การประมาณค่าเฉลี่ยด้วยค่าประมาณอัตราส่วนของประชากรอนันตะ

นายณรงค์ ชัยประยูรหัทธยา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาสถิติศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาสถิติ ภาควิชาสถิติ
คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2546

ISBN 974-17-4348-3

MEAN ESTIMATION METHOD USING ESTIMATED RATIO FROM FINITE POPULATION

Mr. Narong Chaiprayoonhattaya

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science in Statistics

Department of Statistics

Faculty of Commerce and Accountancy

Chulalongkorn University

Academic Year 2003

ISBN 974-17-4348-3

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การประมาณค่าเฉลี่ยด้วยค่าประมาณอัตราส่วนของประชากรอันตะ

โดย นายณรงค์ ชัยประยูรหัทธยา

สาขาวิชา สถิติ

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร. กัลยา วานิชย์บัญชา

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ดนุชา คุณพนิชกิจ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(รองศาสตราจารย์ ดร. กัลยา วานิชย์บัญชา)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ นพรัตน์ รุ่งอุทัยศิริ)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. อรุณี กำลัง)

ณรงค์ ชัยประยูรหัทธยา : การประมาณค่าเฉลี่ยด้วยค่าประมาณอัตราส่วนของประชากรอันตะ (MEAN ESTIMATION METHOD USING ESTIMATED RATIO FROM FINITE POPULATION) อ.ที่ปรึกษา : รองศาสตราจารย์ ดร. กัลยา วานิชย์บัญชา , 64 หน้า. ISBN 974-17-4348-3

การวิจัยครั้งนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งพัฒนามาจากตัวประมาณของ Tin (1965 ; r_{T1} และ r_{T2}) โดยตัวประมาณที่เสนอ คือ $\bar{y}_{MOD1} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_{T1}\,\bar{X}$ และ $\bar{y}_{MOD2} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_{T2}\,\bar{X}$ เมื่อ W คือ ค่าถ่วงน้ำหนัก ซึ่งได้ศึกษาถึงคุณสมบัติของตัวประมาณ และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่เสนอกับตัวประมาณของ Chakrabarty (1979 ; $\bar{y}_{C1}$ และ $\bar{y}_{C2}$) และตัวประมาณอัตราส่วน $\bar{y}_r = r\bar{X}$ เมื่อ $r = \bar{y}/\bar{x}$ การเลือกตัวประมาณที่เหมาะสมกับสถานการณ์ต่างๆ จะแบ่งการศึกษาเป็น 2 กรณี คือ กรณีทั่วไปและกรณีที่ y และ x มีความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้น $y_i = \alpha + \beta\, x_i + u_i$; $\beta > 0$ เมื่อ x_i/n มีการแจกแจงแบบแกมม่า พารามิเตอร์ h และ u_i มีการแจกแจงแบบปกติค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าแปรปรวนเท่ากับ $n\delta$

ผลจากการวิจัยพบว่ากรณีทั่วไปและกรณีที่ y และ x มีความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด สำหรับ $m = nh \geq 32$ ถ้า y และ x มีความสัมพันธ์อยู่ในระดับหนึ่ง และสัมประสิทธิความแปรผันของ x มีค่าใกล้เคียงกับของ y และ/หรือ น้อยกว่าสองเท่าของ y แล้ว ตัวประมาณ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}$ ซึ่งตัวประมาณ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกันเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ โดยที่ $\bar{y}_{C1}$ เป็นตัวประมาณที่คำนวณง่ายที่สุด แต่ $\bar{y}_{MOD1}$ เป็นตัวประมาณที่มีผลกระทบของความเอนเอียงต่อประสิทธิภาพน้อยที่สุด และค่า W ที่เหมาะสมที่สุดควรอยู่ระหว่าง $(2\rho - K)/K$ ถึง $2\rho/K$ เมื่อ $K = C_x/C_y$, $C_x = S_x/\bar{X}$ และ $C_y = S_y/\bar{Y}$

ภาควิชาสถิติ ลายมือชื่อนิสิต ....

สาขาวิชาสถิติ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....

ปีการศึกษา 2546

4582211126 : MAJOR STATISTICS

KEYWORD : ratio estimator / the population mean / the least – biased effected estimator

NARONG CHAIPRAYOONHATTAYA : MEAN ESTIMATION METHOD USING ESTIMATED RATIO FROM FINITE POPULATION. THESIS ADVISOR : KANLAYA VANICHBUNCHA, Ph.D., 64 pp. ISBN 974-17-4348-3

The objective of this research is to find the new ratio estimators for the population mean which is developed from Tin's estimators (1965 ; r_{T1} and r_{T2}). The proposed estimators are $\bar{y}_{MOD1} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_{T1}\bar{X}$ and $\bar{y}_{MOD2} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_{T2}\bar{X}$ when W is weighted constant. The properties of the estimators are studied and the efficiency comparison among proposed estimators, Chakrabarty's estimators (1979 ; $\bar{y}_{C1}$ and $\bar{y}_{C2}$), and $\bar{y}_r = r\bar{X}$ when $r = \bar{y}/\bar{x}$. There are two cases for selecting the appropriate estimators : the general case and the case of y related to x within the linear model $y_i = \alpha + \beta\,x_i + u_i$; $\beta > 0$ when x_i/n have the gamma distribution with parameter h and u_i have the normal distribution with mean zero and variance $n\delta$.

Due to the research, both general case and case of y related to x within the defined linear model for $m = nh \geq 32$ have the same results. Firstly, the estimator $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ and $\bar{y}_{MOD2}$ are more efficient than both $\bar{y}_r$ and $\bar{y}$ when y relates to x and coefficient of variance of x (C_x) is close to coefficient of variance of y (C_y) and/or less than two times of y's. The efficiency of these estimators is close to each others when sample size is large enough, so $\bar{y}_{C1}$ is the easiest computed estimator. However, $\bar{y}_{MOD1}$ is the least - biased effected estimator, and the appropriate value of W is between $(2\rho - K)/K$ to $2\rho/K$ when $K = C_x/C_y$, $C_x = S_x/\bar{X}$ and $C_y = S_y/\bar{Y}$.

Department Statistics　　Student's signature ....

Field of study Statistics　　Advisor's signature ....

Academic year 2003

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือ แนะนำ และเอาใจใส่อย่างใกล้ชิดจาก รองศาสตราจารย์ ดร. กัลยา วานิชย์บัญชา รองคณบดีฝ่ายวิชาการ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี ผู้วิจัยขอน้อมกราบขอบพระคุณต่อท่านอาจารย์เป็นอย่างสูง ตลอดทั้งอาจารย์ทุกท่านที่ได้สอนผู้วิจัยมา ณ โอกาสนี้ด้วย

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา รองศาสตราจารย์ นพรัตน์ รุ่งอุทัยศิริ และอาจารย์ ดร. อรุณี กำลัง ในฐานะประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่กรุณาให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์ในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณ คุณแม่ และน้าสุวรีย์ ดรุณสนธยา ที่ช่วยส่งเสริมและสนับสนุนให้ผู้วิจัยได้มีโอกาสทางการศึกษาเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา สุดท้ายนี้ขอขอบคุณน้องปัทมนุช หิรัญเมฆาวนิช รวมถึงน้องๆ และเพื่อนๆ ทุกคนที่คอยห่วงใยและให้กำลังใจผู้วิจัยมาโดยตลอด

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์

N	แทนขนาดประชากร
n	แทนขนาดตัวอย่าง
$\bar{Y}=\sum_{i=1}^{N} y_i/N$	แทนค่าเฉลี่ยประชากรของ y
$\bar{X}=\sum_{i=1}^{N} x_i/N$	แทนค่าเฉลี่ยประชากรของ x
$\bar{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i/n$	แทนค่าเฉลี่ยตัวอย่างของ y
$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i/n$	แทนค่าเฉลี่ยตัวอย่างของ x
$S_y^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2$	แทนค่าแปรปรวนประชากรของ y
$S_x^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{X})^2$	แทนค่าแปรปรวนประชากรของ x
$S_{xy}=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{X})(y_i-\bar{Y})$	แทนค่าแปรปรวนประชากรร่วมของ x และ y
$s_y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$	แทนค่าแปรปรวนตัวอย่างของ y
$s_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$	แทนค่าแปรปรวนตัวอย่างของ x
$s_{xy}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	แทนค่าแปรปรวนตัวอย่างร่วมของ x และ y
$C_y=\frac{S_y}{\bar{Y}}$	แทนค่าสัมประสิทธิความแปรผันของ y
$C_x=\frac{S_x}{\bar{X}}$	แทนค่าสัมประสิทธิความแปรผันของ x
$S.E.(\bar{y})$	แทนค่าคาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\bar{y}$
$S.E.(\bar{x})$	แทนค่าคาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\bar{x}$
$C.V.(\bar{y})=\frac{S.E.(\bar{y})}{\bar{Y}}$	แทนค่าสัมประสิทธิความแปรผันของ $\bar{y}$
$C.V.(\bar{x})=\frac{S.E.(\bar{x})}{\bar{X}}$	แทนค่าสัมประสิทธิความแปรผันของ $\bar{x}$
ρ	แทนค่าสัมประสิทธิสหสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x
$f_{n,N}$	แทนฟังก์ชันของ n และ N
$O(n^{-h})$	แทน $f_{n,N}$ เมื่อ $\lim_{n,N\to\infty} n^h \mid f_{n,N} \mid = C < \infty$; C เป็นค่าคงที่

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การเก็บข้อมูลปฐมภูมิหรือข้อมูลที่ทำการเก็บรวบรวมจากแหล่งกำเนิดของข้อมูล เพื่อสร้างสารสนเทศสำหรับการวิจัยในเรื่องใดเรื่องหนึ่งโดยการสำรวจ นับได้ว่า**การสำรวจตัวอย่าง** (sample survey) เป็นวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลปฐมภูมิวิธีหนึ่งที่สำคัญและนำมาใช้กันโดยทั่วไปเสมอๆ แทน**การสำมะโน** (census) ทั้งนี้สาเหตุที่สำคัญคือ การสำมะโนซึ่งเป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลจากทุกๆ หน่วยที่สามารถให้ข้อมูลในเรื่องนั้นได้ โดยปกติประชากรที่สนใจศึกษามักมีขนาดใหญ่ ทำให้การสำมะโนแม้จะได้ข้อมูลที่ครบถ้วนสมบูรณ์แต่ก็ต้องใช้ทรัพยากรทั้งเงิน เวลา และงบประมาณเป็นจำนวนมาก บ่อยครั้งเป็นสิ่งที่เป็นไปไม่ได้ภายใต้ข้อจำกัดที่มีอยู่ อันเป็นอุปสรรคที่สำคัญของการสำมะโน ส่วนการสำรวจตัวอย่างสามารถทำได้โดยใช้ทรัพยากรน้อยกว่า และเมื่อปริมาณการเก็บรวบรวมข้อมูลลดลง การรักษาและควบคุมคุณภาพของข้อมูลย่อมทำได้ง่ายขึ้น แต่ข้อมูลที่ได้จะเป็นข้อมูลเพียงบางส่วนไม่ใช่ข้อมูลที่ครบถ้วนสมบูรณ์ จึงต้องอาศัยวิธีการทางสถิติในการเลือกตัวอย่างจากประชากรและอนุมานกลับไปหาประชากรอีกทีหนึ่ง ทฤษฎีดังกล่าวเรียกว่า **ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง** (sampling theory)

ถ้า y คือตัวแปรที่สนใจ การประมาณค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ด้วย**การเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย** (simple random sampling) ขนาด n จากประชากรขนาด N ตัวประมาณของค่าเฉลี่ยประชากรที่สมควรพิจารณาเป็นอันดับแรกคือ ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n$ เนื่องจากเป็นตัวประมาณที่มีคุณสมบัติของตัวประมาณที่ดีหลายประการดังนี้

1. $\bar{y}$ เป็นตัวประมาณ**ไม่เอนเอียง** (unbiased)
2. $\bar{y}$ เป็นตัวประมาณที่**แนบนัยหรือคงเส้นคงวา** (consistent)
3. $\bar{y}$ เป็นตัวประมาณที่วัด**ความถูกต้อง** (accuracy) ได้ด้วยค่าแปรปรวน

นอกจากค่าเฉลี่ยตัวอย่างแล้ว ยังมี**ตัวประมาณอัตราส่วน** (ratio estimators) และ**ตัวประมาณความถดถอย** (regression estimators) ของค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งเป็นตัวประมาณที่นำ**ตัวแปรช่วย** (auxiliary variable) เช่น x ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ y และสามารถหาค่าประชากรได้ มาใช้ประโยชน์ในการเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณให้ดีขึ้นกว่าใช้ค่าของตัวแปร y เพียงอย่าง

เดียว สำหรับ**ตัวประมาณอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยประชากร**คือ $\bar{y}_r = r\bar{X}$ เมื่อ $r = \bar{y}/\bar{x}$ คือ ค่าอัตราส่วนของตัวแปร $\bar{y}$ กับ $\bar{x}$ และ $\bar{X}$ คือ ค่าเฉลี่ยประชากรของตัวแปร x ซึ่งคุณสมบัติของ $\bar{y}_r$ ที่ Cochran (1977) ได้กล่าวไว้คือ $\bar{y}_r$ เป็นตัวประมาณที่แนบนัย แต่ $\bar{y}_r$ เป็นตัวประมาณที่เอนเอียง โดยความเอนเอียงนี้จะมีขนาดเล็กจนไม่ต้องคำนึงถึงได้ถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ หรือใหญ่พอที่จะทำให้สัมประสิทธิความแปรผันของ $\bar{x}$ มีค่าน้อยกว่า 0.1

จากการที่ตัวประมาณอัตราส่วนนี้มีข้อจำกัดในเรื่องความเอนเอียงของตัวประมาณ จึงทำให้การนำตัวประมาณไปใช้ต้องระวังเรื่องขนาดตัวอย่างเป็นอย่างมาก บางครั้งในทางปฏิบัติการกำหนดขนาดตัวอย่างให้ใหญ่พออาจทำได้ไม่เสมอไป จึงมีผู้สนใจที่จะทำการปรับปรุงตัวประมาณอัตราส่วน เพื่อลดความเอนเอียงลงหรือกำจัดความเอนเอียงให้หมดไป เช่น หาตัวประมาณอัตราส่วนที่มีความเอนเอียงอยู่ใน $O(n^{-2})$ ซึ่งจะเข้าสู่ 0 เร็วกว่า $\bar{y}_r$ หรือหาตัวประมาณอัตราส่วนที่ไม่เอนเอียง เป็นต้น ตัวอย่างงานวิจัยที่น่าสนใจมีดังนี้

Lahiri (1951) ได้เสนอวิธีที่จะทำให้ r ซึ่งเดิมเป็นตัวประมาณที่เอนเอียงของ $R = \bar{Y}/\bar{X}$ ให้เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง โดยเปลี่ยนความน่าจะเป็นที่จะถูกเลือกเข้ามาในตัวอย่างจากมีโอกาสเท่าๆ กันเป็นให้มีความน่าจะเป็นเป็นสัดส่วนกับ $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ในแนวคิดเดียวกัน Midzuno (1951) ได้เสนออีกวิธีที่อาจใช้ได้สะดวกขึ้น โดยเปลี่ยนเป็นเลือกหน่วยแรกด้วยความน่าจะเป็นเป็นสัดส่วนกับ x_i และอีก $n-1$ หน่วยที่เหลือเลือกโดยให้แต่ละหน่วยมีโอกาสถูกเลือกเท่าๆ กัน หรือเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย $n-1$ หน่วยจาก $N-1$ หน่วยที่เหลือในประชากร

Quenouille (1956) ได้เสนอตัวประมาณ $r_Q = 2r - 1/2(r_1 + r_2)$ เมื่อ r_1 และ r_2 คือค่าอัตราส่วนตัวอย่างจากการสุ่มแบ่งครึ่งตัวอย่างออกเป็นสองกลุ่มที่ไม่ซ้ำซ้อนกัน และจากงานวิจัยของ Durbin (1959) ได้แสดงให้เห็นว่า r_Q เป็นตัวประมาณที่มีความเอนเอียงอยู่ใน $O(n^{-2})$ และเป็นตัวประมาณที่เหมาะสมกว่า r

Tin (1965) ได้เสนอตัวประมาณ $r_{T1} = r\{1+\eta(s_{xy}/\overline{xy} - s_x^2/\bar{x}^2)\}$ เมื่อ $\eta = (1/n - 1/N)$ ในงานวิจัยได้ทำการเปรียบเทียบ r_{T1} กับตัวประมาณของ Beale (1962) ; $r_B = r(1+\eta s_{xy}/\overline{xy})/(1+\eta s_x^2/\bar{x}^2)$, r_Q และ r โดยผลจากการวิจัยได้แสดงให้เห็นว่า r_{T1} จะเป็นตัวประมาณที่เหมาะสมที่สุดเมื่อ y และ x มี**การแจกแจงแบบปกติสองตัวแปร** (bivariate normal distribution) นอกจากนี้ ในงานวิจัยยังได้กล่าวถึงตัวประมาณ $r_{T2} = r\{1+\eta(s_{xy}/\overline{xy} - s_x^2/\bar{x}^2)(1-3\eta S_x^2/\bar{x}^2)\}$ ซึ่งภายใต้การแจกแจงแบบปกติ r_{T2} จะมีความเอนเอียงน้อยกว่า r_{T1} แต่ r_{T2} มีประสิทธิภาพน้อยกว่า r_{T1}

Chakrabarty (1977) ได้เสนอตัวประมาณ $\bar{y}_{C1} = (1-W)\,\bar{y} + W\,\bar{y}_r$ และ $\bar{y}_{C2} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_Q\bar{X}$ เมื่อ W คือ ค่าถ่วงน้ำหนัก ; $0 < W < 1$ ในงานวิจัยได้ทำการเปรียบเทียบตัวประมาณ $\bar{y}_{C1}$ และ $\bar{y}_{C2}$ กับตัวประมาณอัตราส่วนของ Srivastava (1967) ; $\bar{y}_S = \bar{y}\{\bar{X}/\bar{x}\}^w$, $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}$ โดยผลจากการวิจัยได้แสดงให้เห็นว่า $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$ และ $\bar{y}_S$ เป็นตัวประมาณที่เหมาะสมกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}$ ซึ่งประสิทธิภาพของ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$ และ $\bar{y}_S$ จะมีค่าใกล้เคียงกันเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ

จากงานวิจัยข้างต้นนี้ ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะพัฒนาตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่ โดยอาศัยแนวคิดจากตัวประมาณของ Chakrabarty และการนำตัวประมาณของ Tin มาใช้ ตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่ที่ผู้วิจัยเสนอมีรูปแบบดังนี้

$$\bar{y}_{MOD1} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_{T1}\,\bar{X} \tag{1.1}$$

และ

$$\bar{y}_{MOD2} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_{T2}\,\bar{X} \tag{1.2}$$

นอกจากนี้ ผู้วิจัยจะทำการศึกษาคุณสมบัติของตัวประมาณ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่เสนอกับตัวประมาณของ Chakrabarty และ $\bar{y}_r$ เพื่อหาแนวทางในการตัดสินใจเลือกตัวประมาณที่เหมาะสมกับสถานการณ์ต่างๆ

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อศึกษาคุณสมบัติของตัวประมาณ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$
2. เพื่อศึกษาคุณสมบัติของตัวประมาณ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด
3. เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ กับตัวประมาณ $\bar{y}_r$, $\bar{y}_{C1}$ และ $\bar{y}_{C2}$
4. เพื่อหาแนวทางในการตัดสินใจเลือกตัวประมาณที่เหมาะสมกับสถานการณ์ต่างๆ

1.3 สมมติฐานการวิจัย

1. ตัวประมาณ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เป็นตัวประมาณที่เหมาะสมกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}$
2. ตัวประมาณ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกันเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ

1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น

1. y เป็นตัวแปรที่สนใจ และ x เป็นตัวแปรช่วยที่สามารถหาค่าประชากรได้
2. y และ x มีความสัมพันธ์เชิงเส้นต่อกันและมีทิศทางเดียวกัน
3. ค่า y_i และ x_i ของแต่ละหน่วยในประชากรมีค่าเป็นบวก ; $i = 1, \ldots, N$
4. การเลือกตัวอย่างจะใช้วิธีการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายขนาด n จากประชากรขนาด N แบบไม่ใส่คืน แล้วทำการเก็บข้อมูล (y_i, x_i) จากแต่ละหน่วยในตัวอย่าง

1.5 ขอบเขตการวิจัย

1. คุณสมบัติของตัวประมาณที่จะทำการศึกษาในงานวิจัย ได้แก่ ความแนบนัยหรือความคงเส้นคงวา ความเอนเอียง และความแปรปรวน โดยแบ่งการศึกษาเป็น 2 กรณีดังนี้

   1.1 กรณีทั่วไป โดยกำหนดให้ค่า x_i ต่างๆ มีค่าเป็นบวก และตัวอย่างมีขนาดใหญ่ โดยที่

$$|\delta_{\bar{x}}| = \left|\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{X}}\right| < 1$$

   1.2 กรณีที่ y และ x มีความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้น $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$; $\beta > 0$, $E(u_i \mid x_i) = 0$, $E(u_i, u_j \mid x_i, x_j) = 0$ และ $V(u_i \mid x_i) = n\delta$ (δ เป็นค่าคงที่ใน $O(n^{-1})$) เมื่อ x_i/n มี**การแจกแจงแบบแกมม่า** (gamma distribution) พารามิเตอร์ h

2. ค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรต่างๆ มีดังนี้

   2.1 ρ หรือสัมประสิทธิสหสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x มีค่าเท่ากับ 0.1 ถึง 0.9 โดยมีค่าเพิ่มขึ้นครั้งละ 0.1

   2.2 $K = C_x/C_y$ หรือสัดส่วนระหว่างสัมประสิทธิความแปรผันของ x เทียบกับของ y มีค่าเท่ากับ 0.25 , 0.50 , 1.00 , 1.50 และ 2.00

   2.3 พารามิเตอร์ $m = nh$ มีค่าเท่ากับ 8 , 16 , 20 และ 32

1.6 เกณฑ์ที่ใช้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณ

1. **ความถูกต้อง** (accuracy) ของตัวประมาณ จะใช้**ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง** (mean square error ; $\boldsymbol{MSE}$) เช่น $\bar{y}_r$ เป็นตัวประมาณอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ จะได้ว่าค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $\bar{y}_r$ คือ

$$MSE(\bar{y}_r) \;=\; E[\bar{y}_r - \bar{Y}]^2 \;=\; Var(\bar{y}_r) + \{Bias(\bar{y}_r)\}^2$$

