



บทที่ 3

การเขียนโปรแกรมและ การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

ในบทนี้จะกล่าวถึงการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่กล่าวในหัวข้อที่ 2.4 และ 2.5 เพื่อสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ และเปลี่ยนเอลิเมนต์เมตริกซ์ให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตสำหรับเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จากนั้นจะกล่าวถึงการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมกับผลเฉลยแม่นยำตรง สุดท้ายเป็นการอภิปรายผลการตรวจสอบความถูกต้อง

3.1 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และการเขียนโปรแกรม

การสร้างสมการเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการกระจายศักย์ไฟฟ้าสามารถเริ่มได้โดยการใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง โดยการคูณเศษตกค้างซึ่งก็คือสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W_i

$$\int_{\Omega} W_i \cdot R d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.1)$$

โดยที่ W_i คือ ฟังก์ชันน้ำหนัก
 R คือ เศษตกค้าง
 m คือ จำนวนจุดต่อบนเอลิเมนต์
 Ω คือ โดเมนของเอลิเมนต์

จากสมการที่ (2.28) สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการกระจายของศักย์ไฟฟ้า คือ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

แทนสมการข้างต้นลงในสมการที่ (3.1) และใช้วิธีของบัพโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) ซึ่งกำหนดให้ ฟังก์ชันน้ำหนัก W_i เหมือนกับฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง N_i จะได้

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) N_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

หรือ

$$\int_{\Omega} N_i \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{j} \right) \right] d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

จากทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem)

$$\int_{\Omega} (\bar{\nabla} \cdot \bar{s}) d\Omega = \int_{\Gamma} u (\bar{s} \cdot \bar{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\bar{\nabla} u \cdot \bar{s}) d\Omega \quad (3.3)$$

โดย $\bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j}$, $\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j}$ และ Γ คือขอบของเอลิเมนต์

เมื่อเปรียบเทียบสมการที่ (3.2) กับ (3.3) จะพบว่า

$$u = N_i$$

$$\bar{s} = \frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{j}$$

ดังนั้น

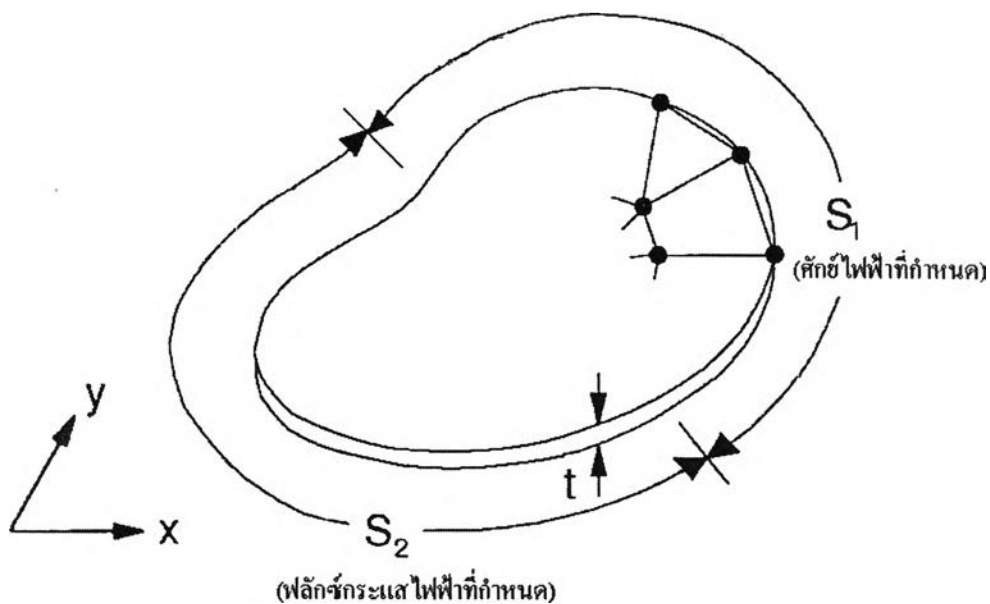
$$\int_{\Omega} N_i \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} N_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega$$

แทนผลลัพธ์ที่ได้ลงในสมการที่ (3.2) จะได้

$$\int_{\Gamma} N_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

เงื่อนไขขอบเขตของโดเมนปัญหา ประกอบด้วย 1) ขอบเขตที่ระบุศักย์ไฟฟ้า S_1 และ 2) ขอบเขตที่ระบุฟังก์ชันกระแสไฟฟ้า S_2 เมื่อแทนเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองแบบลงในสมการที่ (3.4) จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังต่อไปนี้

$$\int_{S_1} N_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{S_2} N_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{j} \right) \cdot (n_x \bar{i} + n_y \bar{j}) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (3.5)$$



รูปที่ 3.1 เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาศักย์ไฟฟ้า

จากสมการที่ (2.27) จะได้

$$\frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{j} = -\frac{1}{\sigma} (J_x \bar{i} + J_y \bar{j})$$

แทนลงในสมการที่ (3.6) จะได้

$$\int_{s_1} N_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \frac{1}{\sigma} \int_{s_2} N_i (J_x \bar{i} + J_y \bar{j}) \cdot (n_x \bar{i} + n_y \bar{j}) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega = 0$$

จัดรูปใหม่เป็น

$$\int_{s_1} N_i \sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{s_2} (N_i J_s) d\Gamma = \sigma \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

โดย $J_s = J_x n_x + J_y n_y$

การสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์จากสมการที่ (3.6) เริ่มจากกำหนดผลเฉลยโดยประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ

$$V(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{[N]}_{1 \times 3} \{V\}_{3 \times 1}$$

อนุพันธ์ย่อยของความต่างศักย์ V ในทิศทาง x และ y คือ

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}_{1 \times 3} \{V\}_{3 \times 1} \quad (3.7)$$

