บทที่ 2

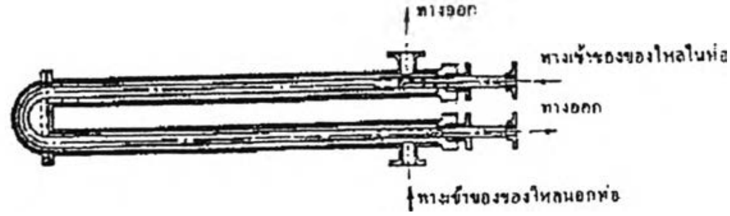
วารสารปริทัศน์

2.1 เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน

เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนคือ อุปกรณ์ที่ใช้ถ่ายโอนพลังงานความร้อน ระหว่างของไหลที่มีระดับพลังงานความร้อน (อุณหภูมิ) แตกต่างกัน โดยทั่วไปมักจะจัดให้ของไหลร้อนและของไหลเย็น ไหลแยกจากกันโดยใช้ผนังเป็นตัวกั้น

<u>เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบท่อสองชั้น</u> (Double-Pipe Heat Exchanger)

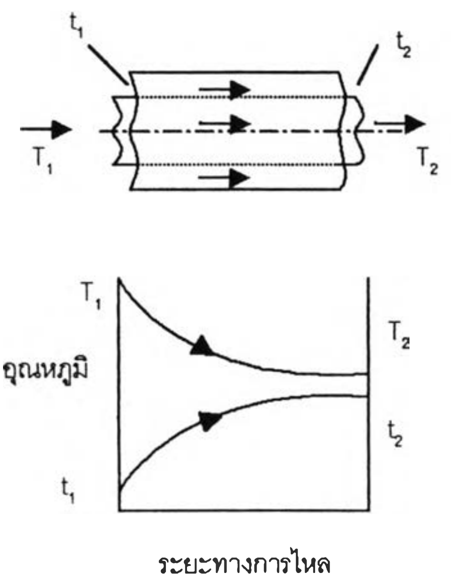
เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบท่อสองชั้น รูปที่ 2.1 เป็นแบบที่ง่ายที่สุด คือ มีท่อ 2 ขนาด ซ้อนกันอยู่โดยมีแกนกลางของท่อร่วมกัน ของไหลชนิดหนึ่งจะไหลอยู่ในท่อใน และของไหลอีกชนิดหนึ่งจะไหลอยู่ในช่องว่างรูปวงแหวนระหว่างท่อในและท่อนอก โดยทั่วไปปลายข้างหนึ่งจะถูกเชื่อมต่อกันด้วยท่อโค้งรูป U (U bend) ถ้าการไหลของของไหลทั้งสอง ไหลในทิศทางเดียวกันถือว่าเป็นการไหลแบบขนาน (co-current) และถ้าการไหลมีทิศทางตรงกันข้าม ลักษณะเช่นนี้เรียกว่าการไหลแบบสวนทางกัน (counter current) อุปกรณ์นี้เหมาะสำหรับใช้ในการเพิ่มหรือลดอุณหภูมิของของไหลภายในท่อที่มีความดันสูง ความหนืดสูง หรือฤทธิ์กัดกร่อนสูง ในบางครั้งจะใช้ท่อที่มีฟิน (fin =ครีบ) เป็นท่อชั้นในเพื่อเพิ่มพื้นที่ถ่ายโอนความร้อน และความสามารถในการถ่ายโอนความร้อนของเครื่อง



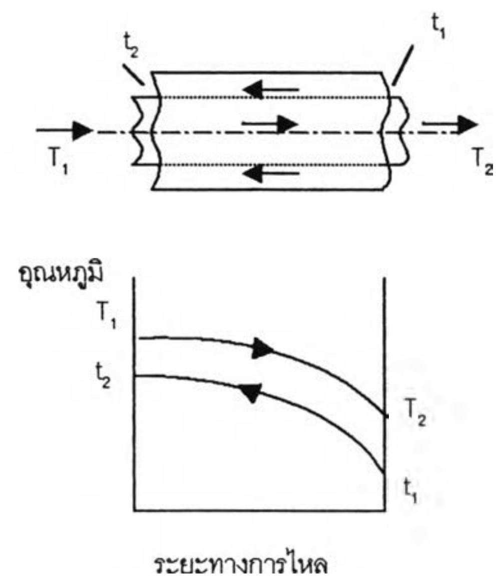
รูปที่ 2.1 เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบท่อสองชั้น

ในเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนของไหลจะถ่ายโอนความร้อนให้แก่กัน จากสมมุติฐานที่กำหนดให้ของไหลไม่มีการเปลี่ยนสถานะ (เปลี่ยนจากไอเป็นของเหลว หรือของเหลวเป็นไอ) ดังนั้นอุณหภูมิของของไหลในแต่ละท่อจะเปลี่ยนแปลงไปขณะที่ของไหลไหลผ่านเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในแต่ละท่อมีลักษณะแตกต่างกันตามลักษณะการไหลของของไหลที่ไหลผ่านท่อแบ่งตามทิศทางการไหลได้ดังนี้

1. การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนตามลักษณะการไหลแบบขนาน ของไหลร้อนกับของไหลเย็นไหลในทิศทางเดียวกันในขณะที่เกิดการถ่ายเทความร้อนผ่านผนังกั้น อุณหภูมิของของไหลร้อนจะค่อย ๆ ลดลงในขณะเดียวกับที่อุณหภูมิของของไหลเย็นเพิ่มขึ้นตามลำดับ ดังแสดงในรูป 2.2 ของไหลที่ให้ความร้อนไหลเข้าเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนที่อุณหภูมิ T_1 และไหลออกจากเครื่องที่อุณหภูมิ T_2 หลังจากถ่ายโอนความร้อนให้กับของไหลเย็น ในขณะเดียวกัน ของไหลที่รับความร้อนไหลเข้าเครื่องที่อุณหภูมิ t_1 และไหลออกจากเครื่องที่อุณหภูมิ t_2 ในกรณีนี้ผลต่างระหว่างอุณหภูมิของของไหล (T_1-t_1) ที่ทางเข้าจะใหญ่กว่าผลต่าง (T_2-t_2) ที่ปลายท่อด้านขาออกมาก
2. การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบไหลสวนทาง ของไหลร้อนกับของไหลเย็นมีทิศทางการไหลตรงกันข้าม อุณหภูมิของของไหลร้อนจะค่อย ๆ ลดลงในทิศทางหนึ่ง ในขณะที่อุณหภูมิของของไหลเย็นจะเพิ่มขึ้นในทิศทางตรงกันข้าม ดังแสดงในรูป 2.3 ในกรณีนี้ผลต่างระหว่างอุณหภูมิของของไหลที่ปลายด้านอุณหภูมิสูงคือ (T_1-t_2) และผลต่างที่ปลายด้านอุณหภูมิต่ำคือ (T_2-t_1) จะมีค่าใกล้เคียงกัน



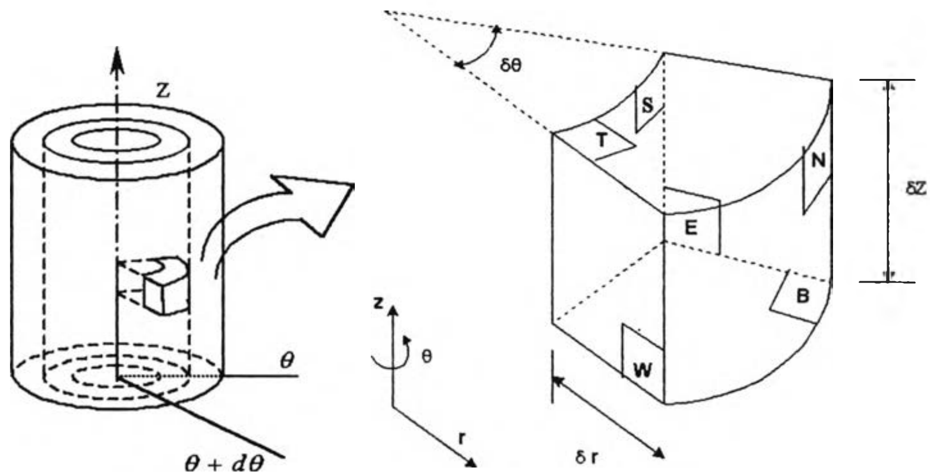
รูปที่ 2.2 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบไหลขนาน



รูปที่ 2.3 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบไหลสวนทาง

2.2.1 **สมการอนุรักษ์ของของไหล** (Versteeg,1995)

สมการพื้นฐานของของไหล (governing equations) ที่มีการไหลและการถ่ายโอนความร้อน ประกอบด้วยสมการความต่อเนื่อง (สมการอนุรักษ์มวล) สมการการเคลื่อนที่ (สมการอนุรักษ์โม-เมนตัม) และสมการพลังงาน (สมการอนุรักษ์พลังงานหรือ กฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์) โดยแสดงการพิจารณาในพิกัดทรงกระบอก (ดังแสดงในรูปที่ 2.4)



รูปที่ 2.4 ส่วนปริมาตร $r\delta\theta\,\delta r\,\delta z$ ของของไหล

2.2.2 สมการอนุรักษ์มวล (Mass Conservation)

จากการพิจารณาส่วนปริมาตรไม่เคลื่อนที่ซึ่งมีของไหลไหลเข้าและออก สามารถเขียนสม-การอนุรักษ์มวลสาร สำหรับของไหลภายในส่วนปริมาตร (volume element) ที่เวลาใด ๆ ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\text{อัตราการเพิ่มของ}\\ \text{มวลสารในส่วน}\\ \text{ปริมาตร}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{อัตราสุทธิของ}\\ \text{มวลสารที่ไหลเข้า}\\ \text{ในส่วนปริมาตร}\end{bmatrix}$$

