บทที่ 2

ตัวสถิติทดสอบที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้เป็นการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมสำหรับการตรวจสอบกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงในค่าเฉลี่ย โดยข้อมูลที่นำมาใช้ในการควบคุมคุณภาพมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติและมีความเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งมีหลักเกณฑ์ในการพิจารณา คือ เปรียบเทียบความยาววิ่งโดยเฉลี่ยหรือจำนวนค่าเฉลี่ยตัวอย่างโดยเฉลี่ย(ARL) ที่ต้องใช้ในการตรวจสอบจนกว่าจะพบการออกนอกการควบคุม เมื่อกระบวนการผลิตเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงในค่าเฉลี่ย โดยรายละเอียดขั้นตอนในการดำเนินงานจะกล่าวไว้ในบทที่ 3 สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดตามหัวข้อดังต่อไปนี้

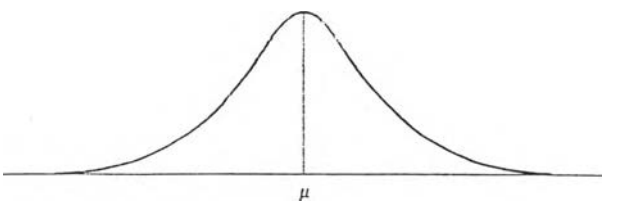
1. การแจกแจงแบบปกติ

2. แผนภูมิควบคุมที่ใช้ในการทดสอบ ได้แก่ แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ปรับน้ำหนักแบบเอกซโพเนนเชียล แผนภูมิควบคุมรวมค่าเฉลี่ยและผลรวมสะสม และแผนภูมิควบคุมสังเคราะห์

2.1 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

การแจกแจงที่สำคัญและใช้ประโยชน์อย่างมากการแจกแจงหนึ่งในทางสถิติ ทั้งทางด้านทฤษฎีและปฏิบัติ คือ การแจกแจงแบบปกติ เป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง (Continous Distribution) โดยมีลักษณะการกระจายแบบสมมาตร(Symmetric) รอบค่าเฉลี่ย

กราฟของการแจกแจงแบบปกติ มีลักษณะเส้นโค้งสมมาตรคล้ายรูประฆังคว่ำ ซึ่งเรียกว่าโค้งปกติ(Normal Curve) ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 รูปเส้นโค้งของฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแบบปกติ

1. <u>คุณสมบัติและลักษณะของการแจกแจงแบบปกติ</u>

คุณสมบัติและลักษณะของการแจกแจงแบบปกติ มีดังนี้

(1). เป็นกราฟที่มีจุดยอดพียงจุดเดียว (Unimodel)

(2). โค้งปกติจะมีลักษณะสมมาตร โดยมีค่าเฉลี่ยเป็นจุดกึ่งกลางซึ่งแบ่งพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วน โดยที่พื้นที่ครึ่งหนึ่ง (50%) ของพื้นที่ใต้โค้งปกติจะอยู่ทางซ้ายของจุดกึ่งกลางและพื้นที่อีกครึ่งหนึ่ง (50%) ของพื้นที่ใต้โค้งปกติจะอยู่ทางขวาของจุดกึ่งกลาง

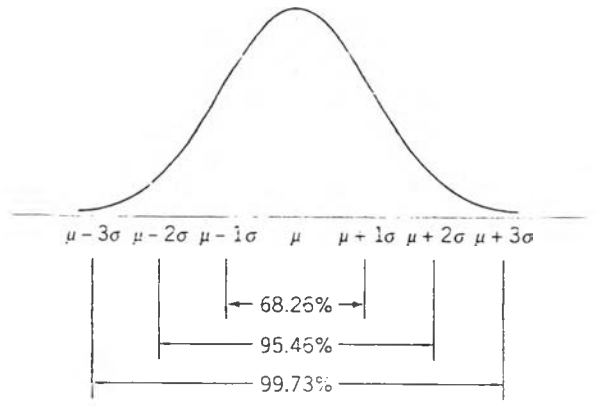
(3). ค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยมจะเท่ากันและอยู่ที่จุดกึ่งกลาง ซึ่งเท่ากับ μ เนื่องจากคุณสมบัติความสมมาตรของโค้งปกติ

(4). พื้นที่ใต้โค้งปกติทั้งหมด เท่ากับ 1

(5). ค่าความโด่ง (Kurtosis) เท่ากับ 3 ซึ่งเรียกว่า Mesokurtic และจุดเปลี่ยนโค้งทั้งสองข้างอยู่ ณ ตรง 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