และ

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 3} \{V\}_{3 \times 1} \quad (3.8)$$

เขียนสมการที่ (3.6) ให้อยู่ในรูปของสมการเมตริกซ์ดังนี้

$$\int_{s_1} \sigma \{N\} \left(\frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{s_2} \{N\} J_s d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} \right) d\Omega \{V\} \quad (3.9)$$

จากสมการที่ (3.7) และ (3.8) เกรเดียนท์เวกเตอร์ของความต่างศักย์ คือ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{[B]}_{2 \times 3} \{V\}_{3 \times 1} \quad (3.10)$$

โดยที่

$$\mathbf{[B]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

ดังนั้นสมการที่ (3.9) จะกลายเป็น

$$\int_{s_1} \sigma \{N\} \left(\frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{s_2} \{N\} J_s d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{[B]}^T \sigma \mathbf{[B]} d\Omega \{V\} \quad (3.12)$$

โดย $\mathbf{[\sigma]} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$

ความหมายทางกายภาพของแต่ละเทอมในสมการที่ (3.12) คือ เวกเตอร์การนำไฟฟ้า (Conduction vector) เวกเตอร์กระแสไฟฟ้า (Current vector) และเมตริกซ์การนำไฟฟ้า (Conductivity matrix) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\{Q_C\}$, $\{Q_J\}$ และ $[K_C]$ ตามลำดับ ดังนั้นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปเมตริกซ์คือ

$$[K_C]\{V\} = \{Q_C\} + \{Q_J\} \quad (3.13)$$

$$\text{โดย } \{Q_C\} = \int_{s_1} \sigma \{N\} \left(\frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \quad (3.14)$$

$$\{Q_J\} = \int_{s_2} \{N\} J_s d\Gamma \quad (3.15)$$

$$[K_C] = \int_{\Omega} [B]^T [\sigma] [B] d\Omega \quad (3.16)$$

ถัดไปจะเปลี่ยนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ข้างต้น (สมการที่ (3.13) ถึง (3.16)) ให้อยู่ในรูปพีชคณิตที่สามารถนำไปเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ รายละเอียดมีดังนี้

สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม 3 จุดต่อ ฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง (สมการที่ (2.35) คือ

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

แทนลงในสมการที่ (3.11) จะได้

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

โดยที่ A, b_i, c_i ; $i = 1, 2, 3$ แสดงอยู่ในสมการที่ (2.34) และสมการที่ (2.35)

$$\text{จากสมการที่ (3.16)} \quad [K_C] = \int_{\Omega} [B]^T [\sigma] [B] d\Omega$$

พิจารณากรณีเอลิเมนต์มีความหนา t คงที่ จะได้

$$\begin{aligned} [K_C] &= t \int_A [B]^T [\sigma] [B] dA \\ &= \frac{t\sigma}{4A} [B]^T [B] \end{aligned}$$

แทนสมการที่ (3.17) ลงไปจะได้

$$[K_C] = \frac{t\sigma}{4A} \begin{bmatrix} b_1b_1 + c_1c_1 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ & b_2b_2 + c_2c_2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ \text{Sym} & & b_3b_3 + c_3c_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

สำหรับปัญหาที่วิธานิพนธ์นี้ศึกษา พลักซ์กระแสไฟฟ้าสม่ำเสมอจะไหลเข้า-ออกที่ขอบข้างของเอลิเมนต์ (รูปที่ 3.1) แต่การเขียนโปรแกรมจำเป็นต้องเปลี่ยนเป็นกระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าสู่จุดต่อของเอลิเมนต์ สำหรับกรณีในรูปที่ 3.2 ฟังก์ชันประมาณค่าภายในบนขอบที่มีพลักซ์กระแสไฟฟ้า คือ

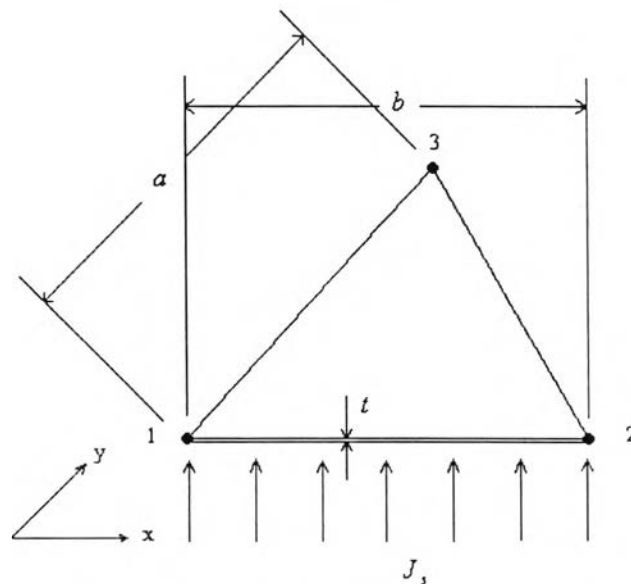
$$N_1(x, y = 0) = 1 - \frac{x}{b}$$

$$N_2(x, y = 0) = \frac{x}{b}$$

$$N_3(x, y = 0) = 0$$

กำหนดให้เอลิเมนต์มีความหนา เท่ากับ t ดังนั้นสมการที่ (3.15) จะเขียนได้เป็น

$$\{Q_J\} = \int_0^b \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{b} \\ \frac{x}{b} \\ 0 \end{Bmatrix} J_s t dx$$



รูปที่ 3.2 พลักซ์กระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าที่ขอบของเอลิเมนต์

