บทที่ 3

การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ

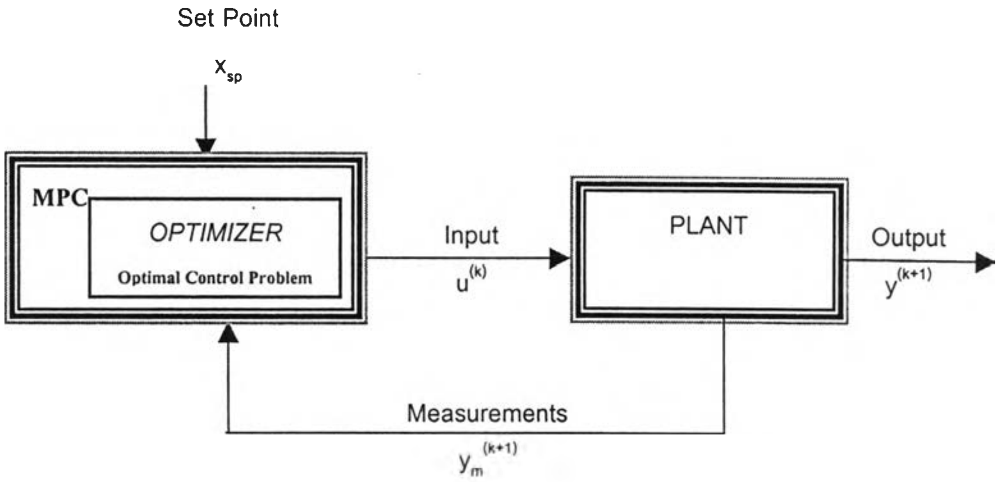
การควบคุมในกระบวนการที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นสูง ระบบที่ไม่มีสภาวะคงตัว ระบบที่มีขอบเขตของตัวแปรปรับ เช่นกรณีของกระบวนการที่สนใจในงานวิจัยนี้ การควบคุมอุณหภูมิของเครื่องปฏิกรณ์เคมีพอลิเมอร์แบบแบตซ์ กรณีเมื่อทำการควบคุมด้วยตัวควบคุมเชิงเส้นพีไอดี ผลการควบคุมอุณหภูมิของเครื่องปฏิกรณ์ให้ผลตอบสนองที่โอเวอร์ชู๊ตที่รุนแรง เพราะการคำนวณตัวแปรปรับไม่สามารถทำการควบคุม ได้ทันกับการเปลี่ยนแปลงของพฤติกรรมของกระบวนการที่ไม่เป็นเชิงเส้นสูง จึงเป็นที่มาของการควบคุมโดยอาศัยแบบจำลองโมเดลพรีดิกทีฟที่ใช้งานวิจัยนี้

บทนี้กล่าวถึงทฤษฎีการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ อัลกอริธึมและการประยุกต์ใช้การควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟในงานวิจัยนี้

3.1 ทฤษฎี

จากแนวคิดการควบคุมกระบวนการต้องการให้ตัวแปรควบคุมคงค่าอยู่ที่ค่าที่ต้องการ การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ (Model Predictive Control, MPC) เป็นเทคนิคการควบคุมที่อาศัยแบบจำลองกระบวนการ ในการทำนายพฤติกรรมของเอาท์พุทในอนาคต การคำนวณค่าตัวแปรปรับที่เหมาะสม อาศัยการออปติไมซ์ออปเจ็คทีฟฟังก์ชันซึ่งเป็นผลต่างของค่าเอาท์พุทที่ได้จากการทำนายกับค่าเซ็ตพอยท์ที่ต้องการ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของตัวแปรปรับและตัวแปรสเตทให้มีค่าต่ำสุด เป็นการแก้ปัญหาระบบควบคุมออปติมัลออนไลน์ ซึ่งสามารถเรียกได้ว่าเป็นทั้งตัวควบคุมและออปติไมเซอร์โครงสร้างของการควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟนี้แสดงดังรูปที่ 3.1

จากแผนภาพรูปที่ 3.1 การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟจะทำการควบคุมตัวแปรควบคุมของกระบวนการ (Plant) ให้อยู่ที่ค่าที่ต้องการคือค่าเซ็ตพอยท์ (Set Point) โดยอาศัยค่าเบี่ยงเบนจากค่าเซ็ทพอยท์ของตัวแปรควบคุมก่อน (ซึ่งอยู่ในรูปสัญญาณของตัวแปรวัด และค่าเอาท์พุทที่ได้จากการทำนายโดยอาศัยแบบจำลองกระบวนการ กับค่าเซ็ตพอยท์ที่ต้องการ) เพื่อนำไปคำนวณหาตัวแปรปรับ (Manipulated Variable) ที่เหมาะสมและสอดคล้องกับพฤติกรรมของกระบวนการ

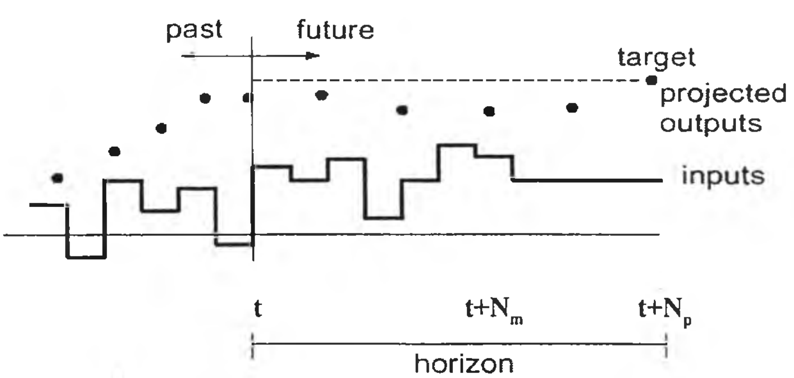


รูปที่ 3.1 ระบบการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ

ที่จะเกิดขึ้น โดยการคำนวณหาตัวแปรปรับที่เหมาะสม จะใช้หลักการของไดนามิกออปติไมเซชัน (Dynamic Optimization)

การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ สามารถสามารถประยุกต์ใช้ได้กับทั้งแบบจำลองที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น นอกจากนี้สมรรถนะการควบคุมของโมเดลพรีดิกทีฟ สามารถกำหนดได้โดยเลือกออปเจ็คทีฟฟังก์ชันที่เหมาะสม ซึ่งขึ้นกับว่าต้องการผลการตอบสนองของระบบ เป็นอย่างไร โดยการประยุกต์การใช้งานของโมเดลพรีดิกทีฟ จะจำกัดไว้กับกระบวนการหรือระบบซึ่งแบบจำลองของกระบวนการและพารามิเตอร์ต่างๆที่น่าเชื่อถือ และมีความถูกต้องพอสมควร และการวัดค่าของตัวแปรควบคุม รวมทั้งเอาท์พุทต่างๆซึ่งจะทำให้รู้ว่า สภาวะปัจจุบันของระบบอยู่ที่ใดเท่านั้น

นอกจากนี้การควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟร่วมกับตัวประมาณค่าสเตทและพารามิเตอร์ สามารถจัดการกับความผิดพลาดของแบบจำลองและสัญญาณรบกวน (Disturbance) ที่เกิดในกระบวนการผลิตได้ ตราบเท่าที่แบบจำลองยังสามารถใช้แทนกระบวนการจริงได้ ซึ่งการควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟ สมรรถนะการควบคุมจะดีกว่าการควบคุมแบบดั้งเดิม (การควบคุมแบบพีไอดี)



รูปที่ 3.2 วิธีแกนการถดถอย (Receding Horizon Strategy)

โครงสร้างของโมเดลพรีดิกทีฟ ที่อาศัยการออปติไมซ์ออปเจ็คทีฟฟังก์ชัน เพื่อหาค่าที่เหมาะสมในการปรับตัวแปรปรับ ที่ทำให้ตัวแปรควบคุมเข้าสู่ค่าที่ต้องการ โดยอาศัยวิธีแกนเคลื่อนที่หรือแกนการถดถอย (Moving Horizon or Receding Horizon Strategy) แสดงดังรูปที่ 3.2

ในการคำนวณชุดของตัวแปรปรับที่ เวลา t โมเดลพรีดิกทีฟจะคำนวณชุดตัวแปรปรับไป N_m สเต็ป ซึ่งประกอบด้วย ค่าตัวแปรปรับที่เวลาปัจจุบันและในอนาคตผ่านแกนการควบคุม (Input Horizon) ซึ่งจากแบบจำลองกระบวนการโมเดลพรีดิกทีฟ สามารถทำนายพฤติกรรมของเอาท์พุทที่เวลา t (y(t+k/t)) ล่วงหน้า N_p สเต็ป โดยการออปติไมซ์ด้วยออปเจ็คทีฟฟังก์ชันซึ่งทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากข้อมูลค่าเซ็ตพอยท์ที่ต้องการน้อยที่สุด ภายใต้ขอบเขตจำกัดต่างๆ ของอินพุทและเอาท์พุทของกระบวนการเรียกขั้นตอนการทำนี้ว่า การควบคุมออปติมัลแบบลูปเปิด (Open loop Optimal Control) ตัวแปรปรับค่าแรกที่ได้จากการออปติไมซ์จะถูกนำมาใช้ในควบคุมกระบวนการที่เวลา t หลังจากนั้นระบบควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ จะทำการวัดค่าตัวแปรวัดและประมาณค่าตัวแปรสเตทเพื่อนำไปออปติไมซ์หาค่าตัวแปรปรับใหม่ครั้งถัดไปทำวนซ้ำจนกระทั่ง ถึงเวลาสุดท้าย t_f

3.2 โครงสร้างของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ

เนื่องมาจากโครงสร้างของโมเดลพรีดิกทีฟ อาศัยการออปติไมซ์ออปเจ็คทีฟฟังก์ชัน เพื่อหาคำตอบ จึงขอกล่าวถึงรายละเอียดองค์ประกอบของปัญหาทางออปติไมซ์ที่สำคัญจะประกอบไปด้วย

1. ฟังก์ชันวัตถุประสงค์หรือออปเจ็คทีฟฟังก์ชัน (objective function) มักเป็นปัญหาที่เราต้องการหาคำตอบของสมการที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งต้องเขียนให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ โดยคำตอบของสมการอาจทำให้ออปเจ็คทีฟฟังก์ชันมีค่ามากที่สุดหรือมีค่าที่น้อยที่สุด
2. ข้อจำกัดของปัญหาที่เป็นสมการ
3. ข้อจำกัดของปัญหาที่เป็นอสมการ

ปกติจะสามารถเขียนสมการ เพื่อคำนวณหาชุดของค่าการควบคุมในอนาคตจากสมการสเตท โดยต้องให้อยู่ในขอบเขตกำหนดต่างๆ ซึ่งจะต้องทำให้ออปเจ็คทีฟฟังก์ชันมีค่าน้อยที่สุด ตัวอย่างข้างล่างนี้ คือตัวอย่างของการเขียนสมการเพื่อคำนวณหาชุดของค่าการควบคุมดังกล่าว

มีการกำหนดขอบเขตของตัวแปรปรับเพื่อแสดงว่ากระบวนการในความเป็นจริง ค่าตัวแปรปรับสามารถปรับเปลี่ยนได้ในช่วงที่กำหนดเท่านั้น ส่วนข้อกำหนดของตัวแปรควบคุมเพื่อต้องการให้คำนวณชุดค่าตัวแปรปรับโดยตัวแปรควบคุมอยู่ที่ค่าเป้าหมายเมื่อถึงเวลาที่กำหนด

ออปเจ็คทีฟฟังก์ชัน	$\min \int_0^{t_f} \{(W_1(X - X^{sp})^2 + W_2(\Delta U)^2\} dt$	(3.1)
สมการสเตท	$\dot{X} = f((X(t), U(t))$	(3.2)
ขอบเขตกำหนดของตัวแปรปรับ	$U_{min} < U(t) < U_{max}$	(3.3)
ข้อกำหนดของตัวแปรควบคุม	$X(t + t_f) = Xsp$	(3.4)

