# บทที่ 1

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# บทนำ

## 1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

งานวิจัยด้านต่างๆ จะอาศัยระเบียบวิธีการทางด้านสถิติ เพื่อหาข้อสรุปสำหรับสมมติฐานที่ตั้งขึ้นว่ายอมรับได้หรือไม่ ดังนั้นในการเลือกตัวสถิติเพื่อนำมาทำการทดสอบจึงต้องคำนึงถึงความเหมาะสมกับลักษณะของข้อมูลที่ต้องการวิเคราะห์ แต่ตัวสถิติที่เลือกใช้ในการทดสอบนั้นส่วนใหญ่จะมีข้อจำกัดเกี่ยวกับการแจกแจงของประชากรที่นำมาทดสอบและการกระจายของข้อมูลที่สนใจศึกษาในประชากรนั้นๆ

การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิตินั้น มีการทดสอบสมมติฐานพารามิเตอร์ของการแจกแจงหรือรูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็น เช่นการใช้การแจกแจงในการวิเคราะห์แถวคอย การแจกแจงของเวลารอคอยในการรับบริการของลูกค้า ข้อมูลเกี่ยวกับอายุ เช่น อัตราการเสีย (hazard rate) หรืออัตราการตาย (mortalily-rate)ในทางปฏิบัตินั้นก่อนจะนำเอาข้อมูลไปวิเคราะห์ทางสถิติ ควรทำการทดสอบการแจกแจงของข้อมูลเสียก่อน เพราะถ้าคุณสมบัติของข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์มีการแจกแจงที่ไม่เป็นไปตามข้อกำหนด ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ก็ จะไม่ถูกต้องและขาดความน่าเชื่อถือ อนึ่งถ้าหากข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์มีการถูกตัดปลาย(censored data) ย่อมส่งผลต่อการวิเคราะห์ เพื่อหาค่าประมาณของพารามิเตอร์หรือการทดสอบสมมติฐานทางสถิติ อาจทำให้ผลการวิเคราะห์ที่ได้ขาดความน่าเชื่อถือ เช่นการประมาณค่าที่สูงกว่าความเป็นจริง หรือต่ำกว่าความเป็นจริงหรืออำนาจการทดสอบต่ำ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องทำการทดสอบการแจกแจงของข้อมูลที่มีลักษณะดังกล่าวนี้

โดยทั่วไปแล้วการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังเป็นการแจกแจงหนึ่งซึ่งเราจะนำมาใช้เป็นตัวแบบในการศึกษาเกี่ยวกับระยะเวลาที่ต้องรอคอยจนกระทั่งเหตุการณ์ที่เราสนใจศึกษาเกิดขึ้น เช่นการศึกษาเกี่ยวกับอายุการใช้งานของหลอดไฟฟ้ายี่ห้อหนึ่ง หรือการศึกษาเกี่ยวกับระยะเวลาที่ใช้ในการรักษาโรคของยาชนิดหนึ่งเป็นต้น จากคุณสมบัติของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังได้มีนักสถิติหลายท่านศึกษาเกี่ยวกับระยะเวลาที่ต้องรอคอยจนกระทั่งเหตุการณ์ที่เราสนใจเกิดขึ้น โดยการแจกแจงที่เหมาะสมที่จะนำมาใช้เป็นตัวแบบในการศึกษาลักษณะดังกล่าวคือ การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง2 พารามิเตอร์ ซึ่งมีพารามิเตอร์ตำแหน่ง (location parameter) และพารามิเตอร์สเกล (scale parameter) ถ้าการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์เป็นการแจกแจงของอายุการใช้งานของอุปกรณ์ อธิบายได้ว่าพารามิเตอร์ตำแหน่งจะเป็นระยะเวลาที่ต่ำที่สุด หรือระยะเวลาที่สั้นที่สุด (minimum time) ของอายุการใช้งาน และพารามิเตอร์สเกล หมายถึง ระยะเวลาเฉลี่ยของอายุการใช้งาน