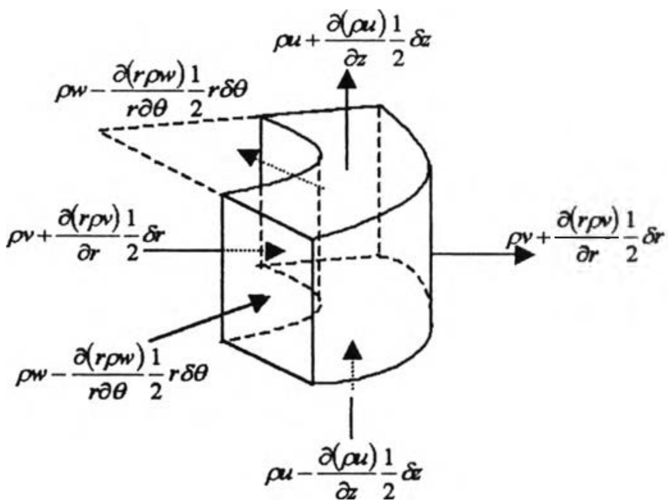
โดยอัตราการเพิ่มของมวลสารในส่วนปริมาตรคือ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho r\delta\theta\delta r\delta z\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} r\delta\theta\delta r\delta z \text{.......... ....} 2.1$$

คำนวณอัตราการไหลของมวลผ่านผิวหน้าของส่วนปริมาตรจากผลการคูณเทอมของความหนาแน่นกับพื้นที่หน้าตัด และความเร็วที่ตั้งฉากกับพื้นที่ ดังรูปที่ 2.5 อัตราสุทธิของมวลผ่านปริมาตรถูกกำหนดด้วย

$$\left(\rho u-\frac{\partial(\rho u)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)r\delta\theta\delta r-\left(\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)r\delta\theta\delta r$$
$$+\left(\rho v-\frac{\partial(\rho r v)}{r\partial r}\frac{1}{2}\delta r\right)r\delta\theta\delta z-\left(\rho v+\frac{\partial(\rho r v)}{r\partial r}\frac{1}{2}\delta r\right)r\delta\theta\delta z$$
$$+\left(\rho w-\frac{\partial(\rho w)}{r\partial\theta}\frac{1}{2}r\delta\theta\right)\delta r\delta z-\left(\rho w+\frac{\partial(\rho w)}{r\partial\theta}\frac{1}{2}r\delta\theta\right)\delta r\delta z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.2$$

โดยกำหนดให้ u แทนความเร็วในแนว z, v แทนความเร็วในแนว r, w แทนความเร็วในแนว θ โดยทิศทางการไหลมีผลต่อการเพิ่มมวลในส่วนปริมาตรดังนี้คือ ของไหลที่ไหลเข้าสู่ปริมาตรจะมีเครื่องหมายเป็นบวก และของไหลที่ไหลออกจากปริมาตรจะมีเครื่องหมายเป็นลบ



รูปที่ 2.5 คอมโพเนนต์ของความเค้นในแนวแกน z

อัตราการเพิ่มของมวลสารในส่วนปริมาตร (2.3) มีค่าเท่ากับอัตราสุทธิของมวลที่ไหลเข้าสู่ปริมาตรดังสมการที่ 2.2 จัดรูปสมการแล้วหารตลอดด้วย $r\delta\theta\,\delta r\delta z$ ได้

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho w)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.3$$

จัดรูปให้เป็นสมการอนุรักษ์มวลรูปแบบง่าย

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{v})=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.4$$

โดย $\vec{v}$ คือความเร็ว

2.2.2 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (Momentum Equation)(Versteeg, Malalasekera, 1995)

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน กล่าวว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของของไหลเท่ากับผลรวมของแรงที่มากระทำ

$$\begin{bmatrix} \text{อัตราการเพิ่มของ} \\ \text{โมเมนตัมในอนุภาค} \\ \text{ของของไหล} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ผลรวมของแรง} \\ \text{ที่มากระทำกับ} \\ \text{อนุภาคของไหล} \end{bmatrix}$$

อัตราการเพิ่มของโมเมนตัมของ r, θ และ z ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของอนุภาคของไหล (fluid particle) แสดงในรูปอนุพันธ์รวม (total or substantive derivative) ของ ϕ เทียบกับเวลา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\rho\frac{D\phi}{Dt}$ เมื่อ

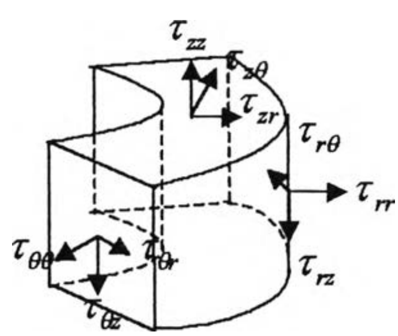
$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+div(\rho\phi\vec{v})=\rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{v}.grad\phi\right]+\phi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{v})\right]=\rho\frac{D\phi}{Dt}\text{..........}2.5$$

สมการที่ 2.5 เทอม $\phi[\partial\rho/\partial t+div(\rho\vec{v})]$ มีค่าเป็นศูนย์จากสมการอนุรักษ์มวลที่ 2.4 สมการโมเมนตัมพิจารณาจากแรงกระทำที่ผิวหน้าในทิศทางต่าง ๆ ของส่วนปริมาตรออกเป็น 2 ประเภท คือ

