE ARM)

รูปที่ 3.1 แสดงแขนกลที่ใช้ในโครงการวิจัย

1984)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad ; i = 1,2 \qquad \text{\_\_\_(3.1)}$$

โดยที่

L = ค่าของลากรานจ์ = KE - PE

KE = พลังงานจลน์รวมของระบบ

PE = พลังงานศักย์รวมของระบบ

q_i = ตำแหน่งในพิกัดทั่วไปของแขนที่ i

$\dot{q}_i$ = ความเร็วในพิกัดทั่วไปของแขนที่ i

Q_i = แรงในพิกัดทั่วไปที่กระทำกับแขนที่ i

เนื่องจาก แขนกลที่ใช้ในงานวิจัยเป็นแขนกลที่เคลื่อนที่ในแนวระดับ ทำให้พลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นไม่มีการเปลี่ยนแปลง เมื่อมีการเคลื่อนที่ของแขนกล เราจึงไม่คิดพลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นได้ จากรูปที่ 3.2 ซึ่งเป็นรูปที่ใช้แทนแขนกลที่เคลื่อนที่ตาม ถ้าเรากำหนดให้ θ_i เป็นตำแหน่งเชิงมุมในพิกัดทั่วไปสำหรับแขนที่ i และ $\dot{\theta}_i$ เป็นความเร็วเชิงมุมในพิกัดทั่วไปสำหรับแขนที่ i ดังนั้น สมการที่ (3.1) จะกลายเป็น

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial KE}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial KE}{\partial \theta_i} = Q_i \quad ; i = 1,2 \qquad \text{\_\_\_(3.2)}$$

พลังงานจลน์รวมของระบบที่เกิดขึ้นกับแขนกล คือ

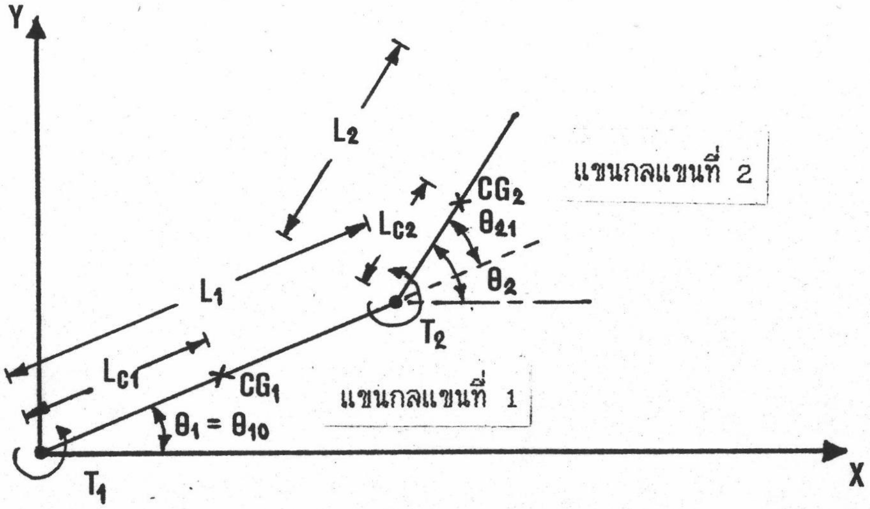
$$KE = 1/2\,(I_{c1}\dot{\theta}_1^{\,2}) + 1/2\,(m_1 v_{c1}^{\,2}) + 1/2\,(I_{c2}\dot{\theta}_2^{\,2}) + 1/2\,(m_2 v_{c2}^{\,2}) \qquad \text{\_\_\_(3.3)}$$

โดยที่

I_{ci} = โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล รอบจุดศูนย์กลางมวลของแขนที่ i