โดยที่

W_1และW_2 เป็นเวกเตอร์น้ำหนัก ซึ่งนักออกแบบสามารถเลือกผลการตอบสนองของกระบวนการโดยการกำหนดค่าเวกเตอร์น้ำหนักเหล่านี้ให้เหมาะสม

U_{min}และU_{max}คือ ค่าน้อยที่สุดของตัวแปรปรับ และค่ามากที่สุดของตัวแปรปรับ ตามลำดับ

t_f คือเวลาในอนาคตที่กำหนด (เวลาที่จะทำการคำนวณชุดของตัวแปรปรับเพื่อควบคุมตัวแปรควบคุมให้อยู่ที่ค่าที่ต้องการ

โครงสร้างของการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟที่ใช้ในงานวิจัยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.2.1 สมการแบบจำลองของกระบวนการ

สมการทั่วไปของกระบวนการเพื่อใช้แทนกระบวนการจริงในระบบควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= g(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

โดยที่

f เป็นไดนามิกส์ของกระบวนการที่ต้องการควบคุม

x คือเวคเตอร์ตัวแปรสเตท

u คือเวคเตอร์ของตัวแปรปรับ (สัญญาณอินพุทกระบวนการ)

y คือเวคเตอร์ตัวแปรเอาท์พุท

สมการตัวแปรสเตท (State Equation) ที่ใช้ในโมเดลพรีดิกทีฟในงานวิจัยนี้จะอยู่ในรูปแบบสมการสเตทสเปซ ซึ่งเป็นแบบจำลองเชิงเส้น กรณีที่แบบจำลองของกระบวนการมีความไม่เชิงเส้น ต้องทำการแปลงแบบจำลองให้เป็นสมการเชิงเส้น (Linearization) ซึ่งทำการแปลงให้เป็นเชิงเส้นใหม่ทุกค่าของการควบคุมจะเรียกว่า Locally Linearization หลังจากการแปลงให้เป็น

เชิงเส้นจะได้สมการสเตทของกระบวนการทั้งในรูปของสมการต่อเนื่อง และสมการไม่ต่อเนื่อง (สมการดีสครีต - discrete) ดังนี้

สมการต่อเนื่อง

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx \tag{3.6}$$

โดยที่

A, B และ C เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่ที่มีขนาดเป็น nxn

n เป็นจำนวนตัวแปรสเตท

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

สมการไม่ต่อเนื่อง

$$x_{k+1} = Gx_k + Hu_k$$
$$y_k = Cx_k \tag{3.7}$$

โดยที่

G, H, และ C เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่

(หมายเหตุ: สมการที่ใช้ในงานวิจัยอยู่ในรูปแบบสมการไม่ต่อเนื่อง สมการ 3.7)

3.2.2 ขอบเขตของตัวแปรปรับและตัวแปรสเตท

ระบบควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟสามารถควบคุมระบบให้อยู่ภายในขอบเขตของตัวแปรปรับและขอบเขตของตัวแปรสเตทที่ต้องการได้ แบ่งชนิดขอบเขตตามรูปแบบของสมการ

ขอบเขตได้สองชนิดคือ สมการขอบเขต (equality constraint) และ อสมการขอบเขต (inequality constraint)

1. สมการขอบเขต มีลักษณะเป็นสมการที่หาค่าได้ชัดเจน สามารถเขียนเป็นสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$h(x, u) = 0 \tag{3.8}$$

2. อสมการขอบเขต สามารถเขียนเป็นสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$g(x, u) > 0 \tag{3.9}$$

และอสมการขอบเขตยังแบ่งได้สองประเภท ยกตัวอย่างเช่นขอบเขตของตัวแปรปรับที่สามารถเขียนได้ทั้งสองแบบดังนี้

2.1 อสมการขอบเขตที่มีขอบเขตชัดเจน (Hard Constraint)

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \tag{3.10}$$

2.2 อสมการขอบเขตที่มีขอบเขตไม่ชัดเจน (Soft Constraint)

$$\begin{aligned} u_{min} \pm \varepsilon &\leq u_{max} \pm \varepsilon \\ 0 \leq \varepsilon &\leq \varepsilon_{max} \end{aligned} \tag{3.11}$$

(หมายเหตุ: อสมการที่ใช้ในงานวิจัยอยู่ในรูปแบบขอบเขตชัดเจน สมการ 3.10)

3.2.3 ออปเจ็คทีฟฟังก์ชันหรือฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective function)

ในระบบควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟ ส่วนมากจะเขียนออปเจ็คทีฟฟังก์ชันในรูปแบบของควอดราติกคือรูปแบบยกกำลังสองของผลต่างของตัวแปรสเตทและตัวแปรปรับ ออปเจ็คทีฟฟังก์ชันคือฟังก์ชันที่กำหนดสมรรถนะของการทำออปติไมซ์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันจะให้ผลเป็นค่าบวกเพียงค่าเดียวในกรณีที่หาค่าน้อยที่สุด (เป็นลบในกรณีที่หาค่ามากที่สุด) สามารถเปลี่ยนตามกระบวนการหรือตัวแปรที่ต้องการออปติไมซ์ ออปเจ็คทีฟฟังก์ชันสามารถเขียนได้หลายรูปแบบเช่นฟังก์ชันวัตถุประสงค์รูปแบบไดนามิกเมตริกซ์ (Dynamic Matrix Control) Prett and Gillette (1979) เขียนออปเจ็คทีฟฟังก์ชันในรูปกำลังหนึ่งของตัวแปรควบคุมและตัวแปรปรับฟังก์ชัน

เป้าหมายในรูปแบบควอดราติกไดนามิก Ricker (1985) และ Eaton และ Rawling (1990) การเขียนออปเจ็คทีฟฟังก์ชันในรูปกำลังสองของตัวแปรควบคุมและตัวแปรปรับแสดงได้ดังนี้

$$J = \frac{1}{2}[(x_{sp} - x)^T Q(x_{sp} - x) + (u_k - u_{k-1})^T R(u_k - u_{k-1})] \tag{3.12}$$

