บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่องการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง โดยใช้เมตาคอคนิชัน ได้แบ่งลักษณะของการศึกษาออกเป็น 7 ส่วน โดยเสนอตามลำดับหัวข้อดังต่อไปนี้

1. หลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)
    - 1.1 จุดประสงค์ของการเรียนคณิตศาสตร์
    - 1.2 โครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์
2. โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
    - 2.1 ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
    - 2.2 ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
    - 2.3 ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ
3. การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
    - 3.1 กระบวนการคิดแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
    - 3.2 ขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
    - 3.3 ปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
    - 3.4 สาเหตุบางประการที่ทำให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่ได้
    - 3.5 การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
4. กลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
5. เมตาคอคนิชัน
    - 5.1 ความหมายของเมตาคอคนิชัน
    - 5.2 องค์ประกอบของเมตาคอคนิชัน
6. นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง
    - 6.1 ลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง
    - 6.2 การสอนนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง
7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
    - 7.1 งานวิจัยในประเทศ
    - 7.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

<u>หลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)</u>

กระทรวงศึกษาธิการ (2530) ได้กำหนดจุดประสงค์ของการเรียนคณิตศาสตร์ และโครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา ไว้ดังนี้

1. จุดประสงค์ของการเรียนคณิตศาสตร์

จุดประสงค์ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา ต้องการปลูกฝังให้นักเรียนมีคุณลักษณะดังนี้

1.1 มีความรู้ ความเข้าใจ ในคณิตศาสตร์พื้นฐานและมีทักษะในการคิดคำนวณ

1.2 รู้จักคิดอย่างมีเหตุผล และแสดงความคิดออกมาอย่างมีระเบียบ ชัดเจนและรัดกุม

1.3 รู้คุณค่าของคณิตศาสตร์และมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์

1.4 สามารถนำประสบการณ์ทางด้านความรู้ ความคิด และทักษะที่ได้จากการเรียนคณิตศาสตร์ ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวัน

2. โครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์

โครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ประกอบด้วยพื้นฐานในด้านต่าง ๆ 5 พื้นฐาน คือ

2.1 พื้นฐานทางจำนวน เป็นพื้นฐานที่มีขอบข่ายเนื้อหาเกี่ยวข้องกับเรื่องจำนวนนับ เศษส่วน ทศนิยม เป็นต้น

2.2 พื้นฐานทางพีชคณิต เป็นพื้นฐานที่มีขอบข่ายเนื้อหาเกี่ยวข้องกับพื้นฐานทางจำนวน เช่น สมการ

2.3 พื้นฐานทางการวัด เป็นพื้นฐานที่มีขอบข่ายเนื้อหาเกี่ยวข้องกับเรื่องการวัดความยาว การชั่ง การตวง การหาพื้นที่ การหาปริมาตร ทิศ แผนผัง เวลา วัน เดือน ปี และเงิน เป็นต้น

2.4 พื้นฐานทางเรขาคณิต เป็นพื้นฐานที่มีขอบข่ายเนื้อหาเกี่ยวข้องกับเรื่องรูปเรขาคณิต และรูปทรงเรขาคณิต

2.5 พื้นฐานทางสถิติ เป็นพื้นฐานที่มีขอบข่ายเนื้อหาเกี่ยวข้องกับเรื่องการนำเสนอข้อมูลในรูปแผนภูมิและกราฟ

การจัดโครงสร้างเนื้อหาคณิตศาสตร์ในแต่ละพื้นฐานจะจัดให้สัมพันธ์กัน เนื้อหาที่กำหนดไว้ในแต่ละพื้นฐานเป็นเรื่องที่จะต้องใช้หรือเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน เช่น เงิน เวลา การชั่ง การตวง การวัดความยาว พื้นที่ แผนภูมิ การบวก ลบ คูณ และหาร ฯลฯ การจัดเนื้อหาในแต่ละระดับชั้นได้จัดให้สอดคล้องและเหมาะสมกับวัยและวุฒิภาวะของผู้เรียน เนื้อหาแต่ละเรื่องที่จัดไว้ในชั้นต่าง ๆ จะมีลักษณะทบทวนเนื้อหาเดิมที่เคยเรียนมาแล้วในชั้นก่อน ดังนั้น

การเรียนการสอนแต่ละเรื่องมิได้เรียนเพียงครั้งเดียวแล้วยุติ แต่จะซ้ำและทบทวน แล้วจึงเพิ่มรายละเอียดของเนื้อหานั้น ๆ ให้เหมาะสมกับวัยและชั้นเรียนที่สูงขึ้น

<u>โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์</u>

1. ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ได้มีผู้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Dewey (1933) ได้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ว่า เป็นสถานการณ์ที่ก่อให้เกิดความงงงวยและท้าทายความคิด โดยผู้ที่เผชิญกับปัญหาจะต้องวิเคราะห์หาข้อเท็จจริง ค้นหาวิธีแก้ปัญหา พิจารณาความถูกต้องเป็นจริงจากโจทย์ปัญหาโดยอาศัยความสมเหตุสมผลจากข้อมูลที่มีอยู่ และต้องตัดสินขั้นสุดท้ายเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่ยุ่งเหยิงนั้น

Henderson และ Pingry (1953) ได้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ว่า เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการหาคำตอบ ในเชิงปริมาณหรือตัวเลข ซึ่งผู้แก้ปัญหาจะทำได้ต้องมีกระบวนการที่เหมาะสม ใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผน และการตัดสินใจประกอบว่าจะใช้วิธีการใดแก้โจทย์ปัญหาแต่ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้นต้องอาศัยทักษะและความสามารถประกอบกัน เช่น ทักษะการอ่านและวิเคราะห์ปัญหา การคำนวณ การมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ เป็นต้น

Adams (1977) ได้ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ว่า เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวกับปริมาณ และต้องมีการตัดสินใจลงมือหาคำตอบ ซึ่งอาจเป็นปัญหาที่ใช้ภาษาหรือคำพูดได้

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ ที่ผู้แก้ปัญหาไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันที แต่ต้องใช้ความรู้ประสบการณ์และกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ ในอันที่จะตัดสินใจเลือกกลวิธีที่เหมาะสมมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์

2. ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ได้มีผู้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ออกเป็นประเภทต่าง ๆ ดังนี้

คณะอนุกรรมการพัฒนาการสอนและผลิตภัณฑ์อุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ (2524) ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 5 ประเภท ได้แก่

1) ปัญหาที่เป็นการค้นหาข้อความจริงหรือข้อสรุปใหม่ ที่นักเรียนยังไม่เคยรู้มาก่อน

2) ปัญหาซึ่งมาจากการอภิปรายในชั้นเรียนเกี่ยวกับเนื้อหา

3) ปัญหาที่เกี่ยวกับวิธีการ การพิสูจน์ทฤษฎีบท หรือข้อสรุปที่มีผู้อื่นตั้งไว้

4) ปัญหาที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่อาศัยนิยาม ทฤษฎีบทต่าง ๆ มาใช้

5) ปัญหาที่ไม่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ แต่ต้องอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา

Polya (1957) ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่

1) ปัญหาให้ค้นหา เป็นปัญหาให้ค้นหาสิ่งที่ต้องการ ซึ่งอาจเป็นปัญหาในเชิงทฤษฎีหรือปัญหาในเชิงปฏิบัติ อาจเป็นรูปธรรมหรือนามธรรม ส่วนสำคัญของปัญหานี้แบ่งเป็น 3 ส่วนคือ สิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดและเงื่อนไข

2) ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาที่ได้แสดงอย่างสมเหตุสมผลว่า ข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเท็จ ส่วนสำคัญของปัญหานี้แบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ สมมติฐานหรือสิ่งที่กำหนดให้และผลสรุปคือ สิ่งที่จะต้องพิสูจน์

Krulik และ Rey (1980) ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 5 ประเภท ได้แก่

1) ปัญหาที่เป็นความรู้ความจำ

2) ปัญหาพีชคณิต

3) ปัญหาที่เป็นการประยุกต์ใช้

4) ปัญหาที่ให้ค้นหาส่วนที่หายไป

5) ปัญหาที่เป็นสถานการณ์

Baroody (1987) ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่

1) โจทย์ปัญหาปกติ คือโจทย์ปัญหาในหนังสือเรียนทั่ว ๆ ไป ซึ่งมุ่งเน้นการฝึกทักษะใดทักษะหนึ่งมีข้อมูลที่จำเป็นและมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว

2) โจทย์ปัญหาที่ไม่ปกติ คือโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะสอดคล้องกับสภาพความเป็นจริงของชีวิตมากกว่าโจทย์ปัญหาปกติ คือ มีข้อมูลมากทั้งที่จำเป็นและไม่จำเป็นหรือข้อมูลไม่เพียงพอ อาจมีคำตอบมากกว่า 1 คำตอบ เป็นการคิดวิเคราะห์อย่างเป็นเหตุเป็นผล

Hatfield, Edwards และ Bitter (1993) ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ประเภท ได้แก่

1) โจทย์ปัญหาปลายเปิด เป็นโจทย์ปัญหาที่มีจำนวนของคำตอบที่เป็นไปได้มาก ดังนั้นกระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหาจึงเป็นสิ่งที่มีความสำคัญมากกว่าคำตอบที่จะได้รับ

2) โจทย์ปัญหาที่ให้ค้นหา มักจะมีคำตอบที่จบอยู่ในตัว แต่มีวิธีการที่หลากหลายที่นักเรียนสามารถหาคำตอบได้

3) โจทย์ปัญหาที่มีแนวทางให้ค้นหาคำตอบ โดยทั่วไปจะเป็นปัญหาที่ธรรมดาที่สุด รวมทั้งมีคำแนะนำสำหรับแก้โจทย์ปัญหา และมีวิธีการแก้โจทย์ปัญหาที่ไม่ยุ่งยาก

จากที่กล่าวมาข้างต้นจึงสรุป ประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ 2 ประเภท ได้แก่

1) โจทย์ปัญหาธรรมดา เป็นโจทย์ปัญหาที่ไม่ซับซ้อนนัก ผู้แก้โจทย์ปัญหาจะมีความเคยชินกับปัญหา เคยชินกับโครงสร้างและวิธีแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งปรากฏอยู่ในหนังสือเรียน

ทั่ว ๆ ไป

2) โจทย์ปัญหาที่พิเศษ เป็นโจทย์ปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน มีความเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน ต้องแก้ปัญหาด้วยกลวิธีต่าง ๆ เพื่อให้ได้คำตอบที่สมบูรณ์ ซึ่งอาจมีมากกว่าหนึ่งคำตอบ

3. ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ

ได้มีผู้เสนอแนะวิธีสร้างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้มีลักษณะที่น่าสนใจ ไว้ดังนี้

นิพนธ์ จิตภักดี (2517) ได้เสนอแนะวิธีการสร้างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้น่าสนใจ ดังนี้

1) สร้างโจทย์ปัญหาให้ตรงกับความสนใจของเด็ก โดยใช้ความรู้ทางจิตวิทยาและสังเกตความสนใจของเด็กด้วยวิธีการต่าง ๆ ได้แก่ ให้วาดภาพ ให้เลือกของเล่น สัมภาษณ์ให้เล่าเรื่องที่น่าสนใจ

2) สร้างโจทย์ปัญหาให้เหมาะสมกับสภาพของท้องถิ่น

3) สร้างโจทย์ปัญหาให้สัมพันธ์กับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริง ๆ

4) สร้างโจทย์ปัญหาให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างการบวก การลบ และการคูณการหาร

5) สร้างโจทย์ปัญหาในหลาย ๆ ลักษณะ เพื่อจะช่วยให้เด็กรู้จักพิจารณาแยกแยะปัญหาและสามารถสร้างโจทย์ปัญหาได้เอง เช่น โจทย์ที่ขาดตัวเลข โจทย์ที่มีข้อความไม่สมบูรณ์โจทย์ที่มีข้อความบางตอนไม่เกี่ยวกับการหาคำตอบ และโจทย์ที่ขาดคำถามมีแต่เรื่องหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เป็นต้น

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2531) ได้กล่าวถึงโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนสนใจแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1) โจทย์ปัญหาที่ได้มาจากประสบการณ์ที่นักเรียนพบจริง ๆ จากการที่นักเรียนทำกิจกรรมต่าง ๆ เช่น การตัดสินว่าฝ่ายใดชนะในการเล่นเกม เป็นต้น

2) โจทย์ปัญหาที่ไม่ได้มาจากประสบการณ์ที่นักเรียนพบจริง ๆ ในชั้นเรียนแต่เป็นสภาพการณ์ที่นักเรียนนึกถึงหรือคิดถึงได้ เช่น การวางแผนไปเที่ยวร่วมกันและกะประมาณว่าจะใช้ค่าใช้จ่ายเท่าไร จะต้องใช้เวลานานเท่าไร จึงจะเก็บเงินไว้ใช้จ่ายได้พอ เป็นต้น

สุวร กาญจนมยูร (2533) ได้เสนอลักษณะโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ 4 ลักษณะที่แตกต่างจากที่กล่าวมาแล้ว ดังนี้

1) โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่อยู่ในลักษณะของคำทาย

2) โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่อยู่ในลักษณะของรูปภาพ

3) โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่อยู่ในลักษณะของสัญลักษณ์

4) โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่อยู่ในลักษณะของข้อความ

Clyde (1967) ได้เสนอแนะถึงการสร้างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้น่าสนใจว่าควรมีลักษณะ ดังนี้

1) ให้มีความใกล้เคียงกับปัญหาในชีวิตประจำวัน และมีความสัมพันธ์กับผู้แก้ปัญหามากที่สุด โดยอาจเป็นเรื่องราวหรือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นกับผู้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันหรือมักจะเกิดกับบุคคลทั่ว ๆ ไป หรือมีลักษณะคล้ายกับสถานการณ์ในชีวิตจริง

2) สถานการณ์ที่สร้างขึ้นเป็นปัญหา ควรใช้ภาษาสำหรับการบรรยายในลักษณะที่ผู้แก้ปัญหามีประสบการณ์มาก่อน ไม่ควรเป็นปัญหาทั่วไป

Krulik (1993) ได้เสนอแนะถึงการสร้างโจทย์ปัญหาที่ดี ควรสร้างให้มีลักษณะดังนี้

1) มีความน่าสนใจและท้าทายความคิดของนักเรียน

2) ต้องให้นักเรียนได้ใช้ทักษะในการคิดวิเคราะห์และทักษะการสังเกต

3) ให้นักเรียนได้มีโอกาสในการอภิปรายเกี่ยวกับปัญหา

4) ให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ และการนำทักษะทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้

5) ควรจะนำมาซึ่งหลักการเฉพาะและหลักการทั่วไปทางคณิตศาสตร์

6) เป็นโจทย์ปัญหาที่หลากหลาย และมีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุป ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะใหญ่ ๆ ได้ดังนี้

1) เป็นโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีภาษา ระดับความยากง่ายเหมาะสมกับความรู้พื้นฐาน วัย ความสนใจและวุฒิภาวะของผู้เรียน

2) เป็นโจทย์ปัญหาที่สัมพันธ์ และเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียน มีความทันสมัย ช่วยกระตุ้น ส่งเสริมกระบวนการคิดของนักเรียน มีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบ และเป็นโจทย์ปัญหาที่เอื้อให้นักเรียนได้ใช้กลวิธีต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา

<u>การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์</u>

การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบของโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ โดยที่ผู้แก้ปัญหาต้องใช้ความรู้ และประสบการณ์เดิมที่มีอยู่มาผนวกเข้ากับสถานการณ์ใหม่ที่พบ ด้วยการพิจารณาถึง กระบวนการคิดแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ สาเหตุบางประการที่ทำให้แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่ได้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์กับนักเรียน ซึ่งจะได้กล่าวถึงรายละเอียดตามลำดับ ดังนี้

1. กระบวนการคิดแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

Johnson และ Rising (1972) มีความคิดเห็นว่า กระบวนการคิดแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการทางสมองที่ซับซ้อน ประกอบด้วยการมองเห็นภาพ จินตนาการ การจัดกระทำอย่างมีทักษะ การวิเคราะห์ การสรุปในเชิงนามธรรมและการเชื่อมโยงความคิด

กระบวนการคิดแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นเรื่องที่ลึกซึ้ง เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในสมอง ที่มีพื้นฐานมาจากกระบวนการทางปัญญา ที่เกี่ยวข้องกับการค้นหา การเลือก การรับรู้ การจำ การคิดแก้ปัญหาต่าง ๆ โดยผ่านทางประสาทสัมผัสและแสดงออกมาเป็นพฤติกรรม ซึ่งกรมวิชาการ (2531) ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการคิดแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นภายในสมอง โดยใช้กระบวนการทางปัญญา 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 ความสามารถพื้นฐาน (intellectual skill) เป็นขั้นที่มีกฎเกณฑ์ มีความคิดรวบยอดไว้ล่วงหน้า ถ้าไม่มีแล้วเด็กจะเรียนรู้ต่อไปในเรื่องนั้น ๆ ไม่ได้ เช่น เด็กประถมศึกษาปีที่ 3 ทำเลขหารไม่ได้ อาจเกิดจากเด็กขาดความคิดรวบยอด เรื่องการหารตั้งแต่ประถมศึกษาปีที่ 2 เป็นต้น