m_i = มวลของแขนที่ i

v_{ci} = ความเร็วเชิงเส้น ที่จุดศูนย์กลางมวลของแขนที่ i



รูปที่ 3.2 แสดงสัญญลักษณ์ของแขนกลที่เคลื่อนที่ตาม

เราจะหา ความเร็ว v_{c1} และ v_{c2} ให้อยู่ในรูปของ θ_1 และ θ_2 ได้ เนื่องจาก

$$v_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2$$

โดยที่

v_c = ความเร็วเชิงเส้น ที่จุดศูนย์กลางมวลของแขน

$\dot{x}_c$ = ความเร็วเชิงเส้น ที่จุดศูนย์กลางมวลของแขน ในแนวแกน x

$\dot{y}_c$ = ความเร็วเชิงเส้น ที่จุดศูนย์กลางมวลของแขน ในแนวแกน y

และ จากรูปที่ 3.2 กำหนดให้

x_{ci} = ตำแหน่งเชิงเส้นที่จุดศูนย์กลางมวลของแขนที่ i ในแนวแกน x

y_{ci} = ตำแหน่งเชิงเส้นที่จุดศูนย์กลางมวลของแขนที่ i ในแนวแกน y

$\dot{x}_{ci}$ = ความเร็วเชิงเส้นที่จุดศูนย์กลางมวลของแขนที่ i ในแนวแกน x

$\dot{y}_{ci}$ = ความเร็วเชิงเส้นที่จุดศูนย์กลางมวลของแขนที่ i ในแนวแกน y

L_{ci} = ความยาวของแขนที่ i วัดจากจุดหมุนที่ต่อกับแขนที่ i-1 ถึงจุดศูนย์กลางมวลของแขนที่ i

L_i = ความยาวของแขนที่ i วัดจากจุดหมุนที่ต่อกับแขนที่ i-1 ถึงจุดหมุนที่ต่อกับแขนที่ i+1

จะได้

$$x_{c1} = L_{c1}\cos\theta_1$$
$$y_{c1} = L_{c1}\sin\theta_1$$
$$x_{c2} = L_1\cos\theta_1 + L_{c2}\cos\theta_2$$
$$y_{c2} = L_1\sin\theta_1 + L_{c2}\sin\theta_2$$

หาอนุพันธ์ของสมการข้างต้นเทียบกับเวลา ได้

$$\dot{x}_{c1} = -L_{c1}\dot{\theta}_1\sin\theta_1$$
$$\dot{y}_{c1} = L_{c1}\dot{\theta}_1\cos\theta_1$$
$$\dot{x}_{c2} = -L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - L_{c2}\dot{\theta}_2\sin\theta_2$$
$$\dot{y}_{c2} = L_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + L_{c2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} v_{c1}^2 &= L_{c1}^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + L_{c1}^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 \\ &= L_{c1}^2\dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \qquad \_\_\_(3.4)$$

$$\begin{aligned} v_{c2}^2 &= L_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + 2L_1L_{c2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ &\quad + L_{c2}^2\dot{\theta}_2^2\sin^2\theta_2 + L_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 \\ &\quad + 2L_1L_{c2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + L_{c2}^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2 \\ &= L_1^2\dot{\theta}_1^2 + L_{c2}^2\dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_{c2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \end{aligned} \qquad \_\_\_(3.5)$$

แทนค่า ความเร็ว v_{c1} และ v_{c2} ลงในสมการที่ (3.3) ได้

$$\begin{aligned} KE = {} & 1/2\,(I_{c1}\dot{\theta}_1^2) + 1/2\,(m_1L_{c1}^2\dot{\theta}_1^2) + 1/2\,(I_{c2}\dot{\theta}_2^2) \\ & + 1/2\,(m_2)\{L_1^2\dot{\theta}_1^2 + L_{c2}^2\dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_{c2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\} \end{aligned}$$

ต่อไป เราจะหาแต่ละเทอมในสมการการเคลื่อนที่ของลากรานจ์ สมการที่ (3.2) จะได้ว่า

$$\frac{\partial KE}{\partial \theta_1} = -m_2 L_1 L_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial KE}{\partial \dot{\theta}_1} = I_{c1}\ddot{\theta}_1 + m_1 L_{c1}^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 L_{c2} \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$- m_2 L_1 L_{c2} \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial KE}{\partial \theta_2} = m_2 L_1 L_{c2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial KE}{\partial \dot{\theta}_2} = I_{c2}\ddot{\theta}_2 + m_2 L_{c2}^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 L_{c2} \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$- m_2 L_1 L_{c2} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

ส่วนแรงที่กระทำกับแขน (Q_i) หาได้ ดังนี้ (D'Souza, Garg, 1984)

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} T_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \qquad ; \; i = 1,2$$

โดยที่

T_j = แรงบิดที่ให้กับแขนที่ j

r_j = การขจัดเนื่องจากแรงบิด T_j

q_i = ตำแหน่งในพิกัดทั่วไปของแขนที่ i

ในกรณีของเรา จะได้ว่า

$$Q_i = T_1 \cdot \frac{d\theta_{10}}{d\theta_i} + T_2 \cdot \frac{d\theta_{21}}{d\theta_i} \qquad ; \; i = 1,2$$

โดยที่

θ_{10} = ตำแหน่งเชิงมุมของแขนที่ 1 เมื่อเทียบกับ แขนที่ 0 (ฐาน) = θ_1

θ_{21} = ตำแหน่งเชิงมุมของแขนที่ 2 เมื่อเทียบกับ แขนที่ 1 = $\theta_2 - \theta_1$

