

## บทที่ 2

### ความรู้พื้นฐานด้านแขนหุ่นยนต์และทฤษฎีการควบคุม

ในบทนี้เป็นการอธิบายถึง ความรู้ที่จำเป็นในด้านแขนหุ่นยนต์ สำหรับใช้ในการสร้างคลังโปรแกรม ซึ่งเกี่ยวข้องกับ การแปลงพิกัดของตำแหน่งในแกนพิกัดต่างๆ จลนศาสตร์ของการเคลื่อนที่ และการหาสมการพลวัต (dynamic equation) รายละเอียดเพิ่มเติมนอกเหนือจากรายงานฉบับนี้สามารถหาอ่านได้ในหนังสือด้านแขนหุ่นยนต์ทั่วไป เช่น [17, 18, 20, 22, 23] ในส่วนท้ายของบทกล่าวถึง ทฤษฎีการควบคุมแขนหุ่นยนต์ ซึ่งใช้ในคลังโปรแกรมนี้นี้ ได้แก่ การควบคุมแบบพลวัตผกผัน การควบคุมแบบโครงสร้างแปรผันได้ และการควบคุมแบบ PID

#### 2.1 ความรู้พื้นฐานด้านแขนหุ่นยนต์

แขนหุ่นยนต์ที่ใช้กับคลังโปรแกรมนี้นี้เป็นแบบท่อนแขนเรียงลำดับกล่าวคือ มีลักษณะของแขนเป็นท่อนๆ (link) เชื่อมต่อระหว่างแต่ละท่อนด้วยข้อต่อ ซึ่งข้อต่อมีอยู่ 2 ชนิด เป็นแบบหมุน (revolute joint) และแบบเลื่อนที่ (prismatic joint) ในส่วนของจลนศาสตร์เป็นการหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในปริภูมิของข้อต่อ (joint space)  $q$  ซึ่งเป็นมุม  $\theta$  หรือ ระยะทาง  $d$  สำหรับข้อต่อชนิดหมุน หรือเลื่อนที่ กับปริภูมิของการทำงาน (operational space) เช่น ตำแหน่งในพิกัด XYZ ในส่วนของสมการพลวัตเป็นการหาความสัมพันธ์ระหว่าง  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  กับแรงบิด (torque) ของแต่ละข้อต่อ ก่อนจะกล่าวถึงรายละเอียดในหัวข้อทั้งสองจะนำเสนอถึงการเปลี่ยนพิกัดของเวกเตอร์ระหว่างแกนอ้างอิง 2 ชุด ซึ่งเป็นพื้นฐานสำหรับการหาความสัมพันธ์ในส่วนของจลนศาสตร์

##### 2.1.1 การเปลี่ยนพิกัดของเวกเตอร์

- เมตริกซ์การหมุน (Rotation Matrix)

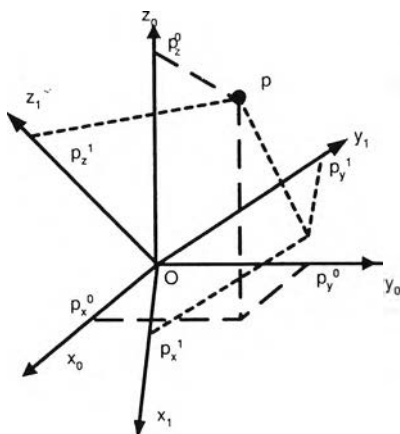
เมื่อพิจารณาแกนอ้างอิง 2 ชุดที่มีจุดกำเนิดร่วมกัน ดังรูปที่ 2.1

ให้จุด  $p$  เป็นจุดใดๆ ในปริภูมิ และให้เวกเตอร์  $p^0, p^1$  เป็นพิกัดของจุด  $p$  ในปริภูมิที่ 0 และ 1 โดย

$$p^0 = \begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{bmatrix}, \quad p^1 = \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

จะได้ว่า

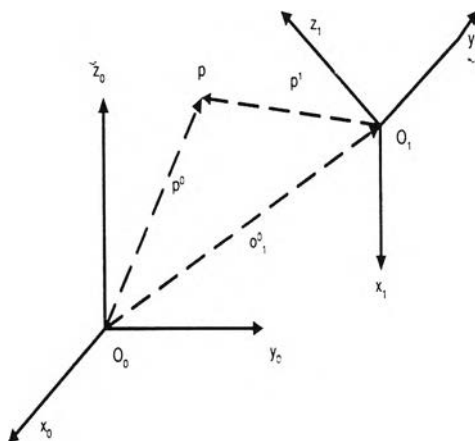
$$\begin{aligned} p^0 &= p_x^1 x_1^0 + p_y^1 y_1^0 + p_z^1 z_1^0 \\ &= [x_1^0 \ y_1^0 \ z_1^0] p^1 \\ &= R_1^0 p^1 \end{aligned} \quad (2.2)$$



รูปที่ 2.1: เวกเตอร์  $p$  ในแกนอ้างอิง 2 ชุดที่มีจุดกำเนิดร่วมกัน

เมตริกซ์  $R_1^0$  เป็นเมตริกซ์การหมุน (Rotation Matrix) จากแกนพิกัดชุดที่ 1 ไปยัง 0

- เมตริกซ์การแปลง (Transformation Matrix) ในกรณีที่มีจุดกำเนิดของแกนทั้งสองอยู่คนละจุดตั้ง