(6). ค่าความเบ้ (Skewness) เท่ากับ 0

(7). ถ้าลากเส้นตั้งฉากจากแกน x ไปยังเส้นโค้ง โดยที่เส้นดังกล่าวห่างจากค่าเฉลี่ยด้านซ้ายและด้านขวาของระยะหนึ่งเท่า สองเท่าและสามเท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน พื้นที่ที่ปิดกั้นด้วยเส้นตั้งฉากกับเส้นโค้งจะเท่ากับ 68.27% 95.45% และ 99.73% ของพื้นที่ทั้งหมดตามลำดับ



รูปที่ 2.2 พื้นที่ใต้เส้นโค้งของการแจกแจงแบบปกติ

2. <u>รูปแบบฟังก์ชันของการแจกแจงแบบปกติ</u>

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 จะมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability Density Function) ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty \ , \ \sigma^2 > 0$$

โดยที่ $f(x)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

σ^2 คือ ความแปรปรวนของประชากร เป็นพารามิเตอร์แสดงขนาด (Scale Parameter) ของการแจกแจง โดย $\sigma^2 > 0$

μ คือ ค่าเฉลี่ยของประชากร เป็นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง (Location Parameter) ของการแจกแจง โดย $-\infty < \mu < \infty$

เนื่องจากฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปกติข้างต้นขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ μ และ σ^2 ดังนั้น อาจแทนด้วย $N \sim (\mu, \sigma^2)$ ลักษณะของกราฟจะโด่งหรือแบนราบขึ้นอยู่กับค่าความแปรปรวน σ^2 ถ้าความแปรปรวนมีค่าน้อย กราฟจะโด่ง แต่ถ้าความแปรปรวนมีค่ามาก กราฟจะค่อนข้างลาด เส้นโค้งจะมีจุดสูงสุดที่ $x = \mu$ โดยมีความสูง เป็น $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ และสมมาตรที่ $x = \mu$

2.2 แผนภูมิควบคุมที่ใช้ในการทดสอบ

ผลิตภัณฑ์ที่นำมาตรวจสอบได้มาจากการสุ่มตัวอย่างเพียงบางส่วนของกระบวนการ โดยแบ่งเป็น N กลุ่ม แต่ละกลุ่มมีขนาดกลุ่มย่อย n กำหนด x เป็นค่าที่วัดได้ของคุณสมบัติที่ต้องการควบคุม ดังนั้น $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มของแต่ละกลุ่มย่อย n คำนวณหาค่าเฉลี่ยตัวอย่างของกลุ่มที่ j จะได้

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}{n} \quad , \quad j = 1,2,\ldots,N$$

โดยที่ $\bar{x}_j$ คือ ค่าเฉลี่ยตัวอย่างของกลุ่มที่ j

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ คือ ผลรวมของตัวอย่างกลุ่มที่ j

n คือ ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

ข้อมูล $\bar{x}_j$ จะนำไปใช้ในแต่ละแผนภูมิควบคุมที่นำมาเปรียบเทียบในการวิจัยครั้งนี้ ซึ่ง

ประกอบด้วย แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ปรับน้ำหนักแบบเอกซโพเนนเชียล แผนภูมิควบคุมรวมค่าเฉลี่ยและผลรวมสะสม และแผนภูมิควบคุมสังเคราะห์ เพื่อตรวจสอบกระบวนการว่าอยู่ภายใต้การควบคุมหรือไม่

1. <u>แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย</u> ($\bar{x}$ Control Chart)

แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย เป็นแผนภูมิควบคุมที่ใช้สำหรับควบคุมในค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิตหนึ่ง ภายใต้ขอบเขตของคุณภาพผลิตภัณฑ์ที่กำหนดไว้ ซึ่งประชากรมีการแจกแจงแบบปกติและมีความเป็นอิสระต่อกันที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_0 ความแปรปรวนเท่ากับ σ^2

เนื่องจาก x_{ij} มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_0 ความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ดังนั้นจะได้ว่า $\bar{x}_j$ มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น μ_0 ความแปรปรวนเป็น $\frac{\sigma^2}{n}$

ในการหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งแบบปกติจะเปลี่ยนการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_0 ความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{\sigma^2}{n}$ ให้เป็นการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 1 ความแปรปรวนเป็น 0 ด้วยตัวแปรสุ่ม Z

$$Z = \frac{\bar{x}_j - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

ขอบเขตควบคุม

การคำนวณขอบเขตการควบคุมค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ นิยมใช้พื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง 99.73% นั่นคือ จำนวนร้อยละ 99.73 ที่ข้อมูลตกในช่วง $\mu_0 + 3\sigma/\sqrt{n}$ และ $\mu_0 - 3\sigma/\sqrt{n}$ และจำนวนร้อยละ 0.27 ที่ตกอยู่นอกขอบเขตของการยอมรับหรือมีอยู่ 27 ตัวอย่างในจำนวน 10,000 ตัวอย่างที่มีค่าเฉลี่ยอยู่นอกขอบเขตควบคุม

ดังนั้นขอบเขตควบคุมของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย คือ

$$UCL = \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

เกณฑ์การตัดสินใจ

กระบวนการจะไม่อยู่ภายใต้การควบคุม เมื่อค่าสถิติ $\bar{x}_j$ มีค่ามากกว่าขอบเขตควบคุมบน ($\bar{x}_j > UCL$) หรือมีค่าน้อยกว่าขอบเขตควบคุมล่าง ($\bar{x}_j < LCL$)

2. <u>แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ปรับน้ำหนักแบบเอกซโพเนนเชียล</u> (Exponential Weighted Moving Average Control Chart)

แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ปรับน้ำหนักแบบเอกซโพเนนเชียล เป็นการให้น้ำหนักกับข้อมูลปัจจุบันมากกว่าน้ำหนักที่ให้กับข้อมูลในอดีต ดังนั้นค่าเฉลี่ยทุกกลุ่มจะถูกนำมาร่วมพิจารณา ซึ่งจะถ่วงน้ำหนักค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างปัจจุบันด้วยค่า λ ถ่วงน้ำหนักค่าถัดไปด้วยค่า $\lambda(1-\lambda)$ ค่าถัดไปด้วย $\lambda(1-\lambda)^2$ ตามลำดับ โดยมีนิยาม ดังนี้

$$E_j = \lambda \bar{X}_j + (1-\lambda)E_{j-1} \tag{2.1}$$

โดยที่ $\bar{X}_j$ คือ ค่าเฉลี่ยตัวอย่างของกลุ่มที่ j

E_j คือ ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของทุกค่าเฉลี่ยตัวอย่าง

λ คือ ค่าคงที่ของการปรับให้เรียบ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1

จากสมการ (2.1) สามารถขยายรูปสมการต่อไปได้ คือ

$$\begin{aligned}
E_j &= \lambda \bar{X}_j + (1-\lambda)\{\lambda \bar{X}_{j-1} + (1-\lambda)E_{j-2}\} \\
&= \lambda \bar{X}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{X}_{j-1} + (1-\lambda)^2 E_{j-2} \\
&= \lambda \bar{X}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{X}_{j-1} + (1-\lambda)^2\left[\lambda \bar{X}_{j-2} + (1-\lambda)E_{j-3}\right] \\
&= \lambda \bar{X}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{X}_{j-1} + \lambda(1-\lambda)^2 \bar{X}_{j-2} + (1-\lambda)^3 E_{j-3}
\end{aligned}$$

สามารถสรุปได้เป็น

$$E_j = \lambda \sum_{t=0}^{j-1} (1-\lambda)^t \bar{X}_{j-t} + (1-\lambda)^j E_0$$

การกำหนดค่าเริ่มต้น

การกำหนดค่าเริ่มต้นของ E_0 จะใช้ค่าเฉลี่ยของกระบวนการ ซึ่งจะได้ $E_0 = \mu_0$

ขอบเขตควบคุม

ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_0 ความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ซึ่ง $\bar{x}_j$ จะมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น μ_0 ความแปรปรวนเป็น $\frac{\sigma^2}{n}$ ดังนั้นจะได้ ค่าความแปรปรวน ของ E_j ดังนี้

จาก

$$E_j = \lambda\bar{X}_j + \lambda(1-\lambda)\bar{X}_{j-1} + \lambda(1-\lambda)^2\bar{X}_{j-2} + \lambda(1-\lambda)^3\bar{X}_{j-3} + \ldots + \lambda(1-\lambda)^{j-1}\bar{X}_1 + (1-\lambda)^j E_0$$