ดังนั้น

$$Q_1 = T_1 \cdot \frac{d\theta_{10}}{d\theta_1} + T_2 \cdot \frac{d\theta_{21}}{d\theta_1} = T_1 - T_2$$

$$Q_2 = T_1 \cdot \frac{d\theta_{10}}{d\theta_2} + T_2 \cdot \frac{d\theta_{21}}{d\theta_2} = T_2$$

นำเทอมต่าง ๆ ไปแทนค่าลงในสมการที่ (3.2) เราจะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ของแขนกลที่เคลื่อนที่ตาม คือ

$$(I_{c1}+m_1L_{c1}^2+m_2L_1^2)\ddot{\theta}_1 + m_2L_1L_{c2}\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$+ m_2L_1L_{c2}\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2) = T_1 - T_2$$

$$(I_{c2}+m_2L_{c2}^2)\ddot{\theta}_2 + m_2L_1L_{c2}\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$- m_2L_1L_{c2}\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) = T_2$$

หรือ

$$(I_{c1}+m_1L_{c1}^2+m_2L_1^2)\ddot{\theta}_1 + (I_{c2}+m_2L_{c2}^2)\ddot{\theta}_2$$
$$+ m_2L_1L_{c2}(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2L_1L_{c2}(\dot{\theta}_1^2-\dot{\theta}_2^2)\sin(\theta_1-\theta_2) = T_1$$

$$(I_{c2}+m_2L_{c2}^2)\ddot{\theta}_2 + m_2L_1L_{c2}\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$- m_2L_1L_{c2}\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) = T_2$$

___(3.6)

<u>คุณลักษณะทางพลศาสตร์ของระบบแขนกลที่เคลื่อนที่ตามเมื่อรวมมอเตอร์</u>

เนื่องจากแขนกลที่เคลื่อนที่ตามได้รับแรงบิดจากมอเตอร์ผ่านชุดเกียร์ทด ดังนั้น ใช้หลักการของดีอเลมเบิร์ท (D'ALEMBERT'S PRINCIPLE) หาความสัมพันธ์ของแรงบิดที่เพลาของมอเตอร์ ได้ว่า

$$T_{Mi} - T_i' - B_{Mi}\dot{\theta}_{Mi} = J_{Mi}\ddot{\theta}_{Mi} \quad ; \; i = 1,2 \qquad \text{\_\_\_(3.7)}$$

โดยที่

T_{Mi} = แรงบิดของมอเตอร์ที่ขับเคลื่อนข้อต่อที่ i

T_i' = แรงบิดเทียบเท่าของแขนกลข้อต่อที่ i เมื่อคิดที่เพลาของมอเตอร์

B_{Mi} = สัมประสิทธิ์ความหน่วงของมอเตอร์ที่ขับเคลื่อนข้อต่อที่ i

J_{Mi} = โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลของมอเตอร์ที่ขับเคลื่อนข้อต่อที่ i

θ_{Mi} = ตำแหน่งเชิงมุมของเพลาของมอเตอร์ที่ขับเคลื่อนข้อต่อที่ i

และ จากรูปที่ 3.3 ให้

N_{Mi} = จำนวนฟันเกียร์ที่เพลาของมอเตอร์ที่ขับเคลื่อนข้อต่อที่ i

N_i = จำนวนฟันเกียร์ที่เพลาของแขนกลข้อต่อที่ i

r_{Mi} = รัศมีพิทช์ของเกียร์ที่เพลาของมอเตอร์ที่ขับเคลื่อนข้อต่อที่ i

r_i = รัศมีพิทช์ของเกียร์ที่เพลาของแขนกลข้อต่อที่ i

n_i = อัตราทดระหว่างเกียร์ที่เพลาของมอเตอร์ กับ เกียร์ที่เพลาของแขนกล ข้อต่อที่ i $= (r_{Mi}/r_i) = (N_{Mi}/N_i) <= 1$