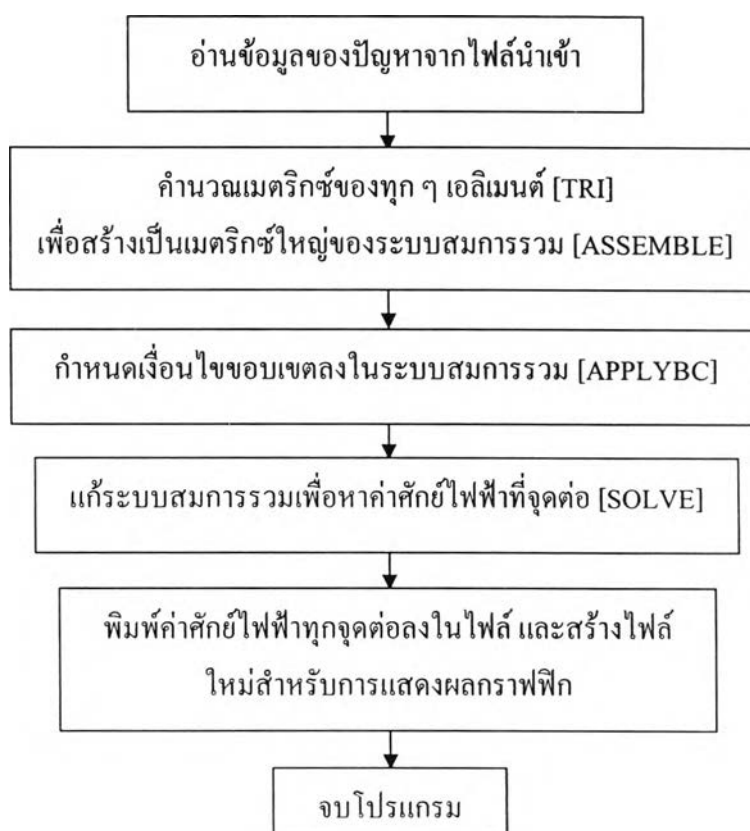
ดังนั้น

$$\{Q_j\} = \frac{1}{2} J_e t b \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ได้จะถูกนำไปเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (ภาษาฟอร์แทรน) รายละเอียดของโปรแกรมแสดงอยู่ในภาคผนวก ค

3.2 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาศักย์ไฟฟ้า (ภาคผนวก ค) ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (Main program) และโปรแกรมย่อย (Subroutines) 4 โปรแกรม ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมแสดงดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.3 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาศักย์ไฟฟ้า

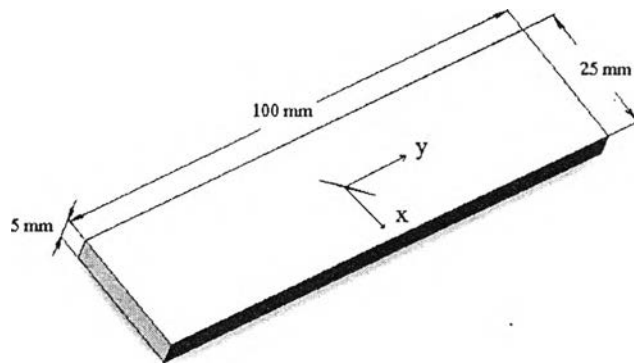
จากรูปที่ 3.3 โปรแกรมเริ่มการทำงานด้วยการอ่านข้อมูลของปัญหา เช่น จำนวนจุดต่อ ตำแหน่งพิกัดของจุดต่อ จำนวนอิเล็กเมนต์ หมายเลขของจุดต่อที่รวมกันเป็นอิเล็กเมนต์ โหลดภาระที่ใส่ รวมทั้งคุณสมบัติต่าง ๆ ของวัสดุ เป็นต้น ซึ่งบรรจุอยู่ในไฟล์นำเข้า (รายละเอียดแสดงอยู่ในภาคผนวก ข.1) ขั้นตอนต่อมาคือ การคำนวณอิเล็กเมนต์เมตริกซ์ $[K_C]$, $\{Q_C\}$ และ $\{Q_J\}$ ของทุกอิเล็กเมนต์ใน โดเมนปัญหา ด้วยโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE TRI] จากนั้นอิเล็กเมนต์เมตริกซ์เหล่านี้จะถูกส่งค่าไป เพื่อสร้างระบบด้วยโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE ASSEMBLE] ขั้นตอนต่อมาคือ การระบุเงื่อนไข ขอบเขตลงในระบบสมการรวม เช่น ค่าศักย์ไฟฟ้าที่จุดต่อหรือความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า โดยการ เรียกโปรแกรม [SUBROUTINE APPLYBC] ขั้นตอนต่อมาคือ การแก้ระบบสมการรวมด้วยโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE SOLVE] ซึ่งในที่นี้ใช้วิธีกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination) ผลเฉลยที่ได้คือ ค่า ศักย์ไฟฟ้าที่จุดต่อต่าง ๆ ขั้นสุดท้ายโปรแกรมจะสร้างไฟล์ผลลัพธ์ 2 ไฟล์ ไฟล์แรกจะแสดงค่าของ ศักย์ไฟฟ้าที่จุดต่อต่าง ๆ ไฟล์ที่สองแสดงจำนวนจุดต่อ จำนวนอิเล็กเมนต์ ตำแหน่งพิกัดของจุดต่อ ค่า ของศักย์ไฟฟ้าที่จุดต่อ หมายเลขจุดต่อที่รวมกันเป็นอิเล็กเมนต์ใด ๆ ซึ่งเพียงพอต่อการแสดงผลกราฟฟิก (รายละเอียดแสดงอยู่ในภาคผนวก ข.2)