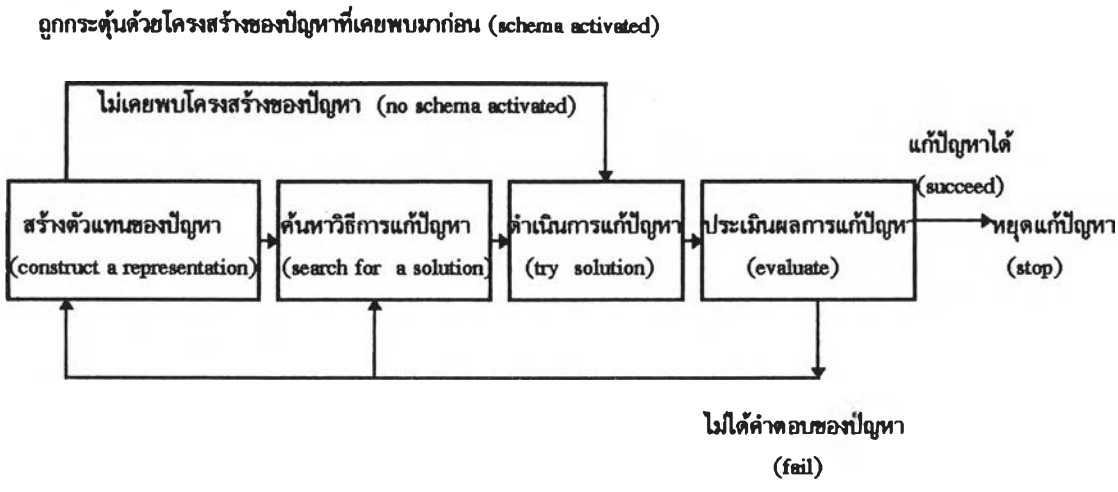
ขั้นที่ 2 เห็นแนวทางแก้ปัญหา (problem schemata) เป็นการให้ความรู้สอดคล้องกับโครงสร้างการแก้ปัญหาของเด็กที่ว่า เด็กจะต้องสามารถรู้กฎหรือแนวดำเนินการ อย่างเช่น ถ้าบอกว่าแดงมีก้อนหิน 5 ก้อน ดำมีก้อนหิน 3 ก้อน ถามว่าแดงมีก้อนหินมากกว่าดำกี่ก้อน ถ้าเป็นอย่างนี้แล้วแนวดำเนินการก็คือการเปรียบเทียบและหักล้างกัน คณิตศาสตร์จะมีวิธีดำเนินการใหญ่ ๆ ในแต่ละข้อ ข้อคิดที่ได้คือเด็กอาจจะไม่ค้นพบวิธีดำเนินการใหญ่ ๆ ครูจะช่วยได้อย่างไร ถ้าเด็กไม่มี เด็กจะแก้ปัญหาไม่ได้

ขั้นที่ 3 วางแผนดำเนินการ (planning strategy) คือการที่เด็กรู้วิธีดำเนินการ รู้ว่ามีขั้นตอนดำเนินการอย่างไร ควรทำอะไรก่อน อะไรหลัง

ขั้นที่ 4 สามารถตรวจสอบผล (validation) เมื่อได้คำตอบแล้วควรจะตรวจสอบได้ว่าถูกผิดอย่างไร ถ้าครูแนะนำดี ๆ เด็กจะรู้คำตอบที่ได้นั้นถูกหรือผิดเพราะอะไร

Gick (1986) ได้เสนอกระบวนการคิดแก้ปัญหา ที่สามารถนำมาใช้เป็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ มีรูปแบบและกระบวนการดังนี้

แผนภูมิที่ 1 กระบวนการคิดแก้ปัญหา



(แหล่งที่มา Gick, 1986)

จากแผนภูมินี้อธิบายได้ว่า กระบวนการคิดแก้ปัญหาจะเริ่มจากการสร้างตัวแทนของปัญหา (construct representation) เพื่อทำความเข้าใจปัญหา ในกรณีที่ผู้แก้ปัญหาเคยพบโครงสร้างปัญหาที่เคยแก้มาก่อน (schema activated) เขาจะดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา (try solution) ตามวิธีที่เคยใช้มา และจะทำการประเมินผลการแก้ปัญหา (evaluate) จนได้คำตอบของปัญหา ถ้าผู้แก้ปัญหายังไม่ได้คำตอบตามที่ปัญหาต้องการ จำเป็นต้องมองย้อนกลับไปพิจารณาที่วิธีการและตัวแทนของปัญหาอีกครั้งหนึ่ง ว่ามีข้อบกพร่องตรงไหน เพื่อจะได้แก้ไขให้ถูกต้องต่อไป เมื่อได้คำตอบตามที่โจทย์ต้องการ ก็ถือว่าประสบความสำเร็จ ดังนั้นการแก้ปัญหาจึงสิ้นสุดลง ในทางกลับกันถ้าผู้แก้ปัญหาไม่เคยพบโครงสร้างของปัญหาเช่นนี้มาก่อน หลังจากการสร้างตัวแทนของปัญหาแล้ว ผู้แก้ปัญหาจะทำการค้นหาวิธีการ (search for a solution) เพื่อใช้ในการแก้ปัญหา จากนั้นจะดำเนินการแก้ปัญหา ตามวิธีการที่เลือกไว้ และประเมินผลการแก้ปัญหา เช่นเดียวกับที่กล่าวไปแล้ว

จากแนวคิดดังกล่าวสามารถสรุปกระบวนการคิดแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ได้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1) สร้างตัวแทนของปัญหา อาจใช้การเขียนสัญลักษณ์ วาดภาพ สร้างแผนภาพ เพื่อทำให้เข้าใจโจทย์ปัญหาชัดเจนยิ่งขึ้น

2) คิดวิธีที่จะใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา เป็นการรวบรวมวิธีการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับโจทย์ปัญหา เพื่อหาคำตอบ รวมทั้งการวางแผนและลำดับขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหา

3) ลงมือแก้ปัญหา ตามแผนและขั้นตอนที่กำหนดไว้

4) ประเมินผลการแก้โจทย์ปัญหา ว่าได้คำตอบเป็นไปตามเป้าหมายที่โจทย์กำหนดหรือไม่ มีข้อบกพร่องตรงไหน เพื่อจะได้ปรับปรุงให้ถูกต้อง

2. ขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่เป็นไปอย่างมีลำดับขั้นตอนที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ ซึ่งได้มีนักการศึกษาแบ่งขั้นตอนไว้ ดังนี้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2537) ได้เสนอแนะขั้นตอนการสอนแก้โจทย์ปัญหาไว้ดังนี้

1) ทำความเข้าใจปัญหาให้ถ่องแท้

2) หาวิธีการที่จะใช้ในการแก้ปัญหา เช่น ใช้อุปกรณ์ของจริง ใช้การเขียนภาพ ใช้การเขียนตาราง เขียนรายการที่สำคัญจากปัญหา คิดตามเหตุผล

3) ลงมือแก้ปัญหาตามวิธีการที่คิดว่าได้ผล ถ้ายังไม่ได้ผลก็หาวิธีอื่นมาลองใหม่จนได้คำตอบ

4) ตรวจสอบคำตอบ

Polya (1957) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ว่าจะต้องอาศัยขั้นตอนต่าง ๆ 4 ขั้นตอน ได้แก่

1) ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่ต้องทำความเข้าใจคำที่มีอยู่ในปัญหาและแปลงปัญหานั้นใหม่ โดยใช้ถ้อยคำของผู้แก้ปัญหา พิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการถามหา ข้อมูลที่กำหนดให้เพียงพอสำหรับการแก้ปัญหาหรือไม่ หรือมีข้อมูลใดที่ไม่ใช้ในการแก้ปัญหา แต่โจทย์ปัญหากำหนดมาให้ ปัญหานั้นคล้ายคลึงกับที่ตนเองเคยแก้หรือไม่

2) ขั้นวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาพิจารณาความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ในปัญหาแล้วผสมผสานกับประสบการณ์เดิมในการแก้ปัญหาที่ผู้แก้ปัญหามีอยู่ มากำหนดเป็นวิธีการและเทคนิคในการแก้ปัญหา

3) ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นของการปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ และต้องตรวจสอบแต่ละขั้นตอนที่ปฏิบัติว่าถูกต้องหรือไม่ เป็นขั้นที่นักเรียนคิดคำนวณตามแผนที่วางไว้เพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา สิ่งที่นักเรียนจะต้องใช้ในขั้นนี้ คือ ทักษะการคำนวณ และการรู้จักเลือกวิธีคำนวณที่เหมาะสมมาใช้

4) ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบ เป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาต้องมองย้อนกลับไปที่ขั้นตอนต่าง ๆ ที่ผ่านมาตั้งแต่ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา และโดยเฉพาะอย่างยิ่งขั้นดำเนินการตามแผน เป็นการพิจารณาว่ารายละเอียดต่าง ๆ ในแต่ละขั้นตอนนั้นมีความถูกต้องสมบูรณ์เพียงใด การตรวจสอบนอกจากจะช่วยให้พบข้อบกพร่องที่อาจมีอยู่ เพื่อการปรับปรุงแก้ไขให้ดีขึ้นแล้ว ยังช่วยให้ผู้แก้ปัญหาเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหาทั้งกระบวนการได้ดีขึ้น เกิดความคิดในการพัฒนากระบวนการแก้ปัญหาให้ดีขึ้นกว่าเดิม สามารถขยายวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ให้กว้างขวางขึ้นกว่าเดิม

Krulik (1977) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ตามขั้นตอนดังนี้

1) อ่านโจทย์และทำความเข้าใจว่า โจทย์ถามอะไร ต้องการอะไร มีข้อมูลอะไร ที่โจทย์บอกแล้วเริ่มเขียนรูป (model) หรือประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

2) หาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่โจทย์บอก กับข้อมูลที่โจทย์ต้องการทราบ ด้วยการคิดย้อนกลับ เราเคยพบปัญหาเช่นนี้มาก่อนหรือไม่ แล้วเริ่มตั้งสมมติฐานหลาย ๆ ข้อ เพื่อหาทางทดสอบสมมติฐานนั้น

3) หาวิธีการที่ถูกต้องเพื่อทดสอบสมมติฐาน

4) ตรวจสอบผลลัพธ์ที่ค้นพบนั้นว่า เป็นการตอบปัญหาที่ถูกต้องแน่นอนเพียงไร

จากแนวคิดที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

1) ทำความเข้าใจปัญหา

2) วางแผนในการแก้ปัญหา

3) ดำเนินการตามแผนที่วางไว้

4) ตรวจสอบการแก้ปัญหา

3. ปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ได้มีผู้กล่าวถึงปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

ประยูร อาษานาม (2528) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

1) ความสามารถในการคิดคำนวณ

2) ความสามารถในการอ่านจับใจความได้ละเอียด

3) ความรู้และทักษะเบื้องต้นในการคิดคำนวณ

4) ปัจจัยอื่น ๆ ได้แก่

4.1) เชาว์ปัญญา โดยเฉพาะเกี่ยวกับจำนวนและภาษา

4.2) ความรู้เกี่ยวกับระบบจำนวน

4.3) ความสามารถในการประยุกต์ทักษะในการอ่าน

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

1) ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

2) ทักษะในการแก้ปัญหา

3) ความสามารถในการคิดคำนวณและความสามารถในการให้เหตุผล

4) แรงขับ ที่จะสร้างพลังในการคิด

5) ความยืดหยุ่น คือไม่ติดยึดในรูปแบบที่ตนเองคุ้นเคยแต่จะยอมรับรูปแบบและวิธีการใหม่ ๆ อยู่เสมอ

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Adams, Ellis และ Beeson (1977) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่มีส่วนช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1) สติปัญญา การแก้ปัญหาจำเป็นต้องใช้การคิดในระดับสูง ดังนั้น สติปัญญาจึงเป็นสิ่งสำคัญยิ่งประการหนึ่งในการแก้ปัญหา เป็นที่ยอมรับกันว่า องค์ประกอบของสติปัญญามีส่วนสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้ปัญหาก็คือ องค์ประกอบทางปริมาณ (quantitative factors) ดังนั้น นักเรียนบางคนอาจมีความสามารถในองค์ประกอบทางด้านภาษา (verbal factors) แต่อาจด้อยในความสามารถที่ไม่ใช่ภาษาหรือทางด้านปริมาณ

2) การอ่าน ความสามารถในการอ่านนับเป็นคุณสมบัติที่สำคัญของการแก้ปัญหา มีนักเรียนจำนวนไม่น้อยที่มีความสามารถในการอ่านแต่ไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ ทั้งนี้เพราะแบบแผนของการอ่านมีลักษณะหลากหลายประกอบกับการแก้โจทย์ปัญหานั้น จำเป็นต้องอาศัยการอ่านแบบวิเคราะห์ (analytical reading) อันจะนำไปสู่การตัดสินใจว่า ควรกระทำอะไรและอย่างไร

3) ทักษะพื้นฐาน หลังจากวิเคราะห์ปัญหาและตัดสินใจว่า ควรจะทำอะไรบ้างและอย่างไร ในการทำอย่างไรนั้นเป็นขั้นตอนของการคำนวณ ซึ่งนักเรียนต้องมีทักษะพื้นฐานของการคำนวณในเรื่อง การบวก การลบ การคูณ และการหาร ซึ่งนับว่าเป็นความสามารถที่ค่อนข้างง่ายของการแก้ปัญหา

Dickson, Brown และ Gibson (1984) ได้กล่าวถึงปัจจัยที่มีส่วนช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของเด็ก ได้แก่

1) ความสามารถในการอ่าน (reading ability) นักเรียนสามารถอ่านคำถามได้ไหม คือ สามารถ

1.1) จำคำได้ไหม

1.2) จำสัญลักษณ์ได้ไหม

2) ความเข้าใจ (comprehension) นักเรียนสามารถเข้าใจคำถามหรือไม่ คือ

2.1) มีความเข้าใจโดยทั่วไป

2.2) มีความเข้าใจในสัญลักษณ์และคำศัพท์เฉพาะ

3) การแปลง (transformation) นักเรียนสามารถเลือกกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในการแก้ปัญหาหรือไม่ นั่นคือ เป็นการแปลงโจทย์ปัญหาให้อยู่ในรูปประโยคคณิตศาสตร์

4) ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (process skills) นักเรียนสามารถดำเนินการคำนวณตามวิธีการแก้ปัญหาที่คิดได้หรือไม่

5) การลงหน่วยในคำตอบ (encoding) นักเรียนสามารถเขียนคำตอบในรูปแบบที่ยอมรับกันหรือไม่

6) แรงจูงใจ (motivition) ของนักเรียน นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้องถ้ามีความพยายาม ซึ่งขึ้นอยู่กับแรงจูงใจเป็นสำคัญ

7) การขาดความระมัดระวัง (carelessness) นักเรียนบางคนรู้ว่า จะแก้ปัญหาอย่างไร แต่ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ จึงเกิดความคลาดเคลื่อน

8) รูปแบบของคำถาม (question Form) ซึ่งอาจสร้างความสับสนให้แก่ผู้เรียน

จากแนวคิดที่กล่าวมา สามารถสรุปปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ ดังนี้

1) ตัวผู้เรียน ได้แก่ เชาว์ปัญญา ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ วัยและวุฒิภาวะของผู้เรียน ทัศนคติที่มีต่อคณิตศาสตร์ เป็นต้น

2) วิธีการสอนของครู รวมทั้งสื่อการเรียนการสอน กิจกรรมต่าง ๆ ที่ครูจัดให้แก่ผู้เรียน

3) ปัจจัยอื่น ๆ ได้แก่ สิ่งแวดล้อม อบรมเลี้ยงดู ตำราเรียน หลักสูตร เป็นต้น

4. สาเหตุบางประการที่ทำให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่ได้

ได้มีผู้กล่าวถึงสาเหตุบางประการที่ทำให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่ได้ไว้ดังนี้

ช. ชนบท (นามแฝง, 2529) ได้กล่าวถึงสาเหตุสำคัญที่ส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ด้านการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนต่ำ เนื่องจากกระบวนการสอนของครูยังเป็นแนวการสอนตามวิธีสอนคณิตศาสตร์แบบเก่าที่ยึดการจำและการฝึกหัดจากตัวอย่าง ซึ่งมีขั้นตอนการสอน 3 ขั้นคือ

1) ครูอธิบายความหมายและคำจำกัดความ

2) ครูให้ตัวอย่าง

3) ครูให้ทำแบบฝึกหัด

อุทัย เพชรช่วย (2532) กล่าวถึงสาเหตุสำคัญที่นักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ มี 4 ประการ ดังนี้

1) เกิดจากการที่ครูสอนโดยละเลยการใช้ประสบการณ์ในชั้นใช้ของจริง

2) เกิดจากการที่ครูสอนโดยเน้นให้เด็กจำ "คำหลัก" เพื่อใช้บอกวิธีทำ

3) เกิดจากการที่ครูเน้นการสอนตามวิธีการหรือตามตัวอย่างในหนังสือ มากกว่าเน้นการสอนหลักการที่อยู่เบื้องหลังวิธีการนั้น

4) เกิดจากการที่ครูสอนโดยไม่คำนึงถึงระเบียบวิธีการหรือขั้นตอนในการคิด

Brueckner และ Grossnickle (1957) ได้กล่าวถึงสาเหตุบางประการที่ทำให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาไม่ได้ไว้ ดังนี้

1) ครูสอนเน้นทักษะการคิดคำนวณมากกว่าวิธีการแก้ปัญหา หรือกระบวนการแก้ปัญหา

2) นักเรียนขาดทักษะในการอ่านและทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา

3) ภาษาและคำที่ใช้ในโจทย์ปัญหา ไม่กระตุ้นหรือส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความคิดเชิงวิเคราะห์ หรือไม่เหมาะสมกับวัยและสติปัญญาของเด็ก ทำให้นักเรียนไม่เข้าใจคำศัพท์หรือโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

4) นักเรียนขาดความสามารถในการคิดคำนวณ ขาดทักษะการบวก ลบ คูณ และหาร

5) นักเรียนด้อยสมรรถภาพในการคิดในใจ ไม่รู้จักคะเนหรือประมาณคำตอบ

6) นักเรียนขาดการคิดหาเหตุผล มองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้

7) นักเรียนใช้วิธีการในการแก้โจทย์ปัญหาผิด เพราะไม่ได้นำเอาทฤษฎี กฎเกณฑ์ สูตรต่าง ๆ หรือความรู้ที่เรียนมาไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา

8) นักเรียนขาดความสนใจและตั้งใจที่จะแก้โจทย์ปัญหา อาจมีสาเหตุมาจากนักเรียนไม่สนใจ

9) เวลาเรียนในการเรียนการสอนโจทย์ปัญหาไม่เหมาะสมหรือไม่เพียงพอ

10) นักเรียนมีความสะเพร่า นำตัวเลขหรือโจทย์ปัญหามาคิดคำนวณผิด

Banks (1964) ได้กล่าวถึง สาเหตุบางประการที่เป็นอุปสรรคในการแก้โจทย์ปัญหา ได้แก่ การขาดทักษะในวิธีการทางคณิตศาสตร์ เช่น ขาดทักษะเรื่อง บวก ลบ คูณ หาร หรืออาจเป็นเพราะวิธีสอนของครูที่มุ่งความสำคัญที่คำตอบมากกว่าวิธีการ