T_i' = แรงบิดเทียบเท่าของแขนกลข้อต่อที่ i เมื่อคิดที่เพลาของมอเตอร์

T_i = แรงบิดของแขนกลข้อต่อที่ i เมื่อคิดที่เพลาของแขนกล

θ_{Mi} = ตำแหน่งเชิงมุมของเพลาของมอเตอร์ที่ขับเคลื่อนข้อต่อที่ i

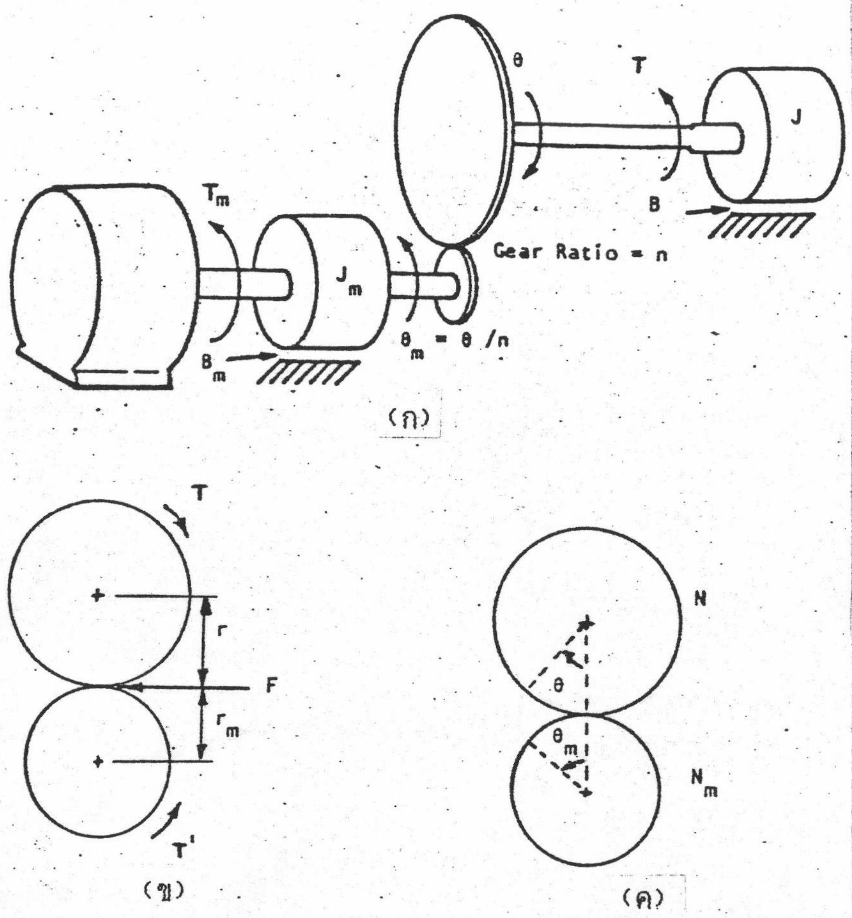
θ_{ij} = ตำแหน่งเชิงมุมของแขนที่ i เมื่อเทียบกับแขนที่ j

จะได้ว่า

$$T_i'/T_i = Fr_{Mi}/Fr_i = n_i \quad ; \; i = 1,2$$

$$\theta_{Mi}/\theta_{i(i-1)} = N_i/N_{Mi} = 1/n_i \quad ; \; i = 1,2$$

หรือ



รูปที่ 3.3 แสดงสัญลักษณ์ของมอเตอร์, เกียร์ทด และโหลดสำหรับแขนกลหนึ่งแขน

$$T_i' = n_i T_i \qquad ; \; i = 1,2 \qquad \text{\_\_\_(3.8)}$$

$$\theta_{Mi} = \theta_{i(i-1)}/n_i \qquad ; \; i = 1,2 \qquad \text{\_\_\_(3.9)}$$

แทนค่า สมการที่ (3.6) (3.8) และ (3.9) ลงในสมการที่ (3.7) ได้สมการของแรงบิดที่เพลาของแขนกลเป็น

$$\begin{aligned}
&(J_{M1}/n_1^2+I_{C1}+m_1L_{C1}^2+m_2L_1^2)\ddot{\theta}_1 + (I_{C2}+m_2L_{C2}^2)\ddot{\theta}_2 \\
&\quad + m_2L_1L_{C2}(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)\cos(\theta_1-\theta_2) \\
&\quad + (B_{M1}/n_1^2)\dot{\theta}_1 - m_2L_1L_{C2}(\dot{\theta}_1^2-\dot{\theta}_2^2)\sin(\theta_1-\theta_2) = T_{M1}/n_1 \\
&(J_{M2}/n_2^2+I_{C2}+m_2L_{C2}^2)\ddot{\theta}_2 - (J_{M2}/n_2^2)\ddot{\theta}_1 + m_2L_1L_{C2}\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) \\
&\quad + (B_{M2}/n_2^2)(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) - m_2L_1L_{C2}\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) = T_{M2}/n_2
\end{aligned}$$

__(3.10)

สมการที่ (3.10) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งมีความยุ่งยากลำบากและไม่สะดวกในการวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุมอัตโนมัติเพราะผลตอบสนองของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นจะมีรูปแบบที่ไม่แน่นอนและยังขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น (INITIAL CONDITION) อีกด้วย (Palm III, 1983) ดังนั้น ในทางปฏิบัติเราจะพยายามจำลองระบบทางกายภาพที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นให้เป็นเชิงเส้น (LINEARIZATION) เพื่อให้เกิดความคล่องตัวในการวิเคราะห์และออกแบบ โดยจะจำกัดการทำงานของระบบให้อยู่ใกล้จุดทำงานจุดหนึ่ง ซึ่งจะทำให้ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบที่มีความถูกต้องในบริเวณใกล้ ๆ จุดทำงานนั้น