3.3 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมไฟไนต์อิเล็กเมนต์

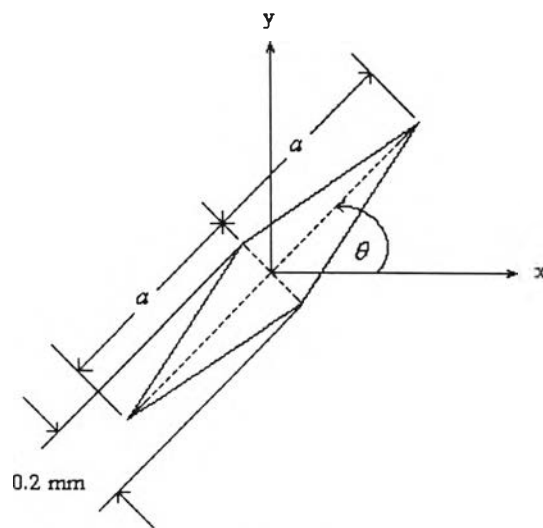
ความถูกต้องของโปรแกรมสามารถตรวจสอบได้โดยการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากวิธีไฟไนต์อิเล็กเมนต์กับผลเฉลยที่ได้จากวิธีอื่น ในที่นี้กำหนดปัญหาคือ ชันทดสอบ MT ที่ไม่มีรอยร้าว และ ชันทดสอบ MT ที่มีรอยร้าวไม่เอียง เหตุผลที่เลือกปัญหาดังกล่าวเป็นเพราะปัญหาทั้งสองมีผลเฉลย แม่นตรง โดยปัญหาแรกหาได้โดยใช้กฎของโอห์ม ส่วนปัญหาที่สองหาได้โดย Johnson's Formula [6]

3.3.1 รายละเอียดของชันทดสอบ

ชันทดสอบแบบ MT ที่ใช้ในการจำลองมีความกว้าง ความยาวและความหนา เท่ากับ 25, 100 และ 5 มม. ตามลำดับ สัดส่วนความกว้างต่อความยาวเท่ากับสี่ ตามมาตรฐาน ASTM E647 [2] วัสดุที่ใช้ คือ อลูมิเนียม (Aluminum) มีสภาพการนำไฟฟ้า σ เท่ากับ 3.64×10^7 (โอห์ม.เมตร)⁻¹ [21] รอยร้าว จำลองเป็นรูปลิ่มเหลี่ยมด้านขนาน มีความกว้างที่จุดกึ่งกลาง 0.2 มม. ในทุก ๆ ความยาวและมุมเอียง ขนาดกระแสไฟฟ้าที่ใช้ คือ 10 แอมแปร์ [2]



(ก) ขนาดของชิ้นทดสอบแบบ MT

(จ) รูปร่างรอยร้าวบนชิ้นงานทดสอบ
รูปที่ 3.4 ลักษณะชิ้นทดสอบแบบ MT

3.3.2 ชิ้นทดสอบ MT ที่ไม่มีรอยร้าว

ผลเฉลยแม่นยำสำหรับกรณีชิ้นงานทดสอบ MT ที่ไม่มีรอยร้าว หาได้จากกฎของโอห์ม (สมการที่ (2.20)) ซึ่งความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างจุดใดๆ V คือ

$$V = iR \quad (3.20)$$

โดยที่ i แทน กระแสไฟฟ้า มีหน่วยเป็น แอมแปร์
แทนสมการที่ (2.21) ลงในสมการที่ (3.20) จะได้

$$V = i\rho \frac{L}{A}$$

หรือ
$$V = \frac{iL}{\sigma A} \quad (3.21)$$

โดยที่ σ คือ สภาพการนำไฟฟ้า มีหน่วยเป็น (โอห์ม.เมตร)⁻¹

A คือ พื้นที่หน้าตัดในทิศตั้งฉากกับทิศการไหลของกระแสไฟฟ้า มีหน่วยเป็น ตารางเมตร

L คือ ระยะระหว่างจุดวัดความต่างศักย์ มีหน่วยเป็น เมตร

V คือ ความต่างศักย์ระหว่างจุดสองจุด มีหน่วยเป็น โวลต์

ผลเฉลยไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงอยู่ในรูปที่ 3.5 และ ตารางที่ 3.1 โดยรูปที่ 3.5 แสดงการกระจายของศักย์ไฟฟ้าบนชิ้นทดสอบ ในการจำลองปัญหา กำหนดให้กระแสไฟฟ้าไหลเข้าที่ขอบล่างและไหลออกที่ขอบบนและกำหนดให้ขอบบนเป็นขอบอ้างอิงที่มีศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์โวลต์ ดังนั้นเส้นระดับชั้น (contour) ของศักย์ไฟฟ้าจะมีค่าลดลงเมื่อเลื่อนเข้าใกล้ขอบอ้างอิง

-1.3736E-05
4.1208E-05
8.8681E-05
0.6154E-05
-1.2363E-04
-1.5110E-04
-1.7857E-04
-2.0804E-04

รูปที่ 3.5 การกระจายศักย์ไฟฟ้าบนชิ้นทดสอบ MT ที่ไม่มีรอยร้าว

หมายเหตุ ตัวเลขในรูปคือศักย์ไฟฟ้า มีหน่วยเป็น โวลต์ และขอบบนเป็นขอบอ้างอิงที่มีศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์โวลต์

ในตารางที่ 3.1 คอลัมน์แรกแสดงระยะห่างระหว่างจุดวัดความต่างศักย์ (สมมาตรกับเส้นกึ่งกลางด้านยาวของชั้นทดสอบ) คอลัมน์ที่ 2 แสดงผลเฉลยแม่นยำ (สมการที่ (3.21)) คอลัมน์ที่ 3 ถึง 5 แสดงผลเฉลยจากแบบจำลองที่มีจำนวนอิเล็กเมนต์และจุดต่อต่าง ๆ กัน เรียงจากน้อยไปมาก