จะได้

$$\begin{aligned}
V(E_j) &= \lambda^2 V(\bar{X}_j) + (\lambda(1-\lambda))^2 V(\bar{X}_{j-1}) + \left(\lambda(1-\lambda)^2\right)^2 V(\bar{X}_{j-2}) + \ldots + \left(\lambda(1-\lambda)^{j-1}\right)^2 V(\bar{X}_1) + \left((1-\lambda)^j\right)^2 V(E_0) \\
&= \frac{\sigma^2}{n}\left[\lambda^2 + (\lambda(1-\lambda))^2 + \left(\lambda(1-\lambda)^2\right)^2 + \ldots + \left(\lambda(1-\lambda)^{j-1}\right)^2\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{\lambda^2\left(1-(1-\lambda)^{2j}\right)}{\left(1-(1-\lambda)^2\right)}\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{\lambda^2\left(1-(1-\lambda)^{2j}\right)}{\left(1-\left(1-2\lambda+\lambda^2\right)\right)}\right] \\
&= \sigma^2\left(\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2j}\right]
\end{aligned}$$

ดังนั้นขอบเขตควบคุมของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ปรับน้ำหนักแบบเอกซโพเนนเชียล คือ

$$UCL = \mu_0 + 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2j}\right]}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}\left[1-(1-\lambda)^{2j}\right]}$$

จากขอบเขตควบคุมข้างต้นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่ขึ้นกับเวลา เมื่อ j มีค่ามากๆ จะได้

$$UCL = \mu_0 + 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}}$$

สำหรับการหาค่าคงที่ของการปรับให้เรียบ (λ) ที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์ของระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ยและขนาดตัวอย่างจะหาจากการคำนวณจำนวนความยาววิ่งโดยเฉลี่ย(ARL)ที่ต่ำสุด ซึ่งค่า λ จะเริ่มตั้งแต่ค่า 0.01 ถึง 0.99 โดยจะเพิ่มค่า λ ทีละ 0.01 แล้วนำแต่ละค่าไปคำนวณขอบเขตควบคุมและหาค่า ARL ค่า λ ใดที่ให้ ARL ต่ำที่สุด จะนำค่า λ นั้นไปใช้ในการคำนวณขอบเขตควบคุมจริงในแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ปรับน้ำหนักแบบเอกซโพเนนเชียล

เกณฑ์การตัดสินใจ

กระบวนการจะไม่อยู่ภายใต้การควบคุม เมื่อค่าสถิติ E_j มีค่ามากกว่าขอบเขตควบคุมบน ($E_j > UCL$) หรือมีค่าน้อยกว่าขอบเขตควบคุมล่าง ($E_j < LCL$)

3. <u>แผนภูมิควบคุมรวมค่าเฉลี่ยและผลรวมสะสม</u> (Combined $\bar{X}$ - Cumulative Sum Control Chart)

แผนภูมิควบคุมรวมค่าเฉลี่ยและผลรวมสะสมเป็นแผนภูมิควบคุมที่รวมกันระหว่างขอบเขตควบคุมของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยและแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการตรวจสอบได้ทั้งข้อมูลที่การเปลี่ยนแปลงน้อยและข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงมาก ซึ่งมีรายละเอียดของแต่ละแผนภูมิดังนี้

(1). <u>แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย</u> ($\bar{X}$ Control Chart)

แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$ Control Chart) ซึ่งประชากรมาจากการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น μ_0 ความแปรปรวนเป็น σ^2 โดยมีขอบเขตควบคุม ดังนี้

$$UCL = \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2). <u>แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม</u> (Cumulative Sum Control Chart)

แผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม เป็นแผนภูมิที่ใช้เพื่อตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ โดยจะนำเอาข้อมูลตลอดช่วงเวลาของการเก็บข้อมูลมาใช้ ด้วยการบวกสะสมของความคลาดเคลื่อนของค่าเฉลี่ยตัวอย่าง ($\bar{X}_j$) กับค่าเฉลี่ยของกระบวนการ (μ_0) ผลรวมสะสมสำหรับแผนภูมิควบคุมคำนวณได้จาก

$$S_H = \sum_{j=1}^{p}\left(\bar{X}_j - \mu_0\right)$$

โดยที่ S_H คือ ค่าผลรวมสะสมของ p กลุ่มตัวอย่าง

ในกระบวนการที่กำหนดค่าเฉลี่ยของกระบวนการเท่ากับ μ_0 ถ้ากระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุม ค่าคลาดเคลื่อนไปจากค่าเฉลี่ยควรจะต้องกระจายอย่างสุ่ม แต่ถ้าค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิตมีค่าเปลี่ยนแปลงไปในทางเพิ่มขึ้น ค่าผลรวมสะสมของความคลาดเคลื่อนจะมีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ หรือถ้าค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิตมีค่าเปลี่ยนแปลงไปในทางลดลง ค่าผลรวมสะสมของความคลาดเคลื่อนจะมีค่าลดลงเรื่อยๆ ดังนั้น จะได้