<u>การจำลองระบบแขนกลที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้เป็นระบบแขนกลที่เป็นเชิงเส้น</u>

สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ของระบบแขนกลที่เคลื่อนที่ตาม คือ สมการที่ (3.10) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง สามารถเขียนใหม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้เป็นสมการของสเตทเวคเตอร์เมตริกซ์ ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(X, U) \qquad ; \quad i = 1,2,3,4 \qquad \text{\_\_(3.11)}$$

โดยที่

$X = [\ x_1, x_2, x_3, x_4\ ]^T = [\ \theta_{10}, \theta_{21}, \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{21}\ ]^T$

$U = [\ u_1, u_2\ ]^T = [\ T_{M1}/n_1, T_{M2}/n_2\ ]^T$

θ_{ij} = ตำแหน่งเชิงมุมของแขนที่ i เมื่อเทียบกับแขนที่ j

$\dot{\theta}_{ij}$ = ความเร็วเชิงมุมของแขนที่ i เมื่อเทียบกับแขนที่ j

u_i = แรงบิดของมอเตอร์ของแขนที่ i เมื่อคิดที่เพลาของแขนกล

ถ้าสมมติให้ $U_o(t)$ เป็นแรงบิดที่ให้แก่ระบบที่จุดทำงานปกติจุดหนึ่ง (NOMINAL INPUT) และ $X_o(t)$ เป็นตำแหน่งสเตทของระบบ (NOMINAL STATE) ที่จุดทำงานนี้ที่เป็นผลมาจากแรงบิด $U_o(t)$ ทำการกระจายสมการที่ (3.11) ด้วยอนุกรมเทเลอร์ (TAYLOR SERIES) รอบจุดทำงานนี้แล้วตัดเทอมที่มีอันดับมากกว่าหรือเท่ากับสองทิ้งไป จะได้

$$\delta\dot{x}_i = \left[\frac{\partial f_i(X,U)}{\partial x_j}\right]_{\substack{X = X_o(t)\\ U = U_o(t)}} .\delta x_j(t) + \left[\frac{\partial f_i(X,U)}{\partial u_k}\right]_{\substack{X = X_o(t)\\ U = U_o(t)}} .\delta u_k(t) \quad ; \; i,j=1,2,3,4 \; ; \; k=1,2 \qquad (3.12)$$

หรือ

$$\delta\dot{X} = A\delta X + B\delta U \qquad (3.13)$$

โดยที่

$$A = \left[\frac{\partial f_i(X,U)}{\partial x_j}\right]_o = \text{JACOBIAN MATRIX} \quad ; \; i,j = 1,2,3,4$$

$$B = \left[\frac{\partial f_i(X,U)}{\partial u_k}\right]_o \quad ; \; i = 1,2,3,4 \; ; \; k = 1,2$$

$$\delta X = X - X_o$$

$$\delta U = U - U_o$$

จากสมการที่ (3.10) ถ้าเรากำหนดให้

$$I_{M1} = J_{M1}/n_1^2$$
$$D_{M1} = B_{M1}/n_1^2$$
$$I_\alpha = I_{C1}+m_1L_{C1}^2+m_2L_1^2$$
$$I_\beta = I_{C2}+m_2L_{C2}^2$$
$$I_\eta = m_2L_1L_{C2}$$
$$x_1 = \theta_{10} = \theta_1$$
$$x_2 = \theta_{21} = \theta_2 - \theta_1$$
$$x_3 = \dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_1 = \dot{x}_1$$
$$x_4 = \dot{\theta}_{21} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \dot{x}_2$$
$$u_1 = T_{M1}/n_1$$

จะได้ว่า

$$(I_{M1}+I_{\alpha}+I_{\beta})\ddot{x}_1 + I_{\beta}\ddot{x}_2 + I_{\eta}(2\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)\cos x_2 + D_{M1}\dot{x}_1 + I_{\eta}\dot{x}_1^2\sin x_2 - I_{\eta}(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2\sin x_2 = u_1$$

$$(I_{M2}+I_{\beta})\ddot{x}_2 + I_{\beta}\ddot{x}_1 + I_{\eta}\ddot{x}_1\cos x_2 + D_{M2}\dot{x}_2 + I_{\eta}\dot{x}_1^2\sin x_2 = u_2$$