ตารางที่ 3.1 ความต่างศักย์ (V) บนชั้นงานทดสอบ MT ที่ไม่มีรอยร้าว

ระยะระหว่างจุดวัดความต่างศักย์ (mm)	ความต่างศักย์ (μV)			
	ผลเฉลยแม่นยำ ^(ก)	ผลเฉลยไฟไนต์เอลิเมนต์		
		1 ^(ข)	2 ^(ค)	3 ^(ง)
10	21.978	21.978	21.978	21.978
20	43.956	43.956	43.956	43.958
30	65.934	65.931	65.933	65.937
40	87.912	87.910	87.913	87.913
50	109.890	109.890	109.892	109.893
60	131.868	131.868	131.870	131.864
70	153.846	153.843	153.842	153.843
80	175.824	175.820	175.821	175.822

^(ก) ผลเฉลยแม่นยำ (สมการที่ 3.21)

^(ข) แบบจำลองประกอบด้วย 30 จุดต่อ, 36 อิเล็กเมนต์

^(ค) แบบจำลองประกอบด้วย 100 จุดต่อ, 152 อิเล็กเมนต์

^(ง) แบบจำลองประกอบด้วย 2,500 จุดต่อ, 4,752 อิเล็กเมนต์

3.3.3 ชั้นทดสอบ MT ที่มีรอยร้าว

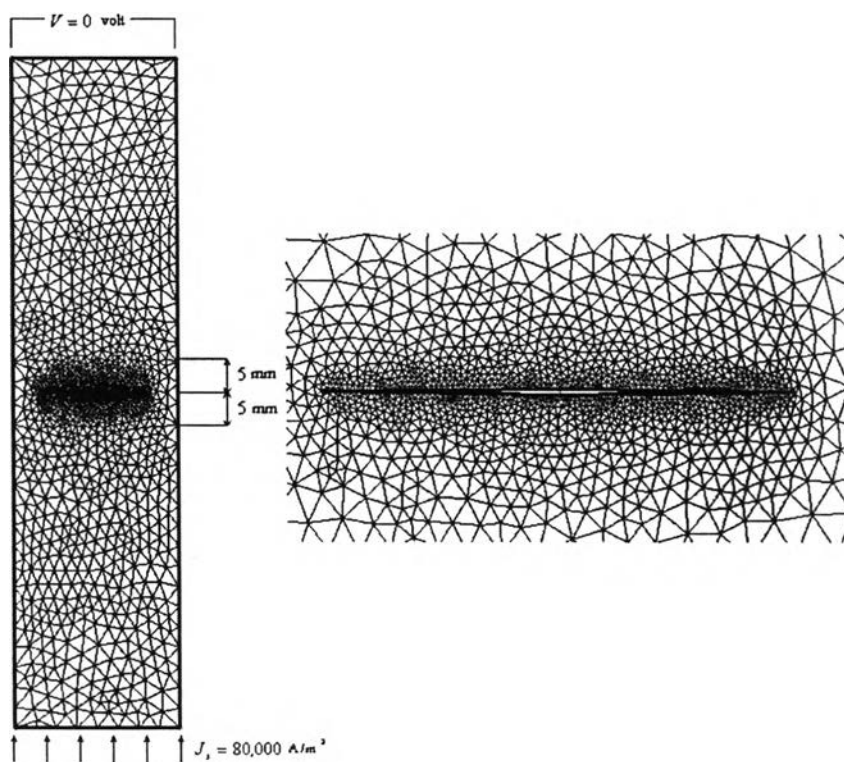
เงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลองในรูปที่ 3.6 คือ

(1) ขอบล่าง: ป้อนกระแสไฟฟ้าขนาด 10 แอมแปร์ (ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า เท่ากับ 80,000 แอมแปร์/ตารางเมตร) บนพื้นที่หน้าตัดขนาด 25 มม. \times 5 มม.

(2) ขอบบน: กระแสไฟฟ้าไหลออก และกำหนดให้เป็นตำแหน่งอ้างอิง (ศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์)

(3) ขอบด้านข้างและขอบรอยร้าว: ไม่มีกระแสไฟฟ้าไหล ดังนั้น $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$

ตารางที่ 3.2 ถึง 3.9 แสดงค่าความต่างศักย์ไร้หน่วย (V/V_r) ที่คำนวณโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และ Johnson's Formula โดยจุดวัดอยู่ห่างจากรอยร้าว ตั้งแต่ 5 มม. ถึง 40 มม. แต่ละตารางแสดงค่าความต่างศักย์ไร้หน่วยที่อัตราส่วนความยาวรอยร้าวต่อความกว้างชิ้นงาน a/w ตั้งแต่ 0.1 ถึง 0.7 ตัวอย่างเส้นระดับชั้นในชิ้นงาน MT ที่มีรอยร้าวแสดงอยู่ในรูปที่ 3.7



(ก) ตำแหน่งกระแสไหลเข้า-ออกและจุดวัดความต่างศักย์ (ข) ภาพขยายรูปที่ 3.6 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของชิ้นงานทดสอบแบบ MT ที่มีรอยร้าวไม่เอียง

ตารางที่ 3.2 ความต่างศักย์ไร้หน่วย (V/V_r) ระหว่างจุดวัดบนแกน y ที่อยู่บนและล่างรอยร้าว 5 มม.

a/w	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์		V/V_r ^(ก)		ความผิดพลาด (%)
	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	ไฟไนต์เอลิเมนต์	สูตรของ Johnson	
0.1	948	1,802	1.030	1.035	0.5
0.2	955	1,808	1.123	1.136	1.2
0.3	1,192	2,258	1.285	1.298	1.0
0.4	1,270	2,398	1.496	1.515	1.2
0.5	1,431	2,696	1.768	1.791	1.3
0.6	2,056	3,850	2.114	2.140	1.2
0.7	3,261	6,060	2.565	2.596	1.2

^(ก) $V_r = 21.978 \mu V$ (ตารางที่ ก.1)

ตารางที่ 3.3 ความต่างศักย์ไร้หน่วย (V/V_r) ระหว่างจุดวัดบนแกน y ที่อยู่บนและล่างรอยร้าว 10 มม.