2. **ความแม่นยำ** (precision) ของตัวประมาณ จะใช้**ค่าแปรปรวน** (variance ; $\boldsymbol{Var}$) ซึ่งในกรณีที่ตัวประมาณเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง หรือมีความเอนเอียงเท่ากับศูนย์ ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองจะเท่ากับค่าแปรปรวน

1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทำให้เกิดความเข้าใจวิธีพัฒนาตัวประมาณอัตราส่วนในงานวิจัยต่างๆ
2. ทำให้เกิดแนวคิดใหม่ๆ ที่สามารถจะนำไปใช้พัฒนาตัวประมาณอัตราส่วนต่อไป
3. ทำให้สามารถตัดสินใจเลือกตัวประมาณสำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากรได้เหมาะสมกับสถานการณ์ต่างๆ

บทที่ 2

ตัวประมาณอัตราส่วนและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การนำตัวแปร x หรือตัวแปรช่วยมาใช้ประโยชน์ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณสำหรับค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ ให้ดีขึ้นนั้น ถ้า y และ x มีความสัมพันธ์เชิงเส้นต่อกันและมีทิศทางเดียวกัน โดยสามารถหาค่าประชากรของ x ได้ จากการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายขนาด n จากประชากรขนาด N แล้วทำการเก็บข้อมูล (y_i, x_i) จากแต่ละหน่วยในตัวอย่าง ในกรณีที่ตัวอย่างที่เลือกได้เป็นตัวอย่างที่ทำให้ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{y}$ เบี่ยงเบนออกไปจากค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ หากความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่าง y กับ x เป็นจริง $\bar{x}$ ย่อมเบี่ยงเบนออกไปจาก $\bar{X}$ เช่นกัน นั่นคือ ถ้า $\bar{y}$ มีค่ามากกว่า $\bar{Y}$ ทำให้คาดได้ว่า $\bar{x}$ น่าจะมีค่ามากกว่า $\bar{X}$ ด้วย การคูณ $\bar{y}$ ด้วย $\bar{X}/\bar{x}$ ย่อมทำให้ค่าที่ได้ใหม่ต่ำกว่า $\bar{y}$ และเข้าใกล้ $\bar{Y}$ มากขึ้น ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\bar{y}$ มีค่าน้อยกว่า $\bar{Y}$ และ $\bar{x}$ มีค่าน้อยกว่า $\bar{X}$ การคูณ $\bar{y}$ ด้วย $\bar{X}/\bar{x}$ ย่อมทำให้ค่าที่ได้ใหม่สูงขึ้นและเข้าใกล้ $\bar{Y}$ มากขึ้น และถ้า $\bar{y}$ มีค่าใกล้กับ $\bar{Y}$ อยู่แล้วการคูณด้วย $\bar{X}/\bar{x}$ ก็จะให้ผลที่ไม่แตกต่างจากเดิม ดังนั้น ตัวประมาณอัตราส่วนของค่าเฉลี่ยประชากร คือ

$$\bar{y}_r \;=\; \bar{y}(\bar{X}/\bar{x}) \;=\; r\bar{X} \tag{2.1}$$

เมื่อ $r = \bar{y}/\bar{x}$ คือ ค่าอัตราส่วนของตัวแปร $\bar{y}$ และ $\bar{x}$

ในบทนี้ จะกล่าวถึงการหาคุณสมบัติของตัวประมาณอัตราส่วน การเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวประมาณอัตราส่วนกับตัวประมาณค่าเฉลี่ย รวมทั้งงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความเอนเอียงของ $\bar{y}_r$

สำหรับคุณสมบัติข้อแรกของตัวประมาณที่จะกล่าวคือ ความแนบนัยหรือความคงเส้นคงวา ซึ่งความคงเส้นคงวาในเชิงทฤษฎีการสุ่มตัวอย่างจะหมายถึง การที่ตัวประมาณจะมีค่าเข้าใกล้ค่าประชากรเมื่อ n มีขนาดใหญ่ขึ้น และเท่ากับค่าประชากรเมื่อ $n = N$ จากสมการที่ (2.1) จะเห็นว่าเมื่อ n ใหญ่ขึ้นจนเท่ากับ N ตัวประมาณ $\bar{y}_r$ จะมีค่าเท่ากับ $\bar{Y}$ นั่นคือ $\bar{y}_r$ เป็นตัวประมาณที่แนบนัย คุณสมบัติต่อไปคือ ความเอนเอียง แม้ว่า $\bar{y}$ และ $\bar{x}$ จะเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\bar{Y}$ และ $\bar{X}$ ตามลำดับ แต่ $\bar{y}_r$ ไม่ได้เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\bar{Y}$ สำหรับการหาความเอนเอียงของ $\bar{y}_r$ สามารถทำได้ดังนี้

$$E(r) \;=\; R \cdot E[(1+\delta_{\bar{y}})(1+\delta_{\bar{x}})^{-1}] \tag{2.2}$$

เมื่อ $R = \bar{Y}/\bar{X}$, $\delta_{\bar{y}} = (\bar{y}-\bar{Y})/\bar{Y}$ และ $\delta_{\bar{x}} = (\bar{x}-\bar{X})/\bar{X}$ โดยกำหนดให้ ค่า x_i ต่างๆ มีค่าเป็นบวก และตัวอย่างมีขนาดใหญ่ โดยที่ $|\delta_{\bar{x}}| < 1$ และโดย**อนุกรมของเทย์เลอร์** (Taylor's series) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(r) &= R \cdot E[\{1+\delta_{\bar{y}}\}\{1-\delta_{\bar{x}}+(\delta_{\bar{x}})^2-\ldots\}] \\ &= R \cdot E[1+\delta_{\bar{y}}-\delta_{\bar{x}}+(\delta_{\bar{x}})^2-(\delta_{\bar{x}})(\delta_{\bar{y}})+\ldots] \\ &= R+\frac{N-n}{N}\frac{R}{n}(C_x^2-C_{xy})+O(n^{-2}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

เมื่อ $C_x = S_x/\bar{X}$ และ $C_{xy} = S_{xy}/(\overline{XY})$

ดังนั้น ความเอนเอียงของ $\bar{y}_r$ คือ

$$\begin{aligned} Bias(\bar{y}_r) &= \bar{X} \cdot Bias(r) \\ &= \bar{X} \cdot E[r-R] \\ &= \frac{N-n}{N}\frac{\bar{Y}}{n}(C_x^2-C_{xy})+O(n^{-2}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

จากสมการที่ (2.4) จะเห็นว่าความเอนเอียงของ $\bar{y}_r$ แปรผกผันกับ n กล่าวคือ ความเอนเอียงของตัวประมาณอัตราส่วนจะมีขนาดเล็กลงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น และอาจจะมีขนาดเล็กจนไม่ต้องคำนึงถึงได้ถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ

ในการพิจารณาผลกระทบของความเอนเอียงที่มีต่อประสิทธิภาพของตัวประมาณ สำหรับการประมาณช่วง Cochran (1977) ได้แสดงให้เห็นว่า หาก**สัดส่วนของความเอนเอียงต่อความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวประมาณ** $(\boldsymbol{Bias/S.E.})$ มีค่าน้อยมาก เช่น น้อยกว่า 0.1 ผลกระทบของความเอนเอียงจะมีน้อยมากจนไม่ต้องกังวล โดยในงานวิจัยของ Hartley และ Ross (1954) ได้แสดงค่าขีดจำกัดบนของความเอนเอียงต่อความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ r โดยมีวิธีพิจารณาดังนี้

$$\begin{aligned} Cov(r,\bar{x}) &= E(r\,\bar{x})-E(r)\cdot E(\bar{x}) \\ &= E(\bar{y})-\bar{X}\cdot E(r) \end{aligned} \tag{2.5}$$

ทำให้

$$E(r) \;=\; \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}-\frac{1}{\bar{X}}Cov(r,\bar{x}) \tag{2.6}$$

$$\therefore \qquad Bias(r) \;=\; -\frac{1}{\overline{X}}Cov(r,\bar{x}) \qquad (2.7)$$

และ

$$|\,Bias(r)\,| \;=\; \frac{1}{\overline{X}}|\,\rho_{r,\bar{x}}\sigma_r\sigma_{\bar{x}}\,| \;\le\; \frac{1}{\overline{X}}\sigma_r\sigma_{\bar{x}} \quad ; \quad |\rho| \;<\; 1$$

$$\therefore \qquad \frac{|\,Bias(r)\,|}{\sigma_r} \;\le\; \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\overline{X}} \;=\; C.V.(\bar{x}) \qquad (2.8)$$

หรือ $C.V.(\bar{x})$ คือ ค่าขีดจำกัดบนของอัตราส่วนของความเอนเอียงต่อความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

ดังนั้น อาจสรุปได้ว่าผลกระทบของความเอนเอียงต่อประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วนจะมีน้อยมากจนไม่ต้องกังวล ถ้าสัมประสิทธิความแปรผันของ $\bar{x}$ หรือ $C.V.(\bar{x})$ มีค่าน้อยกว่า 0.1 ซึ่งจากข้อสรุปนี้ อาจนำไปใช้กำหนดขนาดตัวอย่างที่จะทำให้สามารถใช้ตัวประมาณอัตราส่วนได้โดยไม่ต้องกังวลกับความเอนเอียง หรือกล่าวคือ อาจใช้เป็นเกณฑ์ในการกำหนดขนาดตัวอย่างที่ใหญ่พอนั่นเอง

2.2 ความแปรปรวนของ $\bar{y}_r$

ในการศึกษาคุณภาพเชิงความเที่ยงตรงหรือความถูกต้องของตัวประมาณอัตราส่วน จะพิจารณาจากค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง กรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอจะทำให้ความเอนเอียงของตัวประมาณมีน้อยมากจนไม่ต้องนำมาพิจารณา ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองจะมีค่าโดยประมาณเท่ากับความแปรปรวน สำหรับการหาความแปรปรวนของ $\bar{y}_r$ สามารถทำได้ดังนี้

$$E(r^2) \;=\; R^2\cdot E[(1+\delta_{\bar{y}})^2(1+\delta_{\bar{x}})^{-2}] \qquad (2.9)$$

โดยกำหนดให้ ค่า x_i ต่างๆ มีค่าเป็นบวก และตัวอย่างมีขนาดใหญ่ โดยที่ $|\delta_{\bar{x}}| < 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(r^2) &= R^2\cdot E[\{1+\delta_{\bar{y}}\}^2\{1-2\delta_{\bar{x}}+3(\delta_{\bar{x}})^2-\ldots\}] \\ &= R^2\cdot E[1+2\delta_{\bar{y}}-2\delta_{\bar{x}}+(\delta_{\bar{y}})^2+3(\delta_{\bar{x}})^2-4(\delta_{\bar{x}})(\delta_{\bar{y}})-\ldots] \\ &= R^2+\frac{N-n}{N}\frac{R^2}{n}(C_y^2+3C_x^2-4C_{xy})+O(n^{-2}) \qquad (2.10) \end{aligned}$$

ดังนั้น ความแปรปรวนของ $\bar{y}_r$ คือ

$$
\begin{aligned}
Var(\bar{y}_r) &= \bar{X}^2 \cdot Var(r) \\
&= \bar{X}^2 \cdot E[\,r - E(r)\,]^2 \\
&= X^2 \cdot [\,E(r^2) - \{E(r)\}^2\,] \\
&= \frac{N-n}{N}\frac{\bar{Y}^2}{n}(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{xy}) + O(n^{-2}) \\
&= \frac{N-n}{N}\frac{S_y^2}{n}\{1 + K(K-2\rho)\} + O(n^{-2})
\end{aligned}
\qquad (2.11)
$$

เมื่อ $K = C_x / C_y$, $C_y = S_y / \bar{Y}$ และ $\rho = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X})}{(N-1)S_y S_x}$

และถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองโดยประมาณของ $\bar{y}_r$ คือ

$$MSE(\bar{y}_r) \cong Var(\bar{y}_r) \cong \frac{N-n}{N}\frac{S_y^2}{n}\{1 + K(K-2\rho)\} \qquad (2.12)$$

2.3 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วน

เพื่อหาแนวทางในการตัดสินใจเลือกใช้ตัวประมาณค่าเฉลี่ย $\bar{y}$ และตัวประมาณอัตราส่วน $\bar{y}_r$ จึงสมควรที่จะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณทั้งสอง ในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณอาจพิจารณา**จากความแม่นยำเปรียบเทียบ** (relative precision) ของ $\bar{y}$ เทียบกับ $\bar{y}_r$ ซึ่งเท่ากับ

$$\frac{Var(\bar{y})}{Var(\bar{y}_r)} = \frac{1}{1 + K(K-2\rho)} \qquad (2.13)$$

ดังนั้น ตัวประมาณอัตราส่วนจะมีความแปรปรวนน้อยกว่าเมื่อ $1 + K(K-2\rho) < 1$ กล่าวคือ

$$K < 2\rho \qquad (2.14)$$

หรือ

$$\rho > \frac{1}{2}\frac{C_x}{C_y} \qquad (2.15)$$

จะเห็นว่าเนื่องจากตัวประมาณอัตราส่วนใช้ประโยชน์จากความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x ระดับความสัมพันธ์จึงเป็นปัจจัยสำคัญในการตัดสินใจเลือกใช้ตัวประมาณ ดังนั้น ถ้าตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ตัวประมาณอัตราส่วน $\bar{y}_r$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ย $\bar{y}$ เมื่อสัมประสิทธิสหสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x มีค่ามากกว่าครึ่งหนึ่งของสัมประสิทธิความแปรผันของ x เทียบกับ y และโดยอาศัยข้อจำกัดที่ว่า $|\rho| < 1$ จะได้ว่า $K < 2|\rho| < 2$ กล่าวคือ ถ้า y และ x มีความสัมพันธ์อยู่ในระดับหนึ่ง และต้องการให้ตัวประมาณอัตราส่วนมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่าเฉลี่ยแล้ว สัมประสิทธิความแปรผันของ x ควรจะมีค่าใกล้เคียงกับของ y หรือไม่ควรมากกว่าสองเท่าของ y

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการที่ตัวประมาณอัตราส่วนมีข้อจำกัดเรื่องความเอนเอียงของตัวประมาณ ทำให้เวลานำไปใช้ต้องคำนึงถึงขนาดตัวอย่าง ว่าใหญ่พอจะทำให้ไม่ต้องกังวลกับความเอนเอียงได้หรือไม่ จึงมีผู้สนใจทำการปรับปรุงตัวประมาณอัตราส่วน เพื่อลดความเอนเอียงของตัวประมาณหรือหาตัวประมาณอัตราส่วนที่ไม่เอนเอียง ทำให้มีงานวิจัยหลายชิ้นเสนอตัวประมาณอัตราส่วนในรูปแบบต่างๆ และตัวประมาณตัวหนึ่งที่น่าสนใจคือ ตัวประมาณอัตราส่วนของ Chakrabarty (1977) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\bar{y}_{C1} = (1-W)\,\bar{y} + W\,\bar{y}_r \qquad (2.16)$$

และ

$$\bar{y}_{C2} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_Q\,\bar{X} \qquad (2.17)$$

เมื่อ W คือ ค่าถ่วงน้ำหนัก ; $0 < W < 1$

และ $r_Q = 2r - \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ คือ ตัวประมาณของ Quenouille (1956) โดยที่ r_1 และ r_2 คือ อัตราส่วนตัวอย่างจากการสุ่มแบ่งครึ่งตัวอย่างออกเป็น 2 กลุ่มที่ไม่ซ้ำซ้อนกัน

สำหรับวิธีที่ใช้ในการหาความเอนเอียงและความแปรปรวนของ $\bar{y}_{C1}$ และ $\bar{y}_{C2}$ จะเหมือนกับวิธีที่ใช้ใน $\bar{y}_r$ โดยจากงานวิจัยได้แสดงว่า

ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C1}$ คือ

$$\begin{aligned} Bias(\bar{y}_{C1}) &= W \cdot Bias(\bar{y}_r) \\ &= \frac{N-n}{N}\frac{W\bar{Y}}{n}(C_x^2 - C_{xy}) + O(n^{-2}) \qquad (2.18) \end{aligned}$$

และความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C2}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{C2}) = W\bar{X} \cdot Bias(r_Q)$$

$$= 0 + O(n^{-2}) \qquad (2.19)$$

จากสมการที่ (2.18) และ (2.19) จะเห็นว่า $\bar{y}_{C2}$ เป็นตัวประมาณที่มีความเอนเอียงน้อยกว่า $\bar{y}_{C1}$ อย่างไรก็ตาม ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C1}$ จะมีค่าน้อยกว่า $\bar{y}_r$ เมื่อ $0 < W < 1$ และเมื่อความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นที่ผ่านจุดกำเนิด จะพบว่า $C_x^2 - C_{xy} = 0$ ทำให้ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C1}$ และ $\bar{y}_{C2}$ มีค่าใกล้เคียงกัน

และความแปรปรวนโดยประมาณของ $\bar{y}_{C1}$ และ $\bar{y}_{C2}$ ซึ่งพิจารณาถึงเทอมใน $O(n^{-1})$ มีค่าเท่ากันดังนี้

$$Var(\bar{y}_{C1}) \cong Var(\bar{y}_{C2}) \cong \frac{N-n}{N}\frac{S_y^2}{n}\{1+WK(WK-2\rho)\} \qquad (2.20)$$

นอกจากนี้ Chakarbraty ยังได้ทำการศึกษาความเอนเอียงและความแปรปรวนของ $\bar{y}_{C1}$ และ $\bar{y}_{C2}$ ในกรณีที่ y และ x มีความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นต่อไปนี้

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i \ ; \ \beta > 0$$

$$E(u_i \mid x_i) = 0 \ , \ E(u_i, u_j \mid x_i, x_j) = 0$$

$$Var(u_i \mid x_i) = n\delta \ \ (\delta \text{ เป็นค่าคงที่ใน } O(n^{-1}))$$

เมื่อตัวแปร x_i/n มีการแจกแจงแบบแกมม่า พารามิเตอร์ h ดังนั้น $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ จะมีการแจกแจงแบบแกมม่า พารามิเตอร์ $m = nh$ จะได้ว่า

$$\bar{y}_{C1} = \alpha\{(1-W)+\frac{Wm}{\bar{x}}\} + \beta\{(1-W)\bar{x}+Wm\} + \bar{u}\{(1-W)+\frac{Wm}{\bar{x}}\} \qquad (2.21)$$

และ

$$\bar{y}_{C2} = \alpha\{(1-W)+Wm(\frac{2}{\bar{x}}-\frac{1}{2\bar{x}_1}-\frac{1}{2\bar{x}_2})\} + \beta\{(1-W)\bar{x}+Wm\}$$

$$-\frac{Wm}{2}(\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1}-\frac{\bar{u}_2}{\bar{x}_2})+\bar{u}\{(1-W)+\frac{2Wm}{\bar{x}}\} \qquad (2.22)$$

ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C1}$ และ $\bar{y}_{C2}$ ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด คือ

$$Bias(\bar{y}_{C1}) = \frac{\alpha W}{(m-1)} \tag{2.23}$$

และ

$$Bias(\bar{y}_{C2}) = \frac{-2\alpha W}{(m-1)(m-2)} \tag{2.24}$$

โดยเมื่อแทน $W = 1$ ลงในสมการที่ (2.23) จะได้ว่าความเอนเอียงของ $\bar{y}_r$ ภายใต้ตัวแบบนี้ คือ

$$Bias(\bar{y}_r) = \frac{\alpha}{(m-1)} \tag{2.25}$$

สำหรับความแปรปรวนของ $\bar{y}_{C1}$ และ $\bar{y}_{C2}$ ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด คือ

$$\begin{aligned} Var(\bar{y}_{C1}) = {} & \alpha^2 W^2 m^2 \left\{ \frac{1}{(m-1)^2 (m-2)} \right\} + \beta^2 (1-W)^2 m \\ & - 2\alpha\beta(1-W)Wm \left\{ \frac{1}{(m-1)} \right\} + \delta \left\{ (1-W) \right. \\ & \left. + \frac{(1-W)W(m+1)}{(m-1)} + \frac{W^2 m^2}{(m-1)(m-2)} \right\} \end{aligned} \tag{2.26}$$

และ

$$\begin{aligned} Var(\bar{y}_{C2}) = {} & \alpha^2 W^2 m^2 \left\{ \frac{m^2 - 6m + 17}{(m-1)^2 (m-2)^2 (m-4)} \right\} + \beta^2 (1-W)^2 m \\ & - 2\alpha\beta(1-W)Wm \left\{ \frac{m-3}{(m-1)(m-2)} \right\} + \delta \left\{ (1-W)^2 \right. \\ & + 2(1-W)Wm \left(\frac{m-3}{(m-1)(m-2)} \right) \\ & \left. + W^2 m^2 \left(\frac{m^2 - 7m + 18}{(m-1)(m-2)^2 (m-4)} \right) \right\} \end{aligned} \tag{2.27}$$

โดยเมื่อแทน $W = 0$ ลงในสมการที่ (2.26) จะได้ว่าความแปรปรวนของ $\bar{y}$ ภายใต้ตัวแบบนี้ คือ

$$Var(\bar{y}) = \delta + \beta^2 m \tag{2.28}$$

และเมื่อแทน $W = 1$ ลงในสมการที่ (2.26) จะได้ว่าความแปรปรวนของ $\bar{y}_r$ ภายใต้ตัวแบบนี้ คือ

$$Var(\bar{y}_r) = \frac{\alpha^2 m^2}{(m-1)^2 (m-2)} + \frac{\delta m^2}{(m-1)(m-2)} \tag{2.29}$$

บทที่ 3

ตัวประมาณอัตราส่วนที่เสนอ

ถ้าความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x เป็นแบบเชิงเส้นและมีทิศทางเดียวกัน การประมาณค่าเฉลี่ยประชากร $\bar{Y}$ จากการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่ายขนาด n จากประชากรขนาด N นั้น การตัดสินใจเลือกใช้ตัวประมาณค่าเฉลี่ย $\bar{y}$ และตัวประมาณอัตราส่วน $\bar{y}_r$ จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณทั้งสอง ดังที่กล่าวไปแล้วในบทที่ 2 ทำให้ทราบว่าโดยทั่วไปจะเลือกใช้ $\bar{y}_r$ เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอและ $\rho > C_x / 2C_y$ ถ้านอกจากนี้จะใช้ $\bar{y}$ แทน เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วนให้ดีขึ้น ผู้วิจัยจึงได้ทำการพัฒนาตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่ โดยนำเอาตัวประมาณของ Tin (1965) มาใช้ คือ

$$r_{T1} = r\{1+\eta(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})\} \tag{3.1}$$

และ

$$r_{T2} = r\{1+\eta(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})(1-3\eta\frac{S_x^2}{\bar{x}^2})\} \tag{3.2}$$