หรือ จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} I_{M1}+I_{\alpha}+I_{\beta}+2I_{\eta}\cos x_2 & I_{\beta}+I_{\eta}\cos x_2 \\ I_{\beta}+I_{\eta}\cos x_2 & I_{M2}+I_{\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1-D_{M1}x_3+I_{\eta}(2x_3x_4+x_4^2)\sin x_2 \\ u_2-D_{M2}x_4-I_{\eta}x_3^2\sin x_2 \end{bmatrix} \quad \text{\_\_(3.14)}$$

ใช้ กฎของเครเมอร์ (CRAMER'S RULE) กับสมการที่ (3.14) จะหา $\dot{x}_3$ และ $\dot{x}_4$ ได้

$$\dot{x}_3 = \frac{\begin{vmatrix} u_1-D_{M1}x_3+I_{\eta}(2x_3x_4+x_4^2)\sin x_2 & I_{\beta}+I_{\eta}\cos x_2 \\ u_2-D_{M2}x_4-I_{\eta}x_3^2\sin x_2 & I_{M2}+I_{\beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{M1}+I_{\alpha}+I_{\beta}+2I_{\eta}\cos x_2 & I_{\beta}+I_{\eta}\cos x_2 \\ I_{\beta}+I_{\eta}\cos x_2 & I_{M2}+I_{\beta} \end{vmatrix}}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\begin{vmatrix} I_{M1}+I_{\alpha}+I_{\beta}+2I_{\eta}\cos x_2 & u_1-D_{M1}x_3+I_{\eta}(2x_3x_4+x_4^2)\sin x_2 \\ I_{\beta}+I_{\eta}\cos x_2 & u_2-D_{M2}x_4-I_{\eta}x_3^2\sin x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{M1}+I_{\alpha}+I_{\beta}+2I_{\eta}\cos x_2 & I_{\beta}+I_{\eta}\cos x_2 \\ I_{\beta}+I_{\eta}\cos x_2 & I_{M2}+I_{\beta} \end{vmatrix}}$$

ถ้าหากเขียนสมการให้อยู่ในรูปของสมการที่ (3.11) จะได้ว่า

$$\dot{x}_1 = f_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = f_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = f_3 = \frac{\{I_{M2}+I_\beta\}\{u_1-D_{M1}x_3+I_\eta(2x_3x_4+x_4^2)\sin x_2\}}{DEN} - \frac{\{I_\beta+I_\eta\cos x_2\}\{u_2-D_{M2}x_4-I_\eta x_3^2\sin x_2\}}{DEN}$$

$$\dot{x}_4 = f_4 = \frac{\{I_{M1}+I_\alpha+I_\beta+2I_\eta\cos x_2\}\{u_2-D_{M2}x_4-I_\eta x_3^2\sin x_2\}}{DEN} - \frac{\{I_\beta+I_\eta\cos x_2\}\{u_1-D_{M1}x_3+I_\eta(2x_3x_4+x_4^2)\sin x_2\}}{DEN}$$

โดยที่

$$DEN = (I_{M1}+I_\alpha+I_\beta+2I_\eta\cos x_2)(I_{M2}+I_\beta) - (I_\beta+I_\eta\cos x_2)^2$$
$$= (I_{M1}+I_\alpha)(I_{M2}+I_\beta) + I_{M2}I_\beta + 2I_{M2}I_\eta\cos x_2 - I_\eta^2\cos^2 x_2$$

เราจะใช้สมการที่ (3.12) ในการทำสมการให้เป็นเชิงเส้น โดยจะหาเทอมต่างๆ ได้ ดังนี้

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad , \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \quad , \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0 \quad , \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = 0 \quad , \frac{\partial f_1}{\partial u_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \quad , \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \quad , \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = 1 \quad , \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = 0 \quad , \frac{\partial f_2}{\partial u_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\{I_{M2}+I_\beta\}\{I_\eta(2x_3x_4+x_4^2)\cos x_2\}}{\mathrm{DEN}}$$

$$+ \frac{I_\eta \sin x_2\{u_2-D_{M2}x_4-I_\eta x_3^2\sin x_2\}}{\mathrm{DEN}}$$

$$+ \frac{\{I_\eta x_3^2\cos x_2\}\{I_\beta+I_\eta\cos x_2\}}{\mathrm{DEN}}$$

$$- \left[\frac{\{I_{M2}+I_\beta\}\{u_1-D_{M1}x_3+I_\eta(2x_3x_4+x_4^2)\sin x_2\}}{(\mathrm{DEN})^2}\right.$$

$$\left.- \frac{\{I_\beta+I_\eta\cos x_2\}\{u_2-D_{M2}x_4-I_\eta x_3^2\sin x_2\}}{(\mathrm{DEN})^2}\right]$$