1.แรงบนผิว (surface force) เช่น แรงเนื่องจากความดัน แรงเนื่องจากความหนืด

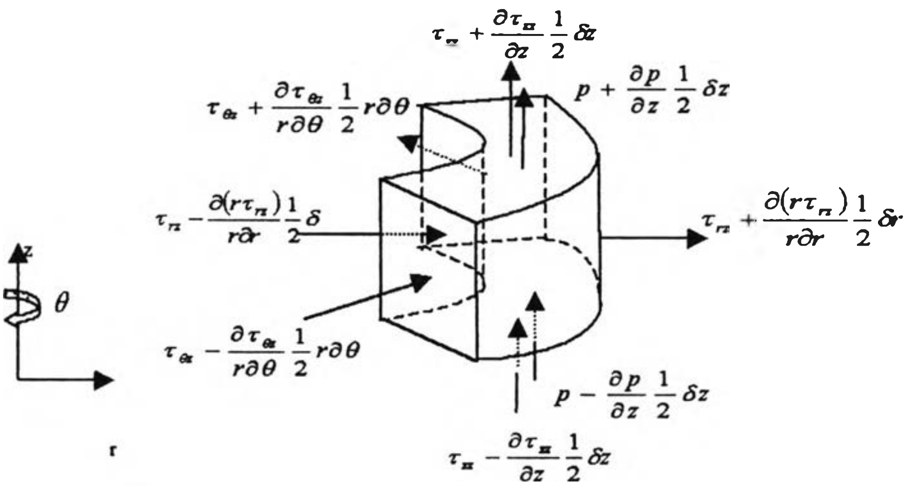
2.body force เช่น แรงโน้มถ่วง แรงเหวี่ยง แรงแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น

แรงบนผิว ได้แก่แรงเค้นของส่วนปริมาตรถูกกำหนดในพจน์ของความดัน และในรูปแรงเค้นจากความหนืด (viscous stress) ซึ่งมีทั้งหมด 9 พจน์ดังรูปที่ 2.6 ความดัน, ความเค้นปกติ (normal stress) ถูกรวมในพจน์ของ p, ส่วนแรงเค้นจากความหนืด (viscous stress) แสดงในรูปของ τ และพจน์ $\tau_{i,j}$ คือ แรงเค้นจากความหนืด ที่เกิดขึ้นในทิศทาง j บน normal surface ที่ i



รูปที่ 2.6 คอมโพเนนต์ของความเค้นของส่วนปริมาตรของของไหล

พิจารณาความเค้น τ_{zz}, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ และความดันในทิศทาง z (ดังแสดงในรูปที่ 2.7) สามารถทำให้เป็นแรงโดยการนำความเค้นมาคูณกับพื้นที่ที่แรงมากระทำ โดยถือว่าแรงมีทิศตามแกนพิกัดแรง (co-ordinate axis) มีค่าเป็นบวก ส่วนแรงมีทิศตรงข้ามแกนพิกัดแรงมีค่าเป็นลบ ดังนั้นแรงสุทธิในทิศทาง z คือผลรวมของคอมโพเนนต์ของแรงที่มากระทำกับส่วนปริมาตรในทิศทาง z นั่นเอง



รูปที่ 2.7 คอมโพเนนต์ความเค้นและความดันในทิศทาง z

พิจารณาที่ผิว T, B ได้

$$\left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right) + \left(\tau_{zz} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\right] r\delta\theta\delta r - \left[\left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right) + \left(\tau_{zz} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\right] r\delta\theta\delta r$$

$$= \left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) r\delta\theta\delta r\delta z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2.6$$

แรงสุทธิในทิศทาง z ที่ผิว N, S

$$\left(\tau_{rz} - \frac{\partial(r\tau_{rz})}{r\partial r}\frac{1}{2}\delta r\right) r\delta\theta\delta z - \left(\tau_{rz} + \frac{\partial(r\tau_{rz})}{r\partial r}\frac{1}{2}\delta r\right) r\delta\theta\delta z = -\frac{\partial(r\tau_{rz})}{r\partial r} r\delta\theta\delta z\delta r \ldots\ldots 2.7$$

และแรงสุทธิในทิศทาง z ที่ผิว E, W คือ

$$\left(\tau_{\theta z} - \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r\partial \theta}\frac{1}{2}r\partial\theta\right)\delta r\delta z - \left(\tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r\partial \theta}\frac{1}{2}r\partial\theta\right)\delta r\delta z = -\frac{\partial \tau_{\theta z}}{r\partial\theta} r\partial\theta\partial r\partial z \ldots\ldots\ldots 2.8$$

ดังนั้นแรงต่อปริมาตรทั้งหมดที่มากระทำกับปริมาตรเท่ากับผลรวมของสมการที่ 2.6, 2.7 และ 2.8 หารด้วยปริมาตร $r\delta\theta\delta r\delta z$

$$\frac{\partial(-p - \tau_{zz})}{\partial z} - \frac{\partial r\tau_{rz}}{r\partial r} - \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r\partial \theta} \ldots\ldots\ldots\ldots 2.9$$

ที่ผ่านมาไม่ได้พิจารณาเทอม body force โดยจะนำเทอมนี้ไปรวมอยู่ในเทอม S_{mz} คือฟลักส์ของโมเมนตัมในทิศทาง z ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรและต่อหนึ่งหน่วยเวลา

ดังนั้นสมการ z โมเมนตัม คืออัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของของไหลในแนว z มีค่าเท่ากับแรงทั้งหมดที่กระทำกับปริมาตรในทิศทาง z หรือผลรวมของความเค้นที่ผิว (สมการที่ 2.9) กับอัตราการเพิ่มของ z โมเมนตัมเนื่องจาก source