เมื่อ $\eta = (\frac{1}{n} - \frac{1}{N})$

$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ คือ ค่าความแปรปรวนตัวอย่างร่วมของ x และ y

และ $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ คือ ค่าความแปรปรวนตัวอย่างของ x

โดยตัวประมาณที่ผู้วิจัยเสนอมีรูปแบบดังนี้

$$\bar{y}_{MOD1} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_{T1}\,\bar{X} \tag{3.3}$$

และ

$$\bar{y}_{MOD2} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_{T2}\,\bar{X} \tag{3.4}$$

เมื่อ W คือ ค่าถ่วงน้ำหนัก ; $0 < W < 1$

ในบทนี้ จะกล่าวถึงคุณสมบัติของตัวประมาณ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ โดยแบ่งเป็นคุณสมบัติทั่วไป และคุณสมบัติภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด ซึ่งคุณสมบัติที่จะพิจารณา ได้แก่ ความแนบนัยหรือความคงเส้นคงวา ความเอนเอียง และความแปรปรวน

3.1 ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$

จากสมการที่ (3.3) และ (3.4) จะพบว่าเมื่อ n มีขนาดใหญ่ขึ้นจนเท่ากับ N ตัวประมาณ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะมีค่าเท่ากับ $\bar{Y}$ นั่นคือ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เป็นตัวประมาณที่แนบนัย แต่ตัวประมาณทั้งสองเป็นตัวประมาณที่เอนเอียงเช่นเดียวกับ $\bar{y}_r$ สำหรับการพิจารณาความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะกำหนดให้ ค่า x_i ต่างๆ มีค่าเป็นบวก และตัวอย่างมีขนาดใหญ่ โดยที่

$$\left|\delta_{\bar{x}}\right| = \left|\frac{\bar{x}-\bar{X}}{\bar{X}}\right| < 1 \tag{3.5}$$

จากข้อกำหนดที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้สามารถหาความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
Bias(\bar{y}_{MOD1}) &= W\bar{X}\cdot Bias(r_{T1}) \\
&= W\bar{Y}\left\{\left(\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)n^2} - \frac{3(N-n)^2}{(N-1)(N-2)n^2}\right)(C_{21}-C_{30})\right. \\
&\quad +\left(\frac{(N-n)(N^2-6Nn+N+6n^2)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3} - \frac{6(N-n)^2(N-2n+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}\right)(C_{40}-C_{31}) \\
&\quad +\left(\frac{3N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3} + \frac{6(N-n)^2(3N^2-4Nn-6N+6n+3)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^3}\right. \\
&\quad \left. - \frac{6(N-n)^2}{(N-1)^2n^2}\right)(C_{20}^2-C_{20}C_{11}) + \left(\frac{N(N-n)(N-2n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)n^4}\right. \\
&\quad \left. - \frac{(N-n)^2(N-2n)}{(N-1)^2(N-2)n^3} - \frac{3(N-n)^2(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}\right)(4C_{30}C_{11} + 6C_{21}C_{20} \\
&\quad - 10C_{30}C_{20}) + \left(\frac{15N^2(N-n)(N^2-2Nn-3N+n^2+3n+2)(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)n^5}\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{45N(N-n)^2(N-n-1)(n-1)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^4}\right)(C_{20}^3-C_{20}^2C_{11})\right\} + O(n^{-4})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

และ

$$
\begin{aligned}
Bias(\bar{y}_{MOD2}) &= W\bar{X}\cdot Bias(r_{T2}) \\
&= W\bar{Y}\Bigg\{\Bigg(\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)n^2} - \frac{3(N-n)^2}{(N-1)(N-2)n^2}\Bigg)(C_{21}-C_{30}) \\
&\quad + \Bigg(\frac{(N-n)(N^2-6Nn+N+6n^2)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3} - \frac{6(N-n)^2(N-2n+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}\Bigg)(C_{40}-C_{31}) \\
&\quad + \Bigg(\frac{3N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3} + \frac{6(N-n)^2(3N^2-4Nn-6N+6n+3)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^3} \\
&\quad - \frac{3(N-n)^2}{(N-1)^2n^2}\Bigg)(C_{20}^2 - C_{20}C_{11}) + \Bigg(\frac{N(N-n)(N-2n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)n^4} \\
&\quad - \frac{(N-n)^2(N-2n)}{(N-1)^2(N-2)n^3} - \frac{3(N-n)^2(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}\Bigg)(4C_{30}C_{11} + 6C_{21}C_{20} \\
&\quad - 10C_{30}C_{20}) + \Bigg(\frac{15N^2(N-n)(N^2-2Nn-3N+n^2+3n+2)(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)n^5} \\
&\quad - \frac{45N(N-n)^2(N-n-1)(n-1)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^4} + \frac{45(N-n)^3}{(N-1)^3n^3}\Bigg)(C_{20}^3 - C_{20}^2C_{11}) \\
&\quad + \frac{15(N-n)^3}{(N-1)^2(N-2)n^3}\,(C_{21}C_{20} - C_{30}C_{20})\Bigg\} + O(n^{-4}) \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $C_{rs} = \dfrac{(1/N)\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{X})^r(y_i-\bar{Y})^s}{\bar{X}^r\bar{Y}^s}$; r และ s เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมการที่ (3.6) **และ** (3.7)

หาค่า $Bias(r_{T1})$ และ $Bias(r_{T2})$ โดยพิจารณาถึงเทอมใน $O(n^{-3})$

เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
Bias(r_{T1}) &= E[\,r_{T1} - R\,] \\
&= E\left[\,r\{1+\eta(\frac{s_{xy}}{\bar{x}\bar{y}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})\}\right] - R \\
&= E(r) + (\frac{1}{n}-\frac{1}{N})\,E[\,\frac{s_{xy}}{\bar{x}^2} - \frac{\bar{y}s_x^2}{\bar{x}^3}\,] - R
\end{aligned}
$$

และ $$Bias(r_{T2}) = E\left[r\{1+\eta(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\overline{x}^2})(1-3\eta\frac{S_x^2}{\overline{x}^2})\} \right] - R$$

$$= E\left[r\{1+\eta(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\overline{x}^2})\} \right] - E\left[3r\eta^2(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\overline{x}^2})\frac{S_x^2}{\overline{x}^2} \right] - R$$

$$= Bias(r_{T1}) - 3(\frac{1}{n}-\frac{1}{N})^2 S_x^2 \cdot E[\frac{s_{xy}}{\overline{x}^4} - \frac{\overline{y}s_x^2}{\overline{x}^5}]$$

จากข้อกำหนดข้างต้นและโดยอนุกรมของเทย์เลอร์ จะได้ว่า

(1) $$E(\frac{s_{xy}}{\overline{x}^2}) = \frac{S_{xy}}{\overline{X}^2}E[(1+\delta_{s_{xy}})(1+\delta_x)^{-2}] \quad ; \quad \text{เมื่อ } \delta_{s_{xy}} = (s_{xy}-S_{xy})/S_{xy}$$

$$= \frac{S_{xy}}{\overline{X}^2}E[\{1+\delta_{s_{xy}}\}\{1-2\delta_{\overline{x}}+3(\delta_{\overline{x}})^2-4(\delta_{\overline{x}})^3+5(\delta_{\overline{x}})^4-\ldots\}]$$

$$= \frac{S_{xy}}{\overline{X}^2}E[1-2\delta_{\overline{x}}+\delta_{s_{xy}}+3(\delta_{\overline{x}})^2-2(\delta_{\overline{x}})(\delta_{s_{xy}})-4(\delta_{\overline{x}})^3+3(\delta_{\overline{x}})^2(\delta_{s_{xy}})$$
$$+ 5(\delta_{\overline{x}})^4-4(\delta_{\overline{x}})^3(\delta_{s_{xy}})-\ldots]$$

$$= R\left\{ \frac{N}{N-1}C_{11} + \frac{3N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{20}C_{11} - \frac{2N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{21} \right.$$
$$- \frac{4N(N-n)(N-2n)}{(N-1)^2(N-2)n^2}C_{30}C_{11} + \frac{3N(N-n)(N-2n+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^2}C_{31}$$
$$- \frac{3N(N-n)(3N^2-4Nn-6N+6n+3)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^2}C_{20}C_{11}$$
$$+ \frac{15N^2(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^3}C_{20}^2C_{11}$$
$$\left. - \frac{12N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^2}C_{21}C_{20} \right\} + O(n^{-3})$$

(2) $$E(\frac{\overline{y}s_x^2}{\overline{x}^3}) = \frac{\overline{Y}S_x^2}{\overline{X}^3}E[(1+\delta_{\overline{y}})(1+\delta_{s_x^2})(1+\delta_{\overline{x}})^{-3}] \quad ; \quad \text{เมื่อ } \delta_{s_x^2} = (s_x^2-S_x^2)/S_x^2$$

$$= \frac{\overline{Y}S_x^2}{\overline{X}^3}E[\{1+\delta_{\overline{y}}\}\{1+\delta_{s_x^2}\}\{1-3\delta_{\overline{x}}+6(\delta_{\overline{x}})^2-10(\delta_{\overline{x}})^3+15(\delta_{\overline{x}})^4-\ldots\}]$$

$$= \frac{\overline{Y}S_x^2}{\overline{X}^3}E[1-3\delta_{\overline{x}}+\delta_{\overline{y}}+\delta_{s_x^2}+6(\delta_{\overline{x}})^2-3(\delta_{\overline{x}})(\delta_{\overline{y}})-3(\delta_{\overline{x}})(\delta_{s_x^2})+(\delta_{\overline{y}})(\delta_{s_x^2})$$
$$- 10(\delta_{\overline{x}})^3+6(\delta_{\overline{x}})^2(\delta_{\overline{y}})+6(\delta_{\overline{x}})^2(\delta_{s_x^2})-3(\delta_{\overline{x}})(\delta_{\overline{y}})(\delta_{s_x^2})+15(\delta_{\overline{x}})^4$$
$$- 10(\delta_{\overline{x}})^3(\delta_{\overline{y}})-10(\delta_{\overline{x}})^3(\delta_{s_x^2})+6(\delta_{\overline{x}})^2(\delta_{\overline{y}})(\delta_{s_x^2})-\ldots]$$

$$= R\left\{ \frac{N}{N-1}C_{20} + \frac{6N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{20}^2 - \frac{3N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{20}C_{11} - \frac{3N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{30}\right.$$

$$+ \frac{N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{21} - \frac{10N(N-n)(N-2n)}{(N-1)^2(N-2)n^2}C_{30}C_{20}$$

$$+ \frac{6N(N-n)(N-2n)}{(N-1)^2(N-2)n^2}C_{21}C_{20} + \frac{6N(N-n)(N-2n+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^2}C_{40}$$

$$- \frac{6N(N-n)(3N^2-4Nn-6N+6n+3)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^2}C_{20}^2 - \frac{3N(N-n)(N-2n+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^2}C_{31}$$

$$+ \frac{3N(N-n)(3N^2-4Nn-6N+6n+3)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^2}C_{20}C_{11}$$

$$+ \frac{45N^2(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^3}C_{20}^3 - \frac{30N^2(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^3}C_{20}^2C_{11}$$

$$- \frac{30N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^2}C_{30}C_{20} + \frac{6N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^2}C_{21}C_{20}$$

$$\left. + \frac{12N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^2}C_{30}C_{11}\right\} + O(n^{-3})$$

(3) $$S_x^2 \cdot E(\frac{s_{xy}}{\bar{x}^4}) = \frac{S_{xy}S_x^2}{\bar{X}^4}E[(1+\delta_{s_{xy}})(1+\delta_{\bar{x}})^{-4}]$$

$$= \frac{S_{xy}S_x^2}{\bar{X}^4}E[1-4\delta_{\bar{x}}+\delta_{s_{xy}}+10(\delta_{\bar{x}})^2-4(\delta_{\bar{x}})(\delta_{s_{xy}})-\ldots]$$

$$= R\left\{ \frac{N^2}{(N-1)^2}C_{20}C_{11} + \frac{10N^2(N-n)}{(N-1)^3 n}C_{20}^2C_{11} - \frac{4N^2(N-n)}{(N-1)^2(N-2)n}C_{21}C_{20}\right\}$$

$$+ O(n^{-2})$$

(4) $$S_x^2 \cdot E(\frac{\bar{y}s_x^2}{\bar{x}^5}) = \frac{\bar{Y}(S_x^2)^2}{\bar{X}^5}E[(1+\delta_{\bar{y}})(1+\delta_{s_x^2})(1+\delta_{\bar{x}})^{-5}]$$

$$= \frac{\bar{Y}(S_x^2)^2}{\bar{X}^5}E[1-5\delta_{\bar{x}}+\delta_{\bar{y}}+\delta_{s_x^2}+15(\delta_{\bar{x}})^2-5(\delta_{\bar{x}})(\delta_{\bar{y}})-5(\delta_{\bar{x}})(\delta_{s_x^2})$$

$$+ (\delta_{\bar{y}})(\delta_{s_x^2})-\ldots]$$

$$= R\left\{ \frac{N^2}{(N-1)^2}C_{20}^2 + \frac{15N^2(N-n)}{(N-1)^3 n}C_{20}^3 - \frac{5N^2(N-n)}{(N-1)^3 n}C_{20}^2C_{11}\right.$$

$$\left. - \frac{5N^2(N-n)}{(N-1)^2(N-2)n}C_{30}C_{20} + \frac{N^2(N-n)}{(N-1)^2(N-2)n}C_{21}C_{20}\right\} + O(n^{-2})$$

ดังนั้น จาก (1) ถึง (4) สามารถหาค่า $Bias(r_{T1})$ และ $Bias(r_{T2})$ ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
Bias(r_{T1}) \;=\; & R\Bigg\{\left(\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)n^2} - \frac{3(N-n)^2}{(N-1)(N-2)n^2}\right)(C_{21}-C_{30}) \\
& + \left(\frac{(N-n)(N^2-6Nn+N+6n^2)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3} - \frac{6(N-n)^2(N-2n+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}\right)(C_{40}-C_{31}) \\
& + \left(\frac{3N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3} + \frac{6(N-n)^2(3N^2-4Nn-6N+6n+3)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^3}\right. \\
& \left. - \frac{6(N-n)^2}{(N-1)^2 n^2}\right)(C_{20}^2 - C_{20}C_{11}) \; + \left(\frac{N(N-n)(N-2n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)n^4}\right. \\
& \left. - \frac{(N-n)^2(N-2n)}{(N-1)^2(N-2)n^3} - \frac{3(N-n)^2(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}\right)(4C_{30}C_{11} + 6C_{21}C_{20} \\
& - 10C_{30}C_{20}) + \left(\frac{15N^2(N-n)(N^2-2Nn-3N+n^2+3n+2)(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)n^5}\right. \\
& \left. - \frac{45N(N-n)^2(N-n-1)(n-1)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^4}\right)(C_{20}^3 - C_{20}^2 C_{11}) \Bigg\} + O(n^{-4})
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
Bias(r_{T2}) \;=\; & R\Bigg\{\left(\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)n^2} - \frac{3(N-n)^2}{(N-1)(N-2)n^2}\right)(C_{21}-C_{30}) \\
& + \left(\frac{(N-n)(N^2-6Nn+N+6n^2)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3} - \frac{6(N-n)^2(N-2n+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}\right)(C_{40}-C_{31}) \\
& + \left(\frac{3N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3} + \frac{6(N-n)^2(3N^2-4Nn-6N+6n+3)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^3}\right. \\
& \left. - \frac{3(N-n)^2}{(N-1)^2 n^2}\right)(C_{20}^2 - C_{20}C_{11}) \; + \left(\frac{N(N-n)(N-2n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)n^4}\right. \\
& \left. - \frac{(N-n)^2(N-2n)}{(N-1)^2(N-2)n^3} - \frac{3(N-n)^2(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}\right)(4C_{30}C_{11} + 6C_{21}C_{20} \\
& - 10C_{30}C_{20}) + \left(\frac{15N^2(N-n)(N^2-2Nn-3N+n^2+3n+2)(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)n^5}\right. \\
& \left. - \frac{45N(N-n)^2(N-n-1)(n-1)}{(N-1)^2(N-2)(N-3)n^4} + \frac{45(N-n)^3}{(N-1)^3 n^3}\right)(C_{20}^3 - C_{20}^2 C_{11}) \\
& + \frac{15(N-n)^3}{(N-1)^2(N-2)n^3}\,(C_{21}C_{20} - C_{30}C_{20}) \Bigg\} + O(n^{-4})
\end{aligned}
$$

ทำให้ $Bias(\bar{y}_{MOD1})$ และ $Bias(\bar{y}_{MOD2})$ มีรูปแบบตามสมการที่ (3.6) และ (3.7) ตามลำดับ

ดังนั้น จากสมการที่ (3.6) และ (3.7) จะเห็นว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ มีเทอมหลักของความเอนเอียงอยู่ใน $O(n^{-2})$ ซึ่งเมื่อ n มีขนาดใหญ่ขึ้นความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะเข้าสู่ 0 เร็วกว่า $\bar{y}_r$ และหากเปรียบเทียบความเอนเอียงระหว่าง $\bar{y}_{MOD1}$ กับ $\bar{y}_{MOD2}$ จากสูตรข้างต้นจะพบว่าความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ ขึ้นอยู่กับความเอนเอียงของ r_{T1} และ r_{T2} ตามลำดับ ซึ่งจากงานวิจัยของ Tin (1965) ได้สรุปเอาไว้ว่าภายใต้การแจกแจงแบบปกติ r_{T2} จะมีความเอนเอียงน้อยกว่า r_{T1}

3.2 ความแปรปรวนโดยประมาณของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$

การศึกษาความแปรปรวนของตัวประมาณ ณ ที่นี้ จะเป็นการหาความแปรปรวนโดยประมาณซึ่งจะพิจารณาถึงเทอมใน $O(n^{-2})$ จะได้ว่าความแปรปรวนโดยประมาณของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ มีค่าเท่ากัน ดังนี้

$$\begin{aligned} Var(\bar{y}_{MOD1}) \cong Var(\bar{y}_{MOD2}) \cong \bar{Y}^2 \Bigg\{ & \frac{(N-n)}{(N-1)n}(W^2C_{20} - 2WC_{11} + C_{02}) + \frac{(N-n)^2}{(N-1)^2 n^2}(-7W^2C_{20}^2 \\ & + 8W^2C_{20}C_{11} - W^2C_{11}^2 + 6WC_{20}C_{11} - 4WC_{11}^2 - 2WC_{20}C_{02}) \\ & + \frac{2(N-n)^2}{(N-1)(N-2)n^2}(W^2C_{30} - W^2C_{21} - WC_{21} + WC_{12}) \\ & + \frac{2(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)n^2}(-W^2C_{30} + W^2C_{21} + WC_{21} - WC_{12}) \\ & + \frac{N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}(9W^2C_{20}^2 - 12W^2C_{20}C_{11} \\ & - 6WC_{20}C_{11} + 4WC_{11}^2 + 2WC_{20}C_{02}) \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

พิสูจน์ สมการที่ (3.8)

เนื่องจาก $Var(\bar{y}_{MOD1}) = Var[(1-W)\bar{y} + W r_{T1}\bar{X}]$

$$= (1-W)^2 Var(\bar{y}) + W^2\bar{X}^2 \cdot Var(r_{T1}) + 2(1-W)W\bar{X}\cdot Cov(\bar{y}, r_{T1})$$

และ $Var(\bar{y}_{MOD2}) = (1-W)^2 Var(\bar{y}) + W^2\bar{X}^2 \cdot Var(r_{T2}) + 2(1-W)W\bar{X}\cdot Cov(\bar{y}, r_{T2})$

(1) หาค่า $Var(r_{T1})$ และ $Var(r_{T2})$ โดยพิจารณาถึงเทอมใน $O(n^{-2})$

เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
Var(r_{T1}) &= E[\,r_{T1} - E(r_{t1})\,]^2 \\
&= E(r_{T1}^2) - \{E(r_{T1})\}^2 \\
&= E\left[\, r^2\,\{1+\eta\,(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})\}^2 \,\right] - \{E(r_{T1})\}^2 \\
&= E(r^2) + 2(\frac{1}{n}-\frac{1}{N})\cdot E[\,\frac{\bar{y}s_{xy}}{\bar{x}^3} - \frac{\bar{y}^2 s_x^2}{\bar{x}^4}] + (\frac{1}{n}-\frac{1}{N})^2 E\left[\,\frac{(s_{xy})^2}{\bar{x}^4}\right. \\
&\quad \left. -2\frac{\bar{y}s_{xy}s_x^2}{\bar{x}^5} + \frac{\bar{y}^2(s_x^2)^2}{\bar{x}^6}\,\right] - \{E(r_{T1})\}^2
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
Var(r_{T2}) &= E(r_{T2}^2) - \{E(r_{T2})\}^2 \\
&= E\left[\, r^2\,\{1+\eta\,(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})\,(1-3\eta\,\frac{S_x^2}{\bar{x}^2})\}^2 \,\right] - \{E(r_{T2})\}^2 \\
&= E\left[\, r^2 + 2\,r^2\eta\,(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2}) + r^2\eta^2\,(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})^2 \,\right] \\
&\quad - E\left[\, 6r^2\eta^2\,(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})\frac{S_x^2}{\bar{x}^2} \,\right] - \{E(r_{T2})\}^2 + O(n^{-3}) \\
&= E(r_{T1}^2) - 6\,(\frac{1}{n}-\frac{1}{N})^2\, S_x^2 \cdot E[\,\frac{\bar{y}s_{xy}}{\bar{x}^5} - \frac{\bar{y}^2 s_x^2}{\bar{x}^6}] - \{E(r_{T2})\}^2 + O(n^{-3})
\end{aligned}
$$

จากข้อกำหนดข้างต้นและโดยอนุกรมของเทย์เลอร์ จะได้ว่า

(1.1)

$$
\begin{aligned}
E(\frac{\bar{y}s_{xy}}{\bar{x}^3}) &= \frac{\bar{Y}S_{xy}}{\bar{X}^3} E[\,(1+\delta_{\bar{y}})(1+\delta_{s_{xy}})(1+\delta_{\bar{x}})^{-3}\,] \\
&= \frac{\bar{Y}S_{xy}}{\bar{X}^3} E[\,1 - 3\delta_{\bar{x}} + \delta_{\bar{y}} + \delta_{s_{xy}} + 6(\delta_{\bar{x}})^2 - 3(\delta_{\bar{x}})(\delta_{\bar{y}}) - 3(\delta_{\bar{x}})(\delta_{s_{xy}}) \\
&\quad + (\delta_{\bar{y}})(\delta_{s_{xy}}) - \ldots\,] \\
&= R^2\left\{ \frac{N}{N-1}C_{11} + \frac{6N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{20}C_{11} - \frac{3N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{11}^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{3N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{21} + \frac{N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{12} \right\} + O(n^{-2})
\end{aligned}
$$