West (1977) กล่าวถึงสาเหตุที่ผู้เรียนไม่สามารถทำข้อสอบ ที่เป็นโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง มี 3 ประการ คือ

1) นักเรียนไม่เข้าใจในข้อความที่เป็นโจทย์ปัญหา

2) นักเรียนไม่สามารถเปลี่ยนโจทย์ปัญหา มาเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้

3) นักเรียนไม่สามารถคำนวณตามที่โจทย์ต้องการได้

อย่างไรก็ดี มีนักเรียนเป็นจำนวนไม่น้อย ที่สามารถแก้โจทย์ปัญหาจนได้คำตอบแต่เป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง จึงมีการศึกษาสาเหตุของความผิดพลาด Dickson, Brown และ Gibson (1984) ได้สำรวจความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนระดับ 7 จำนวน 2 กลุ่ม คือกลุ่มที่ผลการเรียนปานกลาง และกลุ่มที่ผลการเรียนต่ำ พบว่า กลุ่มผลการเรียนต่ำมีความผิดพลาดในเรื่องการแปลงโจทย์ปัญหา ให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ และความคลาดเคลื่อนในการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหามากที่สุด รองลงมาคือ ขาดทักษะทางคณิตศาสตร์ และขาดแรงจูงใจ สำหรับกลุ่มผลการเรียนปานกลาง พบว่า สิ่งที่เป็นสาเหตุให้เกิดความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหามากที่สุด คือการขาดความระมัดระวัง และขาดแรงจูงใจ รองลงมาคือความคลาดเคลื่อนในการแปลงโจทย์ปัญหาเป็นประโยคสัญลักษณ์ และการใช้ทักษะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปสาเหตุบางประการที่ทำให้นักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่ได้ ดังนี้

1) ตัวนักเรียน นักเรียนขาดทักษะในการคิดคำนวณ ขาดทักษะในการอ่าน ไม่สามารถวิเคราะห์โจทย์ปัญหาได้ ขาดกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งขาดแรงจูงใจในการเรียน

2) การสอนของครู ครูสอนเน้นทักษะการคำนวณมากกว่ากระบวนการและกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหา มุ่งให้นักเรียนหาคำตอบ ครูสอนโดยไม่ใช้สื่อการเรียนการสอน

3) สภาพแวดล้อม เช่น เวลาเรียนและสถานที่ในการเรียนไม่เหมาะสม ทำให้นักเรียนไม่กล้าแสดงออกซึ่งความสามารถที่เขามีอยู่ได้อย่างเต็มที่

4) สาเหตุอื่น ๆ เช่น โจทย์ปัญหาไม่เหมาะสมกับระดับการเรียนรู้และวัยของนักเรียน ขาดสื่อการเรียนการสอน ตลอดจนขาดการส่งเสริมที่ดีจากบุคคลที่มีส่วนเกี่ยวข้อง

5. การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่าน ได้เสนอแนวคิดในการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2531) ได้กล่าวถึงเทคนิคต่าง ๆ ที่ช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ดังนี้

1) การใช้โจทย์ปัญหาที่นักเรียนสนใจ โจทย์ปัญหาที่นักเรียนสนใจ แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ

1.1) เป็นโจทย์ปัญหาที่ได้มาจากสภาพการณ์ที่นักเรียนพบจริง ๆ จากการที่นักเรียนทำกิจกรรมต่าง ๆ เช่น การตัดสินว่าฝ่ายใดชนะในการเล่นเกม เป็นต้น

1.2) เป็นโจทย์ปัญหาที่ไม่ได้มาจากสภาพการณ์ที่นักเรียนพบจริง ๆ ในชั้นเรียนแต่เป็นสภาพการณ์ที่นักเรียนนึกถึงหรือคิดถึงได้ เช่น การวางแผนไปเที่ยวร่วมกัน และกะประมาณว่า จะใช้ค่าใช้จ่ายเท่าไร จะต้องใช้เวลานานเท่าไร จึงจะเก็บเงินไว้ใช้จ่ายได้พอ เป็นต้น

2) การเปลี่ยนเรื่องราวของโจทย์ปัญหาให้มองเห็นได้ง่ายขึ้น การนำอุปกรณ์ต่าง ๆ มาใช้ในการเรียนการสอน เช่น การใช้เส้นจำนวน การวาดภาพ การเขียนแผนภาพ จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นลู่ทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้น

3) การแสดงบทบาทสมมติ การแสดงบทบาทสมมติจะทำให้นักเรียนมองเห็นเงื่อนไข แนวคิดและความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่อยู่ในโจทย์ปัญหาเป็นจริงยิ่งขึ้น ช่วยให้นักเรียนเรียนรู้ถึงความสัมพันธ์ระหว่างสภาพการณ์นอกโรงเรียนและคณิตศาสตร์ เช่น การจัดร้านขายของ เป็นต้น

4) ใช้วิธีเปรียบเทียบ เป็นการพยายามให้นักเรียนมองเห็นวิธีการในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาที่ยาก โดยการคิดปัญหาง่าย ๆ ที่คล้ายกับโจทย์ปัญหาที่ยาก โดยเปลี่ยนจากตัวเลขที่มีค่ามากให้เป็นตัวเลขที่มีค่าน้อยลง ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนเห็นวิธีการแก้โจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้นเพราะเป็นโจทย์ชนิดเดียวกัน

5) หาคำตอบปัญหาง่าย ๆ ด้วยการคิดในใจ การนำโจทย์ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันของนักเรียน และจากกิจกรรมในห้องเรียนเป็นโจทย์ปัญหาง่าย ๆ มาให้นักเรียนฝึกทักษะในการหาคำตอบ โดยไม่ต้องใช้การเขียน เมื่อนักเรียนคิดได้ก็จะช่วยให้เกิดความเข้าใจและจะเป็นเครื่องเร้าให้นักเรียนคิดอยากแก้โจทย์ปัญหาที่ยากขึ้น

6) การประมาณคำตอบ นักเรียนควรได้รับการกระตุ้นและได้รับการแนะนำในการประมาณคำตอบจนติดเป็นนิสัยที่จะต้องประมาณคำตอบก่อนแก้ปัญหาทุกครั้ง การประมาณคำตอบยังช่วยในการตรวจคำตอบอีกด้วย

7) การตรวจจากความสัมพันธ์ต่าง ๆ มีความสัมพันธ์หลายอย่างที่เป็นองค์ประกอบที่สำคัญในการแก้โจทย์ปัญหา ผู้ที่จะแก้โจทย์ปัญหาได้ดีควรจดจำความสัมพันธ์ต่าง ๆ เช่น ปี - เดือน - วัน - สัปดาห์ บาท - สลึง - สตางค์ เป็นต้น

8) การจดจำวิธีแก้โจทย์ปัญหาเฉพาะอย่าง โจทย์ปัญหาบางชนิดมีรูปแบบในการแก้ปัญหาเฉพาะตัว ถ้าหากนักเรียนสามารถจดจำวิธีการนี้ได้ ก็สามารถนำไปแก้ปัญหาโจทย์ที่อยู่ในลักษณะเดียวกันได้

9) การจดจำสูตรต่าง ๆ การคำนวณโดยใช้สูตรช่วยให้หาคำตอบได้เร็วขึ้น ดังนั้นความสามารถในการจดจำสูตรอย่างทราบความหมายก็จะมีส่วนพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาให้แก่นักเรียนได้

10) การใช้โจทย์ปัญหาหลายระดับ เนื่องจากนักเรียนในชั้นย่อมมีระดับความสนใจ เหตุจูงใจ และวุฒิภาวะในการเรียนคณิตศาสตร์ต่างกัน ดังนั้น โจทย์ปัญหาที่ให้แก่นักเรียน จึงควรยากพอที่จะท้าทายความสามารถของนักเรียน แต่ต้องไม่ยากเกินไปจนทำให้เกิดความคับข้องใจ ครูต้องพยายามจัดโจทย์ปัญหาให้เหมาะกับประสบการณ์ของนักเรียน ซึ่งครูทำได้โดยการจัดโอกาสให้นักเรียนพบกับโจทย์ปัญหาในระดับต่าง ๆ กัน

11) การใช้โจทย์ปัญหาหลาย ๆ แบบ โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไม่จำเป็นต้องเป็นโจทย์ปัญหาประเภทที่ต้องหาคำตอบเสมอไป ยังมีโจทย์ปัญหาประเภทอื่นอีก เช่น โจทย์ปัญหาที่ไม่มีตัวเลข โจทย์ปัญหาที่มีตัวเลขแต่ไม่ต้องการคำตอบเพียงแต่ต้องการวิธีการในการหาคำตอบ โจทย์ปัญหาที่มีข้อมูลไม่ครบ หรือมีมากเกินความจำเป็น

12) การหาคำตอบด้วยการทำวิธีหลาย ๆ วิธี การแก้โจทย์ปัญหาด้วยวิธีการต่าง ๆ จะเป็นการเร้า เป็นการสร้างความสนใจ และประสบการณ์หลายด้านให้แก่นักเรียน ครูจึงควรเปิดโอกาสให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันถึงการแก้โจทย์ปัญหาด้วยวิธีการต่าง ๆ ด้วยวิธีหลาย ๆ วิธีย่อมทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจสภาพของโจทย์ปัญหาอย่างลึกซึ้งมากกว่าการแก้โจทย์ปัญหาหลาย ๆ ปัญหา โดยวิธีการอย่างเดียว

13) ใช้วิธีวิเคราะห์โจทย์ปัญหา คือแยกแยะดูว่าโจทย์กำหนดอะไรให้บ้าง โจทย์ต้องการให้หาอะไร ซึ่งจะช่วยให้เข้าใจโจทย์ดียิ่งขึ้น แล้วจึงเลือกข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ กำจัดข้อมูลที่ไม่จำเป็นออกไป ก็จะทำให้พอมองเห็นลู่ทางว่าจะใช้วิธีการใดในการแก้โจทย์ปัญหาได้

14) การแปลงสภาพของโจทย์ปัญหาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ ความสามารถในการเขียนประโยคสัญลักษณ์ แสดงถึงความสามารถของนักเรียนในการแปลความหมายของโจทย์ ซึ่งเป็นวิธีการที่ช่วยให้นักเรียนรู้จักคิดและวิเคราะห์โจทย์ปัญหาก่อนการคำนวณหาคำตอบ ตลอดจนวิธีการในการแก้โจทย์ปัญหา นักเรียนจึงควรเขียนประโยคสัญลักษณ์ได้

15) การสร้างโจทย์ปัญหา การสร้างโจทย์ปัญหาเป็นทางหนึ่งที่แสดงถึงความเข้าใจในโจทย์ปัญหาต่าง ๆ ทำได้หลายวิธี เช่น การสร้างโจทย์ปัญหาจากประโยคสัญลักษณ์ การให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาเพียงบางส่วน โดยใช้เทคนิคของการละประโยคที่เป็นคำถามไว้ให้นักเรียนเป็นผู้คิดขึ้นเอง การให้นักเรียนสร้างโจทย์เองทั้งหมด

16) การฝึกทักษะการอ่านที่จำเป็นต่อการแก้โจทย์ปัญหา เนื่องจากลักษณะของโจทย์ปัญหาโดยทั่วไปต้องการความคิดและการเข้าใจที่ถูกต้องแน่นอน จึงต้องการทักษะการอ่านอย่างพินิจพิจารณา ดังนั้นจึงควรพัฒนาทักษะในการอ่านเพื่อช่วยพัฒนาความเข้าใจในโจทย์ปัญหา

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537) ได้กล่าวถึงการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยนำขั้นตอนของการแก้ปัญหา 4 ขั้น ของโพลยามาเป็นแนวทางในการนำเสนอวิธีพัฒนา ดังนี้

1) การพัฒนาความสามารถในการเข้าใจปัญหา

1.1) การพัฒนาทักษะการอ่าน

1.2) การใช้กลวิธีช่วยเพิ่มพูนความเข้าใจ มีกลวิธีหลายประการที่ช่วยให้นักเรียนสามารถเข้าใจปัญหาได้ชัดเจนขึ้น เช่น การเขียนภาพ การปรับขนาดของปริมาณต่าง ๆ ที่กำหนดในตัวปัญหา การยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับปัญหา การเปลี่ยนแปลงสถานการณ์ให้เป็นเรื่องใกล้ตัว

1.3) การใช้ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกับปัญหาในชีวิตจริง มาให้นักเรียนฝึกทำความเข้าใจ

2) การพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา ซึ่งมีแนวทาง ดังนี้

2.1) ครูต้องไม่บอกวิธีการแก้ปัญหากับนักเรียนโดยตรง แต่ควรใช้วิธีการกระตุ้นให้นักเรียนคิดด้วยตนเอง

2.2) ส่งเสริมให้นักเรียนคิดออกมาดัง ๆ

2.3) สร้างลักษณะนิสัยของนักเรียนให้คิดวางแผนก่อนลงมือทำเสมอ

2.4) จัดหาปัญหามาให้นักเรียนฝึกคิดบ่อย ๆ ซึ่งจะต้องเป็นปัญหาที่ท้าทายน่าสนใจ เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน

2.5) ในการแก้ปัญหาแต่ละปัญหา ควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาให้มากกว่า 1 รูปแบบ

3) การพัฒนาความสามารถในการดำเนินการตามแผน ในขั้นดำเนินการตามแผนนักเรียนต้องตีความ ขยายความ นำแผนไปสู่การปฏิบัติอย่างละเอียดชัดเจนตามลำดับขั้นตอน

4) การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบ ซึ่งมีความครอบคลุมประเด็น 2 ประเด็น คือ ประเด็นแรกเป็นการมองย้อนกลับไปที่ขั้นตอนการแก้ปัญหาตั้งแต่ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผน และขั้นดำเนินการตามแผนโดยพิจารณาความถูกต้องของกระบวนการ และผลลัพธ์รวมทั้งการพิจารณาหายุทธวิธีอื่นในการแก้ปัญหา ประเด็นที่สอง เป็นการมองไปข้างหน้าเป็นการใช้ประโยชน์จากกระบวนการแก้ปัญหาที่เพิ่งสิ้นสุดลงนั้น ทั้งในส่วนที่เป็นเนื้อหาและกระบวนการ โดยสร้างสรรค์ปัญหาที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันขึ้นมาใหม่

การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหามีแนวทาง ดังนี้

4.1) กระตุ้นให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการตรวจสอบคำตอบที่ได้ ให้เคยชินจนเป็นนิสัย

4.2) ฝึกให้นักเรียนคาดคะเนคำตอบ

4.3) ฝึกการตีความหมายของคำตอบ

4.4) สนับสนุนให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดโดยใช้วิธีการหาคำตอบได้มากกว่า 1 วิธี

4.5) ให้นักเรียนฝึกหัดสร้างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียน

นอกจากนั้น ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537) ยังได้กล่าวถึงตัวอย่างการจัดกิจกรรมพัฒนาทักษะและความสามารถในการปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1) การใช้แบบฝึกหัดพัฒนาทักษะ และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้แก่

1.1) ฝึกการแก้ปัญหาจากแบบฝึกหัดธรรมดา

1.2) สร้างปัญหาจากแบบฝึกหัด

2. การใช้ข้อสอบแข่งขันพัฒนาทักษะ และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3) การใช้หลักการคิดเลขเร็วพัฒนาทักษะและความสามารถในการแก้ปัญหา

4) การใช้ของเล่นเชิงคณิตศาสตร์พัฒนาทักษะ และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

Reidesel (1990) ได้สรุปข้อค้นพบบางประการที่ได้จากงานวิจัย มานำเสนอเป็นข้อคิดในการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ หลายประการ ได้แก่

1) นักเรียนจะเรียนรู้ได้ดีกว่า เมื่อโจทย์ปัญหาที่ใช้อยู่ในระดับความสนใจและความเข้าใจนักเรียน

2) เด็กเล็กต้องการโจทย์ปัญหาที่เป็นรูปธรรมมากกว่าโจทย์ปัญหานามธรรม

3) นักเรียนชั้นประถมศึกษา ต้องการให้ครูแนะนำข้อเท็จจริงที่ตรงกับโจทย์ปัญหา

4) นักเรียนชั้นประถมศึกษามักจะใช้วิธีลองผิดลองถูก ซึ่งสามารถพัฒนากลวิธีของแต่ละบุคคลได้

5) ขั้นตอนที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา จะใช้ได้ผลกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษามากกว่าระดับประถมศึกษา

6) เครื่องมือที่มีความเที่ยงตรงสำคัญมากกับการแก้โจทย์ปัญหา ในนักเรียนชั้นประถมศึกษามากกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษา

7) การให้แรงเสริมกับนักเรียน ช่วยทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนดีขึ้น

8) การทำงานกลุ่ม 2-3 คน จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน

9) การช่วยเหลือนักเรียนให้ตรงกับปัญหาที่เขามีอยู่ ช่วยให้เขามีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้น

10) การแบ่งโจทย์ปัญหาออกเป็นประเภท ๆ จะง่ายสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษา ซึ่งดีกว่านำโจทย์ปัญหามาปนกัน

11) ไม่ควรใช้โจทย์ปัญหาที่ไม่ยืดหยุ่นต่อการแก้ปัญหา

Fisher (1991) ได้เสนอกลวิธีสำหรับส่งเสริมการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน 3 ประการ ดังนี้

1) อธิบายสิ่งที่น่าสนใจในเรื่องที่นักเรียนกำลังปฏิบัติอยู่ จะช่วยส่งเสริมการเรียนรู้และทำให้นักเรียนเห็นภาพจำลองของโจทย์ปัญหา ทำให้นักเรียนสามารถกำกับและแสดงความคิดออกมาเป็นกิจกรรมของตนเอง

2) ถามคำถามในสิ่งที่นักเรียนกำลังกระทำอยู่ ซึ่งจะช่วยให้ทราบถึงสิ่งที่นักเรียนกระทำอยู่ว่ามีความน่าสนใจเพียงใด

3) ให้ความช่วยเหลือนักเรียนทั้งในด้านคำแนะนำและอุปกรณ์ หรือเครื่องมือที่จะทำให้นักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้น

Hatfield, Edwards และ Bitter (1993) ได้ให้ข้อเสนอแนะสำหรับครูในการสอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน ดังนี้