$$S_{H_j} = \max\left\{0, \bar{X}_j - (\mu_0 + m) + S_{H(j-1)}\right\}$$

$$S_{L_j} = \max\left\{0, (\mu_0 - m) - \bar{X}_j + S_{L(j-1)}\right\}$$

โดยที่ S_{H_j} คือ ค่าสะสมที่คลาดเคลื่อนทางด้านบวก

S_{L_j} คือ ค่าสะสมที่คลาดเคลื่อนทางด้านลบ

m คือ ค่าอ้างอิง ซึ่งเป็นค่ากึ่งกลางของผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรเท่ากับ μ_0 และค่าเฉลี่ยของประชากรที่เปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$ หรือ $\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma}$ ดังนั้น $m = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$

กำหนดค่าเริ่มต้นของ S_{H_0} และ S_{L_0} เท่ากับ 0 และความยาวของช่วงควบคุม H ที่ใช้เป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจ จะกำหนดให้เท่ากับ $\frac{5\sigma}{\sqrt{n}}$ (Montgomery, 1997)

(3). <u>แผนภูมิควบคุมรวมค่าเฉลี่ยและผลรวมสะสม</u>(Combined $\bar{x}$ – Cumulative Sum Control Chart)

แผนภูมิควบคุมรวมค่าเฉลี่ยและผลรวมสะสม จะเป็นการรวมกันระหว่างขอบเขตของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยและแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม โดยจะใช้การแจกแจงแบบปกติมาตรฐานที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ 1 ด้วยตัวแปรสุ่ม Z_j ซึ่งค่าเฉลี่ย $\bar{x}_j$ มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น μ_0 ความแปรปรวนเป็น $\frac{\sigma^2}{n}$

$$Z_j = \frac{\bar{X}_j - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

ค่าผลรวมสะสมของความคลาดเคลื่อนด้วยตัวแปรสุ่ม Z_j จะหาค่าผลรวมสะสมที่คลาดเคลื่อนทางด้านบวก แทนด้วย S_{H_j} และค่าผลรวมสะสมที่คลาดเคลื่อนทางด้านลบ แทนด้วย S_{L_j} จะได้

$$S_{H_j} = \max\{0, (Z_j - m) + S_{H(j-1)}\}$$
$$S_{L_j} = \max\{0, (-Z_j - m) + S_{L(j-1)}\}$$

การกำหนดค่าเริ่มต้น

การกำหนดค่าเริ่มต้นของ S_{H_0} และ S_{L_0} โดยปกติจะมีค่าเป็น 0 แต่จากการศึกษาของ Lucas and Crosier (1982) ได้แนะนำที่ค่าเริ่มต้น $S_{H_0} = S_{L_0} = h/2$ ซึ่งในที่นี้จะใช้ $h = 5$ ฉะนั้นจะได้ค่าเริ่มต้นของ $S_{H_0} = S_{L_0} = 2.5$ ซึ่งจะทำให้สามารถตรวจสอบกระบวนการได้รวดเร็วขึ้น

ขอบเขตควบคุม

จากตัวแปรสุ่ม Z_j ที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ 1 จะได้ขอบเขตควบคุมของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย ซึ่งแทนด้วย SCL คือ $SCL = \frac{3}{\sqrt{n}}$ (Lucus, J.M., 1982) และความยาวของช่วงควบคุม H ของแผนภูมิควบคุมผลรวมสะสม คือ $H = \frac{5\sigma}{\sqrt{n}}$ (ในที่นี้จะมีความแปรปรวนเท่ากับ 1)

เกณฑ์การตัดสินใจ

กระบวนการจะไม่อยู่ภายใต้การควบคุม เมื่อค่าสถิติ $|Z_j|$ มีค่ามากกว่าขอบเขตควบคุม SCL ($|Z_j| > SCL$) หรือค่าสถิติ S_{H_j} หรือ S_{L_j} มีค่ามากกว่าความยาวของช่วงควบคุม H (S_{H_j} หรือ $S_{L_j} > H$)

4. <u>แผนภูมิควบคุมสังเคราะห์</u> (Synthetic Control Chart)

แผนภูมิควบคุมสังเคราะห์เป็นแผนภูมิควบคุมที่รวมกันระหว่างแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$ Control Chart) และแผนภูมิควบคุมคอนฟอร์มมิงรันเลงจ์ (The Conforming Run Length Control Chart ; CRL) ซึ่งมีรายละเอียดของแต่ละแผนภูมิควบคุม ดังนี้

(1). <u>แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย</u> ($\bar{X}$ Control Chart)

แผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย เป็นแผนภูมิควบคุมที่ใช้สำหรับควบคุมคุณภาพโดยเฉลี่ยในค่าเฉลี่ยของตัวอย่างแต่ละกลุ่มย่อย n ซึ่งมาจากการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_0 ความแปรปรวนเท่ากับ σ^2

ขอบเขตการควบคุม

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

(2). <u>แผนภูมิควบคุมคอนฟอร์มมิงรันเลงจ์</u> (The Conforming Run Length Control Chart : CRL)

แผนภูมิควบคุมคอนฟอร์มมิงรันเลงจ์ (The Conforming Run Length Control Chart ; CRL) เป็นแผนภูมิที่ใช้ในการตรวจสอบค่าเฉลี่ยตัวอย่างจนกว่าจะพบค่าเฉลี่ยที่ผิดปกติ ซึ่งจะแทนด้วย CRL โดยตัวแปรสุ่ม CRL มีการแจกแจงแบบเรขาคณิต (Geometric Distribution) มีพารามิเตอร์เป็น p ซึ่ง p เป็น ความน่าจะเป็นที่หน่วยตัวอย่างผิดปกติเมื่อกระบวนการอยู่ภายใต้

การควบคุม มีค่าเฉลี่ยเป็น $1/p$ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม คือ $1-(1-p)^{CRL}$, $CRL = 1,2,...$

ขอบเขตควบคุมของแผนภูมิควบคุมคอนฟอร์มมิงรันเลงจ์ จะมีเพียงขอบเขตควบคุมล่าง (LCL_{CRL}) เนื่องจาก CRL จะมีค่ามาก ถ้า p มีค่าน้อย และ CRL จะมีค่าน้อย ถ้า p มีค่ามาก ฉะนั้นจึงสนใจเฉพาะ CRL ที่มีค่าน้อยเพื่อตรวจสอบว่ากระบวนการไม่อยู่ภายใต้การควบคุม

(3). <u>แผนภูมิควบคุมสังเคราะห์</u> (Synthetic Control Chart)

ประกอบด้วยแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$ Control Chart) จะแทนด้วย $\bar{X}/S$ และแผนภูมิควบคุมคอนฟอร์มมิงรันเลงจ์ (CRL Control Chart) จะแทนด้วย CRL/S ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

ขอบเขตควบคุม

การคำนวณหาขอบเขตควบคุมของแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ย $\bar{X}/S$ และแผนภูมิควบคุมคอนฟอร์มมิงรันเลงจ์ CRL/S จะต้องทำการหาค่า k และ LCL_{CRL} ที่เหมาะสม ดังนั้น ขั้นตอนของการหาพารามิเตอร์ค่า k และ LCL_{CRL} ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่า δ ขนาดตัวอย่าง(n) และ $ARL(0)$

2. กำหนดค่าเริ่มต้นของ LCL_{CRL} มีค่าเท่ากับ 1

3. นำค่า LCL_{CRL} ไปแก้สมการ (2.3) เพื่อหาค่า k ที่เหมาะสม ซึ่งจะใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method)

$$ARL(0) = \frac{1}{2\Phi(-k)} x \frac{1}{1-[1-2\Phi(-k)]^{LCL_{CRL}}} \qquad (2.3)$$

โดยที่ $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy$ ซึ่ง $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$, $-\infty < y < \infty$

สำหรับวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Method) ในที่นี้จะใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน - ราฟสัน (Newton-Raphson Method) ซึ่งมีสูตรการทำซ้ำหรือสูตรเวียนบังเกิด สำหรับคำนวณหาค่ารากของสมการ ดังนี้

$$k_i = k_{i-1} - \frac{f(k_{i-1})}{f'(k_{i-1})} \quad , f'(k_{i-1}) \neq 0 \text{ และ } i = 1,2,3,...$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่นำไปใช้คำนวณโดยวิธีการทำซ้ำ ประกอบด้วยขั้นตอนดังนี้