(1.2) $$E\left(\frac{\bar{y}^2 s_x^2}{\bar{x}^4}\right) = \frac{\bar{Y}^2 S_x^2}{\bar{X}^4} E\left[(1+\delta_{\bar{y}})^2(1+\delta_{s_x^2})(1+\delta_{\bar{x}})^{-4}\right]$$

$$= \frac{\bar{Y}^2 S_x^2}{\bar{X}^4} E\left[1-4\delta_{\bar{x}} + 2\delta_{\bar{y}} + \delta_{s_x^2} + 10(\delta_{\bar{x}})^2 + (\delta_{\bar{y}})^2 - 8(\delta_{\bar{x}})(\delta_{\bar{y}})\right.$$

$$\left. - 4(\delta_{\bar{x}})(\delta_{s_x^2}) + 2(\delta_{\bar{y}})(\delta_{s_x^2}) - \ldots\right]$$

$$= R^2\left\{\frac{N}{N-1}C_{20} + \frac{10N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{20}^2 - \frac{N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{20}C_{02}\right.$$

$$- \frac{8N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{20}C_{11} - \frac{4N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{30}$$

$$\left. + \frac{2N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{21}\right\} + O(n^{-2})$$

(1.3) $$E\left[\frac{(s_{xy})^2}{\bar{x}^4}\right] = \frac{(S_{xy})^2}{\bar{X}^4} E\left[(1+\delta_{s_{xy}})^2(1+\delta_{\bar{x}})^{-4}\right]$$

$$= \frac{(S_{xy})^2}{\bar{X}^4} E\left[1-4\delta_{\bar{x}} + 2\delta_{s_{xy}} + \ldots\right]$$

$$= \frac{N^2}{(N-1)^2} R^2 C_{11}^2 + O(n^{-1})$$

(1.4) $$E\left[\frac{\bar{y} s_{xy} s_x^2}{\bar{x}^5}\right] = \frac{\bar{Y} S_{xy} S_x^2}{\bar{X}^5} E\left[(1+\delta_{\bar{y}})(1+\delta_{s_{xy}})(1+\delta_{s_x^2})(1+\delta_{\bar{x}})^{-5}\right]$$

$$= \frac{N^2}{(N-1)^2} R^2 C_{20} C_{11} + O(n^{-2})$$

(1.5) $$E\left[\frac{\bar{y}^2 (s_x^2)^2}{\bar{x}^6}\right] = \frac{\bar{Y}^2 (S_x^2)^2}{\bar{X}^6} E\left[(1+\delta_{\bar{y}})^2(1+\delta_{s_x^2})^2(1+\delta_{\bar{x}})^{-6}\right]$$

$$= \frac{N^2}{(N-1)^2} R^2 C_{20}^2 + O(n^{-2})$$

(1.6) $$S_x^2 \cdot E\left(\frac{\bar{y} s_{xy}}{\bar{x}^5}\right) = \frac{\bar{Y} S_{xy} S_x^2}{\bar{X}^5} E\left[(1+\delta_{\bar{y}})(1+\delta_{s_{xy}})(1+\delta_{\bar{x}})^{-5}\right]$$

$$= \frac{N^2}{(N-1)^2} R^2 C_{20} C_{11} + O(n^{-1})$$

(1.7) $$S_x^2 \cdot E(\frac{\bar{y}^2 s_x^2}{\bar{x}^6}) = \frac{\bar{Y}^2 (S_x^2)^2}{\bar{X}^6} E[(1+\delta_{\bar{y}})^2 (1+\delta_{s_x^2})(1+\delta_{\bar{x}})^{-6}]$$

$$= \frac{N^2}{(N-1)^2} R^2 C_{20}^2 + O(n^{-1})$$

ดังนั้น จาก (1.1) ถึง (1.7) จะได้ว่าค่า $Var(r_{T1})$ และ $Var(r_{T2})$ โดยประมาณถึงเทอมใน $O(n^{-2})$ มีค่าเท่ากัน ดังนี้

$$Var(r_{T1}) \cong Var(r_{T2}) \cong R^2 \Big\{ \frac{(N-n)}{(N-1)n}(C_{20}+C_{02}-2C_{11}) + \frac{(N-n)^2}{(N-1)^2 n^2}(-7C_{20}^2 + 14C_{20}C_{11}$$

$$-5C_{11}^2 - 2C_{20}C_{02}) + \frac{2(N-n)^2}{(N-1)(N-2)n^2}(C_{30} - 2C_{21} + C_{12})$$

$$+ \frac{2(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)n^2}(-C_{30} + 2C_{21} - C_{12})$$

$$+ \frac{3N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}(3C_{20}^2 - 6C_{20}C_{11} + 2C_{11}^2 + C_{20}C_{02}) \Big\}$$

(2) หาค่า $Cov(\bar{y}, r_{T1})$ และ $Cov(\bar{y}, r_{T2})$ โดยพิจารณาถึงเทอมใน $O(n^{-2})$

เนื่องจาก $$Cov(\bar{y}, r_{T1}) = E[\bar{y} - E(\bar{y})][r_{T1} - E(r_{T1})]$$

$$= E(\bar{y} r_{T1}) - \bar{Y} \cdot E(r_{T1})$$

$$= E\left[\bar{y}\, r\, \{1 + \eta(\frac{s_{xy}}{\bar{x}\bar{y}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})\}\right] - \bar{Y} \cdot E(r_{T1})$$

$$= E(\bar{y} r) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{N}) E(\frac{\bar{y} s_{xy}}{\bar{x}^2} - \frac{\bar{y}^2 s_x^2}{\bar{x}^3}) - \bar{Y} \cdot E(r_{T1})$$

และ $$Cov(\bar{y}, r_{T2}) = E(\bar{y} r_{T2}) - \bar{Y} \cdot E(r_{T2})$$

$$= E\left[\bar{y}\, r\, \{1 + \eta(\frac{s_{xy}}{\bar{x}\bar{y}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})(1 - 3\eta \frac{S_x^2}{\bar{x}^2})\}\right] - \bar{Y} \cdot E(r_{T2})$$

$$= E(\bar{y} r_{T1}) - E\left[3\bar{y} r \eta^2 (\frac{s_{xy}}{\bar{x}\bar{y}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})\frac{S_x^2}{\bar{x}^2}\right] - \bar{Y} \cdot E(r_{T2})$$

$$= E(\bar{y} r_{T1}) - 3(\frac{1}{n} - \frac{1}{N})^2 S_x^2 \cdot E(\frac{\bar{y} s_{xy}}{\bar{x}^4} - \frac{\bar{y}^2 s_x^2}{\bar{x}^5}) - \bar{Y} \cdot E(r_{T2})$$

จากข้อกำหนดข้างต้นและโดยอนุกรมของเทย์เลอร์ จะได้ว่า

(2.1)

$$
\begin{aligned}
E(\bar{y}r) &= \bar{Y}R \cdot E\,[\,(1+\delta_{\bar{y}})^2(1+\delta_{\bar{x}})^{-1}\,] \\
&= \bar{Y}R \cdot E\,[1-\delta_{\bar{x}}+2\delta_{\bar{y}}+(\delta_{\bar{x}})^2+(\delta_{\bar{y}})^2-2(\delta_{\bar{x}})(\delta_{\bar{y}})-(\delta_{\bar{x}})^3+2(\delta_{\bar{x}})^2(\delta_{\bar{y}}) \\
&\quad -(\delta_{\bar{x}})(\delta_{\bar{y}})^2+(\delta_{\bar{x}})^4-2(\delta_{\bar{x}})^3(\delta_{\bar{y}})+(\delta_{\bar{x}})^2(\delta_{\bar{y}})^2-\ldots] \\
&= \bar{Y}R\left\{ 1+\frac{(N-n)}{(N-1)n}C_{20}+\frac{(N-n)}{(N-1)n}C_{02}-\frac{2(N-n)}{(N-1)n}C_{11}\right. \\
&\quad -\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)n^2}C_{30}+\frac{2(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)n^2}C_{21} \\
&\quad -\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)n^2}C_{12}+\frac{3N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}C_{20}^2 \\
&\quad -\frac{6N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}C_{20}C_{11} \\
&\quad +\frac{2N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}C_{11}^2 \\
&\quad \left.+\frac{N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}C_{20}C_{02}\right\}+O(n^{-3})
\end{aligned}
$$

(2.2)

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{\bar{y}s_{xy}}{\bar{x}^2}\right) &= \frac{\bar{Y}S_{xy}}{\bar{X}^2}E\,[\,(1+\delta_{\bar{y}})(1+\delta_{s_{xy}})(1+\delta_{\bar{x}})^{-2}\,] \\
&= \frac{\bar{Y}S_{xy}}{\bar{X}^2}E\,[1-2\delta_{\bar{x}}+\delta_{\bar{y}}+\delta_{s_{xy}}+3(\delta_{\bar{x}})^2-2(\delta_{\bar{x}})(\delta_{\bar{y}})-2(\delta_{\bar{x}})(\delta_{s_{xy}}) \\
&\quad +(\delta_{\bar{y}})(\delta_{s_{xy}})-\ldots] \\
&= \bar{Y}R\left\{\frac{N}{N-1}C_{11}+\frac{3N(N-n)}{(N-1)^2n}C_{20}C_{11}-\frac{2N(N-n)}{(N-1)^2n}C_{11}^2\right. \\
&\quad \left.-\frac{2N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{21}+\frac{N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{12}\right\}+O(n^{-2})
\end{aligned}
$$

(2.3)

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{\bar{y}^2s_x^2}{\bar{x}^3}\right) &= \frac{\bar{Y}^2S_x^2}{\bar{X}^3}E\,[\,(1+\delta_{\bar{y}})^2(1+\delta_{s_x^2})(1+\delta_{\bar{x}})^{-3}\,] \\
&= \frac{\bar{Y}^2S_x^2}{\bar{X}^3}E\,[1-3\delta_{\bar{x}}+2\delta_{\bar{y}}+\delta_{s_x^2}+6(\delta_{\bar{x}})^2+(\delta_{\bar{y}})^2-6(\delta_{\bar{x}})(\delta_{\bar{y}}) \\
&\quad -3(\delta_{\bar{x}})(\delta_{s_x^2})+2(\delta_{\bar{y}})(\delta_{s_x^2})-\ldots]
\end{aligned}
$$

$$= \bar{Y}R\left\{ \frac{N}{N-1}C_{20} + \frac{6N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{20}^2 + \frac{N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{20}C_{02} \right.$$

$$- \frac{6N(N-n)}{(N-1)^2 n}C_{20}C_{11} - \frac{3N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{30}$$

$$\left. + \frac{2N(N-n)}{(N-1)(N-2)n}C_{21} \right\} + O(n^{-2})$$

(2.4) $$S_x^2 \cdot E(\frac{\bar{y}s_{xy}}{\bar{x}^4}) = \frac{\bar{Y}S_{xy}S_x^2}{\bar{X}^4}E[(1+\delta_{\bar{y}})(1+\delta_{s_{xy}})(1+\delta_{\bar{x}})^{-4}]$$

$$= \frac{N^2}{(N-1)^2}\bar{Y}RC_{20}C_{11} + O(n^{-1})$$

(2.5) $$S_x^2 \cdot E(\frac{\bar{y}^2 s_x^2}{\bar{x}^5}) = \frac{\bar{Y}^2 (S_x^2)^2}{\bar{X}^5}E[(1+\delta_{\bar{y}})^2(1+\delta_{s_x^2})(1+\delta_{\bar{x}})^{-5}]$$

$$= \frac{N^2}{(N-1)^2}\bar{Y}RC_{20}^2 + O(n^{-1})$$

ดังนั้น จาก (2.1) ถึง (2.5) จะได้ว่าค่า $Cov(\bar{y}, r_{T1})$ และ $Cov(\bar{y}, r_{T2})$ โดยประมาณถึงเทอมใน $O(n^{-2})$ มีค่าเท่ากัน ดังนี้

$$Cov(\bar{y}, r_{T1}) \cong Cov(\bar{y}, r_{T2}) \cong \bar{Y}R\left\{ \frac{(N-n)}{(N-1)n}(C_{02} - C_{11}) + \frac{(N-n)^2}{(N-1)^2 n^2}(3C_{20}C_{11} - 2C_{11}^2 \right.$$

$$- C_{20}C_{02}) + \frac{(N-n)^2}{(N-1)(N-2)n^2}(-C_{21} + C_{12})$$

$$+ \frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)n^2}(C_{21} - C_{12})$$

$$\left. + \frac{N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)n^3}(-3C_{20}C_{11} + 2C_{11}^2 + C_{20}C_{02}) \right\}$$

จาก (1) และ (2) ทำให้ $Var(\bar{y}_{MOD1})$ และ $Var(\bar{y}_{MOD2})$ มีรูปแบบตามสมการที่ (3.8)

สำหรับความแปรปรวนโดยประมาณของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ ที่พิจารณาถึงเทอมใน $O(n^{-1})$ จะมีค่าดังนี้

$$Var(\bar{y}_{MOD1}) \cong Var(\bar{y}_{MOD2}) \cong \frac{N-n}{N-1}\frac{\bar{Y}^2}{n}(W^2C_{20} - 2WC_{11} + C_{02})$$

$$\cong \frac{N-n}{N}\frac{S_y^2}{n}\{1 + WK(WK - 2\rho)\} \qquad (3.9)$$

เมื่อ $K = C_x / C_y$

$C_x = S_x / \bar{X}$ คือ ค่าสัมประสิทธิความแปรผันของ x

และ $C_y = S_y / \bar{Y}$ คือ ค่าสัมประสิทธิความแปรผันของ y

และสำหรับค่า W ที่เหมาะสม ซึ่งจะทำให้ความแปรปรวนนี้มีค่าต่ำที่สุด คือ

$$W_{opt} = \rho / K \qquad (3.10)$$

โดยความแปรปรวนที่มีค่าต่ำที่สุด คือ

$$Var_{\min} = \frac{N-n}{N}\frac{S_y^2}{n}(1-\rho^2) \qquad (3.11)$$

3.3 ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด

กำหนดให้ตัวแบบเชิงเส้นที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x คือ

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i \ ; \ \beta > 0 \qquad (3.12)$$

$$E(u_i \mid x_i) = 0 \ , \ E(u_i, u_j \mid x_i, x_j) = 0$$

$$Var(u_i \mid x_i) = n\delta \ \ (\delta \text{ เป็นค่าคงที่ใน } O(n^{-1}))$$

เมื่อตัวแปร x_i / n มีการแจกแจงแบบแกมม่า พารามิเตอร์ h และ $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$ จะมีการแจกแจงแบบแกมม่า พารามิเตอร์ $m = nh$ สำหรับตัวแบบนี้ เป็นตัวแบบที่ถูกนำมาใช้ศึกษาความเอนเอียงและความแปรปรวนของตัวประมาณอัตราส่วนในงานวิจัยหลายๆ ชิ้น เช่น ในงานวิจัยของ Durbin (1959) , Rao และ Webster (1966) และ Chakrabarty (1973) เป็นต้น

จากตัวแบบที่กล่าวมาข้างต้น จะได้ว่า

$$\bar{y} \;=\; \alpha + \beta\,\bar{x} + \bar{u} \tag{3.13}$$

$$E(\bar{y}) \;=\; \alpha + \beta\, m = \bar{Y} \tag{3.14}$$

โดยความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{MOD1}) \;=\; \frac{\alpha\, W}{(m^2 - 1)} \tag{3.15}$$

และความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD2}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{MOD2}) \;=\; \frac{\alpha\, W(4m^2 - 5m + 6)}{(m^2 - 1)(m-2)(m-3)} \tag{3.16}$$

พิสูจน์ สมการที่ (3.15) และ (3.16)

ภายใต้ตัวแบบ (3.12) จะได้ว่า

$$\bar{y}_{MOD1} \;=\; \alpha\{(1-W) + Wm(\frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3})\} \;+\; \beta\{(1-W)\bar{x} + Wm\} \;+\; \frac{Wm}{n}\frac{s_{xu}}{\bar{x}^2}$$

$$+\; \bar{u}\{(1-W) + Wm(\frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3})\}$$

และ

$$\bar{y}_{MOD2} \;=\; \alpha\{(1-W) + Wm(\frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3} + \frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5})\} \;+\; \beta\{(1-W)\bar{x} + Wm\}$$

$$+\; \frac{Wm}{n}(\frac{s_{xu}}{\bar{x}^2} - 3m\frac{s_{xu}}{\bar{x}^4}) \;+\; \bar{u}\{(1-W) \;+\; Wm(\frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3} + \frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5})\}$$

เมื่อ $\lim_{N\to\infty}\eta \;=\; \frac{1}{n}$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{S_x^2}{n} \;=\; m$$

และ $s_{xu} \;=\; \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(u_i - \bar{u})$

เนื่องจาก

$$E(\bar{y}_{MOD1}) = \alpha\{(1-W)+Wm\cdot E[\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}]\} + \beta\{(1-W)\,E(\bar{x})+Wm\}$$

และ
$$E(\bar{y}_{MOD2}) = \alpha\{(1-W)+Wm\cdot E[\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5}]\} + \beta\{(1-W)\,E(\bar{x})+Wm\}$$

โดยวิธีของ Rao และ Webster (1966 หน้า 576) จะได้ว่า

$$E(\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}) = \frac{n}{(m^2-1)}$$

และ
$$E(\frac{s_x^2}{\bar{x}^5}) = \frac{n}{(m^2-1)(m-2)(m-3)}$$

ทำให้
$$E(\bar{y}_{MOD1}) = \alpha\left\{1+\frac{W}{(m^2-1)}\right\} + \beta\, m$$

และ
$$E(\bar{y}_{MOD2}) = \alpha\left\{1+\frac{W(4m^2-5m+6)}{(m^2-1)(m-2)(m-3)}\right\} + \beta\, m$$

ดังนั้น ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ คือ

$$\begin{aligned} Bias(\bar{y}_{MOD1}) &= E[\,\bar{y}_{MOD1} - Y\,] \\ &= E(\bar{y}_{MOD1})-(\alpha+\beta\, m) \\ &= \frac{\alpha W}{(m^2-1)} \end{aligned}$$

และความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD2}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{MOD2}) = \frac{\alpha W(4m^2-5m+6)}{(m^2-1)(m-2)(m-3)}$$

จากสมการที่ (3.15) และ (3.16) จะเห็นว่าความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ อยู่ใน $O(n^{-2})$ (เมื่อ $m = nh$) และหากความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นที่ผ่านจุดกำเนิด หรือ $\alpha = 0$ ในตัวแบบ (3.12) จะได้ว่า $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\bar{Y}$

3.4 ความแปรปรวนของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด

วิธีที่ใช้ในการหาความแปรปรวนของ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ ภายใต้ตัวแบบ (3.12) จะคล้ายกับวิธีที่ Rao และ Webster (1966) ใช้

โดยความแปรปรวนของ $\bar{y}_{MOD1}$ คือ

$$\begin{aligned} Var(\bar{y}_{MOD1}) \;=\; & \alpha^2 W^2 m^2 \left\{ \frac{m^2(m^2+3m+8)}{(m^2-1)^2(m^2-4)(m+3)} + \frac{2mn}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)(n-1)} \right\} \\ & + \beta^2(1-W)^2 m \;-\; 2\alpha\beta(1-W)Wm^2\left\{\frac{1}{(m^2-1)}\right\} \;+\; \delta\Bigg\{ \;(1-W)^2 \\ & + 2(1-W)Wm^2\left(\frac{1}{(m^2-1)}\right) + W^2m^2\left(\frac{m^2(m+4)}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)}\right. \\ & \left. + \frac{(m^2+5m+6)+2mn}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)(n-1)}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

และความแปรปรวนของ $\bar{y}_{MOD2}$ คือ

$$\begin{aligned} Var(\bar{y}_{MOD2}) \;=\; & \alpha^2 W^2 m^2 \Bigg\{ \frac{m^2(m^4-8m^3+5m^2+134m-429)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)} \\ & - \frac{m^2(m^4-10m^3+43m^2-90m+81)}{(m^2-1)^2(m-2)^2(m-3)^2} \\ & + \frac{2mn(m^4-24m^3+194m^2-522m+360)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)(m-6)(n-1)} \Bigg\} \\ & + \beta^2(1-W)^2 m \;-\; 2\alpha\beta(1-W)Wm^2\left\{\frac{m^2-5m+15}{(m^2-1)(m-2)(m-3)}\right\} \\ & + \delta\Bigg\{ (1-W)^2 + 2(1-W)Wm^2\left(\frac{m^2-5m+9}{(m^2-1)(m-2)(m-3)}\right) \\ & + W^2m^2\left(\frac{m^2(m^4-8m^3+5m^2+134m-429)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)}\right. \\ & \left. + \frac{\{(m^2+5m+6)+2mn\}(m^4-24m^3+194m^2-522m+360)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)(m-6)(n-1)}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

พิสูจน์ สมการที่ (3.17) และ (3.18)

ภายใต้ตัวแบบ (3.12) จะได้ว่า

$$\bar{y}^2_{MOD1} = \alpha^2\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3})\}^2+\beta^2\{(1-W)\bar{x}+Wm\}^2+\frac{W^2m^2}{n^2}\frac{(s_{xu})^2}{\bar{x}^4}$$

$$+\bar{u}^2\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3})\}^2+2\alpha\beta\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3})\}\{(1-W)\bar{x}+Wm\}$$

$$+2\alpha\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3})\}\{\frac{Wm}{n}\frac{s_{xu}}{\bar{x}^2}\}+2\alpha\bar{u}\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3})\}^2$$

$$+2\beta\{(1-W)\bar{x}+Wm\}\{\frac{Wm}{n}\frac{s_{xu}}{\bar{x}^2}\}+2\beta\,\bar{u}\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3})\}\{(1-W)\bar{x}+Wm\}$$

$$+2\bar{u}\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3})\}\{\frac{Wm}{n}\frac{s_{xu}}{\bar{x}^2}\}$$