1) คัดเลือกโจทย์ปัญหาอย่างรอบคอบ มีความน่าสนใจ มีความยากเหมาะสมกับผู้เรียน

2) ฝึกให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาเป็นกลุ่ม

3) ให้นักเรียนทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาแล้วระบุ ข้อมูลที่โจทย์ต้องการ ข้อมูลที่โจทย์ให้มา และข้อมูลที่จำเป็นต่อการแก้โจทย์ปัญหา

4) กำหนดจุดมุ่งหมายในการแก้โจทย์ปัญหาให้ชัดเจน

5) นำเสนอโจทย์ปัญหาที่กว้างและลึก

6) เสนอโจทย์ปัญหาบ่อย ๆ

7) เปิดโอกาสให้นักเรียนคิดและวิเคราะห์โจทย์ปัญหา

8) เปิดโอกาสให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาที่แตกต่างกัน โดยใช้กลวิธีเดียวกัน

9) ช่วยเหลือนักเรียนในการเลือกกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาที่ยากเป็นพิเศษ

10) ยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่มีความสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้

11) ให้เวลาแก่นักเรียนในการอภิปรายหาเหตุผล กระบวนการที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาที่ทำให้ได้คำตอบ

12) สาธิตให้นักเรียนทราบถึงวิธีการคาดคะเนและตรวจสอบคำตอบที่ได้รับ

13) อภิปรายถึงกลวิธีแก้โจทย์ปัญหาอื่น ๆ ที่แตกต่างจากกลวิธีที่นักเรียนใช้และสามารถ แก้โจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ได้

จากแนวคิดที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็นเครื่องชี้ให้เห็นว่า ครูผู้สอนเป็นผู้มีบทบาทสำคัญในการที่จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียน โดยการใช้วิธีการสอน กิจกรรมต่าง ๆ จัดหาสื่อการสอน คัดเลือกโจทย์ปัญหาที่เหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียน หาโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่พิเศษมาให้นักเรียนได้ทำ เน้นและกระตุ้นให้นักเรียนได้ใช้ความคิดแก้โจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ส่วนครูผู้สอนเป็นผู้ให้คำแนะนำช่วยเหลือ เพื่อให้นักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาประเภทต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ และเกิดประโยชน์กับนักเรียนมากที่สุด ให้นักเรียนรู้สึกสนุกและอยากแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

<u>กลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์</u>

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์หนึ่ง ๆ สามารถหาคำตอบได้โดยใช้กลวิธีใดกลวิธีหนึ่ง หรือใช้กลวิธีอื่น ๆ ผู้แก้โจทย์ปัญหาที่ดีจะต้องรู้และเข้าใจกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ อย่างลึกซึ้งและหลากหลาย เพื่อให้สามารถเลือกใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาให้เหมาะสมกับโจทย์ปัญหาและความถนัดของตนเองมากที่สุด ซึ่งได้มีผู้เสนอกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้หลายท่าน ดังนี้ สมบัติ 39

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537) ได้เสนอกลวิธีแก้โจทย์ปัญหาไว้ 10 กลวิธี ได้แก่

1) กลวิธีเดาและตรวจสอบ

กลวิธีนี้เป็นกลวิธีพื้นฐานที่เรานำมาใช้แก้ปัญหาอยู่เสมอ สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาได้ ในกรณีที่การแก้ปัญหานั้นโดยตรงอาจยุ่งยาก ใช้เวลามากหรือผู้แก้ปัญหาลืมวิธีการ

ไปแล้ว การเดานั้นต้องเดาอย่างมีเหตุผล มีทิศทางเพื่อให้สิ่งที่เดานั้นเข้าใกล้คำตอบที่ต้องการให้มากที่สุด การเดาครั้งหลัง ๆ ต้องอาศัยพื้นฐานข้อมูลจากการเดาครั้งต้น ๆ

2) กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง

กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่วยให้มองเห็นปัญหาอย่างเป็นรูปธรรม ทำให้ผู้แก้ปัญหาเกิดความรู้สึกว่าได้สัมผัสกับตัวปัญหานั้นอย่างแท้จริง ช่วยให้ผู้แก้ปัญหาทำความเข้าใจกับปัญหาได้ง่ายขึ้น สามารถกำหนดแนวทาง วางแผนแก้ปัญหาได้อย่างชัดเจนอีกด้วย

3) กลวิธีสร้างตาราง

การใช้กลวิธีสร้างตารางในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีประเด็นที่ควรพิจารณาดังนี้

3.1) สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้บางกรณี

3.2) สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีที่เป็นไปได้บางกรณี

3.3) สร้างตารางเพื่อค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด (หรือมากกว่า)

3.4) สร้างตารางเพื่อค้นหารูปแบบทั่วไปของความสัมพันธ์

4) กลวิธีใช้ตัวแปร

การใช้ตัวแปรแทนจำนวนที่ไม่ทราบค่า เป็นวิธีการแก้ปัญหาอย่างหนึ่งที่ใช้กันในวิชาคณิตศาสตร์ ผู้แก้ปัญหาสามารถสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ที่ปัญหากำหนดกับตัวแปรที่สมมุติขึ้น และในปัญหาบางปัญหา สามารถสร้างความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขที่ปัญหากำหนดให้อยู่ในรูปสมการได้ ซึ่งสามารถนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ 2 ลักษณะ คือ

4.1) ใช้ตัวแปรสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล และพิจารณาคำตอบของปัญหาจากความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้นนั้น

4.2) สร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่าง ๆ ของปัญหาในรูปแบบการเท่ากัน สามารถสร้างสมการที่สอดคล้องกับปัญหานั้นได้ การหาคำตอบทำโดยแก้สมการหรือพิจารณาคำตอบจากสมการนั้น

5) กลวิธีค้นหารูปแบบ

กลวิธีค้นหารูปแบบเป็นกลวิธีที่สำคัญมากในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เหมาะที่จะนำมาใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวกับรูปแบบของจำนวน ผู้แก้ปัญหาจะต้องศึกษาข้อมูลที่มีอยู่ วิคราะห์ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเหล่านั้น แล้วคาดเดาคำตอบซึ่งอาจเป็นคำตอบที่ถูกต้องหรือไม่ถูกต้องก็ได้ จากปัญหาเดียวกัน ข้อมูลชุดเดียวกันผู้แก้ปัญหาแต่ละคน อาจค้นพบคำตอบที่แตกต่างกันก็ได้

6) กลวิธีแบ่งเป็นกรณี

โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลายปัญหาสามารถแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น เมื่อแบ่งปัญหาเป็นกรณีมากกว่า 1 กรณี ซึ่งในแต่ละกรณีจะมีความชัดเจนมากขึ้น เมื่อแก้ปัญหาคำตอบ

ของทุกกรณีได้แล้ว พิจารณาคำตอบของทุกกรณีร่วมกัน จะได้ภาพรวมซึ่งเป็นคำตอบของปัญหาเริ่มต้น

7) กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรง

กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรงนี้มักพบอยู่ตลอดเวลาในการแก้ปัญหา โดยผู้แก้ปัญหามักใช้ร่วมกับกลวิธีอื่น ๆ ข้อความที่เกี่ยวข้องกับการใช้เหตุผลทางตรงมักอยู่ในรูป "ถ้า A แล้ว B" โดยที่ข้อความ A เป็นเหตุบังคับให้เกิดข้อความ B การใช้การให้เหตุผลทางตรงในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการใช้ข้อมูลที่ปัญหากำหนดให้ ประมวลเข้ากับความรู้และประสบการณ์ที่ผู้แก้ปัญหามีอยู่แล้ว ให้เหตุผลนำไปสู่คำตอบของปัญหาที่ต้องการ ปัญหาที่ใช้กลวิธีนี้อาจไม่มีการคิดคำนวณเลยก็ได้ แต่เป็นการเน้นการให้เหตุผล

8) กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางอ้อม

โจทย์ปัญหาบางปัญหา ไม่ง่ายนักที่จะแก้ปัญหาโดยใช้การให้เหตุผลทางตรง ในกรณีเช่นนี้ การให้เหตุผลทางอ้อมนับว่าเป็นวิถีทางที่ดีที่สุดวิธีหนึ่งที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหา โจทย์ปัญหาที่ใช้การให้เหตุผลทางอ้อม มักเป็นปัญหาให้พิสูจน์ สำหรับปัญหาให้ค้นหาจะใช้การให้เหตุผลโดยการพิสูจน์เพื่ออธิบายคำตอบของปัญหา

9) กลวิธีทำย้อนกลับ

โจทย์ปัญหาบางปัญหาสามารถแก้ได้ง่ายกว่า ถ้าเริ่มต้นแก้ปัญหาโดยพิจารณาจากผลลัพธ์สุดท้าย แล้วย้อนกลับมาสู่ตัวปัญหาอย่างมีขั้นตอน กลวิธีทำย้อนกลับใช้กระบวนการคิดวิเคราะห์โดยพิจารณาจากผลย้อนกลับไปหาเหตุ ซึ่งจะต้องหาเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการกับสิ่งที่กำหนดให้

10) กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่

ปัญหาบางปัญหาถ้าแก้ปัญหานั้นเลยโดยตรงจะทำได้ยาก การสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่ให้เกี่ยวข้องกับปัญหาเดิม แล้วศึกษาวิธีการแก้ปัญหาจากปัญหาใหม่ที่สร้างขึ้นนี้ เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยให้เกิดแนวคิดในการแก้ปัญหาเริ่มต้น ปัญหาที่สร้างขึ้นใหม่อาจสร้างให้ครอบคลุมปัญหาเดิมทั้งหมด หรือสร้างขึ้นใหม่เพียงบางส่วนของปัญหาเดิมก็ได้ ซึ่งสามารถแยกกล่าวได้เป็น 3 ลักษณะคือ

10.1) กลวิธีนึกถึงปัญหาที่สัมพันธ์กัน

10.2) กลวิธีแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า

10.3) กลวิธีกำหนดเป้าหมายรอง

Hatfield, Edwards และ Bitter (1993) ได้กำหนดองค์ประกอบของกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาออกเป็น 2 องค์ประกอบ คือ

1) ทักษะและระดับการอ้างเหตุผลประกอบของนักเรียน

2) เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเคยใช้แล้วได้ผล โจทย์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมาก ต้องใช้กลวิธีแก้โจทย์ปัญหามากขึ้นด้วย ดังนั้นนักเรียนจึงต้องการที่จะเรียนรู้กลวิธีแก้โจทย์ปัญหาใด ๆ ซึ่งมีผลต่อผู้แก้โจทย์ปัญหา

Burger (1988) ได้เสนอกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ 21 กลวิธี ดังนี้

1) กลวิธีเดาและตรวจสอบ (guess and test) ใช้ในการเดาและตรวจสอบปัญหาที่พบเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง ถ้ายังไม่ถูกก็ต้องเดาและตรวจสอบผลลัพธ์ซ้ำอีก จนกระทั่งจะได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุด

2) กลวิธีใช้ตัวแปร (use a variable) ใช้เมื่อมีจำนวนที่ไม่ทราบค่า โดยต้องใช้ตัวแปรแทนตัวไม่ทราบค่านั้น

3) กลวิธีค้นหารูปแบบ (look for a pattern) มักจะใช้กับโจทย์ปัญหาที่มีรายการที่เป็นตัวอย่างเฉพาะของโจทย์ปัญหามาให้ แล้วจึงค้นหารูปแบบจากปัญหานั้น เพื่อที่จะให้ได้คำตอบครบถ้วน

4) กลวิธีสร้างรายการ (make a list) มักจะประกอบด้วยกลวิธีค้นหารูปแบบเพื่อช่วยให้เห็นแนวทางในการหาคำตอบ

5) กลวิธีแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า (solve a simpler problem)

6) กลวิธีวาดภาพ (draw a picture) กลวิธีนี้จะช่วยให้ผู้แก้ปัญหาเข้าใจและมองเห็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้ดีขึ้น

7) กลวิธีเขียนแผนภาพ (draw a diagram) โจทย์ปัญหาบางปัญหาไม่สามารถใช้กลวิธีวาดภาพได้ จึงจำเป็นต้องใช้กลวิธีเขียนแผนภาพ

8) กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรง (use direct reasoning) กลวิธีนี้จะถูกใช้อยู่ตลอดเวลาร่วมกับกลวิธีแก้โจทย์ปัญหาอื่น ๆ

9) กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางอ้อม (use indirect reasoning) โจทย์ปัญหาบางปัญหาไม่ง่ายนักที่จะแก้ปัญหาโดยใช้การให้เหตุผลทางตรง ในกรณีเช่นนี้ การใช้การให้เหตุผลทางอ้อมนับว่าเป็นวิธีที่ดีที่สุดวิธีหนึ่งที่จะนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา

10) กลวิธีการใช้สมบัติของจำนวน (use properties of numbers)

11) กลวิธีแก้โจทย์ปัญหาที่เหมือนกัน (solve an equivalent problem) เป็นการแก้โจทย์ปัญหาที่สามารถแปลความหมายของโจทย์ปัญหาเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ออกมาเหมือนกับปัญหาเริ่มต้น

12) กลวิธีทำย้อนกลับ (work backward) ตามปกติแล้วเราจะเริ่มแก้โจทย์ปัญหาไปจนกระทั่งได้คำตอบด้วยกลวิธีที่เหมาะสม แต่ในบางครั้งการเริ่มแก้โจทย์ปัญหาย้อนกลับจะสะดวกได้คำตอบเร็วกว่าและใช้ได้ผลดีทีเดียว

13) กลวิธีแบ่งเป็นกรณี (use cases) การแบ่งโจทย์ปัญหาออกเป็นกรณีย่อย ๆ หลาย ๆ กรณีจะทำให้สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้น

14) กลวิธีแก้ปัญหาด้วยสมการ (solve an equation)

15) กลวิธีค้นหาสูตร (look for a formula) กลวิธีนี้เหมาะสมอย่างยิ่งกับโจทย์ปัญหาที่นำไปสู่รูปแบบของจำนวน เป็นกลวิธีที่เป็นส่วนประกอบและดัดแปลงมาจากกลวิธีค้นหารูปแบบซึ่งให้ข้อมูลพื้นฐานมากกว่า

16) กลวิธีสร้างสถานการณ์จำลอง (do a simulation) กลวิธีนี้เป็นตัวอย่างของการทดลองใช้วัตถุบางอย่างที่เหมาะสมหรือบางทีก็ใช้กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ การทดลองทำบางสิ่งบางอย่างอาจจะยากไปหรือเป็นไปไม่ได้ เราจึงใช้กลวิธีสร้างสถานการณ์จำลอง เพื่อจะช่วยให้สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้น

17) กลวิธีใช้แบบจำลอง (use a model) กลวิธีใช้แบบจำลองจะเป็นประโยชน์มากกับโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับรูปเรขาคณิตหรือโจทย์ปัญหาที่ใช้ประโยชน์จากรูปเรขาคณิตเหล่านั้น แบบจำลองเป็นรูปร่างของสิ่งของที่คล้ายคลึงกับสิ่งของที่อยู่ในโจทย์ปัญหา

18) กลวิธีวิเคราะห์เกี่ยวกับขนาด (use dimensional analysis) จะใช้กับโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการแปลงหน่วยการวัด ปัญหาเกี่ยวกับระยะทาง อัตราเวลาหรือปัญหาที่เกี่ยวกับมาตราต่าง ๆ จะทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์เกี่ยวกับขนาด

19) กลวิธีกำหนดเป้าหมายรอง (identify subgoals) เป็นแนวทางหนึ่งที่จะทำให้ได้คำตอบที่เร็วขึ้น แทนที่จะพยายามแก้โจทย์ปัญหาโดยมองจากจุดประสงค์ใหญ่โดยตรง

20) กลวิธีใช้หลายวิธีร่วมกัน (use coordinate)

21) กลวิธีใช้การสมมาตร (use symmetry)

Gay (1992) ได้เสนอกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ 10 กลวิธี ดังนี้

1) กลวิธีวาดภาพ (draw a picture)

2) กลวิธีเดา (make a guess)

3) กลวิธีรวบรวมข้อมูล (organizing the data)

4) กลวิธีทำโจทย์ปัญหาให้เป็นโจทย์ปัญหาย่อย ๆ (break the problem up into smaller problem)

5) กลวิธีแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า, แก้โจทย์ปัญหาที่คล้ายคลึงกัน (solve a simpler)

6) กลวิธีสร้างแบบจำลอง (building a model)

7) กลวิธีออกจากสิ่งที่เคยชิน (getting out of a rut)

8) กลวิธีรวบรวมสิ่งที่ได้จากการเดาให้อยู่ในรูปแผนภูมิ (organize your guesses in a chart)

9) กลวิธีวางแผน (making a plan)

10) กลวิธีค้นหารูปแบบ (looking for a pattern)

Heddens และ Speer (1992) ได้เสนอกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา 12 กลวิธี ได้แก่

1) กลวิธีทดสอบปัญหา (testing the problem)

2) กลวิธีแสดงบทบาทสมมุติ (dramatization)

3) กลวิธีคาดคะเน (estimation)

4) กลวิธีใช้แบบจำลอง (use a model)

5) กลวิธีเดาและตรวจสอบ (guessing and checking)

6) กลวิธีสร้างภาพ (making a drawing)

7) กลวิธีทำย้อนกลับ (working backward)

8) กลวิธีแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า, สร้างความสัมพันธ์ของปัญหา (solve a simler, related problem)

9) กลวิธีสร้างตารางหรือกราฟ (constructing a table or graph)

10) กลวิธีค้นหารูปแบบ (looking for a pattern)

11) กลวิธีใช้สูตร (applying a formula)

12) กลวิธีเขียนให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ (writing a mathematical sentence)

Kennedy และ Tipps (1994) ได้เสนอกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา 10 กลวิธี ได้แก่

1) กลวิธีค้นหารูปแบบ (look for patterns) เป็นกลวิธีที่ใช้กันอย่างกว้างขวางในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เด็กเล็กสามารถค้นหาและอธิบายรูปแบบของสิ่งต่าง ๆ ได้ เช่น รูปแบบของจำนวนดังต่อไปนี้ 0, 2, 4, 6, . . . 15, 20, 25, . . . เป็นต้น ส่วนเด็กโตจะคิดพร้อมกับรูปแบบที่เป็นนามธรรม และใช้เหตุผลประกอบมากขึ้น