หรือ

$$J = \frac{1}{2}[x^T Qx + u^T Ru] \tag{3.13}$$

Q และ R เป็นเมตริกซ์น้ำหนักของตัวแปรสเตทและตัวแปรปรับตามลำดับ เป็นเมตริกซ์ที่ระบุความสำคัญของตัวแปรในการควบคุมและการปรับจูนของระบบควบคุมเป็นค่าที่สามารถปรับเปลี่ยนได้

ระบบควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟ การควบคุมให้ค่าตัวแปรควบคุมเข้าสู่ค่าที่ต้องการภายในแกนการควบคุม N_m สเต็บและการคำนวณผลตอบสนองกระบวนการ N_p สเต็บ เขียนสมการดัชนีสมรรถนะ (J) ได้ดังสมการต่อไปนี้

สมการต่อเนื่อง $$J = \int_t^{t+Np} \frac{1}{2}(x^T Qx + u^T Ru)dt \tag{3.14}$$

เนื่องจากระบบควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟ สามารถควบคุมให้ค่าตัวแปรปรับเข้าสู่ค่าที่ต้องการภายในเวลา $k+N_m$ ทำให้ค่าตัวแปรปรับและตัวแปรสเตทมีค่าเท่ากับศูนย์ หลังจากช่วงเวลา $k+N_m$ จากสมการ3.14 สามารถเขียนฟังก์ชันดัชนีสมรรถนะใหม่

รูปแบบดีสครีต $$J = \sum_k^{k+Nm} \frac{1}{2}(x^T Qx + u^T Ru) \tag{3.15}$$

3.2.4 การออปติไมซ์กระบวนการเมื่อมีขอบเขตจำกัด

เนื่องจากในความเป็นจริงค่าของตัวแปรปรับกระบวนการสามารถทำงานได้ในช่วงจำกัดช่วงหนึ่งเท่านั้น เช่น ตัวแปรปรับกระบวนในงานวิจัยอุณหภูมิของน้ำแจ็คเก็ตที่ปรับเปลี่ยนได้ในช่วง 0 ถึง 100 องศาเซลเซียส ระบบควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟสามารถเพิ่มขอบเขตจำกัดทั้งในรูปของสมการและอสมการเข้าไว้ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

พิจารณาการหาชุดของตัวแปรปรับผ่านแกนการควบคุม ที่เวลา j คือ u^{j}_{k+i} (เมื่อ $i = 0,1,\ldots, N_m$) ที่สอดคล้องกับค่าออปเจ็คทีฟฟังก์ชัน จากรูปที่ 3.2 เมื่อออปเจ็คทีฟฟังก์ชันเขียนอยู่ในรูปแบบควอดราติก ตามสมการ 3.15

โดย N_m คือจำนวนสเต็ปของตัวแปรปรับผ่านแกนการควบคุม

ตัวยก j เวลาที่กำลังพิจารณาหาค่าตัวแปรปรับ

ตัวห้อย k คือเวลาในรูปแบบดีสครีต

จากสมการแบบจำลองของกระบวนการในรูปแบบสเตทสเปซ สมการ (3.7)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Gx_k + Hu_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \tag{3.7}$$

สมการขอบเขตจำกัด $$Gx_k + Hu_k - x_{k+1} = 0 \tag{3.16}$$

อสมการขอบเขตจำกัด $$u_{k,min} \le u_k \le u_{k,max} \tag{3.17}$$

จากหลักการออปติไมซ์หาค่าต่ำสุด (Minimum's Principle) วิธีที่นิยมใช้สำหรับการแก้ปัญหาระบบควบคุมออปติมัล เมื่อมีสมการขอบเขตจำกัดคือวิธีลากรองจ์มัลติไพเออร์ (Lagrange Multiplier) (White, 1977)

เมื่อพิจารณาอสมการ (3.17) ยังไม่มีขอบเขตของตัวแปรปรับ กำหนดให้ขอบเขตของตัวแปรปรับเป็นอะไรก็ได้ ซึ่งใช้วิธีกำหนดขอบเขตของตัวแปรปรับไม่ถูกรวมในออปเจ็คทีฟฟังก์ชัน เมื่อนำหลักการของลากรองจ์มัลติไพเออร์มาประยุกต์ใช้ ทำให้สามารถรวมสมการ (3.7) และ (3.16) ถึง (3.17) กับออปเจ็คทีฟฟังก์ชันสมการ (3.15) เขียนสมการหาดัชนีสมรรถนะใหม่ (Augmented cost function)

สมการต่อเนื่อง $$L(x,u) = \sum_{t}^{t+Nm} \frac{1}{2}[(x^T Qx + u^T Ru) + \dot{\lambda}(Gx + Hu - \dot{x})] \tag{3.18}$$

สมการไม่ต่อเนื่อง

$$L(x, u) = \sum_{k}^{k+Nm} \frac{1}{2}[(x_k^T Qx_k + u_k^T Ru_k) + \lambda_{k+1}(Gx_k + Hu_k - x_{k+1})] \tag{3.19}$$

โดยที่

$\lambda(t) \in R^n$ เป็นลากรองจ์มัลติไพเออร์ที่มีขนาด n สมการ

จากหลักการออปติไมซ์หาค่าต่ำสุด เงื่อนไขที่ทำให้ชุดของตัวแปรปรับ(u^{j}_{k+i})(เมื่อ $i = 0,1,\ldots, N_m$) ที่สอดคล้องกับออปเจ็คทีฟฟังก์ชันค่าต่ำสุด (3.19) มี 2 เงื่อนไข

1. เงื่อนไขจำเป็นออยเลอร์-ลากรองจ์ (Euler – Lagrange Conditions)

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]=0 \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right]=0 \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right]=0 \tag{3.22}$$

จากเงื่อนจำเป็นทั้งสามสมการนี้ ค่าของชุดของตัวแปรปรับ (u^{j}_{k+i}) (เมื่อ $i = 0,1,\ldots, N_m$) ที่สอดคล้องกับออปเจ็คทีฟฟังก์ชันค่าต่ำสุดจะต้องเป็นจริงทุกสมการ จากสามสมการนี้ จะพบว่า ออปเจ็คทีฟฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชันกับ $\partial \dot{u}$ จึงทำให้เทอมอนุพันธ์อันดับสอง ในสมการ (3.22) มีค่าเป็นศูนย์ สมการทั้งสามจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