$$.[2I_\eta^2\sin x_2\cos x_2 - 2I_{M2}I_\eta\sin x_2]$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\{I_{M2}+I_\beta\}\{-D_{M1}+2I_\eta x_4\sin x_2\} + 2I_\eta x_3\sin x_2\{I_\beta+I_\eta\cos x_2\}}{\mathrm{DEN}}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{\{I_{M2}+I_\beta\}\{2I_\eta(x_3+x_4)\sin x_2\} + D_{M2}\{I_\beta+I_\eta\cos x_2\}}{\mathrm{DEN}}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_1} = \frac{(I_{M2}+I_\beta)}{\mathrm{DEN}}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_2} = \frac{-(I_\beta+I_\eta\cos x_2)}{\mathrm{DEN}}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \emptyset$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{\{I_{M1}+I_\alpha+I_\beta+2I_\eta\cos x_2\}\{-I_\eta x_3^2\cos x_2\}}{\mathrm{DEN}}$$

$$+\ \frac{\{u_2-D_{M2}x_4-I_\eta x_3^2\sin x_2\}\{-2I_\eta\sin x_2\}}{DEN}$$

$$-\ \left[\frac{\{I_\beta+I_\eta\cos x_2\}\{I_\eta(2x_3x_4+x_4^2)\cos x_2\}}{DEN}\right.$$

$$\left.+\ \frac{\{u_1-D_{M1}x_3+I_\eta(2x_3x_4+x_4^2)\sin x_2\}\{-I_\eta\sin x_2\}}{DEN}\right]$$

$$-\ \left[\frac{\{I_{M1}+I_\alpha+I_\beta+2I_\eta\cos x_2\}\{u_2-D_{M2}x_4-I_\eta x_3^2\sin x_2\}}{(DEN)^2}\right.$$

$$\left.-\ \frac{\{I_\beta+I_\eta\cos x_2\}\{u_1-D_{M1}x_3+I_\eta(2x_3x_4+x_4^2)\sin x_2\}}{(DEN)^2}\right]$$

$$.[2I_\eta^2\sin x_2\cos x_2\ -\ 2I_{M2}I_\eta\sin x_2]$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{\{I_{M1}+I_\alpha+I_\beta+2I_\eta\cos x_2\}\{-2I_\eta x_3\sin x_2\}}{DEN} - \frac{\{I_\beta+I_\eta\cos x_2\}\{-D_{M1}+2I_\eta x_4\sin x_2\}}{DEN}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{-D_{M2}\{I_{M1}+I_\alpha+I_\beta+2I_\eta\cos x_2\}}{DEN} - \frac{\{I_\beta+I_\eta\cos x_2\}\{2I_\eta(x_3+x_4)\sin x_2\}}{DEN}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial u_1} = \frac{-(I_\beta+I_\eta\cos x_2)}{DEN}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial u_2} = \frac{(I_{M1}+I_\alpha+I_\beta+2I_\eta\cos x_2)}{DEN}$$

โดยที่

$$DEN = (I_{M1}+I_\alpha)(I_{M2}+I_\beta) + I_{M2}I_\beta + 2I_{M2}I_\eta\cos x_2 - I_\eta^2\cos^2 x_2$$

ระบบแขนกลที่ทำให้เป็นเชิงเส้นแล้ว สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \partial f_3/\partial x_2 & \partial f_3/\partial x_3 & \partial f_3/\partial x_4 \\ 0 & \partial f_4/\partial x_2 & \partial f_4/\partial x_3 & \partial f_4/\partial x_4 \end{bmatrix}\right|_{\substack{X=X_o \\ U=U_o}} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix}$$

$$+ \left.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \partial f_3/\partial u_1 & \partial f_3/\partial u_2 \\ \partial f_4/\partial u_1 & \partial f_4/\partial u_2 \end{bmatrix}\right|_{\substack{X=X_o \\ U=U_o}} \cdot \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix} \qquad \text{\_\_(3.15)}$$

ในโครงการวิจัยนี้ จะเลือกจุดทำงานที่ $U_o = 0$ ($u_1=0, u_2=0$) ซึ่งก็คือ ตำแหน่งที่ไม่มีแรงบิดกระทำและแขนกลหยุดนิ่ง หรือ

$x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{21}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

กล่าวคือ การทำระบบให้เป็นเชิงเส้นรอบจุดทำงานดังกล่าว จะให้คำตอบที่ถูกต้องว่า ในขณะที่แขนกลหยุดนิ่งนั้น หากมีการให้แรงบิดค่าน้อย ๆ แก่แขนกล ลักษณะการตอบสนองของแขนกลจะเป็นอย่างไร สมการที่ (3.15) ที่คำนวณที่ $u_1=u_2=0$, $x_3=x_4=0$ คือ

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b'_{31} & b'_{32} \\ b'_{41} & b'_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix} \text{\_(3.16)}$$