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+div(\rho u\vec{v})=-\frac{\partial(p+\tau_{zz})}{\partial z}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}\right)+\rho g_z \quad 2.10$$

ในทำนองเดียวกันกับ z โมเมนตัม สมการโมเมนตัมในทิศทาง r คือ

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+div(\rho v\vec{v})=-\frac{\partial p}{\partial r}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}\right)+\rho g_r \quad 2.11$$

และ θ -โมเมนตัม

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+div(\rho w\vec{v})=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}\right)+\rho g_\theta \quad 2.12$$

จะเห็นว่าเทอมของแรงโน้มถ่วงจะถูกรวมอยู่ใน source term การกำหนดผลของแรงโน้มถ่วงอาจกำหนดดังตัวอย่างเช่น $S_{MZ}=\rho g_z$, $S_{MR}=0$, $S_{M\theta}=0$ เป็นต้น

ในกรณีที่ของไหลเป็นของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) จากกฎของนิวตันสามารถเขียนความเค้น τ_{zz}, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ ของสมการโมเมนตัมในเทอมของความเร็วได้ดังนี้ (Bird, Stewart และ Lightfoot, 1960)

สมการโมเมนตัมในทิศทาง z

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+v\frac{\partial(\rho u)}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial(\rho u)}{\partial\theta}+u\frac{\partial(\rho u)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\rho g_z \quad 2.13$$

สมการโมเมนตัมในทิศทาง r

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+v\frac{\partial(\rho v)}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial(\rho v)}{\partial\theta}-\frac{\rho w^2}{r}+u\frac{\partial(\rho v)}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)$$
$$-\frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\rho g_r \quad 2.14$$

สมการโมเมนตัมในทิศทาง θ

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+v\frac{\partial(\rho w)}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial(\rho w)}{\partial\theta}+\frac{vw}{r}+u\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho g_\theta \quad 2.15$$

2.2.3 สมการอนุรักษ์พลังงาน (Versteeg, Malalasekera,1995)

สมการอนุรักษ์พลังงานเขียนจากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกที่ว่าอัตราการสะสมของพลังงานในของไหลเท่ากับอัตราสุทธิที่ความร้อนเข้าสู่ของไหลบวกอัตราสุทธิของการทำงานโดยระบบต่อบริเวณล้อมรอบ

$$\begin{bmatrix} \text{อัตราการสะสมของ} \\ \text{พลังงานในของไหล} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{อัตราสุทธิของการ} \\ \text{ให้พลังงานความ} \\ \text{ร้อนสู่ของไหล} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{อัตราสุทธิของการ} \\ \text{ทำงานโดยระบบต่อ} \\ \text{บริเวณแวดล้อม} \end{bmatrix}$$

จากสมการที่ 2.5 เมื่อ ϕ แทนอัตราการสะสมพลังงานในของไหลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร แทนด้วยสัญลักษณ์

$$\rho \frac{D(E)}{Dt} \qquad \text{.....} 2.16$$

เมื่อ E เท่ากับผลรวมของพลังงานภายในต่อมวล (internal energy) i, พลังงานจลน์เนื่องจากการเคลื่อนที่ของของไหลต่อมวล $\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)$ และพลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วงต่อมวล

อัตรางานกระทำเนื่องจากแรงเชิงพื้นผิว (Surface Force)

อัตราสุทธิของงานกระทำกับส่วนปริมาตรโดยแรงเชิงพื้นผิว เช่นความดัน แรงเสียดทานมีค่าเท่ากับผลคูณระหว่างแรงกับความเร็วในทิศทางของแรง ตัวอย่างเช่น แรงในทิศทาง z (สมการที่ 2.9) คูณกับ u คืออัตรางานกระทำเนื่องจากแรงเชิงพื้นผิว

$$-\frac{\partial[u(p+\tau_{zz})]}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial(ru\tau_{rz})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(u\tau_{\theta z})}{\partial \theta} \qquad \text{.....} 2.17$$

จากคอมโพเนนต์ของ surface stress ในทิศทาง r และ θ สามารถเขียนอัตรางานกระทำของส่วนปริมาตรได้ในทำนองเดียวกันอัตรางานกระทำเนื่องจากแรงเชิงพื้นผิวของแรงในทิศทาง z ดังนี้

$$\left[-\frac{\partial(vp)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rv\tau_{rr})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(v\tau_{r\theta})}{\partial \theta} + \frac{v\tau_{\theta\theta}}{r} - \frac{\partial v\tau_{rz}}{\partial z}\right] \qquad \text{.....} 2.18$$

$$\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial(wp)}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2w\tau_{r\theta})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(w\tau_{\theta\theta})}{\partial \theta} - \frac{\partial(w\tau_{\theta z})}{\partial z}\right] \qquad \text{.....} 2.19$$

อัตรางานกระทำรวมต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของของไหลเท่ากับผลรวมทั้งหมดของแรงเชิงพื้นผิว (ผลรวมของสมการที่ 2.17-2.19) หารด้วยปริมาตร $r\delta\theta\delta r\delta z$ ความดันสถิตย์ p แสดงในรูปแบบเวกเตอร์ได้ ดังนี้

$$-\frac{\partial(up)}{\partial z}-\frac{\partial(vp)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial(wp)}{\partial\theta}=-div(\vec{v}p)\text{...}2.20$$