จากสมการ 3.20 จัดรูปสมการใหม่ได้

$$Qx+G^{T}\lambda-\dot{\lambda}=0 \tag{3.23}$$

จากสมการ 3.21 จัดรูปสมการใหม่ได้

$$R^{T}u+\lambda^{T}H=0 \tag{3.24}$$

จากสมการ 3.22 จัดรูปสมการใหม่ได้

$$Gx+Hu-\dot{x}=0 \tag{3.25}$$

2. เงื่อนไขจำเป็นบทขวาง (Transversality Conditions)

$$x(t_0)=x_0 \tag{3.26}$$

จากสมการที่ (3.23) และ (3.25) ของเงื่อนไขจำเป็นออยเลอร์-ลากรองจ์ จะพบว่าถ้าชุดของตัวแปรปรับ (u_k^j) ที่สอดคล้องกับค่าสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์จากสมการที่ (3.23) และสมการ (3.25) จะมีความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้นของค่า λ และ ค่า x White จึงสมมุติให้ที่เวลาสุดท้าย

$$\lambda(t_f) = Qx(t_f) \tag{3.27}$$

จากสมการเงื่อนจำเป็นทั้งหมด สมการที่ (3.23) และ (3.25) สมมุติถ้ามีสมการสเตทมี n สมการ จะให้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งทั้งหมด 2n สมการ

จากสมการ (3.23) เมื่อทราบค่าเริ่มต้น (Initial Conditions) ที่เวลาเริ่มต้น ($t = t_0$) เงื่อนไขจำเป็นบทขวางสมการ (3.27) โดย $x(t_0) = x_0$ ถ้ามีสมการสเตทมี n สมการ จากสมการ(3.27) จะให้ค่าสเตทที่เวลาเริ่มต้นจำนวน n ค่า สามารถใช้สมการ (3.23) หาค่าสเตทที่เวลาในอนาคตได้จนกระทั่งถึงค่าที่เวลาสุดท้าย

และจากสมการ (3.25) เมื่อทราบค่าสุดท้าย (Final Conditions) ที่เวลาค่าสุดท้าย ($t = t_f$) เงื่อนไขจำเป็นบทขวางสมการ (3.27) โดย $\lambda(t_f) = Qx(t_f)$ ถ้ามีสมการสเตทมี n สมการ จากที่ทราบค่าสเตทที่เวลาสุดท้ายจากสมการ (3.23) ทำให้รู้ค่าของลากรองจ์มัลติไพเออร์ ที่เวลาสุดท้าย n ค่า จากนั้นใช้สมการ (3.25) แก้ปัญหาหาค่าลากรองจ์มัลติไพเออร์ ที่เวลาเวลาสุดท้ายได้จนกระทั่งทราบค่าถึงค่าที่เวลาเริ่มต้น

จะสามารถเรียกปัญหาที่ทราบค่าที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายประเภทนี้ว่าเป็นปัญหา Boundary Conditions Two-Point-boundary value problem (TPBVP) ซึ่งโดยทั่วไปคือ จากที่วัตถุประสงค์เพื่อหาชุดของตัวแปรปรับ (u_{k+i}^j)(เมื่อ $i = 0,1,\dots, N_m$) ที่สอดคล้องกับค่าสมการออปเจ็คทีฟฟังก์ชัน ซึ่งในการแก้ปัญหา TPBVP หาผลคำตอบได้ยาก มีวิธีที่นำมาใช้กันอย่างแพร่หลายสำหรับการหาผลเฉลยของวิธี TPBVP คือวิธีวนซ้ำ (Iterative Method)

เนื่องจากการแก้ปัญหาด้วยวิธีลากรองจ์มัลติไพเออร์ (White, 1977) ดังที่กล่าวมาแล้วพิจารณาอสมการ(3.15)ว่ายังไม่มีขอบเขตของตัวแปรปรับ แต่ปัญหาที่กำลังพิจารณานี้ยังมีอสมการขอบเขตจำกัดร่วมด้วย วิธีที่สำคัญที่เป็นที่รู้จักกันดีและง่ายวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการแก้ปัญหานี้คือเทคนิคการลงโทษ (Penalty Function method) ซึ่งพิจารณาจากสมการ (3.15) สมการออปเจ็คทีฟฟังก์ชันเดิม จะได้สมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ใหม่ ซึ่งเป็นการผนวกอสมการขอบเขตจำกัดในรูปแบบสมการเข้าไปไว้ในสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ในลักษณะของเทอมลงโทษ (Penalt term)

พิจารณาจากอสมการขอบเขตจำกัดสมการ (3.15)

$$u_{k+i,min}^j \leq u_{k+i}^j \leq u_{k+i,max}^j \text{ (เมื่อ } i = 0,1,\dots, N_m) \tag{3.28}$$

สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$(u^j_{k+i,max} - u^j_k)(u^j_k - u^j_{k+i,min}) \geq 0 \tag{3.29}$$

หรือแทนด้วย

$$g(u^j_k) \geq 0 \tag{3.30}$$

เมื่อ

$$g(u^j_k) = (u^j_{k+i,max} - u^j_k)(u^j_k - u^j_{k+i,min}) \tag{3.31}$$

เมื่อพิจารณา เทอมลงโทษนี้ กับในงานวิจัย เนื่องจากงานวิจัยนี้มีขอบเขตของตัวแปรปรับของกระบวนการคือ อุณหภูมิของแจ๊คเก็ตสามารถปรับเปลี่ยนได้ในช่วง 273.15-373.15 เคลวิน ถ้าสมมุติชุดของตัวแปรปรับคืออุณหภูมิของแจ๊คเก็ตในรูปแบบดีสครีตเขียนได้ดังนี้

$$(T^j_{j,k+i}) \quad (\text{เมื่อ } i = 0,1,\ldots,N_m)$$

จากสมการทั่วไป (3.28) สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์สำหรับในงานวิจัยนี้ได้ดังนี้

$$273.15 \leq T^j_{j,k+i} \leq 373.15 \; (\text{เมื่อ } i = 0,1,\ldots,N_m). \tag{3.32}$$