และ

$$\bar{y}^2_{MOD2} = \alpha^2\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5})\}^2+\beta^2\{(1-W)\bar{x}+Wm\}^2$$

$$+\frac{W^2m^2}{n^2}(\frac{s_{xu}}{\bar{x}^2}-3m\frac{s_{xu}}{\bar{x}^4})^2+\bar{u}^2\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5})\}^2$$

$$+2\alpha\beta\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5})\}\{(1-W)\bar{x}+Wm\}$$

$$+2\alpha\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5})\}\{\frac{Wm}{n}(\frac{s_{xu}}{\bar{x}^2}-3m\frac{s_{xu}}{\bar{x}^4})\}$$

$$+2\alpha\,\bar{u}\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5})\}^2$$

$$+2\beta\{(1-W)\bar{x}+Wm\}\{\frac{Wm}{n}(\frac{s_{xu}}{\bar{x}^2}-3m\frac{s_{xu}}{\bar{x}^4})\}$$

$$+2\beta\,\bar{u}\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5})\}\{(1-W)\bar{x}+Wm\}$$

$$+2\bar{u}\{(1-W)+Wm(\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5})\}\{\frac{Wm}{n}(\frac{s_{xu}}{\bar{x}^2}-3m\frac{s_{xu}}{\bar{x}^4})\}$$

เนื่องจาก

$$E(\bar{y}^2_{MOD1}) = \alpha^2\left\{ (1-W)^2 + W^2m^2\cdot E[\frac{1}{\bar{x}^2}-\frac{2}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^4}+\frac{1}{n^2}\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^6}]+2(1-W)Wm\cdot E[\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}] \right\}$$

$$+\beta^2\{(1-W)^2\ E(\bar{x}^2)+W^2m^2+2(1-W)Wm\cdot E(\bar{x})\} + W^2m^2\frac{\delta}{n(n-1)}E(\frac{s_x^2}{\bar{x}^4})$$

$$+\delta\left\{ (1-W)^2 + W^2m^2\cdot E[\frac{1}{\bar{x}^2}-\frac{2}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^4}+\frac{1}{n^2}\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^6}]+2(1-W)Wm\cdot E[\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}] \right\}$$

$$+2\alpha\beta\left\{(1-W)^2E(\bar{x})+(1-W)Wm+(1-W)Wm\cdot E[1-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^2}]+W^2m^2\cdot E[\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}]\right\}$$

และ

$$E(\bar{y}^2_{MOD2}) = \alpha^2\left\{ (1-W)^2 + W^2m^2\cdot E[\frac{1}{\bar{x}^2}-\frac{2}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^4}+\frac{6m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^6}+\frac{1}{n^2}\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^6}-\frac{6m}{n^2}\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^8}+\frac{9m^2}{n^2}\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^{10}}]\right.$$

$$\left.+2(1-W)Wm\cdot E[\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5}]\right\} + \beta^2\{(1-W)^2E(\bar{x}^2) + W^2m^2$$

$$+2(1-W)Wm\cdot E(\bar{x})\} + W^2m^2\frac{\delta}{n(n-1)}E[\frac{s_x^2}{\bar{x}^4}-6m\frac{s_x^2}{\bar{x}^6}+9m^2\frac{s_x^2}{\bar{x}^8}]$$

$$+\delta^2\left\{ (1-W)^2 + W^2m^2\cdot E[\frac{1}{\bar{x}^2}-\frac{2}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^4}+\frac{6m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^6}+\frac{1}{n^2}\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^6}\right.$$

$$\left.-\frac{6m}{n^2}\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^8}+\frac{9m^2}{n^2}\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^{10}}]+2(1-W)Wm\cdot E[\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5}]\right\}$$

$$+2\alpha\beta\left\{(1-W)^2E(\bar{x})+(1-W)Wm+(1-W)Wm\cdot E[1-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^2}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^4}]\right.$$

$$\left.+W^2m^2\cdot E[\frac{1}{\bar{x}}-\frac{1}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^3}+\frac{3m}{n}\frac{s_x^2}{\bar{x}^5}]\right\}$$

โดยวิธีของ Rao และ Webster (1966 หน้า 576) จะได้ว่า

$$E\left(\frac{s_x^2}{\bar{x}^2}\right) = \frac{n}{m+1}$$

$$E\left(\frac{s_x^2}{\bar{x}^4}\right) = \frac{n}{(m^2-1)(m-2)}$$

$$E\left(\frac{s_x^2}{\bar{x}^6}\right) = \frac{n}{(m^2-1)(m-2)(m-3)(m-4)}$$

$$E\left(\frac{s_x^2}{\bar{x}^8}\right) = \frac{n}{(m^2-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}$$

$$E\left[\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^6}\right] = \frac{n^2\{\,6(n-1)+m(n+1)\,\}}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)(n-1)}$$

$$E\left[\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^8}\right] = \frac{n^2\{\,6(n-1)+m(n+1)\,\}}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(n-1)}$$

$$E\left[\frac{(s_x^2)^2}{\bar{x}^{10}}\right] = \frac{n^2\{\,6(n-1)+m(n+1)\,\}}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)(m-6)(n-1)}$$

ทำให้

$$\begin{aligned}
E(\bar{y}^2_{MOD1}) = {} & \alpha^2\left\{1+\frac{2W}{(m^2-1)}+\frac{W^2}{(m^2-1)^2} + W^2m^2\left(\frac{m^2(m^2+3m+8)}{(m^2-1)^2(m^2-4)(m+3)}\right.\right. \\
& \left.\left. +\frac{2mn}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)(n-1)}\right)\right\} + \beta^2\{(1-W)^2m+m^2\} \\
& + 2\alpha\beta\left\{m + \frac{Wm}{(m^2-1)} - (1-W)Wm^2\left(\frac{1}{(m^2-1)}\right)\right\} \\
& + \delta\left\{(1-W)^2 + 2(1-W)Wm^2\left(\frac{1}{(m^2-1)}\right)\right. \\
& \left. + W^2m^2\left(\frac{m^2(m+4)}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)} + \frac{(m^2+5m+6)+2mn}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)(n-1)}\right)\right\}
\end{aligned}$$

และ

$$E(\bar{y}^2_{MOD2}) \;=\; \alpha^2\left\{1 + \frac{2W(4m^2-5m+6)}{(m^2-1)(m-2)(m-3)} + \frac{W^2(4m^2-5m+6)^2}{(m^2-1)^2(m-2)^2(m-3)^2}\right.$$

$$+\; W^2m^2\left(\frac{m^2(m^4-8m^3+5m^2+134m-429)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)}\right.$$

$$-\;\frac{m^2(m^4-10m^3+43m^2-90m+81)}{(m^2-1)^2(m-2)^2(m-3)^2}$$

$$\left.\left.+\;\frac{2mn(m^4-24m^3+194m^2-522m+360)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)(m-6)(n-1)}\right)\right\}$$

$$+\;\beta^2\{(1-W)^2m+m^2\} \;+\; 2\alpha\beta\left\{ m \;+\; \frac{Wm(4m^2+5m-6)}{(m^2-1)(m-2)(m-3)}\right.$$

$$\left.-\;(1-W)Wm^2\left(\frac{m^2-5m+15}{(m^2-1)(m-2)(m-3)}\right)\right\}$$

$$+\;\delta\left\{(1-W)^2 \;+\; 2(1-W)Wm^2\left(\frac{m^2-5m+9}{(m^2-1)(m-2)(m-3)}\right)\right.$$

$$+\;W^2m^2\left(\frac{m^2(m^4-8m^3+5m^2+134m-429)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\{(m^2+5m+6)+2mn\}(m^4-24m^3+194m^2-522m+360)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)(m-6)(n-1)}\right)\right\}$$

ดังนั้น ความแปรปรวนของ $\bar{y}_{MOD1}$ คือ

$$Var(\bar{y}_{MOD1}) \;=\; E(\bar{y}^2_{MOD1}) \;-\; \{E(\bar{y}_{MOD1})\}^2$$

$$=\; \alpha\; W^2m^2\left\{\frac{m^2(m^2+3m+8)}{(m^2-1)^2(m^2-4)(m+3)} + \frac{2mn}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)(n-1)}\right\}$$

$$+\;\beta^2(1-W)^2m \;-\; 2\alpha\beta(1-W)Wm^2\left\{\frac{1}{(m^2-1)}\right\} \;+\; \delta\left\{\;(1-W)^2\right.$$

$$+\;2(1-W)Wm^2\left(\frac{1}{(m^2-1)}\right) \;+\; W^2m^2\left(\frac{m^2(m+4)}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)}\right.$$

$$\left.\left.+\;\frac{(m^2+5m+6)+2mn}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)(n-1)}\right)\right\}$$

และความแปรปรวนของ $\bar{y}_{MOD2}$ คือ

$$
\begin{aligned}
Var(\bar{y}_{MOD2}) &= E(\bar{y}^2_{MOD2}) - \{E(\bar{y}_{MOD2})\}^2 \\
&= \alpha^2 W^2 m^2 \left\{ \frac{m^2(m^4-8m^3+5m^2+134m-429)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)} \right. \\
&\quad - \frac{m^2(m^4-10m^3+43m^2-90m+81)}{(m^2-1)^2(m-2)^2(m-3)^2} \\
&\quad \left. + \frac{2mn(m^4-24m^3+194m^2-522m+360)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)(m-6)(n-1)} \right\} \\
&\quad + \beta^2(1-W)^2 m - 2\alpha\beta(1-W)Wm^2 \left\{ \frac{m^2-5m+15}{(m^2-1)(m-2)(m-3)} \right\} \\
&\quad + \delta \left\{ (1-W)^2 + 2(1-W)Wm^2 \left(\frac{m^2-5m+9}{(m^2-1)(m-2)(m-3)} \right) \right. \\
&\quad + W^2 m^2 \left(\frac{m^2(m^4-8m^3+5m^2+134m-429)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\{(m^2+5m+6)+2mn\}(m^4-24m^3+194m^2-522m+360)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)(m-6)(n-1)} \right) \right\}
\end{aligned}
$$

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในบทที่ 3 ได้กล่าวถึง ตัวประมาณอัตราส่วนที่ผู้วิจัยเสนอในงานวิจัยนี้สำหรับประมาณค่าเฉลี่ยประชากร นอกจากตัวประมาณที่ผู้วิจัยเสนอ ยังมีงานวิจัยอีกหลายชิ้นเสนอตัวประมาณอัตราส่วนในรูปแบบต่างๆ กัน ซึ่งในงานวิจัยของ Chakarbraty (1977) ได้เสนอตัวประมาณอัตราส่วน 2 ตัว คือ

$$\bar{y}_{C1} = (1-W)\,\bar{y} + W\,\bar{y}_r \tag{4.1}$$

และ

$$\bar{y}_{C2} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_Q\,\bar{X} \tag{4.2}$$

เมื่อ W คือ ค่าถ่วงน้ำหนัก ; $0 < W < 1$

และ $r_Q = 2r - \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ คือ ตัวประมาณของ Quenouille (1956) โดยที่ r_1 และ r_2 คือ อัตราส่วนตัวอย่างจากการสุ่มแบ่งครึ่งตัวอย่างออกเป็น 2 กลุ่มที่ไม่ซ้ำซ้อนกัน

จะพบว่าตัวประมาณของ Chakarbraty มีรูปแบบคล้ายกับตัวประมาณที่ผู้วิจัยเสนอ และผลการวิจัยของ Chakarbraty ได้แสดงว่า $\bar{y}_{C1}$ และ $\bar{y}_{C2}$ เป็นตัวประมาณที่เหมาะสมตัวหนึ่ง จึงสมควรที่จะนำมาพิจารณาร่วมกับตัวประมาณที่ผู้วิจัยเสนอและ $\bar{y}_r$ เพื่อหาแนวทางในการตัดสินใจเลือกใช้ตัวประมาณที่เหมาะสมกับสถานการณ์ต่างๆ

ในบทนี้ จะกล่าวถึงคุณสมบัติของตัวประมาณอัตราส่วนทั้งหมด การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณ โดยแบ่งเป็น 2 กรณี คือ กรณีทั่วไป และกรณีที่ y และ x มีความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด

4.1 ความเอนเอียงและความแปรปรวนของตัวประมาณอัตราส่วน

ในการศึกษาความเอนเอียงและความแปรปรวนของตัวประมาณอัตราส่วนนั้น โดยปกติจะกำหนดให้ ค่า x_i ต่างๆ มีค่าเป็นบวก และตัวอย่างมีขนาดใหญ่ โดยที่ $|\delta_{\bar{x}}| < 1$ จะได้ว่าความเอนเอียงของตัวประมาณอัตราส่วนที่พิจารณาถึงเทอมใน $O(n^{-1})$ มีค่าดังนี้

ความเอนเอียงของ $\bar{y}_r$ คือ

$$Bias(\bar{y}_r) = \frac{N-n}{N}\frac{\bar{Y}}{n}(C_x^2 - C_{xy}) + O(n^{-2}) \tag{4.3}$$

ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C1}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{C1}) = \frac{N-n}{N}\frac{W\bar{Y}}{n}(C_x^2 - C_{xy}) + O(n^{-2}) \quad (4.4)$$

ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C2}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{C2}) = 0 + O(n^{-2}) \quad (4.5)$$

ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{MOD1}) = 0 + O(n^{-2}) \quad (4.6)$$

และความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD2}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{MOD2}) = 0 + O(n^{-2}) \quad (4.7)$$

จากสมการที่ (4.3) ถึง (4.7) จะเห็นว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ มีเทอมหลักของความเอนเอียงอยู่ใน $O(n^{-2})$ ซึ่งเมื่อ n มีขนาดใหญ่ขึ้นความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะเข้าสู่ 0 เร็วกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}_{C1}$ อย่างไรก็ตาม ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C1}$ จะมีค่าน้อยกว่า $\bar{y}_r$ เมื่อ $0 < W < 1$

สำหรับความแปรปรวนโดยประมาณของ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ ซึ่งพิจารณาถึงเทอมใน $O(n^{-1})$ จะมีค่าเท่ากันดังนี้

$$Var(estimator) \cong \frac{N-n}{N}\frac{S_y^2}{n}\{1 + WK(WK - 2\rho)\} \quad (4.8)$$

<u>หมายเหตุ</u> ในที่นี้กำหนดให้ $estimator$ แทนตัวประมาณ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$

4.2 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณอัตราส่วน

ในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ หรือใหญ่พอจะทำให้ความเอนเอียงของตัวประมาณอัตราส่วนมีค่าน้อยจนไม่ต้องนำมาพิจารณา การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณอาจพิจารณาจากความแม่นยำเปรียบเทียบ หรืออัตราส่วนระหว่างความแปรปรวนของ $\bar{y}$ และ $\bar{y}_r$ เทียบกับ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ โดยกำหนดให้

$$E_1 = \frac{Var(\bar{y})}{Var(estimator)} = \frac{1}{\{1 + WK(WK - 2\rho)\}} \quad (4.9)$$

และ $$E_2 = \frac{Var(\bar{y}_r)}{Var(estimator)} = \frac{\{1+K(K-2\rho)\}}{\{1+WK(WK-2\rho)\}} \quad (4.10)$$

สำหรับการหาค่า W ที่เหมาะสม ซึ่งจะทำให้ E_1 หรือ E_2 มีค่ามากกว่า 1 หรือทำให้ตัวประมาณ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ มีประสิทธิภาพมากกว่า $\bar{y}$ หรือ $\bar{y}_r$ สามารถทำได้ดังนี้

(1) $E_1 > 1$ ก็ต่อเมื่อ

$$1+WK(WK-2\rho) < 1$$

$$WK-2\rho < 0$$

$$W < 2\rho/K$$

(2) $E_2 > 1$ ก็ต่อเมื่อ

$$1+WK(WK-2\rho) < 1+K(K-2\rho)$$

$$(W^2-1)K-(W-1)\,2\rho < 0$$

$$(W-1)\{(W+1)K-2\rho\} < 0$$

เนื่องจาก $0 < W < 1$ ทำให้ $(W-1)$ มีค่าเป็นลบเสมอ ดังนั้น ถ้าต้องการให้ค่าทางซ้ายของอสมการน้อยกว่า 0 อาจเขียนอสมการใหม่ได้ว่า

$$(W+1)K-2\rho > 0$$

$$W > \frac{2\rho-K}{K}$$

ดังนั้น จาก (1) และ (2) อาจสรุปได้ว่า

$$E_1 > 1 \text{ เมื่อ } 0 < W < 2\rho/K \quad (4.11)$$

และ $$E_2 > 1 \text{ เมื่อ } (2\rho-K)/K < W < 1 \quad (4.12)$$

และหากพิจารณาค่า W ที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งจะทำให้ทั้ง E_1 และ E_2 มีค่ามากกว่า 1 หรือทำให้ตัวประมาณ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ มีประสิทธิภาพมากกว่า $\bar{y}$ และ $\bar{y}_r$ จากสมการที่ (4.11) และ (4.12) จะได้ว่าค่า W ที่เหมาะสมที่สุดควรอยู่ระหว่าง $(2\rho-K)/K$ ถึง $2\rho/K$ หรือ

$$E_1 \text{ และ } E_2 > 1 \text{ เมื่อ } (2\rho-K)/K < W < 2\rho/K \quad (4.13)$$

จากการพิจารณาข้างต้นนี้ จะเห็นว่าการเปลี่ยนแปลงของค่า ρ , K และ W จะมีผลต่อประสิทธิภาพของตัวประมาณ ซึ่งจากค่าที่เป็นไปได้ของ ρ และ K เมื่อแทนค่าลงในสมการที่ (4.13) จะได้ค่าขอบเขตล่าง (L_w) และขอบเขตบน (U_w) ของ W ที่เหมาะสมที่สุด ผลลัพธ์ที่ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

<u>ตารางที่ 4.1</u> แสดงค่าขอบเขตล่าง (L_W) และขอบเขตบน (U_W) ของ W ที่เหมาะสมที่สุด

ρ	$K=0.25$		$K=0.50$		$K=1.00$		$K=1.50$		$K=2.00$	
	L_W	U_W	L_W	U_W	L_W	U_W	L_W	U_W	L_W	U_W
0.1	0.0	0.8	0.0	0.4	0.0	0.2	0.0	0.1	0.0	0.1
0.2	0.6	1.0	0.0	0.8	0.0	0.4	0.0	0.3	0.0	0.2
0.3	X	X	0.2	1.0	0.0	0.6	0.0	0.4	0.0	0.3
0.4	X	X	0.6	1.0	0.0	0.8	0.0	0.5	0.0	0.4
0.5	X	X	1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.7	0.0	0.5
0.6	X	X	X	X	0.2	1.0	0.0	0.8	0.0	0.6
0.7	X	X	X	X	0.4	1.0	0.0	0.9	0.0	0.7
0.8	X	X	X	X	0.6	1.0	0.1	1.0	0.0	0.8
0.9	X	X	X	X	0.8	1.0	0.2	1.0	0.0	0.9

<u>หมายเหตุ</u> X หมายถึง ไม่มีค่า W ที่เหมาะสมที่สุด สำหรับค่า ρ และ K ที่กำหนด

จากตารางที่ 4.1 จะสังเกตเห็นว่าสำหรับ $K \ge 1.00$ และ W มีค่าอยู่ในช่วงกว้างๆ ตัวประมาณ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่า $\bar{y}$ และ $\bar{y}_r$ เช่น เมื่อ $\rho = 0.6$, $K = 1.00$ และ W มีค่าอยู่ระหว่าง 0.2 ถึง 1.0

และจากค่าที่เป็นไปได้ของ ρ และ K เมื่อแทนค่าลงในสมการที่ (4.9) และ (4.10) โดยให้ W เท่ากับ 0.25 และ 0.50 ผลลัพธ์ที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ 4.2 และ 4.3 ตามลำดับ

<u>ตารางที่ 4.2</u> แสดงค่าประสิทธิภาพของ $\bar{y}$ และ $\bar{y}_r$ เทียบกับ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เมื่อ $W = 0.25$ (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	$K=0.25$		$K=0.50$		$K=1.00$		$K=1.50$		$K=2.00$	
	E_1	E_2	E_1	E_2	E_1	E_2	E_1	E_2	E_1	E_2
0.1	101	102	101	116	99	178	94	277	87	400
0.2	102	98	104	109	104	166	101	268	95	400
0.3	103	94	106	101	110	153	109	257	105	400
0.4	105	90	109	93	116	139	119	244	118	400
0.5	106	86	112	84	123	123	131	229	133	400
0.6	108	82	116	75	131	105	145	210	154	400
0.7	109	78	119	65	140	84	162	187	182	400
0.8	111	73	123	55	151	60	185	157	222	400
0.9	112	69	126	44	163	33	215	118	286	400

<u>ตารางที่ 4.3</u> แสดงค่าประสิทธิภาพของ $\bar{y}$ และ $\bar{y}_r$ เทียบกับ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เมื่อ $W = 0.50$ (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	$K=0.25$		$K=0.50$		$K=1.00$		$K=1.50$		$K=2.00$	
	E_1	E_2	E_1	E_2	E_1	E_2	E_1	E_2	E_1	E_2
0.1	101	102	99	114	87	157	71	209	56	256
0.2	104	100	104	109	95	152	79	210	63	263
0.3	106	97	110	104	105	147	90	211	71	271
0.4	109	94	116	99	118	141	104	213	83	283
0.5	112	91	123	92	133	133	123	215	100	300
0.6	116	88	131	85	154	123	151	219	125	325
0.7	119	85	140	77	182	109	195	224	167	367
0.8	123	81	151	68	222	89	276	234	250	450
0.9	126	77	163	57	286	57	471	259	500	700

จากตารางที่ 4.2 และ 4.3 จะเห็นว่า

(1) $W = 0.25$ จะเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด สำหรับ y และ x ที่มีระดับความสัมพันธ์ระหว่างในช่วง 0.3 ถึง 0.6 และ $K \geq 1.00$

(2) $W = 0.50$ จะเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด สำหรับระดับความสัมพันธ์ในช่วง 0.5 ถึง 0.7 และ $K \geq 1.00$

4.3 ความเอนเอียงและความแปรปรวนภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด

ในกรณีที่ y และ x มีความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นต่อไปนี้

$$y_i \;=\; \alpha + \beta\, x_i + u_i \;\;;\;\; \beta > 0 \qquad (4.14)$$

$$E(u_i \mid x_i) \;=\; 0 \;\;,\;\; E(u_i, u_j \mid x_i, x_j) \;=\; 0$$

$$Var(u_i \mid x_i) \;=\; n\delta \;\; (\delta \text{ เป็นค่าคงที่ใน } O(n^{-1}))$$

เมื่อตัวแปร x_i/n มีการแจกแจงแบบแกมม่า พารามิเตอร์ h และ $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ จะมีการแจกแจงแบบแกมม่า พารามิเตอร์ $m = nh$ ความเอนเอียงของตัวประมาณอัตราส่วนภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนดมีค่าดังนี้

ความเอนเอียงของ $\bar{y}_r$ คือ

$$Bias(\bar{y}_r) \;=\; \frac{\alpha}{(m-1)} \qquad (4.15)$$

ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C1}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{C1}) \;=\; \frac{\alpha W}{(m-1)} \qquad (4.16)$$

ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C2}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{C2}) \;=\; \frac{-2\alpha W}{(m-1)(m-2)} \qquad (4.17)$$

ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD1}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{MOD1}) \;=\; \frac{\alpha\, W}{(m^2-1)} \qquad (4.18)$$

และความเอนเอียงของ $\bar{y}_{MOD2}$ คือ

$$Bias(\bar{y}_{MOD2}) \;=\; \frac{\alpha\, W(4m^2-5m+6)}{(m^2-1)(m-2)(m-3)} \qquad (4.19)$$

จากสมการที่ (4.15) ถึง (4.19) จะเห็นว่าตัวประมาณ $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ มีความเอนเอียงน้อยกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}_{C1}$ โดย $\bar{y}_{MOD1}$ เป็นตัวประมาณที่มีความเอนเอียงน้อยที่สุด อย่างไรก็ตาม ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C1}$ จะมีค่าน้อยกว่า $\bar{y}_r$ เมื่อ $0 < W < 1$

สำหรับความแปรปรวนของตัวประมาณภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนดมีค่าดังนี้

ความแปรปรวนของ $\bar{y}$ คือ

$$Var(\bar{y}) = \delta + \beta^2 m \tag{4.20}$$

ความแปรปรวนของ $\bar{y}_r$ คือ

$$Var(\bar{y}_r) = \frac{\alpha^2 m^2}{(m-1)^2(m-2)} + \frac{\delta m^2}{(m-1)(m-2)} \tag{4.21}$$

ความแปรปรวนของ $\bar{y}_{C1}$ คือ

$$\begin{aligned} Var(\bar{y}_{C1}) = {} & \alpha^2 W^2 m^2 \left\{ \frac{1}{(m-1)^2(m-2)} \right\} + \beta^2 (1-W)^2 m \\ & - 2\alpha\beta(1-W)Wm \left\{ \frac{1}{(m-1)} \right\} + \delta \left\{ (1-W) \right. \\ & \left. + \frac{(1-W)W(m+1)}{(m-1)} + \frac{W^2 m^2}{(m-1)(m-2)} \right\} \end{aligned} \tag{4.22}$$

ความแปรปรวนของ $\bar{y}_{C2}$ คือ

$$\begin{aligned} Var(\bar{y}_{C2}) = {} & \alpha^2 W^2 m^2 \left\{ \frac{m^2 - 6m + 17}{(m-1)^2(m-2)^2(m-4)} \right\} + \beta^2 (1-W)^2 m \\ & - 2\alpha\beta(1-W)Wm \left\{ \frac{m-3}{(m-1)(m-2)} \right\} + \delta \left\{ (1-W)^2 \right. \\ & + 2(1-W)Wm \left(\frac{m-3}{(m-1)(m-2)} \right) \\ & \left. + W^2 m^2 \left(\frac{m^2 - 7m + 18}{(m-1)(m-2)^2(m-4)} \right) \right\} \end{aligned} \tag{4.23}$$

ความแปรปรวนของ $\bar{y}_{MOD1}$ คือ

$$Var(\bar{y}_{MOD1}) \;=\; \alpha^2 W^2 m^2 \left\{ \frac{m^2(m^2+3m+8)}{(m^2-1)^2(m^2-4)(m+3)} + \frac{2mn}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)(n-1)} \right\}$$

$$+\; \beta^2(1-W)^2 m \;-\; 2\alpha\beta(1-W)Wm^2\left\{\frac{1}{(m^2-1)}\right\} \;+\; \delta\Bigg\{\; (1-W)^2$$

$$+\; 2(1-W)Wm^2\left(\frac{1}{(m^2-1)}\right) + W^2m^2\Bigg(\frac{m^2(m+4)}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)}$$

$$+\; \frac{(m^2+5m+6)+2mn}{(m^2-1)(m^2-4)(m+3)(n-1)}\Bigg)\Bigg\} \tag{4.24}$$

และความแปรปรวนของ $\bar{y}_{MOD2}$ คือ

$$Var(\bar{y}_{MOD2}) \;=\; \alpha^2 W^2 m^2 \Bigg\{\frac{m^2(m^4-8m^3+5m^2+134m-429)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)}$$

$$-\frac{m^2(m^4-10m^3+43m^2-90m+81)}{(m^2-1)^2(m-2)^2(m-3)^2}$$

$$+\; \frac{2mn(m^4-24m^3+194m^2-522m+360)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)(m-6)(n-1)}\Bigg\}$$

$$+\; \beta^2(1-W)^2 m \;-\; 2\alpha\beta(1-W)Wm^2\left\{\frac{m^2-5m+15}{(m^2-1)(m-2)(m-3)}\right\}$$

$$+\; \delta\Bigg\{(1-W)^2 \;+\; 2(1-W)Wm^2\left(\frac{m^2-5m+9}{(m^2-1)(m-2)(m-3)}\right)$$

$$+\; W^2m^2\Bigg(\frac{m^2(m^4-8m^3+5m^2+134m-429)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)}$$

$$+\frac{\{(m^2+5m+6)+2mn\}(m^4-24m^3+194m^2-522m+360)}{(m^2-1)(m^2-4)(m^2-9)(m-4)(m-5)(m-6)(n-1)}\Bigg)\Bigg\} \tag{4.25}$$

จากสมการที่ (4.20) ถึง (4.25) จะเห็นว่าเป็นการยากที่จะสรุปว่า ตัวประมาณตัวไหนมีความแปรปรวนน้อยกว่าหรือน้อยที่สุด ซึ่งในหัวข้อถัดไปผู้วิจัยจะทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด เพื่อศึกษาผลกระทบของความเอนเอียงและความแปรปรวนที่มีต่อประสิทธิภาพของตัวประมาณ

4.4 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด

กรณีที่ความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x เป็นความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบ (4.14) การศึกษาประสิทธิภาพของตัวประมาณจะพิจารณาจากค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง เนื่องจากตัวประมาณอัตราส่วนเป็นตัวประมาณที่เอนเอียง สำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณอาจพิจารณาจากความถูกต้องเปรียบเทียบของ $\bar{y}$ เทียบกับ $\bar{y}_r$, $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned} E'_{(estimator')} &= Var(\bar{y})/MSE(estimator') \\ &= Var(\bar{y}) \,/\, [\,Var(estimator') + \{Bias(estimator')\}^2\,] \end{aligned} \qquad (4.26)$$

<u>หมายเหตุ</u> ในที่นี้กำหนดให้ $estimator'$ แทนตัวประมาณ $\bar{y}_r$, $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$

โดยให้เทอมของ α , β และ δ ในตัวแบบ (4.14) มีค่าดังนี้ [1]

$$\alpha = \bar{Y}\left\{\frac{K-\rho}{K}\right\} , \; \beta = \bar{Y}\left\{\frac{\rho}{Km}\right\} \;\; \text{และ} \;\; \delta = \bar{Y}^2\left\{\frac{1-\rho^2}{K^2 m}\right\} \qquad (4.27)$$

จากการแทนค่า α , β และ δ ลงในสมการที่ (4.15) ถึง (4.25) จะเห็นว่าประสิทธิภาพของตัวประมาณจะขึ้นอยู่กับค่า ρ , m , K และ W จากค่าที่เป็นไปได้ของ ρ , m และ K เมื่อแทนลงในสมการที่ (4.26) โดยให้ตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และ W เท่ากับ 0.25 และ 0.50 ผลลัพธ์ที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ 4.4 ถึง 4.6 และ 4.7 ถึง 4.9 ตามลำดับ

---

[1] Chakarbraty (1973) กำหนดเทอมของ α , β และ δ เพื่อใช้ในงานวิจัย

ตารางที่ 4.4 แสดงค่าประสิทธิภาพของ $\bar{y}$ เทียบกับ $\bar{y}_r$, $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เมื่อ ρ = 0.1, 0.2 และ 0.3 และ W = 0.25 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	E_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}
0.1	8	0.25	64	93	98	99	93
		0.50	55	92	97	99	91
		1.00	33	88	90	95	83
		1.50	19	80	79	88	70
		2.00	12	70	67	80	57
	16	0.25	81	97	100	100	99
		0.50	70	97	100	100	99
		1.00	43	94	96	97	96
		1.50	26	87	89	92	90
		2.00	16	79	81	84	81
	20	0.25	84	98	100	100	100
		0.50	73	98	100	100	100
		1.00	45	95	97	98	97
		1.50	27	89	91	92	91
		2.00	17	81	82	85	83
	32	0.25	90	99	100	101	100
		0.50	78	99	100	101	100
		1.00	49	96	98	98	98
		1.50	30	91	92	93	93
		2.00	19	83	84	86	85

ρ	m	K	E_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}
0.2	8	0.25	68	94	100	100	94
		0.50	61	95	100	101	95
		1.00	37	93	96	100	89
		1.50	21	87	86	95	77
		2.00	13	77	73	87	63
	16	0.25	85	98	101	102	101
		0.50	77	100	103	103	102
		1.00	49	99	102	103	101
		1.50	29	94	96	99	97
		2.00	18	87	88	92	89
	20	0.25	89	99	102	102	101
		0.50	81	100	103	103	103
		1.00	51	100	102	103	102
		1.50	30	96	98	99	98
		2.00	19	88	90	93	91
	32	0.25	94	100	102	102	102
		0.50	86	102	103	103	103
		1.00	55	102	103	103	103
		1.50	33	98	99	100	100
		2.00	21	91	92	94	93

ρ	m	K	E_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}
0.3	8	0.25	72	96	101	102	96
		0.50	68	98	104	104	98
		1.00	43	99	102	106	96
		1.50	24	95	93	103	85
		2.00	15	86	81	96	71
	16	0.25	90	100	103	103	102
		0.50	86	103	105	106	105
		1.00	56	105	107	108	107
		1.50	32	103	104	107	105
		2.00	20	96	97	102	99
	20	0.25	94	101	103	103	102
		0.50	90	103	106	106	105
		1.00	59	106	108	109	108
		1.50	34	104	106	107	107
		2.00	21	98	99	102	101
	32	0.25	100	102	103	103	103
		0.50	95	104	106	106	106
		1.00	63	107	109	109	109
		1.50	37	106	107	108	108
		2.00	23	101	102	104	103

หมายเหตุ $E_r = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_r)}$, $E_{C1} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C1})}$, $E_{C2} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C2})}$, $E_{MOD1} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD1})}$ และ $E_{MOD2} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD2})}$

ตารางที่ 4.5 แสดงค่าประสิทธิภาพของ $\bar{y}$ เทียบกับ $\bar{y}_r$, $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เมื่อ ρ = 0.4, 0.5 และ 0.6 และ W = 0.25 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	E_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}	ρ	m	K	E_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}	ρ	m	K	E_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}
0.4	8	0.25	76	97	103	103	96	0.5	8	0.25	79	98	104	104	97	0.6	8	0.25	83	100	105	106	97
		0.50	77	101	107	107	102			0.50	88	105	110	111	105			0.50	101	108	114	114	108
		1.00	51	106	109	113	104			1.00	62	114	117	120	113			1.00	78	123	126	129	123
		1.50	28	104	103	113	96			1.50	33	116	114	125	108			1.50	40	131	127	139	124
		2.00	16	97	90	108	81			2.00	18	111	102	123	94			2.00	21	130	117	142	111
	16	0.25	95	101	104	104	103		16	0.25	100	103	105	106	105		16	0.25	105	104	107	107	106
		0.50	96	106	108	109	108			0.50	109	109	112	112	111			0.50	126	112	115	115	114
		1.00	66	111	114	115	114			1.00	80	119	121	122	121			1.00	100	127	130	130	130
		1.50	37	112	114	117	115			1.50	44	124	126	128	127			1.50	53	139	140	142	142
		2.00	22	108	109	114	111			2.00	25	123	123	129	127			2.00	29	143	142	149	147
	20	0.25	99	102	104	104	104		20	0.25	104	103	106	106	105		20	0.25	110	105	107	107	106
		0.50	100	106	109	109	108			0.50	114	109	112	112	111			0.50	131	113	115	115	115
		1.00	69	112	114	115	115			1.00	83	120	122	122	122			1.00	105	128	130	130	130
		1.50	39	114	115	117	116			1.50	46	126	127	129	128			1.50	56	140	141	143	143
		2.00	23	110	111	115	113			2.00	27	125	126	130	129			2.00	31	145	145	150	149
	32	0.25	105	103	104	105	104		32	0.25	111	104	106	106	106		32	0.25	118	106	107	107	107
		0.50	107	107	109	109	109			0.50	121	111	112	112	112			0.50	140	114	115	115	115
		1.00	74	114	115	115	115			1.00	89	121	122	123	123			1.00	112	129	130	131	131
		1.50	43	116	117	118	118			1.50	50	128	129	130	129			1.50	61	142	143	144	144
		2.00	26	113	114	116	115			2.00	29	128	129	131	131			2.00	33	149	149	152	151

หมายเหตุ $E_r = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_r)}$, $E_{C1} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C1})}$, $E_{C2} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C2})}$, $E_{MOD1} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD1})}$ และ $E_{MOD2} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD2})}$

ตารางที่ 4.6 แสดงค่าประสิทธิภาพของ $\bar{y}$ เทียบกับ $\bar{y}_r$, $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เมื่อ ρ = 0.7, 0.8 และ 0.9 และ W = 0.25 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	E'_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}	ρ	m	K	E'_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}	ρ	m	K	E'_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}
0.70	8	0.25	86	101	106	107	97	0.80	8	0.25	89	102	107	109	97	0.90	8	0.25	91	104	108	110	96
		0.50	117	112	117	117	110			0.50	139	116	121	121	112			0.50	168	120	125	125	114
		1.00	105	133	136	138	134			1.00	160	146	148	149	147			1.00	324	160	161	162	161
		1.50	50	150	144	157	145			1.50	67	176	166	180	173			1.50	103	211	196	211	212
		2.00	25	156	138	168	135			2.00	30	196	166	205	171			2.00	39	262	209	265	232
	16	0.25	111	105	108	108	107		16	0.25	117	107	110	110	108		16	0.25	123	108	111	111	109
		0.50	148	116	118	118	117			0.50	178	119	122	122	121			0.50	222	123	126	126	124
		1.00	134	137	139	140	139			1.00	203	149	150	150	150			1.00	408	162	163	163	163
		1.50	67	157	157	160	160			1.50	90	181	180	183	184			1.50	138	214	210	213	215
		2.00	34	171	168	176	175			2.00	41	211	204	215	216			2.00	53	277	261	276	281
	20	0.25	117	106	108	109	108		20	0.25	123	108	110	110	109		20	0.25	131	109	111	112	110
		0.50	154	116	118	119	118			0.50	186	120	122	122	121			0.50	234	124	126	126	125
		1.00	140	138	139	140	140			1.00	212	149	150	151	150			1.00	425	162	163	163	163
		1.50	70	158	159	161	161			1.50	95	182	181	183	184			1.50	146	214	211	213	215
		2.00	36	173	171	177	177			2.00	44	214	209	217	217			2.00	56	279	268	278	282
	32	0.25	125	107	109	109	109		32	0.25	133	109	110	110	110		32	0.25	142	110	112	112	111
		0.50	164	117	119	119	119			0.50	199	121	122	122	122			0.50	252	125	126	126	126
		1.00	150	139	140	140	140			1.00	226	150	151	151	151			1.00	453	163	163	163	163
		1.50	76	160	160	161	161			1.50	103	183	183	184	184			1.50	159	214	213	214	214
		2.00	39	177	176	179	179			2.00	48	217	215	219	219			2.00	62	282	276	281	283

หมายเหตุ $E_r = \dfrac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_r)}$, $E_{C1} = \dfrac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C1})}$, $E_{C2} = \dfrac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C2})}$, $E_{MOD1} = \dfrac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD1})}$ และ $E_{MOD2} = \dfrac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD2})}$

<u>ตารางที่ 4.7</u> แสดงค่าประสิทธิภาพของ $\bar{y}$ เทียบกับ $\bar{y}_r$, $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เมื่อ ρ = 0.1, 0.2 และ 0.3 และ W = 0.50 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	E_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}	ρ	m	K	E_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}	ρ	m	K	E_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}
0.1	8	0.25	64	84	88	95	82	0.2	8	0.25	68	86	91	98	85	0.3	8	0.25	72	89	94	100	87
		0.50	55	80	83	92	75			0.50	61	85	89	97	82			0.50	68	91	95	103	88
		1.00	33	65	63	78	54			1.00	37	73	71	85	61			1.00	43	81	80	95	70
		1.50	19	49	45	60	36			1.50	21	55	50	67	41			1.50	24	63	57	76	47
		2.00	12	36	31	45	24			2.00	13	40	35	51	27			2.00	15	45	39	57	30
	16	0.25	81	93	97	99	97		16	0.25	85	95	100	101	100		16	0.25	90	98	102	104	102
		0.50	70	90	94	96	94			0.50	77	95	99	101	99			0.50	86	101	105	107	105
		1.00	43	76	79	83	80			1.00	49	84	87	91	88			1.00	56	94	97	101	98
		1.50	26	60	61	66	63			1.50	29	67	69	74	70			1.50	32	76	78	84	80
		2.00	16	45	46	51	47			2.00	18	51	52	57	53			2.00	20	58	59	65	61
	20	0.25	84	94	98	99	98		20	0.25	89	97	101	102	101		20	0.25	94	100	103	105	104
		0.50	73	92	95	97	96			0.50	81	97	100	102	101			0.50	90	102	106	108	107
		1.00	45	79	81	84	82			1.00	51	86	89	92	90			1.00	59	96	99	102	100
		1.50	27	62	64	67	65			1.50	30	69	71	75	73			1.50	34	79	81	85	83
		2.00	17	47	48	52	50			2.00	19	53	54	58	56			2.00	21	60	62	67	64
	32	0.25	90	97	99	100	100		32	0.25	94	99	102	103	102		32	0.25	100	102	105	105	105
		0.50	78	94	97	98	97			0.50	86	99	102	103	102			0.50	95	105	108	108	108
		1.00	49	82	84	85	85			1.00	55	90	92	93	93			1.00	63	99	102	103	103
		1.50	30	65	67	69	68			1.50	33	73	75	77	76			1.50	37	83	85	87	86
		2.00	19	50	51	53	53			2.00	21	56	58	60	59			2.00	23	64	66	69	68

<u>หมายเหตุ</u> $E_r = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_r)}$, $E_{C1} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C1})}$, $E_{C2} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C2})}$, $E_{MOD1} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD1})}$ และ $E_{MOD2} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD2})}$

<u>ตารางที่ 4.8</u> แสดงค่าประสิทธิภาพของ $\bar{y}$ เทียบกับ $\bar{y}_r$, $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เมื่อ ρ = 0.4, 0.5 และ 0.6 และ W = 0.50 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	E'_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}	ρ	m	K	E'_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}	ρ	m	K	E'_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}
0.4	8	0.25	76	91	96	103	89	0.5	8	0.25	79	94	99	106	89	0.6	8	0.25	83	96	101	109	89
		0.50	77	97	102	109	95			0.50	88	104	109	117	102			0.50	101	111	117	125	108
		1.00	51	92	91	107	82			1.00	62	106	105	122	97			1.00	78	125	125	142	117
		1.50	28	73	66	88	55			1.50	33	87	78	105	66			1.50	40	107	95	129	82
		2.00	16	53	45	67	35			2.00	18	62	52	79	41			2.00	21	76	62	97	50
	16	0.25	95	101	105	107	105		16	0.25	100	103	108	110	108		16	0.25	105	106	111	113	110
		0.50	96	107	112	113	112			0.50	109	114	119	121	119			0.50	126	122	127	129	126
		1.00	66	105	109	113	111			1.00	80	120	124	129	126			1.00	100	140	145	149	147
		1.50	37	88	90	97	93			1.50	44	105	107	115	111			1.50	53	129	131	141	136
		2.00	22	67	68	76	71			2.00	25	80	81	91	85			2.00	29	99	99	112	105
	20	0.25	99	102	106	107	106		20	0.25	104	105	109	110	109		20	0.25	110	108	112	114	112
		0.50	100	109	113	114	113			0.50	114	116	120	121	120			0.50	131	124	128	129	128
		1.00	69	108	111	114	113			1.00	83	123	127	130	128			1.00	105	143	147	150	149
		1.50	39	91	93	99	96			1.50	46	108	111	117	114			1.50	56	133	136	143	141
		2.00	23	70	71	77	75			2.00	27	84	85	93	89			2.00	31	104	105	115	111
	32	0.25	105	105	107	108	108		32	0.25	111	108	110	111	111		32	0.25	118	111	114	114	114
		0.50	107	111	114	115	114			0.50	121	119	121	122	122			0.50	140	127	129	130	130
		1.00	74	112	114	116	115			1.00	89	127	129	131	131			1.00	112	147	150	152	151
		1.50	43	96	98	101	100			1.50	50	114	116	119	119			1.50	61	140	142	147	146
		2.00	26	75	76	80	79			2.00	29	90	91	96	94			2.00	33	112	113	119	118

<u>หมายเหตุ</u> $E_r = \dfrac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_r)}$, $E_{C1} = \dfrac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C1})}$, $E_{C2} = \dfrac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C2})}$, $E_{MOD1} = \dfrac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD1})}$ และ $E_{MOD2} = \dfrac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD2})}$

<u>ตารางที่ 4.9</u> แสดงค่าประสิทธิภาพของ $\bar{y}$ เทียบกับ $\bar{y}_r$, $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เมื่อ ρ = 0.7, 0.8 และ 0.9 และ W = 0.50 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	E'_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}	ρ	m	K	E'_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}	ρ	m	K	E'_r	E_{C1}	E_{C2}	E_{MOD1}	E_{MOD2}
0.7	8	0.25	86	99	103	112	89	0.8	8	0.25	89	101	104	115	87	0.9	8	0.25	91	103	105	118	84
		0.50	117	120	126	134	114			0.50	139	129	135	144	119			0.50	168	140	146	156	123
		1.00	105	152	152	170	146			1.00	160	192	193	211	189			1.00	324	260	262	277	260
		1.50	50	139	122	166	108			1.50	67	198	167	233	153			1.50	103	340	264	391	258
		2.00	25	98	78	126	63			2.00	30	137	102	179	83			2.00	39	227	148	308	122
	16	0.25	111	109	114	116	113		16	0.25	117	112	117	120	116		16	0.25	123	115	120	123	118
		0.50	148	131	136	138	135			0.50	178	141	146	148	145			0.50	222	152	158	160	156
		1.00	134	168	173	177	175			1.00	203	208	213	218	216			1.00	408	274	279	282	281
		1.50	67	167	168	182	177			1.50	90	238	235	257	251			1.50	138	409	391	435	430
		2.00	34	130	128	148	138			2.00	41	187	181	216	201			2.00	53	338	308	400	368
	20	0.25	117	111	115	117	115		20	0.25	123	114	118	120	118		20	0.25	131	118	122	124	121
		0.50	154	133	137	138	137			0.50	186	143	147	149	147			0.50	234	155	159	161	158
		1.00	140	171	175	178	177			1.00	212	211	216	219	218			1.00	425	277	280	283	282
		1.50	70	173	175	185	182			1.50	95	245	245	261	258			1.50	146	422	410	443	441
		2.00	36	137	137	152	146			2.00	44	199	196	223	215			2.00	56	365	345	419	401
	32	0.25	125	114	117	118	117		32	0.25	133	118	120	121	120		32	0.25	142	121	124	125	124
		0.50	164	136	138	139	139			0.50	199	146	149	150	149			0.50	252	158	161	162	161
		1.00	150	175	178	180	179			1.00	226	216	218	220	220			1.00	453	280	283	284	284
		1.50	76	181	183	189	188			1.50	103	257	258	267	266			1.50	159	441	435	454	454
		2.00	39	147	149	158	156			2.00	48	217	217	233	231			2.00	62	411	401	449	444