ผลรวมอัตรางานกระทำต่อส่วนปริมาตรของไหลเนื่องจาก surface stress คือ

$$[-div(\vec{v}p)]-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(ur\tau_{rz})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u\tau_{\theta z})}{\partial\theta}+\frac{\partial(u\tau_{zz})}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial(rv\tau_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(v\tau_{r\theta})}{\partial\theta}.\right.$$

$$\left.-\frac{v\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial(v\tau_{rz})}{\partial z}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2w\tau_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(w\tau_{\theta\theta})}{\partial\theta}+\frac{\partial(w\tau_{\theta z})}{\partial z}\right]\text{..........................}2.21$$

ฟลักซ์ของพลังงานเข้าสู่ปริมาตรโดยการนำความร้อน

จาก Fourier's law การนำความร้อนเข้าสู่ปริมาตร แทนด้วยเขียนในรูปเกรเดียนของการนำความร้อน

$$q_z=-k\frac{\partial T}{\partial z},q_r=-k\frac{\partial T}{\partial r},q_\theta=-k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\text{..}2.22$$

เขียนเกรเดียนของการนำความร้อนในรูปเวกเตอร์

$$q=-k.gradT\text{...}2.23$$

อัตราพลังงานเข้าสู่ปริมาตรโดยการนำทั้งหมดของของไหลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของของไหลที่เข้าสู่ส่วนปริมาตร

$$-div\ \mathbf{q}=-\frac{\partial q_z}{\partial z}-\frac{\partial q_r}{\partial r}-\frac{\partial q_\theta}{r\partial\theta}\text{...}2.24$$

ดังนั้น

$$-div\ \mathbf{q}=div\ (k\ grad\ T)\text{... ... ...}2.25$$

สมการพลังงาน (Energy Equation)

พลังงานในของไหลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร เท่ากับอัตราการเปลี่ยนของพลังงานในอนุภาคของไหล (2.13) รวมกับผลรวมอัตราสุทธิของงานกระทำบนอนุภาคของไหล (2.18) กับอัตราสุทธิของความร้อนที่เข้าสู่ของไหล (2.25) และอัตราการเพิ่มของพลังงานใน source term สมการอนุรักษ์พลังงานคือ

$$\rho\frac{D(E)}{Dt}=-div(p\vec{v})-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(ur\tau_{rz})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u\tau_{\theta z})}{\partial\theta}+\frac{\partial(u\tau_{zz})}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial(rv\tau_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(v\tau_{r\theta})}{\partial\theta}.\right.$$

$$\left.-\frac{v\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial(v\tau_{rz})}{\partial z}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2w\tau_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(w\tau_{\theta\theta})}{\partial\theta}+\frac{\partial(w\tau_{\theta z})}{\partial z}\right]+div(k.grad.T)+S_g\text{....}2.26$$

เมื่อค่า E ในสมการที่ 2.26 มีค่า $E=i+1/2(u^2+v^2+w^2)$ พลังงานศักย์ไม่ปรากฏในสมการที่ 2.26 เนื่องจากพลังงานศักย์ถูกรวมอยู่ในเทอมของงาน

จากสมการที่ 2.26 ถือว่าเป็นสมการพลังงานรูปแบบสมบูรณ์ แต่โดยทั่วไปมักเปลี่ยนสมการพลังงานให้อยู่ในรูปของพลังงานภายใน (i) หรือ อุณหภูมิ (T) โดยการนำเอาสมการการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ (พลังงานกล) ลบออกจากสมการพลังงานรูปแบบสมบูรณ์ สมการการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ คือผลรวมของสมการโมเมนตัมในแต่ละทิศทางคูณกับความเร็วในทิศทางนั้น ในที่นี้คือ โมเมนตัมในแนวแกน z คูณกับ u , โมเมนตัมในแนวแกน r คูณกับ v และโมเมนตัมในแนวแกน θ คูณกับ w จากนั้นนำผลคูณทั้งหมดมารวมกัน จะได้สมการอนุรักษ์พลังงานจลน์ดังนี้

$$\rho\frac{D\left[\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right]}{Dt}=-\vec{v}.grad.p-u\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)$$
$$-v\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}\right)-w\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}\right)+v.S_M \quad \text{....2.27}$$

เมื่อลบสมการที่ 2.27 ออกจากสมการที่ 2.26 และจัดรูป source เทอมใหม่ในรูปของสมการพลังงานภายใน $S_i=S_E-\boldsymbol{v}\,S_M$

$$\rho\frac{Di}{Dt}=-p.div\,\vec{v}+div(k.grad.T)-\left\{\tau_{rr}\frac{\partial v}{\partial r}+\tau_{\theta\theta}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}+v\right)+\tau_{zz}\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$
$$-\left\{\tau_{r\theta}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right]+\tau_{rz}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\tau_{\theta z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}+S_i \quad \text{.................2.28}$$