2) กลวิธีใช้แบบจำลอง (use a model) ใช้สำหรับแก้โจทย์ปัญหาที่ปกติและโจทย์ปัญหาที่ไม่ปกติ นักเรียนควรจะได้รับการสนับสนุนให้ใช้กลวิธีนี้ อุปกรณ์ที่เหมือนจริง จะดีสำหรับเด็กเล็กในขณะที่ตัวอย่างด้านนามธรรมสามารถใช้กับเด็กโตได้ดี การใช้แบบจำลองดีกว่าการวาดภาพสำหรับโจทย์ปัญหาบางปัญหา เนื่องจากผู้เรียนสามารถเคลื่อนย้ายได้

3) กลวิธีใช้ภาพหรือแผนภาพ (use a drawing or diagram) จะเป็นประโยชน์มากสำหรับเด็กเล็ก โดยที่เด็กเล็กจะเรียนรู้ที่จะใช้ภาษาภาพเพื่อบันทึกข้อมูลเกี่ยวกับปัญหา ในขณะที่เขามีความพร้อม การนำเสนอรูปแบบและแผนภาพก็จะเปลี่ยนมาเป็นการแสดงออกมาเป็นจำนวน และสิ่งอื่น ๆ ทางคณิตศาสตร์ รูปภาพและแผนภาพมักจะใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่าง ๆ ของปัญหา ตลอดจนกระบวนการสำหรับแก้โจทย์ปัญหาด้วย

4) กลวิธีปฏิบัติเพื่อออกไปจากปัญหา (act it out) กลวิธีนี้มักจะถูกใช้แก้โจทย์ปัญหาโดยทันทีและไม่ค่อยประณีต กลวิธีนี้เหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับเด็กบางคนที่มีความบกพร่องทางการเรียนรู้และยังเป็นผลดีกับเด็กที่มีความพร้อมต่ำ

5) กลวิธีสร้างตารางและ/ หรือสร้างกราฟ (construct a table and/ or a graph) กลวิธีนี้ช่วยทำให้นักเรียนสามารถรวบรวมข้อมูลที่อยู่อย่างกระจัดกระจาย มาเป็นรูปแบบที่มีความซับซ้อนน้อยลง สามารถใช้ประโยชน์ได้ดีกว่า

6) กลวิธีเดาและตรวจสอบ (guess and check) กลวิธีนี้ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาได้ใช้เหตุผลในการตัดสินใจที่จะทำการเดา ไม่เดาโดยขาดการไตร่ตรองหรือเดาแบบยุ่งเหยิง จนไม่สามารถยอมรับได้ เมื่อเดาครั้งแรกควรจะตรวจสอบปัญหาว่าถูกต้องหรือเป็นไปตามความจริงหรือไม่ ถ้ายังเป็นไปไม่ได้ต้องเดาซ้ำอีกจนกว่าจะได้คำตอบที่ใกล้เคียงที่สุด

7) กลวิธีชี้แจงรายการที่เป็นไปได้ทั้งหมด (account for all possibilities) กลวิธีนี้เด็กมักจะใช้ก่อนที่จะทราบคำตอบเสมอ หรืออาจจะนำมาเขียนเป็นรายการหรือตาราง เพื่อให้ง่ายต่อการแก้โจทย์ปัญหามากขึ้น

8) กลวิธีทำปัญหาให้ง่ายหรือแยกโจทย์ปัญหาเป็นส่วน ๆ (simplify or break into parts) ใช้กับโจทย์ปัญหาที่ยากหรือโจทย์ปัญหาที่มีตัวเลขหรือจำนวนที่มีความซับซ้อนมาก ๆ ทำให้โจทย์ปัญหานั้นมีความซับซ้อนน้อยลง เพื่อทำให้แก้โจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้น

9) กลวิธีทำย้อนกลับ (work backward) กลวิธีมีความพิเศษที่สุดในบรรดากลวิธีที่กล่าวมาทั้งหมด เป็นกลวิธีที่เหมาะสมมากสำหรับการเรียนรู้ของผู้เรียน จะช่วยให้เด็กได้พัฒนาทักษะความมีเหตุผล และเป็นสิ่งที่ท้าทายที่จะหาคำตอบของโจทย์ปัญหาด้วยกลวิธีนี้

10) กลวิธีเปลี่ยนแปลงจุดมุ่งหมายของปัญหา (change your point of view) กลวิธีอาจเรียก "breaking out" เป็นกลวิธีที่ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาทำโจทย์ปัญหาให้เป็นส่วนเล็ก ๆ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหา เป็นประโยชน์ในการที่จะช่วยให้ผู้แก้โจทย์ปัญหาประสบความสำเร็จและได้คำตอบของปัญหา นอกจากนั้นกลวิธีแก้โจทย์ปัญหายังช่วยให้นักเรียนได้ใช้สติปัญญา ความคิดในการวางแผนแก้โจทย์ปัญหามาสู่ความรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ และคิดทบทวนโจทย์ปัญหาอีกครั้งจนกว่าจะได้คำตอบ Thomas (1992) กล่าวว่า ครูจะต้องไม่สอนการใช้กลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเท่านั้นแต่ต้องสอนให้เขาเรียนรู้มากกว่านั้น นอกเหนือจากโจทย์ปัญหาหรือเนื้อหา เด็กจะกลายเป็นผู้แก้โจทย์ปัญหาที่ดีได้ สิ่งแรกที่ต้องสอนคือ ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ แล้วจึงค่อยสอนกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาบางกลวิธี จากนั้นจึงสอนการประยุกต์ใช้กลวิธีนั้น ๆ

จากกลวิธีแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ได้กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยได้คัดเลือกกลวิธีแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ 9 กลวิธี ที่เหมาะสมกับนักเรียนเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และจะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนได้ ดังนี้

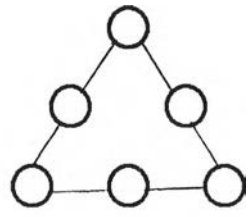
1) กลวิธีเดาและตรวจสอบ (guess and test)

กลวิธีเดาและตรวจสอบเป็นการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้ ผสมผสานกับประสบการณ์ที่เกี่ยวข้อง จากนั้นคาดเดาหรือคะเนคำตอบของปัญหาแล้วตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าไม่ถูกต้องก็คาดเดาใหม่ โดยอาศัยประโยชน์จากความไม่ถูกต้องในการเดาครั้งแรก ๆ ซึ่งการเดาต้องเดาอย่างมีเหตุผล มีทิศทางเพื่อให้สิ่งที่เดานั้นใกล้เคียงกับคำตอบให้มากที่สุด ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีเดาและตรวจสอบ เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

จงเติมตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 ลงในวงกลมโดยไม่ซ้ำกัน เพื่อทำให้ผลบวกของจำนวนสามจำนวนบนด้านของรูปสามเหลี่ยมแต่ละด้านมีค่าเท่ากันและเท่ากับ 12

I17231139



โจทย์ปัญหาที่ 2

จงหาตัวเลขโดดที่แตกต่างกัน แทน ก, ข และ ค ของปัญหาข้างล่างนี้

กก

ขข +

คค

ขกค

2) กลวิธีวาดภาพ (draw a picture)

กลวิธีวาดภาพ เป็นการแสดงสภาพการณ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ ออกมาเป็นภาพ เพื่อช่วยให้ผู้แก้โจทย์ปัญหามีความเข้าใจปัญหาชัดเจนขึ้น สามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ และกำหนดแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างรวดเร็วขึ้น ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีวาดภาพ เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

เมื่อลากส่วนของเส้นตรง 4 เส้น ที่แตกต่างกันตัดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง ส่วนของเส้นตรงทั้งสี่นี้จะแบ่งรูปสี่เหลี่ยมนั้นออกเป็นส่วนย่อย ๆ โดยไม่ซ้ำกันได้มากที่สุดกี่ส่วน

โจทย์ปัญหาที่ 2

บนริมฝั่งของแม่น้ำสายหนึ่งมีชาย 5 คน ต้องการข้ามฟากไปฝั่งซ้าย บนฝั่งซ้ายมีหญิง 5 คน ต้องการข้ามฟากไปฝั่งขวา ในจำนวนนี้มีชาย 1 คนและหญิง 1 คน ที่พายเรือเป็น ถ้ามีเรือลำหนึ่งจอดอยู่ริมฝั่งขวาของแม่น้ำ เรือลำนี้บรรทุกคนได้ครั้งละไม่เกิน 3 คน ถ้า 10 คนนี้ต้องการข้ามฟากตามประสงค์ เขาจะข้ามอย่างไรโดยพายเรือไม่เป็น 7 เที่ยว โดยมีข้อตกลงกันว่า ในการข้ามฟากแต่ละครั้งจะไม่ให้จำนวนชายมากกว่าจำนวนหญิง (พายเรือไปนับ 1 เที่ยว พายเรือกลับนับ 1 เที่ยว)

3) กลวิธีสร้างตาราง (make a table)

กลวิธีสร้างตารางเป็นการจัดระบบของข้อมูลจากโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ โดยการแจกแจงข้อมูลต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้อยู่ในรูปของตารางที่มีลักษณะเป็นช่อง ๆ มีทั้งช่องตามแนวนอนและช่องตามแนวตั้งที่มีมากกว่าหนึ่งช่องขึ้นไป ตารางบางอย่างอาจใช้เพียงแนวตั้งหรือแนวนอนเพียงอย่างเดียว และตารางบางอย่างอาจใช้ทั้งแนวนอนและแนวตั้งร่วมกัน เพื่อแจกแจงคำตอบที่เป็นไปได้ หาคำตอบที่ต้องการ หรือแสดง

ความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยอยู่ภายใต้เงื่อนไขหรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ จนได้คำตอบที่ต้องการ ซึ่งสามารถใช้กลวิธีสร้างตารางนี้ออกเป็น 2 ลักษณะคือ

3.1) ใช้กลวิธีสร้างตารางในการแจกแจงคำตอบที่เป็นไปได้ หรือหาคำตอบที่ต้องการ ซึ่งทำได้โดยการตีตารางเป็นช่อง ๆ ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมา ตัวอย่างโจทย์ปัญหา เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวรอบรูป 20 เซนติเมตร แต่ละด้านมีความยาวเป็นจำนวนนับ จงหาว่ามีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งหมดกี่รูปที่มีคุณสมบัติดังกล่าวข้างต้น

โจทย์ปัญหาที่ 2

ลุงมาเลี้ยงหมูกับเป็ดไว้ วันหนึ่งลุงมานับหัวหมูและเป็ดรวมกันได้ 12 หัว นับขาได้ 40 ขา อยากทราบว่าลุงมาเลี้ยงหมูและเป็ดไว้อย่างละกี่ตัว

3.2) ใช้กลวิธีสร้างตารางในการหาความสัมพันธ์ของข้อมูลโดยอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ ตัวอย่างโจทย์ปัญหา เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

กันต์ หาญ และชาติ แต่ละคนชอบกีฬาแตกต่างกัน กีฬาที่คนทั้งสามชอบคือ เทนนิส ปิงปอง และตะกร้อ กันต์ไม่ชอบปิงปองและตะกร้อ หาญไม่ชอบปิงปอง อยากทราบว่าแต่ละคนชอบกีฬาชนิดใด

โจทย์ปัญหาที่ 2

บุคคลในครอบครัวของฉันมี พ่อ แม่ พี่และน้อง มีชื่อดังนี้ คือ สมศรี สมชาย สมถวิล และสมบุญ ถ้าฉันแก่กว่าสมศรี สมบุญแก่กว่าฉัน แต่อ่อนกว่าสมชาย จงหาชื่อ พ่อ แม่ พี่และน้องของฉัน

4) กลวิธีสร้างรายการ (make a list)

กลวิธีสร้างรายการ เป็นการเขียนแจกแจงแสดงความเป็นไปได้ของคำตอบทั้งหมดให้เห็นคำตอบทั้งหมดอย่างชัดเจนซึ่งอยู่ในขอบเขตของเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ ตัวอย่างโจทย์ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีสร้างรายการ เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

จงหาจำนวนนับทั้งหมดที่สามารถหาร 100 ได้ลงตัวว่ามีกี่จำนวน ได้แก่จำนวนใดบ้าง

โจทย์ปัญหาที่ 2

นารีนุชมีเหรียญหนึ่งบาทจำนวน 15 เหรียญ เมื่อแบ่งออกเป็น 4 กอง จำนวนเหรียญแต่ละกองจะไม่เท่ากัน อยากทราบว่าจะมีวิธีการแบ่งเหรียญได้ทั้งหมดกี่แบบ แบบใดบ้าง

5) กลวิธีเขียนแผนภาพ (draw a diagram)

กลวิธีเขียนแผนภาพเป็นการเขียนแสดงสภาพการณ์ของปัญหา เพื่อทำให้ผู้แก้ปัญหามองเห็นปัญหาอย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น ช่วยเพิ่มความชัดเจนในการทำความเข้าใจกับปัญหา และเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาได้อย่างรวดเร็วขึ้นเช่นเดียวกันกลธีวาดภาพ ซึ่งสามารถเขียนออกมาเป็นแผนภาพ 2 ลักษณะ คือ

5.1) เขียนแผนภาพเพื่อแจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ซึ่งมีชื่อเรียกว่า แผนภาพต้นไม้ ตัวอย่างโจทย์ปัญหา เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

คนกลุ่มหนึ่งมี 4 คน มาพบกันโดยบังเอิญ ในฐานะที่เป็นเพื่อนกัน ต่างคนต่างเข้าจับมือซึ่งกันและกันคนละครั้ง โดยทั่วถึงกันทุกคน อยากทราบว่าคนกลุ่มนี้จะต้องจับมือกันทั้งหมดกี่ครั้ง

โจทย์ปัญหาที่ 2

ในการโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง เหรียญจะหงายหน้าต่าง ๆ ได้ทั้งหมดกี่แบบ แบบใดบ้าง

5.2) เขียนแผนภาพเพื่อแสดงสาระสำคัญของปัญหา ตัวอย่างโจทย์ปัญหา เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

ไฟกระพริบดวงหนึ่งกระพริบทุก ๆ 2 นาที และไฟกระพริบอีกดวงหนึ่ง กระพริบทุก ๆ 3 นาที 30 วินาที สมมติว่าไฟกระพริบทั้งสองดวงนี้กระพริบพร้อมกันในเวลาเที่ยง อยากทราบว่าครั้งต่อไป ไฟกระพริบทั้งสองดวงนี้จะกระพริบพร้อมกันอีกเป็นครั้งแรกในเวลาเท่าใด

โจทย์ปัญหาที่ 2

หญิงคนหนึ่งใช้เงินไปสองในสามของเงินที่มีอยู่และทำเงินหายไปสองในสามของที่เหลือ สุดท้ายเหลือเงินอยู่ 4 บาท อยากทราบว่าหญิงคนนี้มีเงินอยู่ทั้งหมดกี่บาท

6) กลวิธีใช้การให้เหตุผล (use reasoning)

กลวิธีใช้การให้เหตุผล เป็นการใช้ข้อมูลที่โจทย์ปัญหากำหนดให้ เป็นเหตุบังคับให้เกิดผล ซึ่งจะต้องผสมผสานกับความรู้และประสบการณ์ต่าง ๆ ที่ผู้แก้ปัญหามีอยู่เพื่อให้ได้คำตอบที่ต้องการ ตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่ใช้กลวิธีใช้การให้เหตุผล เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

ชายคนหนึ่งยืนอยู่ในสวน พร้อมกับหิ้วถังน้ำช้างละถัง ซึ่งในถังใบหนึ่งมีอุณหภูมิ 15 องศาเซลเซียส ส่วนน้ำในอีกถังหนึ่งมีอุณหภูมิ 15 องศาฟาเรนไฮต์ ต่อมามีเด็กเล็ก ๆ คนหนึ่งวิ่งเข้ามาในสวน และเอาเหรียญบาทหย่อนลงไปในถังน้ำ ถังละ 1 เหรียญ ถังไหนเหรียญบาทจะตกไปถึงก้นถังก่อน

โจทย์ปัญหาที่ 2

ชาย 2 คน มีภรรยาคนละคน และมีลูกคนละคน เดินเข้ามาในห้องรับแขกที่มีเก้าอี้อยู่ 5 ตัว อยากทราบว่าจะต้องหาเก้าอี้มาเพิ่มอีกกี่ตัว จึงจะเพียงพอสำหรับทุกคนที่มาในครั้งนี้

7) กลวิธีค้นหารูปแบบ (look for a pattern)

กลวิธีค้นหารูปแบบ เป็นการศึกษาตัวอย่างหรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ แล้ววิเคราะห์ ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเหล่านั้น มากำหนดเป็นรูปแบบ ซึ่งก่อนที่จะนำรูปแบบนั้นไปใช้ จะต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบโดยใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยซึ่งมีขั้นตอนดังนี้ คือ 1) ค้นหาข้อสรุป 2) ตรวจสอบข้อสรุป 3) นำข้อสรุปไปใช้ 4) พบข้อสรุปใหม่ ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีค้นหารูปแบบ เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

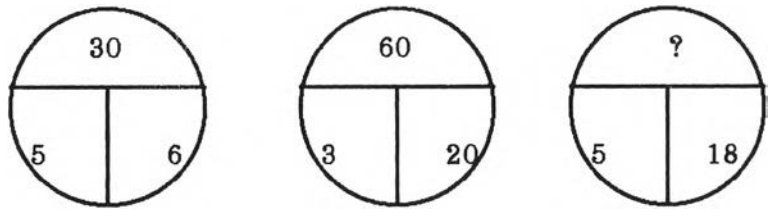
จงเติมจำนวนที่อยู่ต่อท้ายให้เข้าชุดกันอีก 3 จำนวน

ก. 1, 2, 2, 4, ..., ..., ...

ข. 129, 109, 89, ..., ..., ...