จากสมการ (3.30)สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$(T^j_{j,k+i,max} - T^j_{j,k})(T^j_{j,k} - T^j_{j,k+i,min}) \geq 0 \; (u^j_{k+i})(\text{เมื่อ } i = 0,1,\ldots,N_m) \tag{3.33}$$

หรือแทนด้วย

$$g(T^j_{j,k}) \geq 0 \tag{3.34}$$

เมื่อ

$$g(T^j_{j,k}) = (T^j_{j,k+i,max} - T^j_{j,k})(T^j_{j,k} - T^j_{j,k+i,min}) \tag{3.35}$$

หรือ

$$g(u^j_k) = (373.15 - u^j_k)(u^j_k - 273.15) \tag{3.36}$$

โดย

$$\begin{aligned} u^j_{k+i,max} &= 373.15 \\ u^j_{k+i,min} &= 273.15 \end{aligned} \quad (\text{เมื่อ } i = 0,1,\ldots,N_m) \tag{3.37}$$

พิจารณาจากสมการ (3.33)ดังนั้นช่วงที่เทอมลงโทษถูกพิจารณา (Active) ก็คือช่วงที่สมการ(3.34) ไม่เป็นจริง

$$g(T^j_{j,k}) \ngeq 0 \qquad \text{หรือ} \qquad g(T^j_{j,k}) < 0 \tag{3.38}$$

ซึ่งก็ตรงกับค่าของขอบเขตของตัวแปรปรับของกระบวนการคือ อุณหภูมิของแจ๊คเก็ต สามารถปรับเปลี่ยนได้ในช่วง 273.15-373.15 เคลวิน

เนื่องจากการแก้ปัญหาด้วยวิธีลากรองจ์มัลติไพเออร์ (White, 1977) ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น พิจารณาอสมการ (3.33) ว่ายังไม่มีขอบเขตของตัวแปรปรับ แต่ปัญหาที่กำลังพิจารณานี้ยังมีอสมการขอบเขตจำกัดร่วมด้วย จาก (3.15) สมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์เดิม (J)จะได้ออปเจ็คทีฟฟังก์ชันใหม่ (J')

$$J' = J + \frac{1}{2}(g(u)^T NH(g)g(u))) \tag{3.39}$$

สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในดัชนีสมรรถนะใหม่ในรูปดีสครีต

$$L' = \sum_{k}^{k+Nm}\left[\frac{1}{2}(x_k^T Qx_k + u_k^T Ru_k) + \lambda_{k+1}(Gx_k + Hu_k - x_{k+1}) + \frac{1}{2}(g(u)^T NH(g)g(u))\right] \tag{3.40}$$

โดยที่ N คือเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนัก ในงานวิจัยนี้ให้ค่าเท่ากับ 1

H(g) คือเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนักเฮววิไซด์ (Heaviside diagonal matrix)

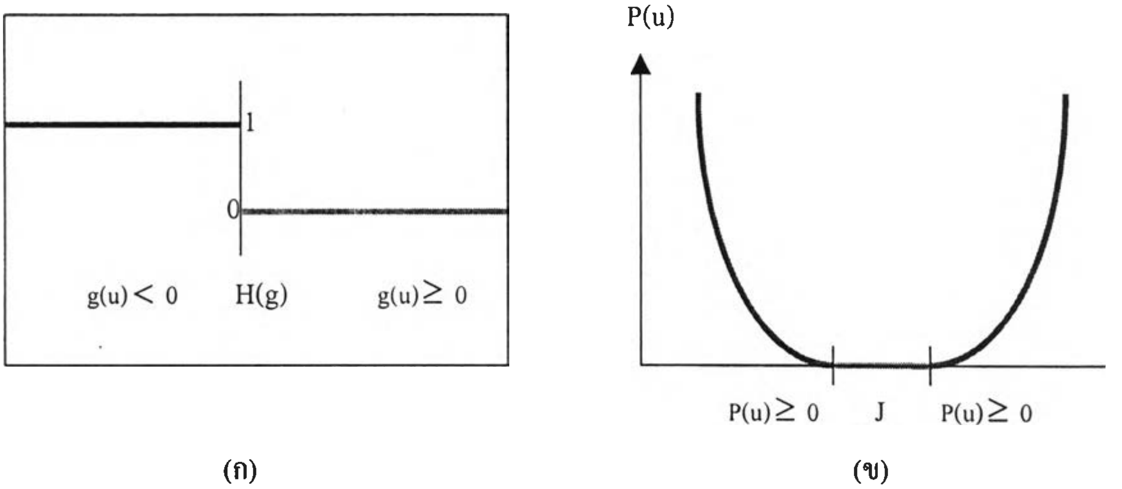
ซึ่งมีสมาชิก

$$H(g) = \begin{cases} 1, & g(u) < 0 \\ 0 & g(u) \geq 0 \end{cases} \tag{3.41}$$

กล่าวคือเมื่อมีการละเมิดอสมการขอบเขตจำกัดดังกล่าวในเทอมสมการ (3.38)จะเห็นว่าจากสมการ (3.41) ค่าของ H(g) มีค่าเท่ากับ 1 นั่นคือเทอมลงโทษ (Penalty Function) จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่งผลให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (3.40)มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยและในทางกลับกันค่าของเทอมลงโทษจะไม่เพิ่มขึ้นถ้าไม่มีการละเมิดสมการขอบเขต ดังนั้นสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ใหม่ จะไม่มีเทอมลงโทษด้วย ซึ่งสามารถแสดงการเพิ่มค่าของออปเจ็คทีฟฟังก์ชันเมื่อมีเทอมลงโทษได้ดังรูปที่ 3.3

ในงานวิจัยนี้จะทำการแก้ปัญหาระบบออปติมัลโดยวิธีเทอมลงโทษ (The Penalty Function Method) สำหรับการลงโทษตัวแปรปรับในรูปอสมการที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขของอสมการ (3.32) เพื่อหาชุดของตัวแปรปรับ u^j_{k+i} ($u^j_{k+i} = u_k$ เมื่อ $i = 0,1,\ldots, Nm$) ที่สอดคล้องกับค่าสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ซึ่งจะขอกล่าวถึงรายละเอียดของวิธีวนซ้ำที่นำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในระบบออปติมัลดังนี้

วิธีวนซ้ำ เป็นวิธีที่เริ่มต้นด้วยการเดาค่าที่ต้องการ แล้วปรับปรุงค่าที่เดาขึ้นมานี้ ให้ดีขึ้น กล่าวคือเข้าใกล้ผลเฉลยที่แท้จริง เป็นลำดับ จนในที่สุดค่าที่ปรับปรุงล่าสุด สอดคล้องกับเงื่อนไข



รูปที่ 3.3 ออปเจ็คทีฟฟังก์ชันเมื่อมีเทอมลงโทษ (Luenberger, 1973)

(ก) เมตริกซ์ถ่วงน้ำหนักเฮวิไซด์

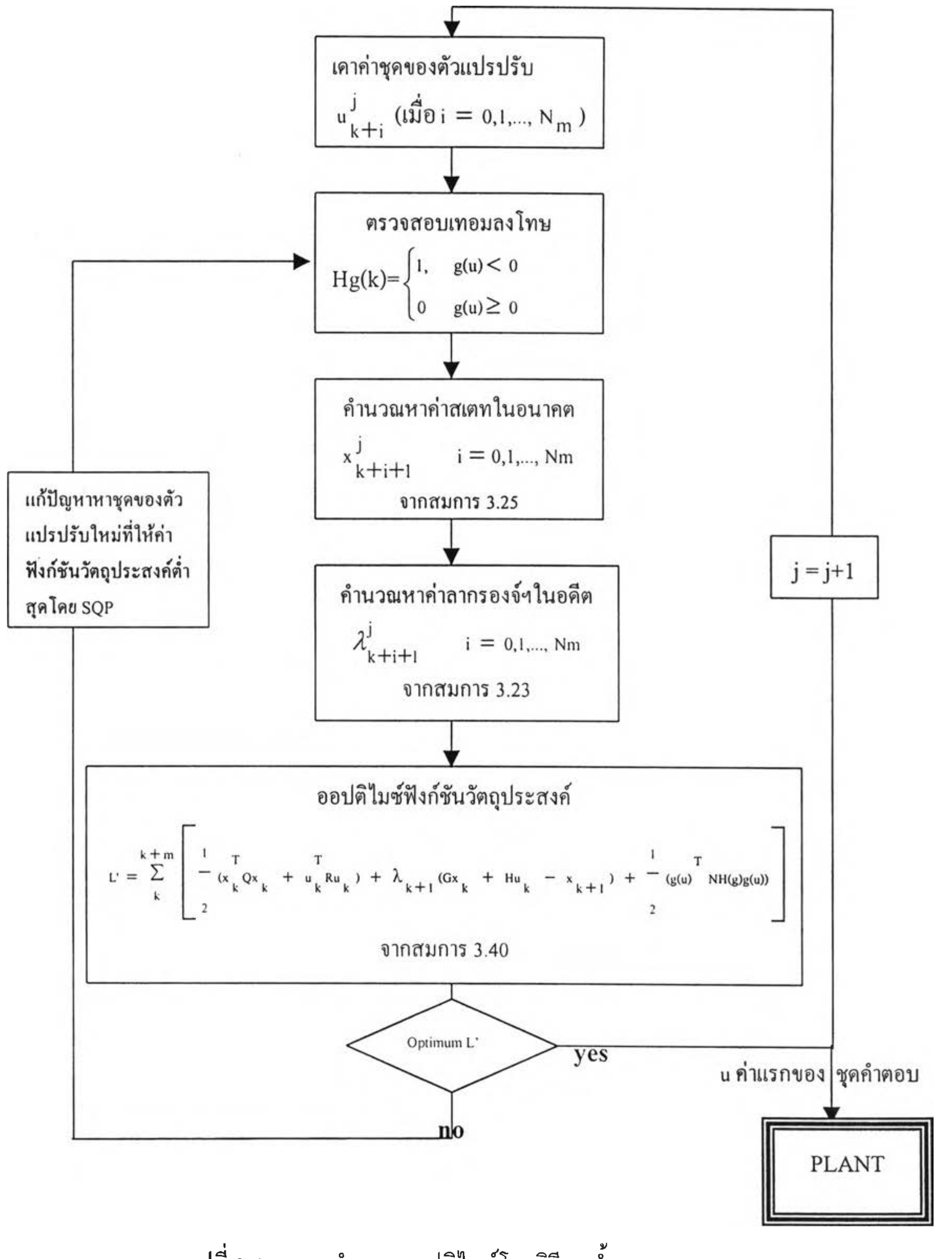
(ข) การเพิ่มค่าของออปเจ็คทีฟฟังก์ชันเมื่อมีเทอมลงโทษ

โดยที่ จากสมการ(3.40) P(u) เป็นเทอมลงโทษ

$$P(u) = \frac{1}{2}(g(u)^T NH(g)g(u)))$$

จำเป็นและเพียงพอทุกเงื่อนไข (อธิบายในภาคผนวก ฉ) ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชัน fmincon ซึ่งเป็นฟังก์ชันในออปติไมเซชันทูลบอกซ์ (Optimization Toolbox) ของโปรแกรมแมทแลบ ซึ่งใช้เทคนิคการแก้ปัญหาโปรแกรมควอดคราติกแบบโดยลำดับ (Sequential Quadratic Programming , SQP)

ซึ่งเสนอแผนผังการหาคำตอบของการออปติไมซ์ที่ใช้ในงานวิจัยได้ดังรูป 3.4 นี้ โดยมีอัลกอริธึมแสดงดัง ตารางถัดไป (3.1)