ในกรณีที่ของไหลเป็นของไหลแบบ incompressible และความดันคงที่ ค่าพลังงานภายในมีค่าดังสมการที่ 2.29 (Bird, Stewart และ Lightfoot, 1960)

$$di=-p.div\,\vec{v}+C_p dT \quad \text{..........2.29}$$

เมื่อ C_p คือความจุความร้อนที่ความดันคงที่ จากนั้นจัดรูปของสมการที่ 2.28 ใหม่ ได้รูปแบบสมการพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิดังนี้คือ

$$\rho C_p\frac{DT}{Dt}=div(k.grad.T)-\left\{\tau_{rr}\frac{\partial v}{\partial r}+\tau_{\theta\theta}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}+v\right)+\tau_{zz}\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$
$$-\left\{\tau_{r\theta}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right]+\tau_{rz}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\tau_{\theta z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}+S_i \quad \text{................2.30}$$

2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Huang, Y. and Sciver, S.W. (1996) ศึกษาเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนของ He ที่ถูกอัดที่ความดันสูงและอุณหภูมิต่ำ (T< 2.17 K) จนเป็นของเหลว และมีค่าการนำความร้อนที่สูงกว่าของไหลทั่วไป เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนสร้างขึ้นมาโดยเฉพาะเป็นแบบท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความยาว 711.2 มิลลิเมตร มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 2 มิลลิเมตร x 4 มิลลิเมตร ของไหลมีทิศทางการไหลแบบขนานกันและการไหลแบบสวนทางกัน จากนั้นใช้เทคนิคการคำนวณเชิงตัวเลขคำนวณอุณหภูมิวิเคราะห์ผลร่วมกับอุณหภูมิที่วัดได้จากการทดลอง ในการคำนวณเชิงตัวเลขใช้วิธีคำนวณค่าการนำความร้อน h ของ Kapitza ผลการคำนวณที่ได้สอดคล้องกับผลที่ได้จากการทดลอง จากนั้นนำโมเดลที่ได้มาวิเคราะห์การถ่ายโอนความร้อน พบว่าค่า h จะไม่ขึ้นกับค่าความเร็วของของไหล กรณีการถ่ายโอนความร้อนแบบไหลขนานที่ He เหลวมีความเร็วต่ำมาก ๆ ที่มีโอกาสเกิดการแลกเปลี่ยนอุณหภูมิแบบข้ามอุณหภูมิที่ทางออกของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนทำให้อุณหภูมิของ He เหลวในท่อของไหลเย็นมีอุณหภูมิสูงกว่า He เหลวในท่อของไหลร้อน ทั้งนี้เนื่องจากของไหลมีค่าการนำความร้อนสูง ส่วนกรณีการไหลแบบสวนทางกันที่ความเร็วสูง ๆ จะมีพฤติกรรมสอดคล้องกับทฤษฎีการถ่ายโอนความร้อนของของไหลที่มีค่าการนำความร้อนต่ำ ๆ

Bilir, S. (1995) ศึกษาการถ่ายโอนความร้อนในท่อของของไหลที่มีการเคลื่อนที่แบบราบเรียบภายในท่อกลมบริเวณปากทางเข้าท่อเชิงความร้อน (thermal entry region) การนำความร้อนของของไหลและผนังท่อในในทิศทาง 2 มิติ โดยใช้เทคนิคการคำนวณแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในการคำนวณสมการของอุณหภูมิ โดยเมื่อของไหลมีอุณหภูมิคงที่ (T0) ที่ทางเข้าไหลเข้าสู่ท่อที่อุณหภูมิผนังท่อด้านนอกเท่ากับ T1 เกิดการถ่ายโอนความร้อนจากผนังท่อนอกสู่ของไหล จากการศึกษาปัจจัยที่มีผลต่อการถ่ายโอนความร้อนพิจารณาในรูปตัวแปรไร้มิติได้แก่ Peclet number (Pe) , อัตราส่วนของรัศมีท่อด้านในต่อรัศมีท่อด้านนอก (ri/ro) และค่าสัมประสิทธ์การนำความร้อนของผนังท่อและต่อค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล (ks/kf) พบว่าเมื่อค่า Pe สูงกว่า 20 ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนในแนวแกนท่อของของไหลและสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่ผนังท่อ จะไม่มีผลต่อการถ่ายโอนความร้อน อัตราส่วน (ks/kf) จะมีผลต่อการถ่ายโอนความร้อนในช่วงค่าต่ำกว่า 100 เท่านั้นและเมื่อเพิ่มค่า ks/kf ต่อไปให้ผลเท่ากับค่า ks/kf ที่ 100 ส่วนค่าอัตราส่วน (ri/ro) พบว่าที่อัตราส่วนต่ำ ๆ คือ (ri/ro) น้อยกว่า 0.002 จะทำให้ผลของการนำความร้อนที่ผนังท่อไม่มีผลต่อการถ่ายโอนความร้อนเปรียบเสมือนพิจารณากรณีไม่มีผนังท่อ