<u>หมายเหตุ</u> $E_r = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_r)}$, $E_{C1} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C1})}$, $E_{C2} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{C2})}$, $E_{MOD1} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD1})}$ และ $E_{MOD2} = \frac{Var(\bar{y})}{MSE(\bar{y}_{MOD2})}$

จากตารางที่ 4.4 ถึง 4.9 จะเห็นว่า

(1) $W = 0.25$ จะเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด สำหรับระดับความสัมพันธ์ในช่วง 0.4 ถึง 0.6 , $m \geq 16$ และ $K \geq 1.00$

(2) $W = 0.50$ จะเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด สำหรับระดับความสัมพันธ์เท่ากับ 0.6 , $m > 16$ และ $K \geq 1.00$ หรือระดับความสัมพันธ์ในเท่ากับ 0.7 , $m \geq 16$ และ $K \geq 1.00$

และเป็นที่น่าสังเกตว่าผลลัพธ์ในตารางข้างต้นนี้ สำหรับ $m \geq 32$ จะมีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์ในตารางที่ 4.2 และ 4.3 เช่น เมื่อ $W = 0.25$, $\rho = 0.4$ และ $K = 1.00$ จะได้ว่า $E_1 = 116\%$ (จากตารางที่ 4.2) สำหรับ $m = 32$ จะได้ว่า $E'_{C1} = 114\%$ และ $E'_{C2} = E'_{MOD1} = E'_{MOD2} = 115\%$

ดังนั้น อาจสรุปได้ว่ากรณีที่ y และ x มีความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด สำหรับ $m \geq 32$ ประสิทธิภาพของตัวประมาณที่วัดด้วยค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองจะมีค่าใกล้เคียงกับประสิทธิภาพที่วัดด้วยค่าแปรปรวนในกรณีทั่วไป

อย่างไรก็ตาม จากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณจะพบว่า เป็นการยากที่จะตัดสินใจเลือกตัวประมาณตัวใดตัวหนึ่งระหว่าง $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ ถึงแม้ว่าจากผลลัพธ์ในตารางที่ 4.4 ถึง 4.9 จะดูเหมือนว่า $\bar{y}_{MOD1}$ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณอื่นๆ แต่จะเห็นว่าเมื่อ $m \geq 32$ ตัวประมาณเหล่านี้จะมีมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน ดังนั้น การพิจารณาผลกระทบของความเอนเอียงที่มีต่อประสิทธิภาพของตัวประมาณ จะทำให้สามารถตัดสินใจเลือกตัวประมาณที่เหมาะสมที่สุดได้ง่ายขึ้น โดยกำหนดให้

$$B_{(estimator')} = \left| Bias(estimator') \right| / \left[MSE(estimator') \right]^{1/2}$$

$$= \left| Bias(estimator') \right| / \left[Var(estimator') + \{Bias(estimator')\}^2 \right]^{1/2} \qquad (4.28)$$

<u>**หมายเหตุ**</u> ในที่นี้กำหนดให้ $estimator'$ แทนตัวประมาณ $\bar{y}_r$, $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$

จากค่าที่เป็นไปได้ของ ρ , m และ K เมื่อแทนลงในสมการที่ (4.28) โดยให้ W เท่ากับ 0.25 และ 0.50 ผลลัพธ์ที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ 4.10 ถึง 4.12 และ 4.13 ถึง 4.15 ตามลำดับ

<u>ตารางที่ 4.10</u> แสดงค่า B_r , B_{C1} , B_{C2} , B_{MOD1} และ B_{MOD2} เมื่อ ρ = 0.1, 0.2 และ 0.3 และ W = 0.25 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}	ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}	ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}
0.1	8	0.25	4.87	1.46	0.50	0.17	1.20	0.2	8	0.25	1.67	0.49	0.17	0.06	0.40	0.3	8	0.25	1.71	0.49	0.17	0.06	0.41
		0.50	12.00	3.88	1.33	0.45	3.17			0.50	9.48	2.96	1.01	0.34	2.43			0.50	6.68	2.00	0.69	0.23	1.65
		1.00	20.82	8.52	2.88	0.99	6.80			1.00	19.74	7.80	2.64	0.90	6.27			1.00	18.57	7.04	2.38	0.81	5.70
		1.50	24.71	12.63	4.19	1.48	9.72			1.50	24.28	12.22	4.05	1.42	9.47			1.50	23.86	11.79	3.91	1.37	9.22
		2.00	26.51	16.05	5.23	1.90	11.89			2.00	26.32	15.97	5.19	1.89	11.88			2.00	26.17	15.91	5.15	1.87	11.90
	16	0.25	3.60	0.99	0.14	0.06	0.31		16	0.25	1.23	0.33	0.05	0.02	0.10		16	0.25	1.26	0.33	0.05	0.02	0.10
		0.50	8.93	2.63	0.38	0.16	0.82			0.50	7.03	2.00	0.29	0.12	0.62			0.50	4.94	1.35	0.20	0.08	0.42
		1.00	15.76	5.81	0.84	0.35	1.81			1.00	14.91	5.31	0.77	0.32	1.65			1.00	13.99	4.78	0.69	0.29	1.48
		1.50	18.92	8.72	1.26	0.53	2.71			1.50	18.56	8.42	1.22	0.51	2.62			1.50	18.22	8.10	1.17	0.49	2.52
		2.00	20.42	11.25	1.62	0.68	3.51			2.00	20.26	11.17	1.61	0.68	3.48			2.00	20.13	11.12	1.60	0.67	3.47
	20	0.25	3.24	0.87	0.10	0.04	0.21		20	0.25	1.11	0.29	0.03	0.01	0.07		20	0.25	1.14	0.30	0.03	0.01	0.07
		0.50	8.06	2.33	0.26	0.11	0.55			0.50	6.34	1.77	0.20	0.09	0.42			0.50	4.46	1.20	0.13	0.06	0.28
		1.00	14.28	5.16	0.58	0.25	1.22			1.00	13.50	4.71	0.53	0.23	1.12			1.00	12.66	4.24	0.48	0.20	1.00
		1.50	17.18	7.76	0.87	0.38	1.84			1.50	16.85	7.48	0.84	0.36	1.78			1.50	16.54	7.20	0.81	0.35	1.71
		2.00	18.57	10.04	1.13	0.49	2.39			2.00	18.42	9.96	1.12	0.49	2.37			2.00	18.30	9.91	1.11	0.48	2.36
	32	0.25	2.59	0.68	0.05	0.02	0.09		32	0.25	0.89	0.23	0.02	0.01	0.03		32	0.25	0.91	0.23	0.02	0.01	0.03
		0.50	6.46	1.82	0.12	0.06	0.25			0.50	5.08	1.38	0.09	0.04	0.19			0.50	3.56	0.93	0.06	0.03	0.13
		1.00	11.51	4.03	0.27	0.12	0.56			1.00	10.86	3.68	0.25	0.11	0.51			1.00	10.18	3.31	0.22	0.10	0.46
		1.50	13.89	6.08	0.41	0.19	0.84			1.50	13.62	5.86	0.39	0.18	0.81			1.50	13.36	5.64	0.38	0.17	0.78
		2.00	15.04	7.90	0.53	0.24	1.10			2.00	14.92	7.84	0.53	0.24	1.09			2.00	14.82	7.79	0.52	0.24	1.08

<u>หมายเหตุ</u> $B_r = \dfrac{|Bias(\bar{y}_r)|}{[MSE(\bar{y}_r)]^{1/2}}$, $B_{C1} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{C1})|}{[MSE(\bar{y}_{C1})]^{1/2}}$, $B_{C2} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{C2})|}{[MSE(\bar{y}_{C2})]^{1/2}}$, $B_{MOD1} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{MOD1})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD1})]^{1/2}}$ และ $B_{MOD2} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{MOD2})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD2})]^{1/2}}$

<u>ตารางที่ 4.11</u> แสดงค่า B_r , B_{C1} , B_{C2} , B_{MOD1} และ B_{MOD2} เมื่อ ρ = 0.4, 0.5 และ 0.6 และ W = 0.25 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}	ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}	ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}
0.4	8	0.25	5.27	1.49	0.51	0.17	1.22	0.5	8	0.25	8.99	2.50	0.86	0.29	2.05	0.6	8	0.25	12.86	3.53	1.21	0.40	2.87
		0.50	3.55	1.02	0.35	0.12	0.84			0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.50	4.05	1.05	0.36	0.12	0.86
		1.00	17.29	6.24	2.11	0.72	5.09			1.00	15.88	5.39	1.82	0.62	4.42			1.00	14.29	4.48	1.51	0.51	3.69
		1.50	23.48	11.35	3.75	1.31	8.94			1.50	23.15	10.89	3.59	1.25	8.65			1.50	22.92	10.41	3.42	1.19	8.34
		2.00	26.06	15.90	5.12	1.87	11.96			2.00	26.01	15.96	5.10	1.86	12.06			2.00	26.07	16.11	5.11	1.87	12.24
	16	0.25	3.89	1.01	0.15	0.06	0.31		16	0.25	6.67	1.69	0.24	0.10	0.52		16	0.25	9.58	2.38	0.34	0.14	0.74
		0.50	2.62	0.68	0.10	0.04	0.21			0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.50	2.99	0.71	0.10	0.04	0.22
		1.00	12.99	4.22	0.61	0.25	1.31			1.00	11.89	3.63	0.52	0.22	1.13			1.00	10.67	3.01	0.43	0.18	0.93
		1.50	17.91	7.77	1.12	0.47	2.42			1.50	17.64	7.43	1.07	0.44	2.31			1.50	17.45	7.07	1.01	0.42	2.19
		2.00	20.04	11.09	1.59	0.67	3.46			2.00	20.00	11.09	1.59	0.67	3.46			2.00	20.05	11.16	1.59	0.67	3.48
	20	0.25	3.51	0.89	0.10	0.04	0.21		20	0.25	6.01	1.50	0.17	0.07	0.35		20	0.25	8.65	2.11	0.24	0.10	0.50
		0.50	2.36	0.61	0.07	0.03	0.14			0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.50	2.70	0.63	0.07	0.03	0.15
		1.00	11.75	3.74	0.42	0.18	0.89			1.00	10.75	3.22	0.36	0.15	0.76			1.00	9.64	2.67	0.30	0.13	0.63
		1.50	16.25	6.90	0.77	0.33	1.64			1.50	16.00	6.59	0.74	0.32	1.56			1.50	15.83	6.27	0.70	0.30	1.48
		2.00	18.21	9.88	1.10	0.48	2.35			2.00	18.18	9.88	1.10	0.48	2.35			2.00	18.22	9.93	1.10	0.48	2.36
	32	0.25	2.81	0.69	0.05	0.02	0.10		32	0.25	4.81	1.17	0.08	0.04	0.16		32	0.25	6.94	1.64	0.11	0.05	0.23
		0.50	1.89	0.47	0.03	0.01	0.07			0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.50	2.16	0.49	0.03	0.01	0.07
		1.00	9.44	2.92	0.20	0.09	0.40			1.00	8.63	2.51	0.17	0.08	0.35			1.00	7.73	2.08	0.14	0.06	0.29
		1.50	13.12	5.40	0.36	0.17	0.75			1.50	12.92	5.15	0.34	0.16	0.71			1.50	12.78	4.89	0.33	0.15	0.68
		2.00	14.75	7.76	0.52	0.24	1.08			2.00	14.72	7.75	0.52	0.24	1.08			2.00	14.76	7.79	0.52	0.24	1.08

<u>หมายเหตุ</u> $B_r = \frac{|Bias(\bar{y}_r)|}{[MSE(\bar{y}_r)]^{1/2}}$, $B_{C1} = \frac{|Bias(\bar{y}_{C1})|}{[MSE(\bar{y}_{C1})]^{1/2}}$, $B_{C2} = \frac{|Bias(\bar{y}_{C2})|}{[MSE(\bar{y}_{C2})]^{1/2}}$, $B_{MOD1} = \frac{|Bias(\bar{y}_{MOD1})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD1})]^{1/2}}$ และ $B_{MOD2} = \frac{|Bias(\bar{y}_{MOD2})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD2})]^{1/2}}$

ตารางที่ 4.12 แสดงค่า B_r , B_{C1} , B_{C2} , B_{MOD1} และ B_{MOD2} เมื่อ ρ = 0.7, 0.8 และ 0.9 และ W = 0.25 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}	ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}	ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}
0.7	8	0.25	16.86	4.57	1.56	0.52	3.68	0.8	8	0.25	20.95	5.62	1.92	0.64	4.49	0.9	8	0.25	25.11	6.69	2.28	0.77	5.29
		0.50	8.75	2.14	0.73	0.24	1.74			0.50	14.29	3.26	1.11	0.37	2.64			0.50	20.97	4.42	1.50	0.50	3.55
		1.00	12.45	3.50	1.18	0.40	2.89			1.00	10.22	2.44	0.82	0.27	2.01			1.00	7.27	1.28	0.43	0.14	1.06
		1.50	22.88	9.90	3.23	1.12	8.00			1.50	23.23	9.37	3.04	1.05	7.64			1.50	24.55	8.81	2.83	0.98	7.25
		2.00	26.28	16.40	5.13	1.89	12.54			2.00	26.73	16.96	5.21	1.93	13.03			2.00	27.60	17.98	5.35	2.01	13.91
	16	0.25	12.65	3.08	0.45	0.18	0.95		16	0.25	15.87	3.79	0.55	0.23	1.17		16	0.25	19.25	4.51	0.65	0.27	1.39
		0.50	6.48	1.43	0.21	0.09	0.44			0.50	10.67	2.19	0.32	0.13	0.68			0.50	15.88	2.96	0.43	0.18	0.91
		1.00	9.27	2.34	0.34	0.14	0.72			1.00	7.59	1.62	0.23	0.10	0.50			1.00	5.38	0.85	0.12	0.05	0.26
		1.50	17.42	6.69	0.96	0.40	2.07			1.50	17.71	6.28	0.89	0.37	1.94			1.50	18.79	5.85	0.83	0.34	1.80
		2.00	20.22	11.32	1.60	0.68	3.52			2.00	20.60	11.63	1.63	0.69	3.61			2.00	21.33	12.21	1.69	0.72	3.78
	20	0.25	11.44	2.73	0.31	0.13	0.64		20	0.25	14.38	3.36	0.38	0.16	0.79		20	0.25	17.48	4.00	0.45	0.19	0.94
		0.50	5.85	1.27	0.14	0.06	0.30			0.50	9.64	1.93	0.22	0.09	0.46			0.50	14.39	2.62	0.29	0.13	0.62
		1.00	8.37	2.07	0.23	0.10	0.49			1.00	6.85	1.44	0.16	0.07	0.34			1.00	4.85	0.75	0.08	0.04	0.18
		1.50	15.80	5.92	0.66	0.28	1.40			1.50	16.07	5.56	0.62	0.27	1.31			1.50	17.06	5.17	0.57	0.25	1.21
		2.00	18.38	10.06	1.11	0.48	2.39			2.00	18.73	10.32	1.13	0.49	2.44			2.00	19.41	10.82	1.18	0.51	2.55
	32	0.25	9.19	2.13	0.14	0.06	0.29		32	0.25	11.59	2.62	0.18	0.08	0.36		32	0.25	14.14	3.11	0.21	0.10	0.43
		0.50	4.68	0.99	0.07	0.03	0.14			0.50	7.73	1.51	0.10	0.05	0.21			0.50	11.59	2.04	0.14	0.06	0.28
		1.00	6.70	1.61	0.11	0.05	0.22			1.00	5.48	1.12	0.07	0.03	0.15			1.00	3.88	0.58	0.04	0.02	0.08
		1.50	12.75	4.62	0.31	0.14	0.64			1.50	12.97	4.32	0.29	0.13	0.60			1.50	13.79	4.01	0.27	0.12	0.55
		2.00	14.89	7.88	0.52	0.24	1.09			2.00	15.18	8.07	0.53	0.25	1.11			2.00	15.75	8.43	0.56	0.26	1.16

หมายเหตุ $B_r = \frac{|Bias(\bar{y}_r)|}{[MSE(\bar{y}_r)]^{1/2}}$, $B_{C1} = \frac{|Bias(\bar{y}_{C1})|}{[MSE(\bar{y}_{C1})]^{1/2}}$, $B_{C2} = \frac{|Bias(\bar{y}_{C2})|}{[MSE(\bar{y}_{C2})]^{1/2}}$, $B_{MOD1} = \frac{|Bias(\bar{y}_{MOD1})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD1})]^{1/2}}$ และ $B_{MOD2} = \frac{|Bias(\bar{y}_{MOD2})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD2})]^{1/2}}$

ตารางที่ 4.13 แสดงค่า B_r , B_{C1} , B_{C2} , B_{MOD1} และ B_{MOD2} เมื่อ ρ = 0.1, 0.2 และ 0.3 และ W = 0.50 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}	ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}	ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}
0.1	8	0.25	4.87	2.77	0.95	0.33	2.25	0.2	8	0.25	1.67	0.94	0.32	0.11	0.76	0.3	8	0.25	1.71	0.95	0.33	0.11	0.77
		0.50	12.00	7.24	2.45	0.86	5.77			0.50	9.48	5.60	1.90	0.66	4.50			0.50	6.68	3.85	1.31	0.46	3.12
		1.00	20.82	14.71	4.83	1.78	10.99			1.00	19.74	13.77	4.53	1.66	10.41			1.00	18.57	12.75	4.21	1.53	9.76
		1.50	24.71	19.77	6.29	2.43	13.88			1.50	24.28	19.47	6.19	2.39	13.75			1.50	23.86	19.19	6.10	2.36	13.63
		2.00	26.51	22.93	7.13	2.86	15.41			2.00	26.32	22.99	7.14	2.87	15.47			2.00	26.17	23.15	7.16	2.89	15.58
	16	0.25	3.60	1.93	0.28	0.12	0.60		16	0.25	1.23	0.65	0.10	0.04	0.20		16	0.25	1.26	0.66	0.10	0.04	0.21
		0.50	8.93	5.05	0.74	0.31	1.59			0.50	7.03	3.90	0.57	0.24	1.22			0.50	4.94	2.67	0.39	0.16	0.84
		1.00	15.76	10.49	1.52	0.64	3.30			1.00	14.91	9.78	1.42	0.60	3.08			1.00	13.99	9.03	1.31	0.55	2.84
		1.50	18.92	14.41	2.09	0.89	4.54			1.50	18.56	14.17	2.05	0.88	4.46			1.50	18.22	13.96	2.02	0.86	4.40
		2.00	20.42	17.02	2.45	1.06	5.36			2.00	20.26	17.08	2.46	1.07	5.39			2.00	20.13	17.23	2.48	1.08	5.44
	20	0.25	3.24	1.71	0.19	0.08	0.41		20	0.25	1.11	0.58	0.07	0.03	0.14		20	0.25	1.14	0.59	0.07	0.03	0.14
		0.50	8.06	4.51	0.51	0.22	1.08			0.50	6.34	3.47	0.39	0.17	0.83			0.50	4.46	2.38	0.27	0.12	0.57
		1.00	14.28	9.39	1.06	0.46	2.25			1.00	13.50	8.75	0.99	0.43	2.10			1.00	12.66	8.07	0.91	0.40	1.93
		1.50	17.18	12.96	1.46	0.64	3.12			1.50	16.85	12.74	1.43	0.63	3.07			1.50	16.54	12.54	1.41	0.62	3.02
		2.00	18.57	15.35	1.73	0.77	3.70			2.00	18.42	15.41	1.73	0.77	3.72			2.00	18.30	15.55	1.74	0.78	3.75
	32	0.25	2.59	1.35	0.09	0.04	0.19		32	0.25	0.89	0.45	0.03	0.01	0.06		32	0.25	0.91	0.46	0.03	0.01	0.06
		0.50	6.46	3.55	0.24	0.11	0.49			0.50	5.08	2.73	0.18	0.08	0.38			0.50	3.56	1.87	0.13	0.06	0.26
		1.00	11.51	7.42	0.50	0.23	1.04			1.00	10.86	6.91	0.47	0.21	0.97			1.00	10.18	6.37	0.43	0.20	0.89
		1.50	13.89	10.31	0.69	0.32	1.45			1.50	13.62	10.13	0.68	0.32	1.42			1.50	13.36	9.97	0.67	0.31	1.40
		2.00	15.04	12.28	0.83	0.38	1.73			2.00	14.92	12.34	0.83	0.39	1.74			2.00	14.82	12.45	0.84	0.39	1.75

หมายเหตุ $B_r = \dfrac{|Bias(\bar{y}_r)|}{[MSE(\bar{y}_r)]^{1/2}}$, $B_{C1} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{C1})|}{[MSE(\bar{y}_{C1})]^{1/2}}$, $B_{C2} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{C2})|}{[MSE(\bar{y}_{C2})]^{1/2}}$, $B_{MOD1} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{MOD1})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD1})]^{1/2}}$ และ $B_{MOD2} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{MOD2})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD2})]^{1/2}}$