(1). กำหนดค่า k_0 เริ่มต้น ในที่นี้กำหนดเท่ากับ 1

(2). คำนวณค่า $f(k_{i-1})$ จากสมการ (2.3) จะได้

$$f(k_{i-1}) = 2\Phi(-k_{i-1})(1-[1-2\Phi(-k_{i-1})]^{LCL_{CRL}}) - \frac{1}{ARL(0)}$$

$$= \Phi(-k_{i-1})(1-[1-2\Phi(-k_{i-1})]^{LCL_{CRL}}) - \frac{1}{2ARL(0)}$$

(3). คำนวณค่า $f'(k_{i-1})$ จากสมการ (2.3) จะได้

$$f'(k_{i-1}) = \Phi(-k_{i-1})\left(-LCL_{CRL}[1-2\Phi(-k_{i-1})]^{LCL_{CRL}-1}(2\varphi(-k_{i-1}))\right)$$
$$+\left(1-[1-2\Phi(-k_{i-1})]^{LCL_{CRL}}\right)(-\varphi(-k_{i-1}))$$
$$= -2LCL_{CRL}[1-2\Phi(-k_{i-1})]^{LCL_{CRL}-1}\Phi(-k_{i-1})\varphi(-k_{i-1})$$
$$-\left(1-[1-2\Phi(-k_{i-1})]^{LCL_{CRL}}\right)\varphi(-k_{i-1})$$

(4). ตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้ว่าลู่เข้าสู่เกณฑ์ที่กำหนดไว้หรือไม่ จาก $y = |k_i - k_{i-1}|$ ซึ่ง $y \le 0.001$

4. นำค่า k และ LCL_{CRL} ที่ได้จากสมการที่ (2.3) ไปคำนวณค่า $ARL_s(\delta)$ ในสมการที่ (2.4)

$$ARL_s(\delta) = \frac{1}{P} x \frac{1}{1-(1-P)^{LCL_{CRL}}} \qquad (2.4)$$

โดยที่ $P = 1-\Phi(k-\delta\sqrt{n})+\Phi(-k-\delta\sqrt{n})$

5. เปรียบเทียบค่า $ARL_s(\delta)$ ค่าปัจจุบัน กับค่า $ARL_s(\delta)$ ก่อนค่าปัจจุบัน 1 ตัว ถ้าค่า $ARL_s(\delta)$ ค่าปัจจุบันน้อยกว่าค่าก่อนปัจจุบัน ให้กลับไปข้อที่ 3 โดยค่า LCL_{CRL} จะเพิ่มขึ้นทีละหนึ่ง แต่ถ้าค่า $ARL_s(\delta)$ มีค่ามากกว่าค่าก่อนปัจจุบัน ทำต่อในข้อที่ 6

6. นำค่า k และ LCL_{CRL} ที่ $ARL_s(\delta)$ มีค่าน้อยที่สุด เป็นพารามิเตอร์ในการคำนวณขอบเขตสำหรับแผนภูมิควบคุมสังเคราะห์ ซึ่งค่า k นำมาคำนวณขอบเขตควบคุมสำหรับแผนภูมิควบคุม $\bar{X}/S$ ดังสมการที่ (2.2) และค่า LCL_{CRL} เป็นขอบเขตควบคุมล่างสำหรับแผนภูมิควบคุม CRL/S

ดังนั้นขอบเขตควบคุมของแผนภูมิควบคุมสังเคราะห์ มีทั้งหมด 2 ขอบเขตควบคุม คือ

1. แผนภูมิควบคุม $\bar{X}/S$

$$UCL = \mu_0 + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. แผนภูมิควบคุม CRL / S มีขอบเขตควบคุมล่าง คือ LCL_{CRL}

เกณฑ์การตัดสินใจ

มีขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

1. คำนวณขอบเขตควบคุมบนและล่างของแผนภูมิควบคุม $\bar{X} / S$ คือ UCL และ LCL และ ขอบเขตควบคุมล่างแผนภูมิควบคุม CRL / S คือ LCL_{CRL}