a/w	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์		V/V_r ⁽ⁿ⁾		ความผิดพลาด (%)
	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	ไฟไนต์เอลิเมนต์	สูตรของ Johnson	
0.1	948	1,802	1.010	1.012	0.2
0.2	955	1,808	1.042	1.047	0.5
0.3	1,192	2,258	1.101	1.106	0.4
0.4	1,270	2,398	1.184	1.192	0.6
0.5	1,431	2,696	1.299	1.309	0.7
0.6	2,056	3,850	1.454	1.465	0.8
0.7	3,261	6,060	1.665	1.679	0.8

⁽ⁿ⁾ $V_r = 43.956 \mu V$ (ตารางที่ ก.1)

ตารางที่ 3.4 ความต่างศักย์ไร้หน่วย (V/V_r) ระหว่างจุดวัดบนแกน y ที่อยู่บนและล่างรอยร้าว 15 มม.

a/w	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์		V/V_r ⁽ⁿ⁾		ความผิดพลาด (%)
	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	ไฟไนต์เอลิเมนต์	สูตรของ Johnson	
0.1	948	1,802	1.006	1.007	0.1
0.2	955	1,808	1.025	1.028	0.3
0.3	1,192	2,258	1.061	1.064	0.3
0.4	1,270	2,398	1.112	1.117	0.4
0.5	1,431	2,696	1.184	1.190	0.5
0.6	2,056	3,850	1.283	1.290	0.6
0.7	3,261	6,060	1.420	1.429	0.6

⁽ⁿ⁾ $V_r = 65.934 \mu V$ (ตารางที่ ก.1)

ตารางที่ 3.5 ความต่างศักย์ไร้หน่วย (V/V_r) ระหว่างจุดวัดบนแกน y ที่อยู่บนและล่างรอยร้าว 20 มม.

a/w	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์		V/V_r ⁽ⁿ⁾		ความผิดพลาด (%)
	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	ไฟไนต์เอลิเมนต์	สูตรของ Johnson	
0.1	948	1,802	1.004	1.005	0.1
0.2	955	1,808	1.018	1.020	0.2
0.3	1,192	2,258	1.044	1.046	0.2
0.4	1,270	2,398	1.082	1.085	0.3
0.5	1,431	2,696	1.135	1.139	0.4
0.6	2,056	3,850	1.208	1.213	0.4
0.7	3,261	6,060	1.310	1.316	0.5

⁽ⁿ⁾ $V_r = 87.912 \mu V$ (ตารางที่ ก.1)

ตารางที่ 3.6 ความต่างศักย์ไร้หน่วย (V/V_r) ระหว่างจุดวัดบนแกน y ที่อยู่บนและล่างรอยร้าว 25 มม.

a/w	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์		V/V_r ⁽ⁿ⁾		ความผิดพลาด (%)
	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	ไฟไนต์เอลิเมนต์	สูตรของ Johnson	
0.1	948	1,802	1.003	1.004	0.1
0.2	955	1,808	1.014	1.016	0.2
0.3	1,192	2,258	1.035	1.037	0.2
0.4	1,270	2,398	1.065	1.068	0.3
0.5	1,431	2,696	1.107	1.111	0.3
0.6	2,056	3,850	1.165	1.170	0.4
0.7	3,261	6,060	1.247	1.252	0.4

⁽ⁿ⁾ $V_r = 109.890 \mu V$ (ตารางที่ ก.1)

ตารางที่ 3.7 ความต่างศักย์ไร้หน่วย (V/V_r) ระหว่างจุดวัดบนแกน y ที่อยู่บนและล่างรอยร้าว 30 มม.

a/w	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์		V/V_r ⁽ⁿ⁾		ความผิดพลาด (%)
	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	ไฟไนต์เอลิเมนต์	สูตรของ Johnson	
0.1	948	1,802	1.003	1.003	0.1
0.2	955	1,808	1.012	1.013	0.1
0.3	1,192	2,258	1.029	1.031	0.1
0.4	1,270	2,398	1.054	1.056	0.2
0.5	1,431	2,696	1.089	1.092	0.3
0.6	2,056	3,850	1.138	1.141	0.3
0.7	3,261	6,060	1.205	1.210	0.4

⁽ⁿ⁾ $V_r = 131.868 \mu V$ (ตารางที่ ก.1)

ตารางที่ 3.8 ความต่างศักย์ไร้หน่วย (V/V_r) ระหว่างจุดวัดบนแกน y ที่อยู่บนและล่างรอยร้าว 35 มม.

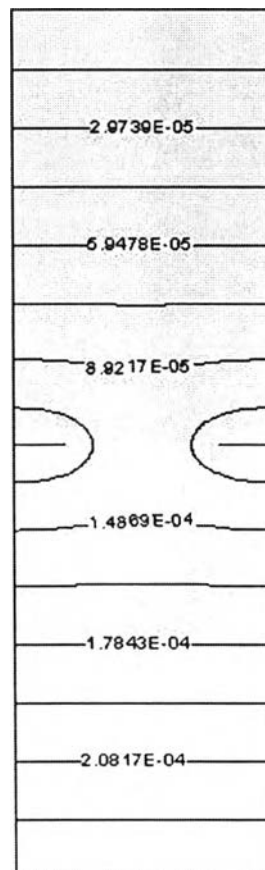
a/w	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์		V/V_r ⁽ⁿ⁾		ความผิดพลาด (%)
	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	ไฟไนต์เอลิเมนต์	สูตรของ Johnson	
0.1	948	1,802	1.002	1.003	0.1
0.2	955	1,808	1.010	1.011	0.1
0.3	1,192	2,258	1.025	1.026	0.1
0.4	1,270	2,398	1.046	1.048	0.2
0.5	1,431	2,696	1.076	1.079	0.2
0.6	2,056	3,850	1.118	1.121	0.3
0.7	3,261	6,060	1.176	1.180	0.3