โจทย์ปัญหาที่ 2

จงเติมจำนวนในช่องว่างให้ถูกต้อง



8) กลวิธีแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า (solve a simpler problem)

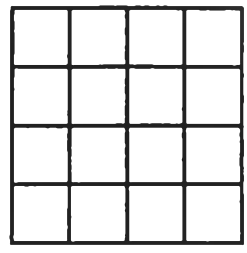
กลวิธีแก้ปัญหาที่ง่ายกว่าเป็นการการปรับหรือดัดแปลงโจทย์ปัญหาที่ยาก ให้เป็นโจทย์ปัญหาที่ง่ายทั้งในด้านของภาษาและขนาดของจำนวน โดยมีโครงสร้างคล้ายกับปัญหาเดิม แต่ง่ายและมีความยุ่งยาก ซับซ้อนน้อยกว่าเดิม แล้วนำกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาที่ดัดแปลงแล้ว ไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเดิม ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

จงหาผลบวกของ $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 20$

โจทย์ปัญหาที่ 2

ในตารางขนาด 4×4 ตารางหน่วย มีรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสที่มีขนาดแตกต่างกันทั้งหมดกี่รูป



9) กลวิธีทำย้อนกลับ (work backward)

กลวิธีทำย้อนกลับ เป็นการพิจารณาผลลัพธ์ครั้งสุดท้าย แล้วมองย้อนกลับมาที่โจทย์ปัญหาอย่างเป็นขั้นตอน เป็นการใช้กระบวนการคิดวิเคราะห์โดยพิจารณาจากผลย้อนกลับไปหาเหตุ ซึ่งจะต้องหาเงื่อนไข เชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการกับสิ่งที่โจทย์ปัญหากำหนดมาให้ ตัวอย่างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้กลวิธีทำย้อนกลับ เช่น

โจทย์ปัญหาที่ 1

วีนาไปซื้อของที่ร้านขายของชำ 2 ร้าน ที่ร้านแรกวีนาจ่ายเงินไปครึ่งหนึ่ง ของเงินที่มีอยู่กับ 10 บาท ที่ร้านที่สองวีนาจ่ายไปครึ่งหนึ่งของเงินที่เหลือกับอีก 10 บาท ปรากฏว่าวีนาใช้เงินที่มีอยู่หมดพอดี อยากทราบว่า ในตอนเริ่มต้นซื้อของที่ร้านแรก วีนามีเงินอยู่เท่าใด

โจทย์ปัญหาที่ 2

มาลีกินลูกกวาดที่มีอยู่ไปหนึ่งเม็ด ที่เหลือจึงนำไปแบ่งให้มาลัยครึ่งหนึ่ง เสร็จแล้วมาลีกินลูกกวาดอีกเม็ดหนึ่ง ส่วนที่เหลือนำไปแบ่งให้มาลีน้องชายอีกครึ่งหนึ่ง ปรากฏว่ามาลีมีลูกกวาดเหลืออีก 5 เม็ด เดิมมาลีมีลูกกวาดกี่เม็ด

<u>เมตาคอคนิชัน</u>

ในที่นี้จะกล่าวถึงเมตาคอคนิชันไว้ 2 ส่วนด้วยกัน คือ ความหมายของเมตาคอคนิชัน และองค์ประกอบของเมตาคอคนิชัน ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. ความหมายของเมตาคอคนิชัน

มีนักการศึกษาได้อธิบายความหมายของเมตาคอคนิชัน ไว้ดังนี้

Brown และ Smiley (1977) ได้อธิบายความหมายของ เมตาคอคนิชัน ไว้ว่า เป็นการรู้ว่าเรารู้ในสิ่งใด และเข้าใจในสิ่งใด ซึ่งทั้งนี้เป็นผลมาจากที่ บุคคลพยายามควบคุมกระบวนการคิดของตนเอง ซึ่งกล่าวได้ว่า เป็นความสามารถในการตรวจสอบความคิดของตนเองหรือเป็นการคิดเกี่ยวกับการคิด (thinking about thinking)

Flavell (1979) ได้อธิบายความหมายของ เมตาคอคนิชัน ไว้ว่า เป็นการที่บุคคลได้รู้ถึงกระบวนการคิด และผลิตผลของการคิดหรือสิ่งอื่น ๆ ที่เกิดจากกระบวนการคิด อาจปรากฏเป็นความรู้ กิจกรรมทางการคิดใด ๆ ที่มีเป้าหมาย มีทิศทาง ที่เรียกว่า เมตาคอคนิชัน ก็เพราะหมายถึง การคิดเกี่ยวกับการคิด (cognition about cognition)

Costa (1987) ได้อธิบายความหมายของ เมตาคอคนิชัน ไว้ว่า หมายถึง ความสามารถของบุคคลที่จะรู้ในสิ่งที่เขารู้ และรู้ในสิ่งที่ไม่รู้ เป็นความสามารถที่จะวางแผนเกี่ยวกับกลวิธี สำหรับผลที่จะเกิดขึ้นในสิ่งที่เป็นข้อมูลที่มีความจำเป็น เพื่อที่จะรู้เกี่ยวกับขั้นตอนการคิดและกลวิธีของการคิดในขณะแก้โจทย์ปัญหา และจะส่งผลต่อการประเมินผลของการคิดของตนเอง

จากความหมายดังกล่าวสามารถสรุปได้ว่า เมตาคอคนิชัน หมายถึง ความสามารถในการกำกับและควบคุมกระบวนการคิดของตนเอง ในการกระทำกิจกรรมทางการคิดใด ๆ อย่างมีจุดมุ่งหมายและรู้ถึงผลการคิดที่จะเกิดขึ้น

2. องค์ประกอบของเมตาคอคนิชัน

มีนักการศึกษาแบ่งองค์ประกอบของเมตาคอคนิชัน ไว้ดังนี้

Baker และ Brown (1984) ได้แบ่งเมตาคอคนิชัน เป็น 2 องค์ประกอบ คือ

1) การตระหนักรู้ (awareness) เป็นการตระหนักรู้ถึง ทักษะ กลวิธี และแหล่งข้อมูลที่จำเป็นต่อการทำงานอย่างมีประสิทธิภาพ และรู้ว่าจะต้องทำอย่างไร องค์ประกอบแรกนี้เป็นเรื่องของการที่บุคคลรู้ถึงสิ่งที่ตนเองคิด และความสอดคล้องกับสถานการณ์การเรียนรู้ รวมไปถึงการแสดงออกในสิ่งที่รู้ออกมาโดยการอธิบายให้ผู้อื่นฟังได้ สามารถสรุปใจความสำคัญของสิ่งที่เรียนรู้นั้น มีวิธีจำสิ่งนั้นได้ง่าย ตลอดจนการคิดแบบทดสอบ การวางขอบข่าย และการจดบันทึก ความสามารถในการสะท้อนกระบวนการคิดของตนเองออกมาในขณะที่อ่านเรื่องราวหรือในการคิดแก้ปัญหา เป็นทักษะที่จะทำให้บุคคลทำงานอย่างมีแผน เพราะจะทำให้รู้ว่าในงานนั้น ๆ ไม่ว่าจะเป็นด้านการอ่าน การแก้ปัญหา หรืองานอื่นใดที่ต้องอาศัยการเรียนรู้ว่า จะต้องประกอบด้วยสิ่งใดบ้าง ที่จะทำให้การทำงานนั้นเกิดประสิทธิภาพ จะทำให้สถานการณ์ในการทำงานนั้นมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

2) ความสามารถของการใช้กลไกในการกำกับตนเอง (self-regulation) เพื่อให้สามารถปฏิบัติงานได้สำเร็จสมบูรณ์ เป็นการรู้ว่าจะทำงานนั้นอย่างไร และเมื่อไร องค์ประกอบประการที่ 2 นี้ เป็นกลวิธีการกำกับตนเองในขณะที่กำลังคิดแก้ปัญหา ซึ่งรวมไปถึง การพิจารณาว่ามีความเข้าใจในสิ่งนั้นหรือไม่ การประเมินความพยายามในการทำงาน การวางแผน และขั้นตอนในการทำงาน การทดสอบวิธีการที่ใช้ การตัดสินใจในการใช้เวลา และการใช้ความสามารถที่มีอยู่ และการเปลี่ยนไปใช้กลวิธีอื่น ๆ เพื่อแก้ปัญหาให้ได้

Flavell (1985) ได้แบ่ง เมตาคอคนิชัน ออกเป็น องค์ประกอบที่สำคัญ 2 องค์ประกอบ คือ ความรู้ในเมตาคอคนิชัน (metacognition knowledge) และประสบการณ์ในเมตาคอคนิชัน (metacognition experience)

1) ความรู้ในเมตาคอคนิชัน เป็นส่วนของความรู้ทั้งหมดที่บุคคลสะสมไว้ในความจำระยะยาว เป็นการที่บุคคลรู้ว่า ตนเองรู้อะไร และคิดอย่างไร คิดถึงเป้าหมาย และการบรรลุเป้าหมายอย่างไร ความรู้ในเมตาคอคนิชันประกอบด้วย ความรู้เบื้องต้น หรือความเชื่อ

ในเรื่องของตัวแปร หรือองค์ประกอบที่มีผลต่อกิจกรรมการคิด Flavell (1985) แบ่งความรู้ในเมตาคอคนิชัน ออกเป็น 3 ตัวแปร คือ ตัวแปรด้านบุคคล (person variables) ตัวแปรด้านงาน (task variable) และตัวแปรด้านกลวิธี (strategy variables) ดังนี้

1.1) ตัวแปรด้านบุคคล หมายถึง การที่บุคคลมีความรู้เกี่ยวกับลักษณะที่บุคคลโดยทั่วไปมีอยู่ ในด้านความสามารถทางปัญญา การเรียนรู้ หรือในการทำงาน เช่น รู้ถึงความถนัด และความสามารถของบุคคล รู้ว่าบุคคลต้องมีลักษณะอย่างไร จึงจะทำงานเฉพาะได้อย่างดี

1.2) ตัวแปรด้านงาน หมายถึง การตระหนักรู้ลักษณะของงานที่ทำ ซึ่งมีผลต่อการปฏิบัติงานของบุคคลนั้น ๆ การรู้ว่าสิ่งใดทำให้งานนั้นยาก สิ่งใดทำให้งานนั้นง่าย รวมไปถึงปัญหาและอุปสรรคของงานนั้น ที่จะเกิดขึ้นกับตน

1.3) ตัวแปรด้านกลวิธี หมายถึง ความรู้ของบุคคลเกี่ยวกับกลวิธีที่เหมาะสมที่จะใช้ในการทำให้การทำงานนั้นบรรลุเป้าหมายอย่างมีประสิทธิภาพ เป็นวิธีการที่จะช่วยให้เกิดความเข้าใจการจัดระบบ การวางแผน การลงมือปฏิบัติ และการประเมินผล ทั้งในสิ่งที่ทำไปแล้วและกับสิ่งที่จะทำต่อไป ตัวแปรด้านนี้ทำให้เกิดความก้าวหน้าในการคิดกลวิธีใน เมตาคอคนิชันตลอดจนการตรวจสอบ

2) ประสบการณ์ในเมตาคอคนิชัน เป็นประสบการณ์ทางการคิดที่บุคคลสามารถควบคุมได้ และประสบการณ์นี้มีความสำคัญต่อการกำกับตนเอง (self - regulation) ในกิจกรรมการคิด เริ่มตั้งแต่ การเข้าสู่สถานการณ์ในการคิดจนกระทั่งสามารถบรรลุเป้าหมายหรือเลิกการกระทำ

ประสบการณ์ในเมตาคอคนิชัน มี 3 องค์ประกอบย่อย (Brown, Bransford, Ferrare และ Campione, 1983) ซึ่งทั้งหมดเป็นกิจกรรมทางการคิด คือ

2.1) การวางแผน (planning) เป็นการรู้ว่าตนเองคิดว่า จะทำงานนั้นอย่างไร ตั้งแต่การกำหนดเป้าหมาย จนถึงการปฏิบัติงานจนบรรลุเป้าหมาย

2.2) การกำกับ (monitoring) เป็นการทบทวนความคิดเกี่ยวกับแผนที่วางไว้ว่าเป็นไปได้เพียงใด ความเหมาะสมของลำดับขั้นตอน และวิธีการที่เลือกใช้

2.3) การประเมิน (evaluating) เป็นการคิดเกี่ยวกับการประเมินการวางแผน วิธีการตรวจสอบ และการประเมินผลลัพธ์

นอกจากนั้น Beyer (1987) ซึ่งมีแนวคิดเช่นเดียวกันนี้ ได้แบ่งกระบวนการที่มักเกิดขึ้นในกระบวนการของเมตาคอคนิชันได้ 3 ประการ คือ การวางแผน (planning) การกำกับ (monitoring) และการประเมิน (assessing) ซึ่งคล้ายคลึงกับการประสานซึ่งกันและกันในขณะคิดเป็นการปฏิบัติการที่เกิดขึ้นในใจ จึงเป็นเหมือนกับศูนย์กลางของกิจกรรมที่เกิดขึ้นพร้อมกับเมตาคอคนิชันอย่างแท้จริง ในแต่ละกระบวนการก็จะนำไปสู่กระบวนการย่อย ๆ ดังนี้

1) การวางแผน จะนำไปสู่

1.1) การกำหนดเป้าหมาย

1.2) การเลือกวิธีปฏิบัติ

1.3) การเรียงลำดับขั้นตอนการปฏิบัติ

1.4) การรวบรวมจัดหมวดหมู่ปัญหาและอุปสรรคที่สามารถจะเกิดขึ้นได้

1.5) การรวบรวมแนวทางเพื่อที่จะให้บรรลุปัญหาและอุปสรรคที่เกิดขึ้น

1.6) การคาดคะเนหรือทำนายผลลัพธ์ไว้ล่วงหน้า

2) การกำกับ จะนำไปสู่

2.1) การกำกับจุดประสงค์ไว้ในใจ

2.2) การกำกับหน้าที่ของตนเองให้เป็นไปตามขั้นตอน

2.3) การรู้จุดประสงค์ย่อยที่จะทำให้แก้ปัญหาได้สำเร็จ

2.4) การตัดสินใจไปสู่การปฏิบัติขั้นต่อไป

2.5) การเลือกวิธีปฏิบัติขั้นต่อไปอย่างเหมาะสม

2.6) การรู้ถึงปัญหาและข้อผิดพลาดในการแก้ปัญหา และทราบวิธีที่จะขจัดปัญหาและข้อผิดพลาด

3) การประเมิน นำไปสู่

3.1) การประเมินความสำเร็จตามจุดมุ่งหมาย

3.2) การพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้อย่างละเอียดและเพียงพอ

3.3) การประเมินคุณค่าของวิธีการที่ใช้

3.4) การประเมินเรียงลำดับปัญหาและข้อผิดพลาดที่พบ

3.5) การพิจารณาประสิทธิภาพของแผนการที่ทำให้แก้ปัญหาได้สำเร็จ

จากแนวคิดดังกล่าวสามารถสรุปได้ว่า องค์ประกอบของเมตาคอคนิชันมี 2 องค์ประกอบ คือ

1) ความรู้ในเมตาคอคนิชัน ได้แก่ ความรู้เกี่ยวกับคน ความรู้เกี่ยวกับงาน และความรู้เกี่ยวกับกลวิธีที่ใช้ในการปฏิบัติงาน และเมื่อนำเมตาคอคนิชันมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ สามารถอธิบายถึงความรู้ในเมตาคอคนิชัน ได้ดังนี้

1.1) ความรู้เกี่ยวกับคน แสดงว่าผู้แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ สามารถรู้ถึงความรู้ ความสามารถที่ตนมีอยู่ ตลอดจนรู้ถึงลักษณะของบุคคลที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการแก้โจทย์ปัญหา

1.2) ความรู้เกี่ยวกับงาน แสดงว่าผู้แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์รู้ถึงลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ องค์ประกอบต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหา รู้ถึงปัญหาและอุปสรรคที่จะพบในขณะแก้โจทย์ปัญหา และรู้ถึงวิธีที่จะทำให้การแก้โจทย์ปัญหานั้น ๆ ง่ายขึ้น

1.3) ความรู้เกี่ยวกับกลวิธี แสดงว่าผู้แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์รู้ถึงกลวิธีแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่เหมาะสมกับลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่พบ และเหมาะสมกับความสามารถที่ตนเองมีอยู่ ตลอดจนสามารถนำกลวิธีนั้นมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้บรรลุเป้าหมายของการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพที่สุด

2) ประสบการณ์ในเมตาคอคนิชัน ประกอบด้วย การวางแผน การกำกับ และการประเมิน

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้แนวคิดเมตาคอคนิชันของ Beyer (1987) ทั้ง 3 ขั้นตอน ได้แก่ การวางแผน การกำกับ และการประเมิน มาปรับแล้วจะได้ดังต่อไปนี้

เมตาคอคนิชัน ประกอบด้วยขั้นตอนต่าง ๆ 3 ขั้นตอนได้แก่

1) ขั้นการวางแผน ประกอบด้วย

1.1) วิเคราะห์เป้าหมายของการแก้โจทย์ปัญหา

1.1.1) บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้

เป็นการค้นหาข้อมูลหรือเงื่อนไขต่าง ๆ ที่มีอยู่ในโจทย์ปัญหา โดยพิจารณาเลือกข้อมูลหรือเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้โจทย์ปัญหาเท่านั้น เพื่อทำให้เข้าใจในโจทย์ปัญหา

1.1.2) บอกข้อมูลอื่นที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหา

เป็นการพิจารณาข้อมูลหรือเงื่อนไขอื่น ๆ ที่ไม่ได้กำหนดไว้ในโจทย์ปัญหาแต่เป็นข้อมูลหรือเงื่อนไขต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับโจทย์ปัญหา ซึ่งจะทำให้เข้าใจโจทย์ปัญหาชัดเจนยิ่งขึ้น

1.1.3) บอกคำและข้อความสำคัญในโจทย์ปัญหา

เป็นการบอกคำและข้อความสำคัญหรือจำเป็นต่อโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ ซึ่งอาจทำได้ด้วยการบอกปากเปล่าหรืออาจใช้ดินสอหรือปากกาขีดเส้นใต้คำและข้อความสำคัญนั้น ๆ

1.1.4) บอกเป้าหมายของการแก้โจทย์ปัญหา

เป็นการบอกสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ จากโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้

1.2) เลือกกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา

เป็นการเสนอกลวิธีต่าง ๆ สำหรับแก้โจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ แล้วตัดสินใจเลือกกลวิธีที่จะทำให้สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพมากที่สุด

1.3) เรียงลำดับขั้นตอนตามกลวิธีที่ได้เลือกไว้

เป็นการนำกลวิธีแก้โจทย์ปัญหาที่ได้เลือกไว้ มาลำดับเป็นขั้นตอนย่อย ๆ อย่างเป็นระบบ เพื่อให้สะดวกต่อการแก้โจทย์ปัญหาและสะดวกต่อการตรวจสอบข้อผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้น