โดยที่

$$a'_{33} = \frac{-D_{M1}(I_{M2}+I_{\beta})}{DEN}$$

$$a'_{34} = \frac{D_{M2}(I_\beta+I_\eta\cos x_2)}{DEN}$$

$$a'_{43} = \frac{D_{M1}(I_\beta+I_\eta\cos x_2)}{DEN}$$

$$a'_{44} = \frac{-D_{M2}(I_{M1}+I_\alpha+I_\beta+2I_\eta\cos x_2)}{DEN}$$

$$b'_{31} = \frac{(I_{M2}+I_\beta)}{DEN}$$

$$b'_{32} = \frac{-(I_\beta+I_\eta\cos x_2)}{DEN}$$

$$b'_{41} = \frac{-(I_\beta+I_\eta\cos x_2)}{DEN}$$

$$b'_{42} = \frac{(I_{M1}+I_\alpha+I_\beta+2I_\eta\cos x_2)}{DEN}$$

$$DEN = (I_{M1}+I_\alpha)(I_{M2}+I_\beta) + I_{M2}I_\beta + 2I_{M2}I_\eta\cos x_2 - I_\eta^2\cos^2 x_2$$

เราจะเห็นว่า สมการที่ (3.16) คือ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลที่เคลื่อนที่ตาม นั่นเอง

<u>แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลที่ใช้ในการออกแบบระบบควบคุมอัตโนมัติ</u>

เนื่องจาก แขนกลที่เคลื่อนที่ตาม เคลื่อนที่โดยได้รับแรงบิดจากมอเตอร์ผ่านชุดเกียร์

ทด (INDIRECT DRIVE) และชุดเกียร์ทดที่ใช้ในการวิจัยมีอัตราทดรอบที่สูง ($n << 1$) ซึ่งจะเห็นได้จากสมการที่ (3.10) ว่า ค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของชิ้นส่วนของแขนกลเองนั้นมีผลต่อคุณลักษณะทางพลศาสตร์ของแขนกลน้อยกว่าค่าของพารามิเตอร์ของมอเตอร์มาก โดยมีอัตราส่วนของโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลระหว่างมอเตอร์และแขนกลสำหรับข้อต่อที่ 1 ประมาณ 24 เท่า และสำหรับข้อต่อที่ 2 ประมาณ 10 เท่า นอกจากนั้น ค่าของพารามิเตอร์ของชิ้นส่วนของแขนกลเองก็มีค่าไม่คงที่แต่จะแปรเปลี่ยนไปตามตำแหน่งของการเคลื่อนที่ (x_2) ถ้าใช้สมการที่ (3.16) เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลในการออกแบบระบบควบคุมอัตโนมัติ จะทำให้คอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการควบคุมมีภาระในการคำนวณค่อนข้างมากแต่ได้รับประโยชน์น้อย ดังนั้นจึงจะตัดเทอมที่แสดงค่าของพารามิเตอร์ต่างๆของชิ้นส่วนของแขนกลเอง ($I_\alpha, I_\beta, I_\eta$) ทิ้งไป สมการที่ (3.10) จะลดรูปลงเหลือ

$$(J_{M1}/n_1^2)\ddot{\theta}_1 + (B_{M1}/n_1^2)\dot{\theta}_1 = T_{M1}/n_1$$
$$(J_{M2}/n_2^2)(\ddot{\theta}_2-\ddot{\theta}_1) + (B_{M2}/n_2^2)(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) = T_{M2}/n_2$$

หรือ

$$\begin{aligned} I_{M1}\ddot{\theta}_1 + D_{M1}\dot{\theta}_1 &= u_1 \\ I_{M2}(\ddot{\theta}_2-\ddot{\theta}_1) + D_{M2}(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) &= u_2 \end{aligned} \qquad \text{\_\_(3.17)}$$

และ สมการที่ (3.14) จะเป็น

$$\begin{bmatrix} I_{M1} & 0 \\ 0 & I_{M2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1-D_{M1}x_3 \\ u_2-D_{M2}x_4 \end{bmatrix} \qquad \text{\_\_(3.18)}$$

ส่วนสมการที่ (3.16) จะเป็น

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & 0 \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix} \qquad \text{\_(3.19)}$$

หรือ

$$\delta\dot{X} = A\delta X + B\delta U$$

โดยที่

$$a_{33} = -D_{M1}/I_{M1}$$

$$a_{44} = -D_{M2}/I_{M2}$$

$$b_{31} = 1/I_{M1}$$

$$b_{42} = 1/I_{M2}$$

ซึ่งเราจะใช้สมการที่ (3.19) เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลในการออกแบบระบบควบคุมอัตโนมัติในบทต่อไป