⁽ⁿ⁾ $V_r = 153.846 \mu V$ (ตารางที่ ก.1)

ตารางที่ 3.9 ความต่างศักย์ไร้หน่วย (V/V_r) ระหว่างจุดวัดบนแกน y ที่อยู่บนและล่างรอยร้าว 40 มม.

a/w	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์		V/V_r ⁽ⁿ⁾		ความผิดพลาด (%)
	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	ไฟไนต์เอลิเมนต์	สูตรของ Johnson	
0.1	948	1,802	1.002	1.002	0.1
0.2	955	1,808	1.009	1.010	0.1
0.3	1,192	2,258	1.022	1.023	0.1
0.4	1,270	2,398	1.041	1.042	0.2
0.5	1,431	2,696	1.067	1.069	0.2
0.6	2,056	3,850	1.103	1.106	0.2
0.7	3,261	6,060	1.154	1.157	0.3

⁽ⁿ⁾ $V_r = 175.824 \mu V$ (ตารางที่ ก.1)



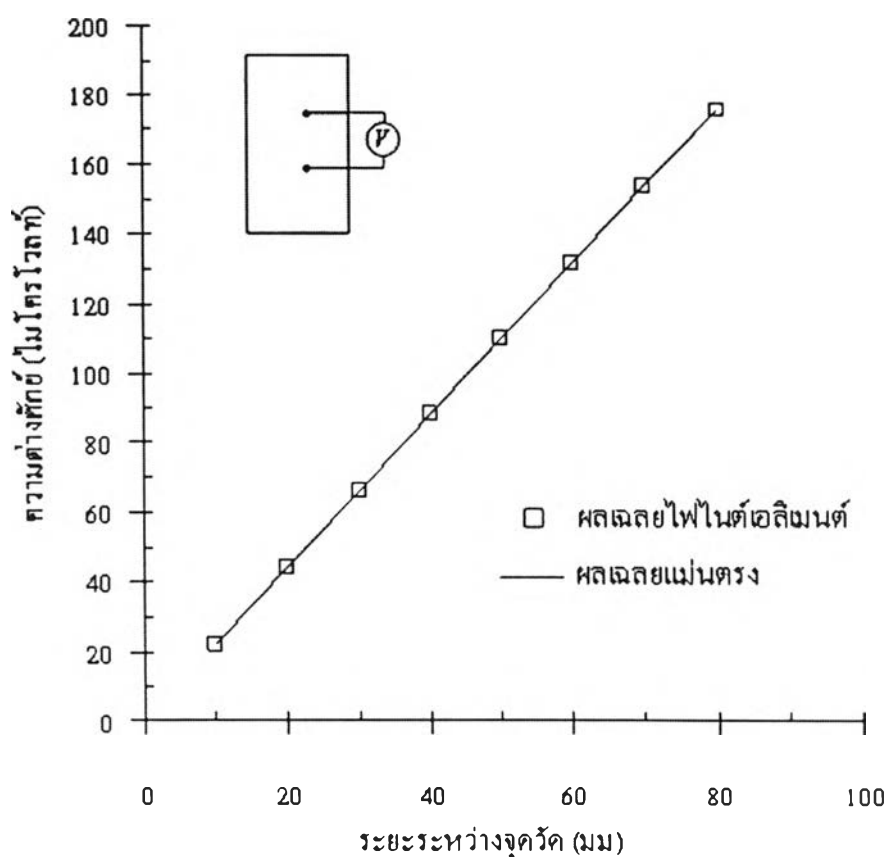
รูปที่ 3.7 การกระจายศักย์ไฟฟ้าบนชั้นทดสอบ MT ที่มีรอยร้าวไม่เอียง

3.4 อภิปรายผล

3.4.1 ชั้นทดสอบ MT ที่ไม่มีรอยร้าว

จากผลการคำนวณความต่างศักย์ (ตารางที่ 3.1) โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีจำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ กัน เรียงจากน้อยไปมาก พบว่าผลเฉลยจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความแม่นยำโดยดูค่าผลเฉลยแม่นยำตรง ตั้งแต่แบบจำลองที่ 1 (ซึ่งมีจำนวนเอลิเมนต์ และจำนวนจุดต่อน้อยที่สุด)

เมื่อพล็อตกราฟระหว่างความต่างศักย์และระยะระหว่างจุดวัดจะได้รับความสัมพันธ์เชิงเส้น ดังแสดงในรูปที่ 3.8 จากรูปความต่างศักย์มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อระยะระหว่างจุดวัดเพิ่มขึ้นซึ่งสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรง (สมการที่ (3.21)) ดังนั้นรายละเอียดของโปรแกรมจึงมีความถูกต้อง



รูปที่ 3.8 ความต่างศักย์บนชั้นทดสอบ MT ที่ไม่มีรอยร้าว

3.4.2 ขันทดสอบ MT ที่มีรอยร้าว

จากผลการคำนวณความต่างศักย์ตารางที่ 3.2 ถึง 3.9 พบว่า ผลเฉลยความต่างศักย์ไร้หน่วย (V/V_r) จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (ที่ใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม 3 จุดต่อ) กับผลเฉลยแม่นยำตรงของ Johnson's Formula ใกล้เคียงกัน โดยมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดไม่เกิน 1.3 เปอร์เซ็นต์ จำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในกรณีเหล่านี้จะถูกนำไปใช้เป็นแนวทางการกำหนดจำนวนเอลิเมนต์สำหรับปัญหารอยร้าวเอียง (Inclined crack) ในบทถัดไป