ในปี ค.ศ. 1954 Anderson และ Darling ได้เสนอตัวสถิติทดสอบ Anderson-Darling(A-D) เพื่อทำการทดสอบสำหรับข้อมูลที่มีประสิทธิภาพในข้อมูลที่ตัดปลาย และในปี ค.ศ. 1974 Gastwirth เสนอตัวสถิติทดสอบ Gini(G)ที่ใช้ทดสอบการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์ กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์สเกล ต่อมาในปี ค.ศ. 1977 Gail และ ในปี ค.ศ. 1978 Gail และ Gastwirth ได้เสนอตัวสถิติทดสอบ Lorenz(L) ที่ใช้ทดสอบการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์ แต่สำหรับวิธีนี้จะมีประสิทธิภาพดีเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 แต่สามารถที่จะใช้กับข้อมูลที่ถูกตัดปลายได้ดี สำหรับปี ค.ศ. 1974 Stephen ได้เสนอตัวสถิติทดสอบ Kolmogorov-Smirnov(K-S) เพื่อใช้ในการทดสอบการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยที่ตัวสถิติทดสอบดังกล่าว Gail และ Gastwirth ได้ทำการเปรียบเทียบตัวสถิติทดสอบอื่นๆ ในกรณีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 เมื่อใช้ข้อมูลสมบูรณ์ และตัวสถิติทดสอบ K-S และ A-D ซึ่งผู้วิจัยต้องการเปรียบเทียบเพิ่มเติมจากผลงานเดิมของนักวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น

จากการศึกษาและผลการวิจัยดังกล่าวนี้ผู้วิจัยจึงสนใจทำการศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ 4 ตัว คือ

1. ตัวสถิติทดสอบ Gini (G)
2. ตัวสถิติทดสอบ Lorenz (L)
3. ตัวสถิติทดสอบ Kolmogorov-Smirnov (K-S)
4. ตัวสถิติทดสอบ Anderson-Darling (A-D)

โดยจะทำการทดสอบภายใต้การวิเคราะห์ข้อมูลสมบูรณ์(complete data) และการวิเคราะห์ข้อมูลที่ตัดปลายทางขวา (right censored data)

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ 4 ตัว ในกรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์สเกลของการแจกแจงแบบชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์ โดยพิจารณาจากความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบ

## 1.3 สมมติฐานของการวิจัย

ตัวสถิติทดสอบ Gini จะให้อำนาจการทดสอบสูงสุดภายใต้เงื่อนไขและสถานการณ์ที่กำหนดในการวิจัย

**1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น**

ในการวิจัยครั้งนี้จะถือว่า อำนาจการทดสอบ (power of test) และความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เป็นเกณฑ์สำคัญที่จะใช้เป็นเกณฑ์ในการคัดเลือกตัวสถิติสำหรับการทดสอบจะใช้การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในรูปแบบ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\exp(-(\frac{x-\beta}{\theta})) & ,x\geq\beta \quad ,\theta>0\\ 0 & \text{อื่นๆ}\end{cases}$$

เมื่อ x เป็นข้อมูลที่มีการแจกแจงเป็นแบบเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์

เมื่อ $\beta$ เป็นพารามิเตอร์ตำแหน่ง (location parameter) , $-\infty < \beta < \infty$

และ $\theta$ เป็นพารามิเตอร์สเกล (scale parameter) , $\theta > 0$

ค่าเฉลี่ย = $\theta+\beta$ ค่าความแปรปรวน = $\theta^2$

**1.5 ขอบเขตของการวิจัย**

ในการวิจัยครั้งนี้จะทำภายใต้ขอบเขตดังนี้

1. ข้อมูลที่นำมาวิจัยในครั้งนี้มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง 2 พารามิเตอร์ โดยมี $\beta$ เป็นพารามิเตอร์ตำแหน่ง และ $\theta$ เป็นพารามิเตอร์สเกล จะศึกษาเมื่อไม่ทราบค่าพารามิเตอร์สเกล แลไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ตำแหน่ง ดังนั้นจึงทำการศึกษากรณีเมื่อพารามิเตอร์สเกลคงที่และให้พารามิเตอร์ตำแหน่งเปลี่ยนไป และกรณีเมื่อพารามิเตอร์ตำแหน่งคงที่และให้พารามิเตอร์สเกลเปลี่ยนไป