1.4) ประมาณคำตอบที่คาดว่าจะได้

เป็นการคาดคะเนคำตอบ ให้ได้ใกล้เคียงกับคำตอบของโจทย์ปัญหามากที่สุด โดยการวิเคราะห์เงื่อนไขหรือข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้อย่างมีเหตุผล เพื่อนำไปใช้ประโยชน์ในการตรวจสอบคำตอบ

2) ขั้นการกำกับ

2.1) กำหนดเป้าหมายไว้ในใจ

เป็นการกำหนดเป้าหมายของการแก้โจทย์ปัญหานั้น ๆ ไว้ในใจหรือในขณะแก้โจทย์ปัญหา

2.2) กำกับวิธีการแก้โจทย์ปัญหาให้เป็นไปตามขั้นตอนของกลวิธีที่ได้เลือกไว้

เป็นการควบคุมวิธีการคิดแก้โจทย์ปัญหา ให้เป็นไปตามขั้นตอนของกลวิธีแก้โจทย์ปัญหาที่ได้เลือกไว้ ด้วยการถามตนเองเสมอในขณะแก้โจทย์ปัญหาว่า

"นักเรียนยังจำข้อความสำคัญในโจทย์ปัญหานี้ได้หรือไม่" (ได้, ไม่ได้)

"นักเรียนแก้ปัญหาถึงตอนไหนแล้ว"

"นักเรียนมาถูกทางหรือยัง" (ถูกแล้ว, ยังไม่ถูกทาง)

"นักเรียนต้องการใช้กลวิธีอื่นอีกหรือไม่" (ต้องการ, ไม่ต้องการ)

3) ขั้นการประเมิน

3.1) ประเมินความสำเร็จตามเป้าหมาย

เป็นการตรวจสอบว่า หลังจากที่ได้แก้โจทย์ปัญหาแล้ว ผู้แก้ปัญหาสามารถบรรลุเป้าหมายของโจทย์ปัญหานั้น ๆ ตามที่ได้ตั้งไว้หรือไม่

3.2) ตรวจสอบคำตอบที่ได้

เป็นการตรวจสอบคำตอบ ที่ได้จากการแก้โจทย์ปัญหาว่าถูกต้องหรือไม่ ด้วยกลวิธีใดวิธีหนึ่ง เพื่อทำให้เกิดความมั่นใจว่าคำตอบที่ได้นั้นถูกต้องจริง ๆ

3.3) ตรวจสอบขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหา

เป็นการมองย้อนกลับไป ที่ขั้นตอนของกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาและขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาคือ ขั้นการวางแผน ขั้นการกำกับ และขั้นการประเมิน ว่ามีความถูกต้องสมบูรณ์เพียงใด เพื่อจะช่วยให้พบข้อบกพร่องที่อาจเกิดขึ้นในขณะแก้โจทย์ปัญหาแล้วนำไปปรับปรุงแก้ไขให้ดีขึ้นต่อไป

3.4) บอกปัญหาและอุปสรรคที่พบในขณะแก้โจทย์ปัญหา

เป็นการอภิปรายถึงปัญหา และอุปสรรคที่พบในขณะแก้โจทย์ปัญหาแล้ววิเคราะห์หาสาเหตุและแนวทางในการปรับปรุงแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้น เพื่อเป็นการลดปัญหาและอุปสรรคที่อาจจะเกิดขึ้นในครั้งต่อไป

นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มักถูกเรียกโดยทั่วไปว่า นักเรียนเก่งคณิตศาสตร์ นักเรียนเก่งคณิตศาสตร์เหล่านี้ บางส่วนเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ (gifted/ talented) การศึกษาเอกสารในส่วนนี้จึงจะครอบคลุมสาระที่เกี่ยวข้องกับนักเรียนกลุ่มดังกล่าว

1. ลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

มีนักการศึกษาหลายท่านได้เสนอแนะ ลักษณะของนักเรียนทีมีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ไว้ดังนี้

ยุพิน พิพิธกุล (2530) ได้เสนอลักษณะของนักเรียนเก่งคณิตศาสตร์ ไว้ 6 ประการ ดังนี้

1) นักเรียนเก่งคณิตศาสตร์มักจะได้คะแนนสูง แต่อย่างไรก็ตาม การเลือกนักเรียนเก่งและอ่อนนั้นก็อยู่ที่ความคาดหวังของครู ถ้าครูคาดหวังไว้ต่ำก็จะมีนักเรียนเก่งมากมาย ถ้าครูคาดหวังไว้สูงก็จะมีนักเรียนเก่งน้อย ครูที่ดูความสุภาพ ความขยัน ความรับผิดชอบ ความตั้งใจ ความเรียบร้อย และการเรียนสม่ำเสมอ อาจจะตัดสินคนเรียนเก่งผิดพลาดไปก็ได้

2) นักเรียนเก่งคณิตศาสตร์บางคน อาจจะมีพฤติกรรมที่แสดงออกก้าวร้าว สร้างปัญหารบกวนครู ไม่ทำแบบฝึกหัดเพราะเขาเกิดความคับข้องใจ เบื่องานประจำที่ต้องทำไปซ้ำ ๆ เพราะการทำอะไรง่าย ๆ เขาก็เบื่อ ซ้ำซากนักเขาก็เบื่อ

3) นักเรียนเก่งคณิตศาสตร์บางคนมีความจำยอดเยี่ยม แต่สิ่งนี้ไม่ใช่เครื่องชี้ทางคณิตศาสตร์ เพราะนักเรียนผู้นั้นอาจจะเก่งเนื่องจากอ่านหนังสือมากก็ได้ การใช้ข้อสอบวัดความเก่งอย่างเดียวอาจจะไม่เพียงพอ ครูควรจะได้ใช้การสังเกตประกอบด้วย

4) นักเรียนเก่งคณิตศาสตร์ มักจะเรียนได้เร็วเมื่อเขาได้รับแรงกระตุ้น ครูอธิบายเพียงเล็กน้อยเขาก็เกิดความเข้าใจ นักเรียนพวกนี้มักจะถามครูเสมอว่าทำไม เพราะเหตุไร มีความอยากรู้อยากเห็นและกระตือรือร้น เขาแสดงความปรารถนาอันแรงกล้าที่จะเกิดความเข้าใจและมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ใหม่และความรู้ซึ่งเขามีอยู่แล้ว เขาสามารถศึกษาคณิตศาสตร์ด้วยตนเองและมักจะทำแบบฝึกหัดล่วงหน้าเสมอ

5) นักเรียนเก่งคณิตศาสตร์ มักจะเรียนด้วยความสนุกสนาน และสนใจคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง มักจะใช้คำถามที่ทำให้เกิดความคิด แสดงให้เห็นความอยากรู้อยากเห็นของเขา นอกจากนี้เขายังมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่าง ๆ ที่แตกต่างกัน รู้จักเปรียบเทียบ แยกแยะ สังเกตรูปแบบ และหาข้อสรุปได้

6) นักเรียนเก่งคณิตศาสตร์ มักจะสามารถแสดงออกได้ดี ทั้งการตอบปากเปล่าและข้อเขียน เขาสามารถจะทำงานโดยอิสระ แม้ได้รับการแนะนำเพียงเล็กน้อยเขาก็สามารถทำได้ ทั้งงานมอบหมายที่ให้ทำเป็นประจำและงานที่เป็นโครงการพิเศษเฉพาะบุคคล

สมวงษ์ แปลงประสบโชค (2535) ได้สรุปถึงลักษณะของนักเรียนเก่งคณิตศาสตร์ ไว้ว่า นักเรียนส่วนมากจะตั้งใจฟังครูสอน และขยันทำแบบฝึกหัดจากหนังสือเรียนและหนังสืออื่น ๆ รวมทั้งฝึกทำข้อสอบแข่งขันจากสถาบันต่าง ๆ และจะหมั่นทบทวน สูตร กฎเกณฑ์ บทนิยามต่าง ๆ และเมื่อมีปัญหาจะถามครู ผู้ปกครองหรือครูพิเศษ

Johnson และ Rising (1972) ได้กล่าวถึงลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

1) สามารถที่จะสรุปหลักการทั่วไปของโจทย์ปัญหาที่ซับซ้อนได้

2) สามารถถ่ายโยงและประยุกต์ความรู้ที่มีอยู่กับโจทย์ปัญหาใหม่ที่พบได้

3) แสดงความหยั่งรู้ ความคิดสร้างสรรค์ และสรุปความคิดเกี่ยวกับแนวคิดที่แปลกใหม่ในโจทย์ปัญหาที่พบหรือค้นพบข้อโต้แย้งใหม่ ๆ ในระดับสูง

4) มีความรู้เกี่ยวกับคำศัพท์อย่างกว้างขวาง ซึ่งจะช่วยให้เขาใช้ความคิด อ่าน และติดต่อสื่อสารได้อย่างคล่องแคล่ว

5) เรียนรู้แนวคิดใหม่ ๆ ได้อย่างรวดเร็ว เข้าใจง่ายและสนุกสนาน

6) มีที่รวมของความรู้ที่จะนำมาใช้ให้เกิดการพัฒนาทางคณิตศาสตร์

7) มีความจำที่พิเศษ สามารถจะระลึกถึงความรู้ที่เขาเคยได้อ่าน ได้ยินหรือได้เห็น ได้เป็นอย่างดี

8) มีความอยากรู้อยากเห็นเกี่ยวกับแนวคิดใหม่ ๆ และทุกสิ่งที่อยู่รอบตัว

9) มีความคิดริเริ่มเกี่ยวกับงานอย่างอิสระ เพื่อทำให้งานบรรลุเป้าหมาย

10) มีความสนใจอย่างกว้างขวางในงานอดิเรก โดยเฉพาะงานที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ หรือวิทยาศาสตร์

11) มีร่างกายที่สมบูรณ์ มีวุฒิภาวะ ซื่อสัตย์ และมีใจกว้างในเรื่องต่าง ๆ

12) มักมีลักษณะของเด็กปัญญาเลิศ เช่น ชอบคิดค้นถึงปัญหาที่ตอบยาก

13) มีความเป็นอิสระในความคิด เชื่อมั่นในการตัดสินใจของตนเอง และมักเบื่อหน่ายต่อกิจกรรมที่ซ้ำซากจำเจ และกิจกรรมที่เกี่ยวกับการคิดคำนวณ

House (1984) ได้กล่าวถึง ลักษณะของนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ครูที่จะสอนคณิตศาสตร์แก่นักเรียนกลุ่มนี้ได้มีการเตรียมการสอน ซึ่งอาจจะพบกับคำถามที่ไม่คาดคิดของนักเรียน ซึ่งนักเรียนเหล่านี้จะเป็นผู้ที่เรียนรู้เนื้อหาได้ดี เรียนได้เร็วกว่าเพื่อนในชั้น สามารถเรียนรู้เนื้อหาได้มากทั้งในแนวลึกและแนวกว้าง สามารถปฏิบัติงานที่ซับซ้อนได้ สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยวิธีที่แปลกใหม่และมีความเข้าใจในเนื้อหาที่เป็นนามธรรม

2. การสอนนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงนั้น จะสามารถเรียนรู้ได้อย่างรวดเร็วกว่าเด็กปกติทั่ว ๆไป ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนแบบปกติจึงไม่อาจสามารถที่จะสนองตอบต่อความต้องการ ความสามารถ และความสนใจของเขาได้ เพื่อเป็นการส่งเสริมให้

เขามีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูงสุด จึงมีนักการศึกษาได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอน เทคนิคการสอนนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ไว้ดังนี้

ยุพิน พิพิธกุล (2530) ได้เสนอเทคนิคการสอนแก่นักเรียนเก่งคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

1) ครูควรจะรู้จักนักเรียนแต่ละคนเป็นอย่างดี ต้องรู้ความสามารถ ความสนใจ งานอดิเรก สิ่งแวดล้อมทางบ้าน กิจกรรมในโรงเรียน กิจกรรมภาคฤดูร้อน ทั้งนี้เพื่อจะได้ดูความแตกต่างของแต่ละบุคคลได้ถูกต้อง ครูควรจะได้บันทึกรายละเอียดของนักเรียนไว้เป็นรายบุคคล

2) ครูควรจะรู้วิธีการสอนและรู้เนื้อหาวิชาที่สอนเป็นอย่างดี หาเทคนิคและวิธีการใหม่ ๆ อันจะเป็นเครื่องส่งเสริมให้นักเรียนเก่ง ได้ศึกษาและค้นคว้าด้วยตนเอง

3) ครูควรจะจัดเวลาให้นักเรียนเก่งได้ทำงานตามลำพัง ในเรื่องที่ตนสนใจเป็นพิเศษ

4) ครูควรจะจัดหาหนังสืออ่านประกอบต่าง ๆ เอาไว้และส่งเสริมให้นักเรียนอ่านโดยการมอบหมายงานให้ค้นคว้า

5) ครูควรจะจัดหรือส่งเสริมให้นักเรียนร่วมกิจกรรมนอกห้องเรียน เช่น จัดชุมนุมคณิตศาสตร์ การแข่งขันตอบปัญหา การสัมมนา การตั้งค่าย การเปิดสอนภาคฤดูร้อน การจัดป้ายนิทรรศการ การจัดนิทรรศการ การจัดเข้าแข่งขันตอบปัญหาหรือสอบแข่งขันทางคณิตศาสตร์ เป็นรายบุคคลหรือคณะ ซึ่งทางสมาคมคณิตศาสตร์หรือสถาบันต่าง ๆ ได้จัดขึ้น

6) ครูควรส่งเสรมิความเป็นผู้นำให้แก่นักเรียน โดยการจัดการเรียนการสอนแบบเรียนเป็นคณะ แล้วจัดกิจกรรมต่าง ๆ ให้นักเรียนได้ทำร่วมกัน และนำผลนั้นมาสาธิต รายงานนิทรรศการ ฯลฯ

7) ครูควรจะปรับปรุงการสอนของตนอยู่เสมอ ด้วยการหาเรื่องใหม่ ๆ มาสอน เช่นอาจจะให้นักเรียนศึกษาเกี่ยวกับประวัติคณิตศาสตร์ ปัญหาพิเศษ ฯลฯ และควรจะได้ทำเอกสารเสริมประสบการณ์ในเรื่องที่แปลกและใหม่ตลอดจนให้แนวคิดต่าง ๆ

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537) ได้เสนอแนะการสอนนักเรียนเก่งคณิตศาสตร์ ว่าครูผู้สอนควรมีทักษะการสอนดังต่อไปนี้

1) การสอนของครูควรให้กระชับและเร็วแต่เหมาะกับความสามารถของนักเรียน ความเร็วอาจขึ้นอยู่กับลักษณะความยากง่ายของเนื้อหาด้วย ครูผู้สอนต้องมีความยืดหยุ่น ทำให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการพัฒนามโนมติ

2) ครูควรสร้างบรรยากาศที่ส่งเสริมการมีปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียน

3) ครูควรมีความรู้สึกไวต่อระดับการเข้าใจของนักเรียนในชั้น การสอนแบบไปเร็ว หรือสอนเสริมประสบการณ์ ครูควรสอนในระดับความเร็วที่ท้าทายนักเรียนที่เก่งที่สุดในชั้น การให้การบ้านที่เลือกสรรอย่างดีแล้วและเป็นกิจกรรมที่ดี และมีการการช่วยเหลือนักเรียนในเวลาพิเศษ ครูที่มีประสบการณ์จะรักษาระดับความเร็วโดยไม่ทิ้งให้นักเรียนมีความสามารถน้อยกว่า

ตามเพื่อนไม่ทันและเกิดความรู้สึกความหมดหวัง ครูจะต้องรู้ความเร็วที่นักเรียนแต่ละคนสามารถเรียนรู้เนื้อหาใหม่

4) ครูไม่ควรจะวิตกกังวล หรือกลัวในการมีความสามารถสูงของนักเรียน เช่น กลัวว่านักเรียนมีความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์เร็วกว่าและดีกว่าตนเอง กลัวว่าคำถามที่นักเรียนถามแล้วจะตอบไม่ได้ เพราะชอบถามคำถามที่ยาก ๆ ซึ่งอาจจะนอกเหนือเนื้อหาที่สอน คำถามเหล่านี้ครูควรรับฟังไว้ในลักษณะที่เด็กอยากรู้อยากเห็นมากขึ้น ครูไม่ควรจะละทิ้งปัญหาเหล่านั้นว่าไม่สำคัญเพราะว่าครูหาคำตอบไม่ได้ ในลักษณะเช่นนี้ครูไม่ควรจะให้คำตอบที่ไม่ถูกแต่ตอบเพื่อรักษาหน้าครู ครูต้องยอมรับว่าตัวเองไม่รู้ และชี้แนะให้นักเรียนไปค้นคว้าในหนังสืออ้างอิงที่เกี่ยวข้อง ครูที่ดีควรให้นักเรียนได้ถามปัญหาที่ไม่เกี่ยวโดยตรงกับเนื้อหาที่กำลังสอนอยู่ การกระทำเช่นนี้จะรักษาระดับความสนใจและขยายความรู้ของนักเรียน ส่วนคำถามเจาะลึกและใช้เวลานานในการตอบครูควรใช้เวลานอกห้องเรียน

5) ครูไม่ควรใช้การลอนแบบ “ป้อน” ความรู้ให้นักเรียน นักเรียนที่มีความสามารถสูงสุดทางคณิตศาสตร์ควรสามารถเรียนรู้ด้วยตนเอง ครูที่ดีจะไม่ใช้เวลาในชั้นเรียนอธิบายรายละเอียดของมโนมติทุกอย่างที่จะสอน แต่ครูควรให้งานเป็นการบ้านที่จะช่วยให้นักเรียนเรียนในจุดเหล่านั้นที่ไม่ได้กล่าวถึงในชั้นเรียน ด้วยความขยันและพยายามในการทำการบ้าน นักเรียนเก่งสามารถเรียนรู้มโนคติเหล่านั้นได้ วิธีการสอนเช่นนี้ทำให้ครูมีเวลาสอนมโนมติและปัญหาที่ยากกว่าได้ และทำให้การเรียนการสอนเร็วขึ้นโดยนักเรียนไม่เบื่อหน่ายต่อการเรียน