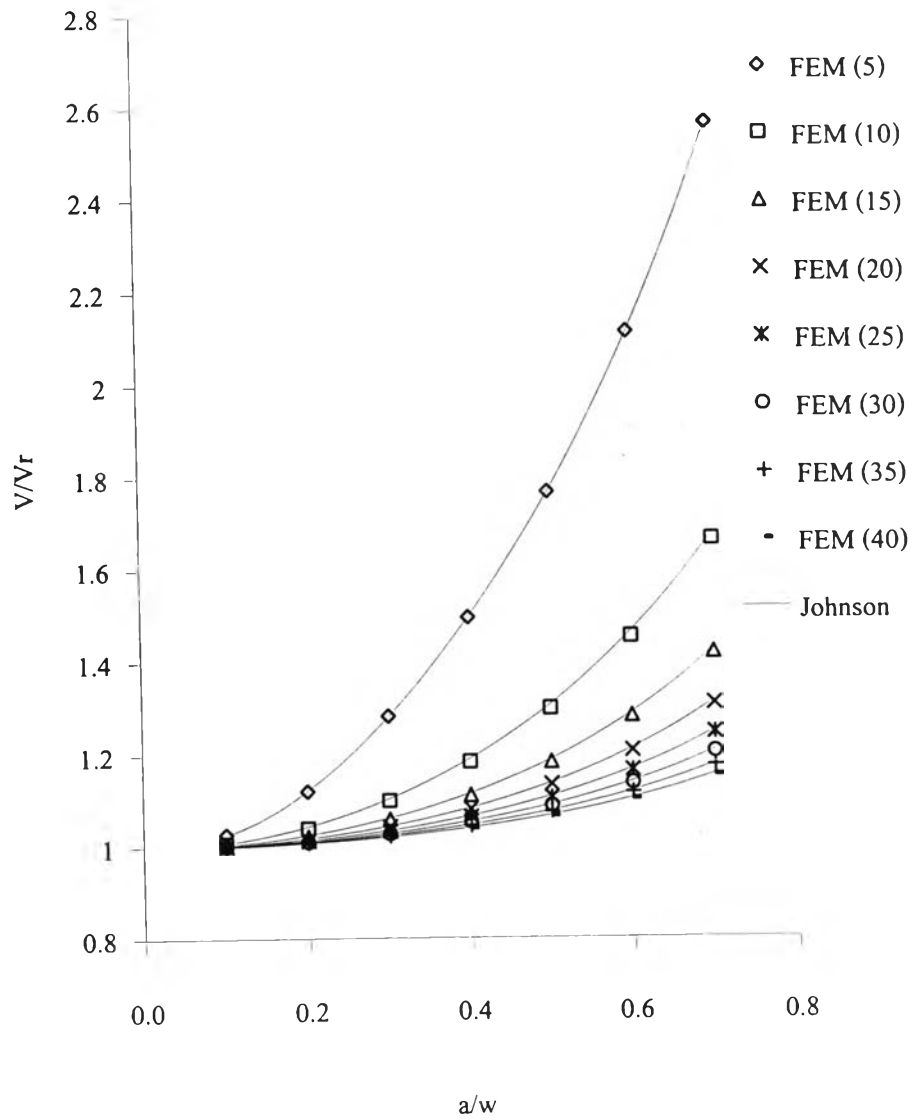
การที่ผลเฉลยของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม 3 จุดต่อ มีความแม่นยำ แสดงว่าความเป็นเอกฐาน (Singularity) ที่ปลายรอยร้าว มีผลน้อยต่อผลเฉลย ณ จุดที่อยู่ห่างจากปลายรอยร้าว โดยสามารถละเลยผลดังกล่าวได้ กล่าวอีกอย่างคือ การใช้เอลิเมนต์เอกฐานที่ปลายรอยร้าวเป็นสิ่งที่ไม่จำเป็น และไม่ช่วยเพิ่มความแม่นยำของผลเฉลย (ที่อยู่ห่างจากปลายรอยร้าว) [8]

เมื่อพล็อตผลเฉลยความต่างศักย์ไร้หน่วยที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับอัตราส่วนระหว่างความยาวรอยร้าวและความกว้างชิ้นงาน a/w สำหรับจุดวัดที่สมมาตรกับรอยร้าวและอยู่จากรอยร้าวเป็นระยะ 5 ถึง 40 มม. (ตารางที่ 3.2 ถึง 3.9) จะได้กราฟดังแสดงในรูปที่ 3.9 จากรูปจะเห็นว่า ความต่างศักย์ไร้หน่วยมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่ออัตราส่วน a/w เพิ่มขึ้น เนื่องจากรอยร้าวทำให้พื้นที่หน้าตัดลดลงทางด้านทานระหว่างจุดวัดจึงเพิ่มขึ้น แต่การเพิ่มเป็นแบบไม่เชิงเส้น จากกราฟจะเห็นว่าความไวของผลเฉลย (ซึ่งหมายถึง ความชันของกราฟ) จะสูงขึ้นเมื่อจุดวัดอยู่ใกล้กับปลายรอยร้าวมากขึ้น อย่างไรก็ตาม เมื่อจุดวัดอยู่ใกล้ปลายรอยร้าว ความผิดพลาดของผลเฉลยก็จะเพิ่มขึ้น ดังตัวอย่างซึ่งแสดงในตารางที่ 3.10 (สำหรับกรณี $a/w = 0.7$)

สำหรับกรณีนี้สามารถสรุปได้ว่า โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีความถูกต้อง และสามารถหาผลเฉลยกรณีชิ้นงานทดสอบมีรอยร้าวได้

ตารางที่ 3.10 ความผิดพลาดของผลเฉลยความต่างศักย์จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ($a/w = 0.7$)

ระยะจากจุดวัดถึงรอยร้าว (มม.)	5	10	15	20	25	30	35	40
เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาด	1.2	0.8	0.6	0.5	0.4	0.4	0.3	0.3



รูปที่ 3.9 ความต่างศักย์ไร้หน่วยที่อัตราส่วน a/w ต่าง ๆ และที่ระยะจากจุดวัดถึงรอยร้าว 5 ถึง 40 มม.