2. ผู้วิจัยสนใจศึกษาเมื่อกำหนดค่า $\beta$ คือ 1 และ $\theta$ คือ 0.5, 1, 2 และ 5

กำหนดค่า $\theta$ คือ 1 และ $\beta$ คือ 0.5, 1, 2 และ 5

3. ขนาดตัวอย่างที่ใช้ทำการศึกษา คือ 10, 20 , 30 , 50 และ 70

4. กำหนดระดับนัยสำคัญ 3 ระดับ คือ $\alpha$ = 0.01 , 0.05 และ 0.10

5. การวิเคราะห์จะพิจารณากรณีข้อมูลสมบูรณ์ และข้อมูลที่ถูกตัดปลายทางขวา 10% , 20% และ 30%

6. จำลองข้อมูลตามสถานการณ์ต่างๆ โดยอาศัยเทคนิคมอนติคาร์โล ซึ่งเป็นการศึกษาในรูปของการจำลองสถานการณ์โดยการทดสอบจะทำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์

ศึกษาความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และค่าอำนาจของการทดสอบซึ่งในการหาอำนาจการทดสอบจะกำหนดประชากรมีการแจกแจงต่าง ๆ ดังนี้

ก.การแจกแจงแบบแกมมา (Gamma Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในรูป

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^{\gamma-1}\exp(-x/\lambda))}{\lambda^{\gamma}\ \Gamma(\gamma)} & ,x>0 \quad ,\gamma>0 \quad ,\lambda>0 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

เมื่อ x เป็นข้อมูลที่มีการแจกแจงเป็นแบบแกมมา

เมื่อ λ เป็นพารามิเตอร์สเกล ( scale parameter) ให้เท่ากับ 1

γเป็นพารามิเตอร์รูปทรง (shape parameter) ให้เท่ากับ 1, 2 และ 3

ค่าเฉลี่ย $= \gamma\lambda$ ค่าความแปรปรวน $= \gamma\lambda^2$

ข. การแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในรูปของ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}\exp(-(x/\beta)^{\alpha})}{\beta^{\alpha}} & ,0<x<\infty \quad ,\alpha>0 \quad ,\beta>0 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

เมื่อ x เป็นข้อมูลที่มีการแจกแจงเป็นแบบไวบูลล์

เมื่อ β เป็นพารามิเตอร์สเกล (scale parameter) ให้เท่ากับ 1

α เป็นพารามิเตอร์รูปทรง(shape parameter) ให้เท่ากับ 0.5 และ 2.0

ค่าเฉลี่ย $= \beta\Gamma(1+1/\alpha)$ ค่าความแปรปรวน $= \beta^2\{\Gamma(1+2/\alpha)-\Gamma^2(1+1/\alpha)\}$

ค.การแจกแจงแบบลอกนอร์มอล (Lognormal Distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในรูป

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp[-(\ln x-\mu)^2/2\sigma^2]}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} & ,x>0 \quad ,\sigma>0 \quad ,-\infty<\mu<\infty \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

เมื่อ x เป็นข้อมูลที่มีการแจกแจงเป็นแบบลอกนอร์มอล

เมื่อ μ เป็นค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และ $\sigma^2$ เป็นค่าความแปรปรวนเท่ากับ 0.7 และ 0.9

ค่าเฉลี่ย $= \exp(\mu+\sigma^2/2)$ ค่าความแปรปรวน $= \exp(2\mu+\sigma^2)*(\exp(\sigma^2)-1)$

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



**1.6 เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบ**

พิจารณาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติแต่ละตัวโดยพิจารณาเฉพาะตัวสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้เท่านั้น

ประเมินผลความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ดังนี้

1. พิจารณาจากความสามารถในการควบคุมค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (Type I Error) ของการทดสอบในแต่ละสถานการณ์ ในการวิจัยครั้งนี้จะใช้เกณฑ์การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าแบบช่วง ที่ระดับนัยสำคัญ 3 ระดับคือ 0.01, 0.05 และ 0.10 การเปรียบเทียบจะทำการเปรียบเทียบระหว่างช่วงค่าความน่าจะเป็นที่คำนวณได้ที่ระดับนัยสำคัญที่กำหนดกับสัดส่วนความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานเมื่อสมมติฐานเป็นจริงที่ได้จากตัวสถิติทดสอบแต่ละตัว จากการทดลองซ้ำ 1,000 ครั้ง

ถ้าสัดส่วนความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานเมื่อสมมติฐานเป็นจริงที่ได้จากตัวสถิติทดสอบแต่ละตัว จากการทดลองซ้ำ 1,000 ครั้ง มีค่าอยู่ในช่วง [ 0,0.017] , [0 , 0.061] และ [0,0.112] ณ ระดับนัยสำคัญ 0.01 , 0.05 และ 0.10 ตามลำดับ (รายละเอียดอยู่ในหัวข้อ 3.2.3 บทที่ 3 ) จะถือว่าตัวสถิติทดสอบนั้นสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้

ถ้าสัดส่วนความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานเมื่อสมมติฐานเป็นจริงที่ได้จากตัวสถิติทดสอบแต่ละตัว จากการทดลองซ้ำ 1,000 ครั้ง มากกว่าขอบเขตบนของเกณฑ์ที่ใช้ในการพิจารณา จะถือว่าตัวสถิติทดสอบไม่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้

2. พิจารณาค่าอำนาจการทดสอบ โดยจะเปรียบเทียบเฉพาะตัวสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้เท่านั้น

**1.7 คำจำกัดความ**

1) ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (type I error) คือความน่าจะเป็นของการปฏิเสธสมมติฐานว่าง ($H_0$) เมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นจริง

2) ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2 (type II error) คือความน่าจะเป็นของการยอมรับสมมติฐานว่าง ($H_0$) เมื่อสมมติฐานว่างนั้นไม่จริง

3) อำนาจการทดสอบ (power of test) คือความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานว่าเมื่อสมมติฐานว่างนั้นไม่จริง

4) ข้อมูลสมบูรณ์ (complete data) คือ ข้อมูลที่เกิดจากการที่กำหนดให้มีค่าสังเกตที่ใช้ในการทดลองไม่เกิดการสูญหาย

5) ข้อมูลตัดปลายทางขวา (right censored data) คือข้อมูลที่เกิดจากการที่กำหนดให้มีค่าสังเกตไม่สมบูรณ์เท่ากับจำนวนที่กำหนดให้ โดยที่ค่าสังเกตไม่สมบูรณ์จะมีค่ามากหรือเท่ากับค่าสังเกตสมบูรณ์ที่มีค่ามากที่สุด

## 1.8 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) เพื่อเป็นแนวทางในการเลือกใช้ตัวสถิติทดสอบที่เหมาะสมแก่ผู้วิจัยในการวิเคราะห์ข้อมูลที่เป็นแบบเลขชี้กำลังที่มี 2 พารามิเตอร์ ในกรณีที่พารามิเตอร์สเกลไม่เจาะจงในการวิเคราะห์ครั้งต่อไป

2) สามารถเลือกตัวสถิติทดสอบได้ตรงกับลักษณะงานที่ต้องการ

3) ทราบว่าตัวสถิติทดสอบที่ทดสอบนั้นมีคุณลักษณะที่เหมาะสมกับการแจกแจงที่เป็นแบบใดโดยเฉพาะ

4) เมื่อข้อมูลที่นำมาทดสอบเป็นข้อมูลที่ถูกตัดปลายทางขวา กรณีเปอร์เซ็นต์ตัดปลายไม่มากกว่า 30% สามารถที่จะใช้สถิติทดสอบจากการวิจัยครั้งนี้มาทดสอบได้