2. จำลองค่า X_j จำนวน n และคำนวณ ค่าเฉลี่ย $\bar{x}_j$

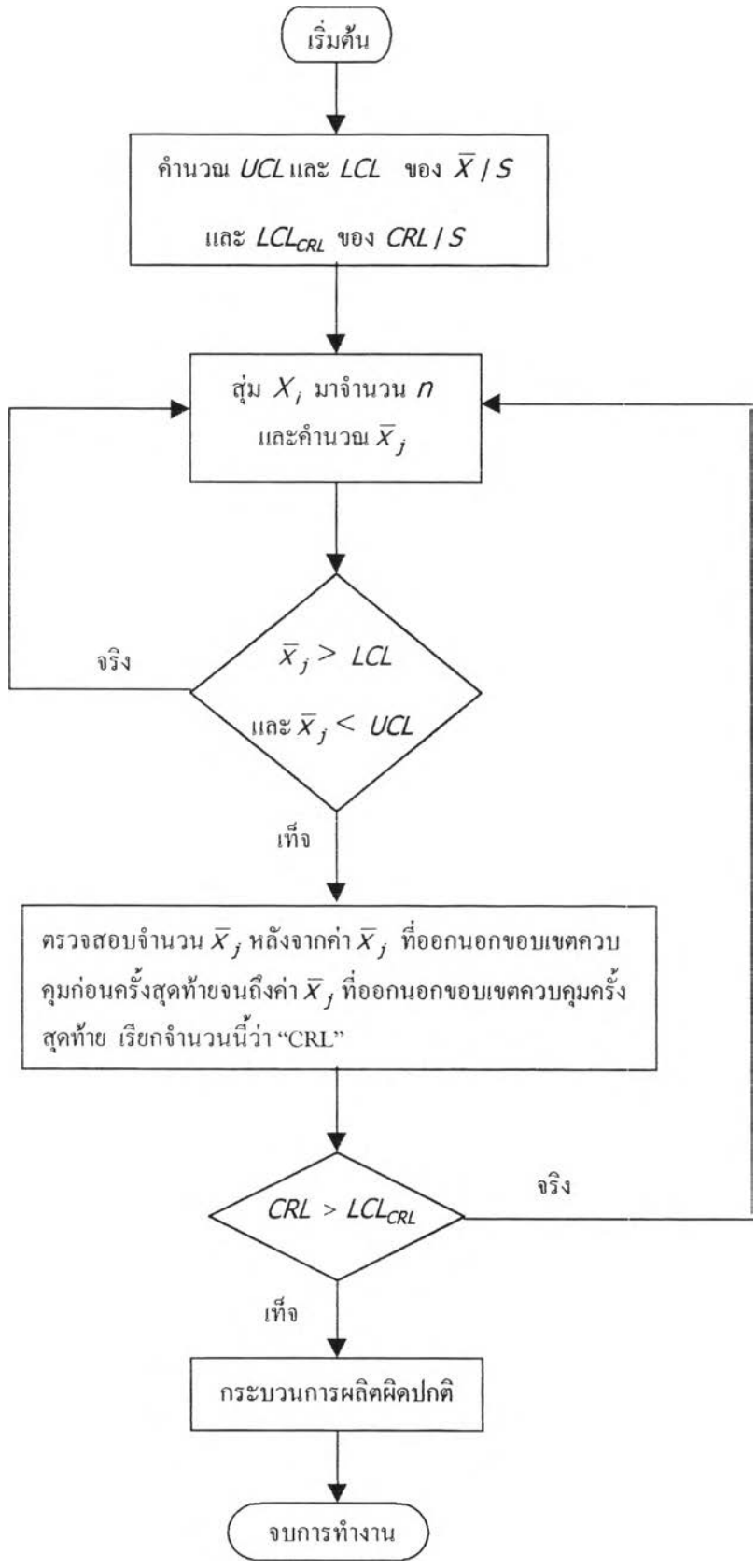
3. ตรวจสอบค่า $\bar{x}_j$ กับขอบเขตควบคุมของแผนภูมิควบคุม $\bar{X} / S$ ถ้า $\bar{x}_j$ มีค่าน้อยกว่าขอบเขตควบคุมบน UCL หรือมากกว่าขอบเขตควบคุมล่าง LCL แสดงว่าตัวอย่างยังอยู่ภายใต้ขอบเขตควบคุม ให้กลับไปทำในข้อที่ 2 แต่ถ้า $\bar{x}_j$ ออกนอกขอบเขตควบคุม แสดงว่าตัวอย่างนี้ออกนอกขอบเขตควบคุม ทำต่อในข้อที่ 4

4. ตรวจสอบจำนวน $\bar{x}_j$ หลังจากค่า $\bar{x}_j$ ที่ออกนอกขอบเขตควบคุมก่อนครั้งสุดท้ายจนถึงค่า $\bar{x}_j$ ที่ออกนอกขอบเขตควบคุมครั้งสุดท้าย เรียกจำนวนนี้ว่า "CRL"

5. ตรวจสอบค่า CRL กับขอบเขตควบคุมของแผนภูมิควบคุม CRL / S ถ้า CRL มากกว่าขอบเขตควบคุมล่าง LCL_{CRL} แสดงว่ากระบวนการยังอยู่ภายใต้ขอบเขตควบคุม และให้กลับไปทำในข้อที่ 2 แต่ถ้าค่า CRL นี้ น้อยกว่าขอบเขตควบคุม LCL_{CRL} แสดงว่ากระบวนการเริ่มมีความผิดปกติเกิดขึ้น

แสดงขั้นตอนการดำเนินการของแผนภูมิควบคุมสังเคราะห์ ดังรูปที่ 2.3

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.3 แผนผังสรุปขั้นตอนของแผนภูมิควบคุมสังเคราะห์