<u>ตารางที่ 4.14</u> แสดงค่า B_r , B_{C1} , B_{C2} , B_{MOD1} และ B_{MOD2} เมื่อ ρ = 0.4, 0.5 และ 0.6 และ W = 0.50 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}	ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}	ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}
0.4	8	0.25	5.27	2.90	0.99	0.34	2.35	0.5	8	0.25	8.99	4.89	1.67	0.58	3.93	0.6	8	0.25	12.86	6.94	2.37	0.82	5.50
		0.50	3.55	1.99	0.68	0.23	1.62			0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.50	4.05	2.13	0.73	0.25	1.73
		1.00	17.29	11.64	3.85	1.39	9.02			1.00	15.88	10.42	3.46	1.24	8.18			1.00	14.29	9.04	3.01	1.07	7.19
		1.50	23.48	18.95	6.01	2.32	13.55			1.50	23.15	18.80	5.95	2.30	13.51			1.50	22.92	18.79	5.91	2.29	13.57
		2.00	26.06	23.43	7.21	2.93	15.75			2.00	26.01	23.90	7.30	3.00	16.02			2.00	26.07	24.69	7.45	3.10	16.43
	16	0.25	3.89	2.01	0.29	0.12	0.63		16	0.25	6.67	3.39	0.50	0.21	1.06		16	0.25	9.58	4.81	0.70	0.29	1.50
		0.50	2.62	1.38	0.20	0.08	0.43			0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.50	2.99	1.47	0.21	0.09	0.46
		1.00	12.99	8.21	1.19	0.50	2.58			1.00	11.89	7.31	1.06	0.45	2.30			1.00	10.67	6.32	0.92	0.38	1.98
		1.50	17.91	13.77	1.99	0.85	4.34			1.50	17.64	13.65	1.97	0.84	4.30			1.50	17.45	13.62	1.96	0.84	4.30
		2.00	20.04	17.47	2.51	1.09	5.52			2.00	20.00	17.89	2.56	1.12	5.66			2.00	20.05	18.57	2.65	1.16	5.88
	20	0.25	3.51	1.79	0.20	0.09	0.43		20	0.25	6.01	3.02	0.34	0.15	0.72		20	0.25	8.65	4.29	0.48	0.21	1.02
		0.50	2.36	1.23	0.14	0.06	0.29			0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.50	2.70	1.31	0.15	0.06	0.31
		1.00	11.75	7.33	0.83	0.36	1.76			1.00	10.75	6.53	0.74	0.32	1.56			1.00	9.64	5.63	0.63	0.27	1.35
		1.50	16.25	12.37	1.39	0.61	2.98			1.50	16.00	12.25	1.38	0.61	2.95			1.50	15.83	12.23	1.37	0.60	2.94
		2.00	18.21	15.78	1.77	0.79	3.81			2.00	18.18	16.16	1.81	0.81	3.91			2.00	18.22	16.80	1.87	0.84	4.07
	32	0.25	2.81	1.40	0.09	0.04	0.20		32	0.25	4.81	2.37	0.16	0.07	0.33		32	0.25	6.94	3.36	0.23	0.10	0.47
		0.50	1.89	0.96	0.06	0.03	0.13			0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			0.50	2.16	1.03	0.07	0.03	0.14
		1.00	9.44	5.78	0.39	0.18	0.81			1.00	8.63	5.14	0.35	0.16	0.72			1.00	7.73	4.43	0.30	0.14	0.62
		1.50	13.12	9.83	0.66	0.31	1.38			1.50	12.92	9.74	0.65	0.30	1.36			1.50	12.78	9.71	0.65	0.30	1.36
		2.00	14.75	12.64	0.85	0.40	1.78			2.00	14.72	12.96	0.87	0.41	1.83			2.00	14.76	13.49	0.91	0.42	1.90

<u>หมายเหตุ</u> $B_r = \frac{|Bias(\bar{y}_r)|}{[MSE(\bar{y}_r)]^{1/2}}$, $B_{C1} = \frac{|Bias(\bar{y}_{C1})|}{[MSE(\bar{y}_{C1})]^{1/2}}$, $B_{C2} = \frac{|Bias(\bar{y}_{C2})|}{[MSE(\bar{y}_{C2})]^{1/2}}$, $B_{MOD1} = \frac{|Bias(\bar{y}_{MOD1})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD1})]^{1/2}}$ และ $B_{MOD2} = \frac{|Bias(\bar{y}_{MOD2})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD2})]^{1/2}}$

ตารางที่ 4.15 แสดงค่า B_r , B_{C1} , B_{C2} , B_{MOD1} และ B_{MOD2} เมื่อ ρ = 0.7, 0.8 และ 0.9 และ W = 0.50 (หน่วยเป็นร้อยละ(%))

ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}
0.7	8	0.25	16.86	9.04	3.07	1.07	7.03
		0.50	8.75	4.42	1.51	0.52	3.55
		1.00	12.45	7.47	2.49	0.88	6.02
		1.50	22.88	19.04	5.94	2.31	13.80
		2.00	26.28	26.00	7.71	3.28	17.08
	16	0.25	12.65	6.27	0.91	0.38	1.96
		0.50	6.48	3.05	0.44	0.18	0.95
		1.00	9.27	5.18	0.75	0.31	1.62
		1.50	17.42	13.79	1.98	0.85	4.35
		2.00	20.22	19.73	2.80	1.24	6.26
	20	0.25	11.44	5.59	0.63	0.27	1.33
		0.50	5.85	2.71	0.31	0.13	0.65
		1.00	8.37	4.61	0.52	0.22	1.10
		1.50	15.80	12.38	1.38	0.61	2.98
		2.00	18.38	17.88	1.99	0.90	4.34
	32	0.25	9.19	4.39	0.30	0.14	0.61
		0.50	4.68	2.12	0.14	0.07	0.30
		1.00	6.70	3.62	0.24	0.11	0.50
		1.50	12.75	9.83	0.66	0.30	1.38
		2.00	14.89	14.40	0.96	0.45	2.03

ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}
0.8	8	0.25	20.95	11.18	3.78	1.32	8.51
		0.50	14.29	6.89	2.35	0.81	5.45
		1.00	10.22	5.60	1.87	0.65	4.56
		1.50	23.23	19.88	6.09	2.40	14.40
		2.00	26.73	28.38	8.16	3.61	18.16
	16	0.25	15.87	7.77	1.13	0.47	2.42
		0.50	10.67	4.75	0.69	0.29	1.48
		1.00	7.59	3.85	0.56	0.23	1.20
		1.50	17.71	14.38	2.05	0.88	4.54
		2.00	20.60	21.91	3.08	1.38	6.97
	20	0.25	14.38	6.93	0.78	0.34	1.65
		0.50	9.64	4.22	0.48	0.21	1.00
		1.00	6.85	3.42	0.38	0.17	0.81
		1.50	16.07	12.90	1.43	0.63	3.10
		2.00	18.73	19.92	2.20	1.00	4.85
	32	0.25	11.59	5.44	0.37	0.17	0.76
		0.50	7.73	3.31	0.22	0.10	0.46
		1.00	5.48	2.68	0.18	0.08	0.37
		1.50	12.97	10.24	0.68	0.32	1.43
		2.00	15.18	16.13	1.08	0.51	2.28

ρ	m	K	B_r	B_{C1}	B_{C2}	B_{MOD1}	B_{MOD2}
0.9	8	0.25	25.11	13.36	4.49	1.58	9.92
		0.50	20.97	9.57	3.25	1.12	7.38
		1.00	7.27	3.26	1.09	0.37	2.68
		1.50	24.55	22.36	6.56	2.66	16.00
		2.00	27.60	33.45	9.00	4.34	20.16
	16	0.25	19.25	9.31	1.36	0.57	2.89
		0.50	15.88	6.58	0.96	0.40	2.04
		1.00	5.38	2.21	0.32	0.13	0.69
		1.50	18.79	16.17	2.26	0.98	5.09
		2.00	21.33	26.95	3.68	1.72	8.64
	20	0.25	17.48	8.30	0.94	0.41	1.97
		0.50	14.39	5.85	0.66	0.28	1.39
		1.00	4.85	1.96	0.22	0.09	0.46
		1.50	17.06	14.50	1.59	0.71	3.47
		2.00	19.41	24.75	2.67	1.26	6.08
	32	0.25	14.14	6.53	0.44	0.20	0.91
		0.50	11.59	4.59	0.31	0.14	0.64
		1.00	3.88	1.53	0.10	0.05	0.21
		1.50	13.79	11.49	0.76	0.35	1.60
		2.00	15.75	20.35	1.34	0.64	2.90

หมายเหตุ $B_r = \dfrac{|Bias(\bar{y}_r)|}{[MSE(\bar{y}_r)]^{1/2}}$, $B_{C1} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{C1})|}{[MSE(\bar{y}_{C1})]^{1/2}}$, $B_{C2} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{C2})|}{[MSE(\bar{y}_{C2})]^{1/2}}$, $B_{MOD1} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{MOD1})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD1})]^{1/2}}$ และ $B_{MOD2} = \dfrac{|Bias(\bar{y}_{MOD2})|}{[MSE(\bar{y}_{MOD2})]^{1/2}}$

จากตารางที่ 4.10 ถึง 4.15 จะเห็นว่า

(1) $W = 0.25$ จะพบว่า

- B_{C1} จะน้อยกว่า 10% สำหรับ $m \geq 32$
- B_{C2} จะน้อยกว่า 1% สำหรับ $m \geq 32$
- B_{MOD2} จะน้อยกว่า 10% สำหรับ $m \geq 16$
- B_{MOD1} จะน้อยกว่า 1% สำหรับ $m \geq 16$

(2) $W = 0.50$ จะพบว่า

- B_{C1} จะน้อยกว่า 20% สำหรับ $m \geq 16$
- B_{C2} จะน้อยกว่า 1% สำหรับ $m \geq 32$
- B_{MOD2} จะน้อยกว่า 10% สำหรับ $m \geq 16$
- B_{MOD1} จะน้อยกว่า 1% สำหรับ $m \geq 20$

อาจสรุปได้ว่า $\bar{y}_{MOD1}$ เป็นตัวประมาณที่มีผลกระทบของความเอนเอียงต่อประสิทธิภาพน้อยที่สุด รองลงมาได้แก่ ตัวประมาณ $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD2}$ และ $\bar{y}_{C1}$ ตามลำดับ

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ทำการเสนอตัวประมาณอัตราส่วนตัวใหม่สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร 2 ตัว คือ $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ พร้อมทั้งศึกษาคุณสมบัติของตัวประมาณ และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณที่เสนอกับตัวประมาณของ Chakrabarty (1979) และ $\bar{y}_r$ เพื่อหาแนวทางในการตัดสินใจเลือกตัวประมาณที่เหมาะสมกับสถานการณ์ต่างๆ โดยแบ่งการศึกษาเป็น 2 กรณี คือ กรณีทั่วไป และกรณีที่ y และ x มีความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้น $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$; $\beta > 0$ เมื่อ x_i/n มีการแจกแจงแบบแกมม่า พารามิเตอร์ h และ u_i มีการแจกแจงแบบปกติค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าแปรปรวนเท่ากับ $n\delta$ ผลจากการวิจัยอาจสรุปได้ดังนี้

5.1 สรุปผลการวิจัยกรณีทั่วไป

ผลจากการศึกษาความเอนเอียงของตัวประมาณอัตราส่วนได้แสดงว่า $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ มีความเอนเอียงอยู่ใน $O(n^{-2})$ ซึ่งจะเข้าสู่ศูนย์เร็วกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}_{C1}$ เมื่อ n มีขนาดใหญ่ขึ้น อย่างไรก็ตาม ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C1}$ จะมีค่าน้อยกว่า $\bar{y}_r$ เมื่อ $0 < W < 1$ และเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ หรือใหญ่พอจะทำให้ค่าสัมประสิทธิความแปรผันของ $\bar{x}$ มีค่าน้อยกว่า 0.1 ผลจากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณ โดยพิจารณาจากความแม่นยำเปรียบเทียบได้แสดงว่า $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}$ สำหรับ $K \geq 1.00$ และ W มีค่าอยู่ในช่วงกว้างๆ จึงอาจกล่าวได้ว่า $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ เป็นตัวประมาณที่เหมาะกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}$ โดยที่ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน และค่า W ที่เหมาะสมที่สุดควรอยู่ระหว่าง $(2\rho - K)/K$ ถึง $2\rho/K$

5.2 สรุปผลการวิจัยกรณีที่ y และ x มีความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด

ผลจากการศึกษาความเอนเอียงของตัวประมาณอัตราส่วนได้แสดงว่า $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ มีความเอนเอียงน้อยกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}_{C1}$ โดย $\bar{y}_{MOD1}$ เป็นตัวประมาณที่มีความเอนเอียงน้อยที่สุด อย่างไรก็ตาม ความเอนเอียงของ $\bar{y}_{C1}$ จะมีค่าน้อยกว่า $\bar{y}_r$ เมื่อ $0 < W < 1$ และเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ผลจากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณ โดยพิจารณาจากความถูกต้องเปรียบเทียบได้แสดงว่า สำหรับ $m \geq 32$ ประสิทธิภาพของตัวประมาณจะมีค่าใกล้เคียงกับกรณีทั่วไป นั่นคือ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}$ สำหรับ $K \geq 1.00$, $m \geq 32$ และ W มีค่าอยู่ในช่วงกว้างๆ จึงอาจกล่าวได้ว่า $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ

$\bar{y}_{MOD2}$ เป็นตัวประมาณที่เหมาะสมกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}$ และจากการพิจารณาผลกระทบของความเอนเอียงต่อประสิทธิภาพของตัวประมาณจะเห็นว่า $\bar{y}_{MOD1}$ เป็นตัวประมาณมีผลกระทบของความเอนเอียงน้อยที่สุด อาจกล่าวได้ว่า ในสถานการณ์ที่ไม่สามารถลดความเอนเอียงของตัวประมาณอัตราส่วนให้น้อยลงได้ $\bar{y}_{MOD1}$ จะเป็นตัวประมาณที่เหมาะสมที่สุด

5.3 แนวทางในการตัดสินใจและข้อเสนอแนะ

จากการสรุปผลการวิจัยข้างต้น อาจกล่าวได้ว่า แนวทางในการตัดสินใจเลือกตัวประมาณที่เหมาะสมสำหรับค่าเฉลี่ยประชากร คือ ในกรณีทั่วไป และกรณีที่ y และ x มีความสัมพันธ์ภายใต้ตัวแบบเชิงเส้นที่กำหนด สำหรับ $m \geq 32$ ถ้า y และ x มีความสัมพันธ์อยู่ในระดับหนึ่ง และสัมประสิทธิความแปรผันของ x มีค่าใกล้เคียงกับของ y และ/หรือ น้อยกว่าสองเท่าของ y แล้ว ตัวประมาณ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่า $\bar{y}_r$ และ $\bar{y}$ กล่าวคือ $\bar{y}_{C1}$, $\bar{y}_{C2}$, $\bar{y}_{MOD1}$ และ $\bar{y}_{MOD2}$ จะเป็นตัวประมาณที่เหมาะสม และประสิทธิภาพของตัวประมาณเหล่านี้จะมีค่าใกล้เคียงกันเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ โดยที่ $\bar{y}_{C1}$ เป็นตัวประมาณที่สามารถคำนวณง่ายที่สุด แต่ $\bar{y}_{MOD1}$ เป็นตัวประมาณที่มีผลกระทบของความเอนเอียงต่อประสิทธิภาพน้อยที่สุด และค่า W ที่เหมาะสมที่สุดควรอยู่ระหว่าง $(2\rho - K)/K$ ถึง $2\rho/K$

สำหรับข้อเสนอแนะเพื่อเป็นแนวทางให้ผู้ที่สนใจศึกษาเพิ่มเติมนั้น เนื่องจากการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาคุณสมบัติของตัวประมาณอัตราส่วนแค่เบื้องต้นเท่านั้น และการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณก็พิจารณาเฉพาะกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่พอ ดังนั้น ผู้ที่สนใจอาจทำการศึกษาต่อไปในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดเล็ก หรืออาจศึกษาเพิ่มเติมในกรณีที่ความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x อยู่ภายใต้แบบเชิงเส้น เมื่อ x_i/n มีการแจกแจงเป็นแบบอื่นๆ

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

สุชาดา กีระนันท์. (2542). ทฤษฎีและวิธีการสำรวจตัวอย่าง. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาษาอังกฤษ

Chakrabarty, R.P. (1973). A note on the Small Sample Theory of the Ratio Estimator in Certain Specified Populations. Jour. Ind. Soc. Agr. Stat., 25 : 49 – 57.

Chakrabarty, R.P. (1979). Some Ratio – Type Estimators. Jour. Ind. Soc. Agr. Stat., 31 : 49 – 62.

Cochran, W.G. (1977). Sampling Techniques. 3rd edition. New York : John Wiley and Sons.

David, I.P., and Sukhatme, B.V. (1974). On the Bias and Mean Square Error of the Ratio Estimator. Jour. Ind. Soc. Agr. Stat., 69 : 464 – 466

Durbin, J. (1959). A Note on the Application of Quenouille's Method of Bias Reduction to Estimation of Ratios. Biometrika., 46 : 477 – 480.

Hansen, H.M., Hurwitz, W.N., and Madow, W.G. (1993). Sample Survey Methods and Theory. Vols. I and II. New York : John Wiley and Sons.

Kendall, M.G., and Stuart, A. (1969). The Advanced Theory of Statistics. Vol. I : Distribution Theory. 3rd edition. London : Charles Griffer and Company Limited.

Lohr, S.L. (1999). Sampling : Design and Analysis. New York : Duxbury Press.

Quenouille, M.H. (1956). Notes on Bias Estimation. Biometrika., 43 : 353 – 360.

Rao, J.N.K., and Webster, J.T. (1966). On Two Methods of Bias Reduction in Estimation of Ratios. Biometrika., 53 : 571 – 577.

Sukhatme, P.V., Sukhatme, B.V., Sukhatme, S., and Asok, C. (1984). Samling Theory of Surveys with Applications. 3rd edition. U.S.A. : IOWA State University Press.

Tin, M. (1965). Comparison of Some Ratio Estimates. Jour. Ind. Soc. Agr. Stat., 60 : 294 – 307.

ภาคผนวก

ภาคผนวก : ตัวอย่างการหาค่าตัวประมาณอัตราส่วน

ตัวอย่าง (Lohr (1999)) ในการประมาณอายุเฉลี่ยของต้นไม้ในป่าแห่งหนึ่ง เนื่องจากการกำหนดอายุของต้นไม้เป็นเรื่องที่ยุ่งยาก เพราะจะต้องนับจำนวนวงปีบนแกนที่ตัดออกมาจากต้นไม้ แต่โดยทั่วๆ ไปต้นไม้ที่มีอายุมากจะมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่ ดังนั้น เจ้าหน้าที่ป่าไม้จึงทำการวัดขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางต้นไม้จำนวน 1132 ต้น พบว่าค่าเฉลี่ยของเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 10.3 นิ้ว และค่าแปรปรวนของเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 2.01 (นิ้ว^2) จากนั้นสุ่มเลือกต้นไม้จำนวน 20 ต้น โดยวิธีการเลือกตัวอย่างสุ่มแบบง่าย เพื่อกำหนดอายุต้นไม้ ได้ข้อมูลดังนี้

ต้นที่	ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง (x)	อายุ (y)	ต้นที่	ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง (x)	อายุ (y)
1	12.0	125.0	11	5.7	61.0
2	11.4	119.0	12	8.0	80.0
3	7.9	83.0	13	10.3	114.0
4	9.0	85.0	14	12.0	147.0
5	10.5	99.0	15	9.2	122.0
6	7.9	117.0	16	8.5	106.0
7	7.3	69.0	17	7.0	82.0
8	10.2	133.0	18	10.7	88.0
9	11.7	154.0	19	9.3	97.0
10	11.3	168.0	20	8.2	99.0

$N = 1132$ $n = 20$ $\overline{X} = 10.3$ $S_x^2 = 2.01$

$\bar{y} = 107.4$ $\bar{x} = 9.405$

$s_y^2 = 821.516$ $s_x^2 = 3.345$ $s_{xy} = 40.972$

<u>หมายเหตุ</u> กำหนดให้ $W = 0.50$

การหาค่าตัวประมาณอัตราส่วน

(1) $\bar{y}_r = r\overline{X} = (107.4/9.405)\times 10.3 = 117.620$ ปี

(2) $\bar{y}_{C1} = (1-W)\,\bar{y} + W\,\bar{y}_r = [(1-0.50)\times 107.4] + [0.50\times 117.620] = 112.15$ ปี

(3) แบ่งตัวอย่างออกเป็น 2 กลุ่มแบบสุ่มและให้ขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มเท่ากัน

(กลุ่มที่ 1)			(กลุ่มที่ 2)		
ต้นที่	ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง (x)	อายุ (y)	ต้นที่	ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง (x)	อายุ (y)
1	12.0	125.0	3	7.9	83.0
2	11.4	119.0	6	7.9	117.0
4	9.0	85.0	8	10.2	133.0
5	10.5	99.0	9	11.7	154.0
7	7.3	69.0	11	5.7	61.0
10	11.3	168.0	13	10.3	114.0
12	8.0	80.0	14	12.0	147.0
16	8.5	106.0	15	9.2	122.0
18	10.7	88.0	17	7.0	82.0
19	9.3	97.0	20	8.2	99.0

จะได้ $r_1 = \bar{y}_1/\bar{x}_1 = 103.6/9.8 = 10.571$, $r_2 = \bar{y}_2/\bar{x}_2 = 111.2/9.01 = 12.342$

และ $r_Q = 2r - \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 2\times(11.419) - \frac{1}{2}\times(10.571+12.342) = 11.382$

ดังนั้น $\bar{y}_{C2} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_Q\,\bar{X} = [(1-0.50)\times 107.4] + [0.50\times 11.382\times 10.3] = 112.317$ ปี

(4)
$$r_{T1} = r\{1+\eta(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})\}$$
$$= 11.419\times\{1+[(\frac{1}{20}-\frac{1}{1132})\times(\frac{40.972}{107.4\times 9.405} - \frac{3.345}{9.405^2})]\}$$
$$= 11.421$$

ดังนั้น $\bar{y}_{MOD1} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_{T1}\bar{X} = [(1-0.50)\times 107.4] + [0.50\times 11.421\times 10.3] = 112.518$ ปี

(5)
$$r_{T2} = r\{1+\eta(\frac{s_{xy}}{\overline{xy}} - \frac{s_x^2}{\bar{x}^2})(1-3\eta\frac{S_x^2}{\bar{x}^2})\}$$
$$= 11.419\times\{1+[(\frac{1}{20}-\frac{1}{1132})\times(\frac{40.972}{107.4\times 9.405} - \frac{3.345}{9.405^2})$$
$$\times(1-3\times(\frac{1}{20}-\frac{1}{1132})\times\frac{2.01}{9.405^2})]\}$$
$$= 11.421$$

ดังนั้น $\bar{y}_{MOD2} = (1-W)\,\bar{y} + W\,r_{T2}\bar{X} = [(1-0.50)\times 107.4] + [0.50\times 11.421\times 10.3] = 112.518$ ปี

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายณรงค์ ชัยประยูรหัทธยา เกิดวันจันทร์ที่ 2 ตุลาคม พ.ศ.2521 สำเร็จการศึกษาปริญญาสถิติศาสตรบัณฑิต (สต.บ.) สาขาวิชาสถิติคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2543 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรสถิติศาสตรมหาบัณฑิต (สต.ม.) สาขาวิชาสถิติ ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี พ.ศ.2545