Yan, W.M. (1995) ศึกษาการถ่ายโอนความร้อนของของไหลที่ไหลแบบปั่นป่วนในท่อ ที่เกิดการพาความร้อนระหว่างผนังท่อกับอากาศภายนอก โดยใช้การคำนวณแบบตัวแปรไร้หน่วย เช่นค่าการนำความร้อน k เขียนในเทอมของ (ks / kf) และค่าการแพร่ความร้อน A คือเทอมของการแพร่ความร้อนของผนังส่วนเทอมของการแพร่ความร้อนของของไหล (αw / αf), เทอมความหนาของผนังท่อ β (ค่าความหนาของท่อ / รัศมีท่อใน) ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ (Re) , ค่า Pr ค่า Nu_o ภายนอกท่อ และความยาวของท่อแลกเปลี่ยนความร้อน L (ความยาวของท่อ / รัศมีท่อใน) พบว่าการถ่ายโอนความร้อนระหว่างผนังท่อกับอากาศภายนอกขึ้นอยู่กับเทอมของ β, Pr, Re และ Nu_o ค่าการนำความร้อนของผนังท่อมีผลต่อระยะเวลาในการถ่ายโอนความร้อนจนถึงภาวะคงตัว และจะใช้เวลาในการถ่ายโอนความ-ร้อนนาน ในระบบที่ค่า β สูง ๆ หรือที่ค่า A , Re และ Nu_o ต่ำ ๆ

Devois, J.F., Durastanti, J.F. and Martin, B. (1995) เขียนโปรแกรมคำนวณการถ่ายโอนความร้อนของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบแผ่นขดในกรณีการไหลแบบสวนทางของของเหลว ที่ภาวะคงตัวและภาวะไม่คงตัวใน 2 ทิศทาง ในช่วงการไหลแบบปั่นป่วน เพื่อศึกษาชนิดวัสดุที่ใช้ในการทำเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนว่ามีผลต่อความสามารถในการถ่ายโอนความร้อนหรือไม่ โดยในการคำนวณใช้โมเดลของ Taylor-Gortler โดยกำหนดว่าของไหลเป็นของไหลแบบอัดตัวไม่ได้ ไม่พิจารณาเทอมของ dissipation ไม่มีการนำความร้อนในแนวแกนท่อ และใช้เทคนิคการกระจายแบบไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในการคำนวณปัญหาที่ภาวะคงตัวและภาวะไม่คงตัว ใช้เทคนิคแบบไฟไนต์อิลิเมนต์ในการคำนวณปัญหาที่ภาวะคงตัว เมื่อกระจายสมการเรียบร้อยแล้วได้ทดลองใช้ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายโอนความร้อน 3 แบบคือ ของ Colburn Petrukhov formula เทียบกับของ Ito และ Baird พบว่าแบบจำลองค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายโอนความร้อนของ Colburn ซึ่งเป็นการหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายโอนความร้อนเฉลี่ย ให้ผลการคำนวณใกล้เคียงกับการคำนวณแบบวิเคราะห์มากที่สุด

Xuan, Y.M. (1995) เขียนโปรแกรมจำลองการถ่ายโอนความร้อนที่ไหลในเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนที่ไหลแบบตั้งฉากกัน และไม่มีการผสมกันของของไหล โดยขอบเขตการศึกษาให้มีการนำความร้อนที่ผนังท่อและที่ของไหลคำนวณสมการการถ่ายโอนความร้อนโดยใช้เทคนิคการคำนวณเชิงตัวเลขของ Laplace transform คำนวณที่ภาวะไม่คงตัวเทียบผลการคำนวณกับวิธีการคำนวณเชิงวิเคราะห์

Bes, Th. and Roetzel, W. (1983) ศึกษาการถ่ายโอนความร้อนใน 2 มิติของเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนแบบเชลล์ และท่อ โดยถือว่าของไหลในเชลล์มีทิศทางตั้งฉากกับท่อ เนื่องจากทิศทางของของไหลถูกบังคับด้วยแผ่นกั้น พิจารณาการถ่ายโอนความร้อนที่เกิดขึ้นใน 1 ช่องระหว่างแผ่นกั้น โดยถือว่าของไหลในเชลล์ มีการผสมกันเฉพาะที่บริเวณ baffle window แต่ในการไหลผ่านท่อของของไหลในเชลล์ไม่ได้มีการไหลผสมกัน ดังนั้นการไหลแบบปั่นป่วนที่เกิดขึ้นที่ท่อ เป็นเพียงการผสมข้ามระหว่างท่อเท่านั้น ไม่ใช่จากการผสมจากของไหลที่ไหลผ่านท่อหนึ่งกับของไหลที่ไหลผ่านอีกท่อหนึ่ง จากนั้นนำมาคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้การกระจายไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ และเทคนิคการคำนวณแบบชัดแจ้ง (explicit) ในการคำนวณอุณหภูมิในท่อและนอกท่อ โดยอาศัยการกำหนดเช่นนี้จะทำให้การคำนวณสะดวกขึ้น ในการคำนวณซึ่งวิธีนี้ใช้ในการกำหนดความสำคัญ (weighted) ของของไหลภายนอกท่อกับอุณหภูมิภายในและภายนอกท่อ ในแต่ละแถวของท่อพิจารณาในแนวพิกัดฉากกำหนดจำนวนท่อคงที่ ผลการศึกษาพบว่า โมเดลที่ใช้สามารถคำนวณให้คำตอบของอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของของไหลในเชลล์ที่ไหลผ่านท่อได้ดีกว่าโมเดลของ Gaddis & Schunder ที่คิดว่าการไหลของของไหลในท่อมีการผสมกันอย่างสมบรูณ์