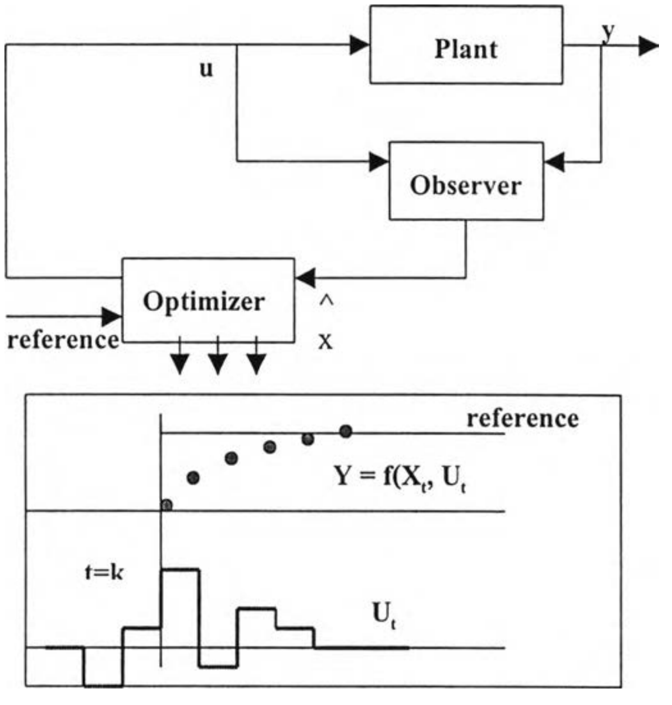
รูปที่ 3.4 การหาคำตอบออปติไมซ์โดยวิธีวนซ้ำ

ตารางที่ 3.1 อัลกอริธึมการวนซ้ำ (White, 1977)

อัลกอริธึมการวนซ้ำ (Iterative Method)
1. เดาชุดของตัวแปรปรับ u^{j}_{k+i} ($u^{j}_{k+i} = u_k$ เมื่อ $i = 0,1,\ldots, Nm$) ที่สอดคล้องกับค่าสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ในกรณีที่ไม่ทราบข้อมูลเกี่ยวกับค่าของ $u(t)$ เลย อาจเดาให้ $u^{j}_{k+i} = u^{j-1}_{k+i}$ ตลอดทั้งช่วง
2. ตรวจสอบเทอมลงโทษ $Hg(k)=\begin{cases}1, & g(u)<0\\ 0 & g(u)\geq 0\end{cases}$ สำหรับค่าของชุดตัวแปรปรับที่กำหนดในข้อ 1
3. ใช้วิธีเชิงตัวเลขแก้สมการสเตท (3.20) ด้วยวิธีรัง-กัตตาอันดับที่สี่ (4^{th} –order Runge –Kutta method เพื่อหาค่า $x^{j}_{k+i+1} = x_{k+i+1}$, $i = 0,1,\ldots, Nm$
4. ใช้ u^{j}_{k+i} และ x^{j}_{k+i+1} $i = 0,1,\ldots, Nm$ แก้สมการที่ (3.22) เพื่อหา $\lambda^{j}_{k+i+1} = \lambda_{k+i+1}$, $i = 0,1,\ldots, Nm$
5. ใช้ u^{j}_{ti}, x^{j}_{ti} และ λ^{j}_{ti} $i=0,1,\ldots, Nm$ ลงในสมการ (3.15) เพื่อตรวจสอบดูว่าค่าสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำสุด หรือไม่
I. ถ้าชุดของตัวแปรปรับ u^{j}_{k+i} ($u^{j}_{k+i} = u_k$ เมื่อ $i = 0,1,\ldots, Nm$) สอดคล้องกับค่าสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ไม่สอดคล้องกับค่าสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำสุดเทคนิค SQPจะปรับปรุงค่า ชุดของตัวแปรปรับ u^{j}_{k+i} ($u^{j}_{k+i} = u_k$ เมื่อ $i = 0,1,\ldots, Nm$) สอดคล้องกับค่าสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ จนกระทั่ง ชุดของตัวแปรสอดคล้องกับค่าสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำสุด
II. แต่ถ้าชุดของตัวแปรปรับ u^{j}_{k+i} ($u^{j}_{k+i} = u_k$ เมื่อ $i = 0,1,\ldots, Nm$)สอดคล้องกับค่าสมการฟังก์ชันวัตถุประสงค์ค่าของตัวแปรปรับค่าแรกจะถูกนำไปประยุกต์ใช้ในกระบวนการจริงแล้วช่วงเวลาของการออปติมัลจะขยับไป 1 ช่วงเวลาสุ่ม ชุดของตัวแปรปรับ u^{j}_{k+i} ($u^{j}_{k+i} = u_k$ เมื่อ $i = 0,1,\ldots, Nm$) แทน j ด้วย j+1แล้วไปยัง ขั้นตอนที่ 1 (White, 1977)

3.3 อัลกอริธึมของระบบควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟ

จากหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึง แบบจำลองกระบวน ขอบเขตตัวแปรและออปเจ็คทีฟฟังก์ชัน สุดท้ายคือการหาคำตอบออปติไมซ์โดยวิธีวนซ้ำ รูปต่อไป (3.5) เป็นภาพรวมระบบควบคุมโมเดลพรีดิกทีฟที่ใช้ในงานวิจัย ซึ่งสามารถเขียนเป็นอัลกอริธึมเป็นขั้นตอนสำหรับกระบวนการแสดงดังตาราง 3.2 และการประยุกต์ใช้ในงานวิจัยเป็นดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.5 ระบบการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ (Bemporad)

ตารางที่ 3.2 อัลกอริธึมระบบการควบคุมแบบโมเดลพรีดิกทีฟ (ไพศาล, 2540)

ขั้นตอน	คำอธิบาย
0	กำหนดเอาท์พุทและออปเจ็คทีฟฟังก์ชันในอนาคตที่ต้องการ เช่นต้องการเอาท์พุทที่ไม่มีความผิดพลาดในเวลาที่กำหนด
1	คำนวณชุดของค่าการควบคุมในอนาคตที่ทำให้ได้ค่าออปเจ็คทีฟฟังก์ชันต่ำสุด ซึ่งสเต็ปในการคำนวณเท่ากับ N_m
2	นำใช้ส่วนหนึ่งของชุดของค่าการควบคุมที่คำนวณได้(ซึ่งมักเป็นเพียงค่าแรกเท่านั้น) ประยุกต์ใช้กับระบบ
3	วัดค่าเอาท์พุทและกลับไปทำขั้นตอนที่ 1 โดยอาศัยข้อมูลหรือค่าวัดที่ได้ใหม่ แล้วทำซ้ำจากขั้นที่ 1 ถึง 3