6) ครูไม่ควรตอบคำถาม ที่เกี่ยวข้องโดยตรงกับเนื้อหาเฉพาะที่สอนผ่านมาแล้ว หรือบอกการแก้ปัญหาที่ครูส่งไปค้นคว้าเพิ่มเติม ครูควรตอบโดยการใช้คำถามนำเพื่อนำไปสู่คำตอบ และพยายามฝึกให้นักเรียนคิดและให้กำลังใจนักเรียน

<u>งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง</u>

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และเมตาคอคนิชันซึ่งเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยครั้งนี้ ได้แก่

1. งานวิจัยในประเทศ

กรมวิชาการ กองวิจัยการศึกษา (2531) ได้ทำการวิจัยเรื่อง กระบวนการคิดและความรู้สึก โครงการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนทางด้านความรู้ ความคิด ซึ่งได้ศึกษาตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างประชากรที่ใช้ในการศึกษาเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2530 โรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการประถมศึกแห่งชาติ จำนวน 289 คน เครื่องมือที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูลคือ แบบทดสอบวัดกระบวนการคิดทั่วไป แบบทดสอบวัดกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ แบบทดสอบวัดเจตคติและแบบสอบถามเกี่ยวกับปัจจัยแวดล้อม ผลการวิจัยพบว่า การอบรมเลี้ยงดู

มีอิทธิพลต่อความสามารถในการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยตรง ดังนี้คือ

1. การอบรมเลี้ยงดูอย่างมีเหตุผล จะมีส่วนช่วยเสริมสร้างกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

2. การอบรมเลี้ยงดูแบบปล่อยปละละเลย จะส่งผลให้กระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนต่ำ

ไตรรงค์ เจนการ (2531) ได้ศึกษาเรื่อง การพิสูจน์ร่องรอยกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยให้นักเรียนคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แล้วนำกระดาษคำตอบของนักเรียน ที่แสดงวิธีการคิดในแต่ละตอน จนได้คำตอบพร้อมกับร่องรอยการคิดในกระดาษทด มาสอบถามนักเรียนเป็นรายบุคคลอีกครั้ง นักเรียนจะเล่าและแสดงกระบวนการคิดอีกครั้ง สรุปได้เป็นรูปแบบการคิด 6 แบบคือ

1. นักเรียนอ่านโจทย์เข้าใจ รู้วิธีทำ คิดคำนวณได้ถูกตามวิธีการ ได้คำตอบถูกต้อง

2. นักเรียนอ่านโจทย์เข้าใจ รู้วิธีทำ เรียงลำดับได้ว่าทำสิ่งใดก่อน สิ่งใดหลังแต่เมื่อลงมือคำนวณแล้วไม่ถูกต้อง หรือถูกบางจุด จึงได้คำตอบผิด

3. นักเรียนอ่านโจทย์เข้าใจ แต่ไม่รู้วิธีทำที่ถูกจริง ทำให้ได้คำตอบที่ผิด แม้จะมีความสามารถในการคำนวณก็ตาม

4. นักเรียนมีความเข้าใจโจทย์อย่างเดียว นอกนั้นทำไม่ได้

5. นักเรียนคำนวณได้อย่างเดียว ไม่มีความเข้าใจโจทย์

6. นักเรียนไม่รู้อะไรเลย บางคนอ่านหนังสือไม่ออก

วิจิตรา การกลาง (2532) ได้ทำการวิจัยเรื่อง กระบวนการคิดและความรู้สึกโครงการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนทางด้านความรู้ความคิด ซึ่งได้ศึกษาธรรมชาติของกระบวนการคิด ตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในด้านกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ และเสนอรูปแบบของการเรียนการสอนที่เอื้อต่อการวินิจฉัยกระบวนการและพัฒนากระบวนการคิด กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เครื่องมือที่ใช้เป็นแบบทดสอบ 3 ฉบับคือ แบบทดสอบวัดกระบวนการคิดทั่วไป แบบทดสอบวัดกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดเจตคติ พบว่า กระบวนการคิดทั่วไปแต่ละขั้นมีความสัมพันธ์กัน นอกจากด้านความคิดรวบยอดที่มีลักษณะเป็นอิสระ และพบว่ากระบวนการคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น มีขั้นตอนที่สำคัญ 6 ขั้นตอนดังนี้ 1) อ่านโจทย์เข้าใจ 2) แปลงภาษาโจทย์เป็นสัญลักษณ์ 3) บอกวิธีทำ 4) เขียนประโยคสัญลักษณ์ 5) คิดคำนวณ 6) หาคำตอบได้ ทั้ง 6 ขั้นตอนนี้ มีความสัมพันธ์เชื่อมโยงซึ่งกันและกัน และมีความสัมพันธ์กับกระบวนการคิดโดยทั่วไปด้วย

ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล (2533) ได้ทำวิจัยเรื่อง การศึกษากระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

สูง ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานการประถมศึกษากรุงเทพมหานคร โดยใช้ตัวอย่างประชากร เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานการประถมศึกษากรุงเทพมหานคร ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง 102 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 3 ประเภท คือ แบบวัดกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา (เอ็ม อี คิว) แบบสังเกตกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา และแบบสัมภาษณ์การใช้กระบวนการแก้โจทย์ปัญหา ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ มีกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาเพียง 3 ขั้นตอน คือ การทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา การวางแผนแก้ปัญหา และการดำเนินการตามแผนแก้ปัญหา มีส่วนน้อยที่ทำครบ 4 ขั้นตอน คือ มีการทบทวนคำตอบ และแผนการแก้ปัญหา นักเรียนมีวิธีการเปรียบเทียบวิธีการหาทางเลือกที่มากที่สุด วิธีเขียนรายงานและวิธีการลองผิดลองถูก แต่นักเรียนที่มีวิธีการคิดย้อนหลังมีจำนวนน้อย และนักเรียนยังขาดวิธีการสร้างตาราง

สิริมาศ สิทธิหล่อ (2534) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาวิธีการวัดกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการคิดออกเสียง โดยใช้กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาที่ 1 ในโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษา เขตกรุงเทพมหานคร ซึ่งแบ่งเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกใช้ในการพัฒนาแบบสอบและแบบบันทึกกระบวนการแก้ปัญหา จำนวน 60 คน กลุ่มที่สอง ใช้ในการหาคุณภาพของวิธีการวัดโดยการคิดออกเสียง โดยแบ่งนักเรียนเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มเก่ง กลุ่มปานกลาง และกลุ่มอ่อน จำนวน 72 คน ผลการวิจัย พบว่า นักเรียนกลุ่มเก่งจะแสดงพฤติกรรมเกือบทุกขั้นตอน ในขณะที่นักเรียนกลุ่มปานกลาง และกลุ่มอ่อนแสดงพฤติกรรมไม่ครบขั้นตอน และนักเรียนกลุ่มเก่งแสดงพฤติกรรมการคิดออกเสียงที่ให้ข้อมูลมากกว่า

งามตา กมลวรเดช (2536) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลของการฝึกกลวิธีคำถามนำที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนวัดจันทร์ตะวันออก อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก จำนวน 64 คน แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มทดลองได้รับการฝึกกลวิธีคำถามนำในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ กลุ่มควบคุมได้รับการสอนแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ตามปรกติ ผลการวิจัย พบว่า คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมหลังการทดลองอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์หลังการทดลองของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่าคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ก่อนการทดลอง อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ทองหล่อ วงษ์อินทร์ (2536) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ความรู้เฉพาะด้าน กระบวนการในการคิดแก้ปัญหาและเมตาคอคนิชัน ของนักเรียนมัธยมศึกษาผู้ชำนาญ และไม่ชำนาญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนผู้ชำนาญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น 25 คน และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย 25 คน นักเรียนผู้ไม่ชำนาญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น 25 คน และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย 25 คน เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แบบสอบวัด

ความรู้เฉพาะด้าน แบบสอบวัดกระบวนการในการคิดแก้ปัญหา และแบบสอบถามเมตาคอคนิชัน ใช้วิธีการสอนวัดเป็นรายบุคคล โดยการสัมภาษณ์ และวิธีการคิดออกเสียง ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนผู้ชำนาญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ทั้งในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย มีคะแนนในตัวแปรทั้ง 3 ด้าน สูงกว่านักเรียนผู้ไม่ชำนาญในระดับชั้นเดียวกัน และ 2) นักเรียนผู้ชำนาญและผู้ไม่ชำนาญ ที่เรียนในระดับชั้นที่สูงกว่า มีคะแนนในตัวแปรทั้ง 3 ด้านสูงกว่านักเรียนในกลุ่มเดียวกัน ที่เรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า ตัวแปรทั้ง 3 ด้าน คือ 1) ความรู้เฉพาะด้าน ทั้งในด้านความคิดรวบยอด และด้านการดำเนินการ 2) กระบวนการในการคิดแก้ปัญหา ในด้านการทำความเข้าใจปัญหา การสร้างตัวแทนปัญหา การวางแผนการดำเนินการแก้ปัญหา และการตรวจสอบการแก้ปัญหา และ 3) ความรู้ในเมตาคอคนิชัน ด้านบุคคล ด้านงาน และด้านกลวิธี นอกจากนั้น ปฏิสัมพันธ์ระหว่างความชำนาญ และระดับชั้นเรียนมีผลต่อความรู้ในการระบุคำที่ช่วยในการแก้ปัญหา การจำแนกประเภทปัญหา การทำความเข้าใจปัญหา การตรวจสอบการแก้ปัญหา ความรู้ในเมตาคอคนิชัน ด้านงานและด้านกลวิธี

2. งานวิจัยในต่างประเทศ

มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และเมตาคอคนิชัน ซึ่งจะได้นำเสนอดังต่อไปนี้

Eyler (1989) ได้ศึกษาผลของเมตาคอคนิชันที่มีต่อการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักศึกษาปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 จำนวน 31 คน เป็นนักศึกษาที่ประสบความสำเร็จและนักศึกษาที่ไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ซึ่งอาสาเข้ามาร่วม ในการวิจัยนี้เก็บรวบรวมข้อมูลโดยให้ตัวอย่างประชากรแต่ละคนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์พิเศษ ที่แตกต่างไปจากโจทย์ปัญหาในหนังสือเรียน ด้วยการคิดเสียงดังตามด้วยการสัมภาษณ์และบันทึกเสียงไว้ให้ตัวอย่างประชากรอธิบายขยายความในช่วงที่เขาเงียบไปเพิ่มเติมในส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์ จากนั้นจะถอดเทปการสัมภาษณ์และทำรหัส (code) เพื่อนับจำนวนการตัดสินใจโดยใช้เมตาคอคนิชันกับความถูกต้องในการแก้ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า ผู้ประสบความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีพฤติกรรมการตัดสินใจโดยใช้เมตาคอคนิชัน 3 ด้าน คือ ด้านคน ด้านงานและด้านกลวิธี มากกว่าผู้ที่ไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งด้านคน เป็นความรู้เกี่ยวกับลักษณะที่มีอยู่ของบุคคลโดยทั่วไป ในเรื่องความสามารถทางปัญญา การเรียนรู้ หรือในการทำงาน ด้านงาน เป็นการที่บุคคลรู้เกี่ยวกับลักษณะงานที่ทำ รู้ว่าสิ่งใดทำให้งานนั้นยาก สิ่งใดทำให้งานนั้นง่าย รวมไปถึงปัญหาและอุปสรรคของงานที่จะเกิดขึ้นกับตน และด้านกลวิธี เป็นความรู้ของบุคคลเกี่ยวกับกลวิธีซึ่งเหมาะสมที่จะใช้ในการทำงานนั้น ๆ ให้บรรลุเป้าหมายอย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนั้นยังมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญระหว่างจำนวนการตัดสินใจโดยใช้เมตาคอคนิชันและความถูกต้องในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ กับพฤติกรรมการตัดสินใจโดยใช้เมตาคอคนิชันด้วย จากผลของการวิจัยนี้ Eyler ให้ข้อเสนอแนะว่า การส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น นอกจากการพัฒนารูปแบบการสอนแล้วควรมีการฝึก

การตัดสินใจโดยการใช้เมตาคอคนิชันด้วย

Guemon (1989) ได้ศึกษาผลของการสอนยุทธวิธีในการแก้ปัญหา ภายใต้ระบบการควบคุมด้านเมตาคอคนิชัน ต่อการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมศึกษา โดยในการสอนยุทธวิธีในการแก้ปัญหานั้นได้เน้นในสิ่งที่ Schoenfeld (1985) อ้างถึง คือ การควบคุมเมตาคอคนิชัน การควบคุมในที่นี้ก็คือความสามารถของนักเรียนในการตรวจสอบว่าทำอย่างไรและเมื่อไร ที่จะทำให้การแก้ปัญหานั้นดีขึ้น โดยแบ่งนักเรียนในระดับ 8 จำนวน 55 คน ออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มที่ 1 ได้รับการสอนการแก้ปัญหาด้วยยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหา และใช้คำว่าอย่างไร และเมื่อไร ในกลวิธีแก้ปัญหาด้วย กลุ่มที่ 2 ได้รับการสอนการแก้ปัญหาหลาย ๆ อย่าง แต่ไม่ได้รับการสอนยุทธวิธีในการแก้ปัญหา กลุ่มที่ 3 เป็นกลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามปกติ ทั้ง 3 กลุ่มได้รับการสอนดังกล่าวในชั้นเรียนปกติ และสอนเนื้อวิชาคณิตศาสตร์ตามหลักสูตร เป็นเวลา 16 สัปดาห์ การแก้ปัญหาเป็นส่วนหนึ่งของการสอนในชั้นเรียนวิชาคณิตศาสตร์ได้รับการสอนโดยครูตามปกติ ผลการการทดลองพบว่า นักเรียนในกลุ่มที่ 1 มีความสามารถในการแก้ปัญหาสูงสุดนักเรียนในกลุ่มที่ 2 มีความสามารถในการแก้ปัญหาสูงกว่ากลุ่มที่ 3 ผลการวิจัยแสดงให้เห็นว่า การฝึกให้นักเรียนโดยเน้นการควบคุมการคิดของตนเอง ทบทวนเสมอว่าจะทำอะไร เมื่อไรและอย่างไร มีการฝึกยุทธวิธีในการแก้ปัญหา มีผลต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียน

Lester (1989) ได้ทำการวิจัยเรื่อง บทบาทของเมตาคอคนิชัน ที่มีต่อการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนเกรด 7 โดยกำหนดความเชื่อและกระบวนการทางเมตาคอคนิชันให้กับนักเรียนเกรด 7 แล้วศึกษาดูพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมาในขณะแก้โจทย์ปัญหา และสำรวจข้อจำกัดของนักเรียนเพื่อจะให้เขาได้รับการสอนกลวิธีที่ดีกว่านั้น และศึกษาถึงพฤติกรรมการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน ให้นักเรียนจับคู่กันแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน และโจทย์ปัญหาที่พิเศษ แล้วบันทึกวีดีโอไว้ จากนั้นก็สัมภาษณ์นักเรียนเกี่ยวกับการปฏิบัติงาน ความรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ กลวิธีแก้โจทย์ปัญหา การตัดสินใจ ความเชื่อและสังเกตท่าทางการแสดงออกของนักเรียน วิเคราะห์ข้อมูลจาก แบบทดสอบก่อนและหลังเรียน ประเมินจากการบ้าน และประเมินชั้นเรียน ผลปรากฏว่า การเรียนการสอนจะได้ผลมากที่สุด เมื่อยืดเวลาออกไปอีกภายในเนื้อหาปกติกับการเรียนคณิตศาสตร์วันต่อวัน

Swanson (1990) ได้ศึกษาผลของความรู้ด้านเมตาคอคนิชัน และความถนัดของการเรียนที่มีต่อการแก้ปัญหาของนักเรียนชั้นประถมศึกษา ที่มีความถนัดทางการเรียนสูงกับนักเรียนที่มีความถนัดทางการเรียนต่ำ และมีความสามารถด้านเมตาคอคนิชันสูง กับมีความสามารถด้านเมตาคอคนิชันต่ำ โดยการใช้แบบสอบถามปลายเปิด เพื่อวัดเกี่ยวกับความรู้ในเมตาคอคนิชันด้านบุคคล งาน และกลวิธี การตอบใช้วิธี การคิดออกเสียง คำถามแต่ละข้อจะมีการให้คะแนน 5 ระดับผู้ที่ได้คะแนนสูงถือว่ามีความรู้ในเมตาคอคนิชันสูง และใช้ Cognitive Ability Test (CAT) ในการวัดความถนัดในการเรียน นอกจากนั้นมีปัญหาให้นักเรียนแก้ 5 ปัญหา ผลการศึกษาพบว่า ความรู้ด้านเมตาคอคนิชันเป็นตัวทำนายความสามารถในการแก้

ปัญหาได้ดีกว่าความถนัดทางด้านการเรียน ผู้ที่มีความรู้ด้านเมตาคอคนิชันสูง แต่มีความถนัดด้านการเรียนต่ำ สามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่าผู้ที่มีความถนัดด้านการเรียนสูงแต่มีความรู้ด้านเมตาคอคนิชันต่ำ

Wang (1990) ได้ศึกษาเปรียบเทียบเกี่ยวกับพฤติกรรมทางเมตาคอคนิชัน ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนเกรด 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลาง ในไต้หวัน ของสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนจีน ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และปานกลาง อย่างละ 30 คน โดยให้แก้โจทย์ปัญหา 5 ข้อ เป็นรายบุคคล ด้วยการคิดออกเสียง สังเกตพฤติกรรม และบันทึกคำพูดที่นักเรียนแสดงออกมาในขณะแก้โจทย์ปัญหาแล้วนำมาวิเคราะห์ ผลการวิจัย มีดังนี้

1. มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ เกี่ยวกับการแสดงออกในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ระหว่างนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลาง โดยนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงจะแสดงพฤติกรรมในการแก้โจทย์ปัญหาออกมามากกว่า

2. มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ เกี่ยวกับประเภทของการปฏิบัติที่หลากหลายของพฤติกรรมทางเมตาคอคนิชันที่แสดงออกมาในขณะแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ระหว่างนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลางนักเรียนจะแสดงพฤติกรรมมากน้อยเพียงใดเป็นผลของ 1) ความเข้าใจ 2) การปฏิบัติ
3) การวางแผน การกำกับและการตอบสนองทางบวก

3. พฤติกรรมทางเมตาคอคนิชัน มีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์