รูปที่ 2.2: เวกเตอร์  $p$  ในแกนอ้างอิง 2 ชุดที่มีจุดกำเนิดแยกกัน

รูปที่ 2.2 โดย มีเวกเตอร์  $o_1^0$  แทนเวกเตอร์ของจุดกำเนิดของแกนพิกัด 1 บนพิกัดของแกนพิกัด 0 ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์  $p$  ในแกนพิกัดทั้งสองเป็น

$$\begin{bmatrix} p^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ O^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}^0 = A_1^0 \bar{p}^1 \tag{2.3}$$

โดย เรียกเมตริกซ์  $A_1^0$  ว่าเมตริกซ์การแปลง (Transformation Matrix) จากแกนพิกัด 1 ไปยัง 0 ในกรณีที่มีแกนอ้างอิงหลายชุดต่อเนื่องกัน จากชุด  $0, 1, \dots, n$  จะได้เมตริกซ์การแปลงจาก

แกนชุดที่  $n$  ไปยัง 0 เป็น

$$\begin{aligned}\bar{p}^0 &= A_1^0 A_2^1 \cdots A_n^{n-1} \bar{p}^n \\ &= A_n^0 \bar{p}^n\end{aligned}\quad (2.4)$$

## 2.1.2 จลนศาสตร์ (Kinematics)

- จลนศาสตร์โดยตรง (Direct Kinematics)

เป็นการหาค่าตัวแปรในปริภูมิการทำงาน จากตัวแปรในปริภูมิข้อต่อ วิธีในการหาที่เป็นระบบสำหรับแขนใดๆ สามารถทำได้โดย การกำหนดแกนอ้างอิงสำหรับทุกๆ ข้อต่อ ตามวิธี Denavit-Hartenberg (ดูรายละเอียดในส่วนของภาคผนวก ก) ซึ่งจะได้เมตริกซ์การแปลงระหว่างแกนอ้างอิงชุดที่  $i-1$  กับ  $i$  เป็น

$$A_{i-1}^i(q_i) = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (2.5)$$

โดยที่  $s_{\alpha_i}$ ,  $c_{\alpha_i}$  แทน  $\sin(\alpha_i)$ ,  $\cos(\alpha_i)$  และจะได้จลนศาสตร์โดยตรง จากสมการ

$$\begin{aligned}T^0(q) &= A_1^0(q_1) \cdots A_{n-1}^n(q_n) \\ &= \begin{bmatrix} n^0 & s^0 & a^0 & p^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.6)$$

โดยที่  $n^0$ ,  $s^0$ ,  $a^0$  แทนทิศทางของปลายแขน (ทิศทางของแกนพิกัดที่  $n$  เมื่อเทียบกับแกนอ้างอิง และ  $p^0$  แทนตำแหน่งของปลายแขน (ตำแหน่งจุดกำเนิดของแกนพิกัดที่  $n$ )

- จลนศาสตร์ผกผัน (Inverse Kinematics)

เป็นความสัมพันธ์ที่ตรงข้ามกับจลนศาสตร์โดยตรง กล่าวคือ เป็นการหาตัวแปรในปริภูมิข้อต่อจากตัวแปรในการทำงาน แต่ขั้นตอนในการหานี้ไม่มีวิธีที่เป็นระบบ เนื่องจากขึ้นกับลักษณะโครงสร้างของแขน อย่างไรก็ตาม สำหรับแขนชนิดใดๆ จะสามารถหาโดยใช้การทำให้เหมาะสมที่สุด (optimization) [7] แต่จะใช้เวลาในการคำนวณมากพอสมควร

- จลนศาสตร์เชิงอนุพันธ์ (Differential Kinematics)

เป็นการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในปริภูมิข้อต่อ เช่น อัตราการหมุนของข้อต่อ ไปยังอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในปริภูมิการทำงาน เช่น ความเร็วเชิงเส้น/มุม ของปลายแขนในพิกัด XYZ ซึ่งจลนศาสตร์เชิงอนุพันธ์ทำได้จากอนุพันธ์ของจลนศาสตร์โดยตรง จะได้อยู่ในรูปของผลคูณไขว้ (cross product) โดยมีสมการเป็น

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q) \dot{q}\quad (2.7)$$

โดยที่ เมตริกซ์  $J$  เรียกว่า เมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix),  $\dot{p}$  เป็นความเร็วเชิงเส้น และ  $\omega$  เป็นความเร็วเชิงมุม ซึ่งเมตริกซ์  $J$  คำนวณจากสมการ

$$J = [J_1 \cdots J_n] \quad (2.8)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{P_i} \\ J_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{สำหรับข้อต่อแบบเลื่อนที่} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{สำหรับข้อต่อแบบหมุน} \end{cases} \quad (2.9)$$

โดยที่  $z_{i-1}$  เป็นคอลัมน์ที่ 3 ของเมตริกซ์การหมุน  $R_{i-1}^0$   
 $p$  เป็นสมาชิก 3 ตัวแรกของ คอลัมน์ที่ 4 ของเมตริกซ์การแปลง  $T_n^0$   
 $p_{i-1}$  เป็นสมาชิก 3 ตัวแรกของ คอลัมน์ที่ 4 ของเมตริกซ์การแปลง  $T_{i-1}^0$

### 2.1.3 สมการพลวัตของแขนหุ่นยนต์ (Dynamic equation)

เป็นความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิด  $\tau$  (torque) ที่แต่ละข้อต่อ มีผลต่อค่าตัวแปร  $q, \dot{q}$  และ  $\ddot{q}$  ดังสมการ

$$\tau = B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (2.10)$$

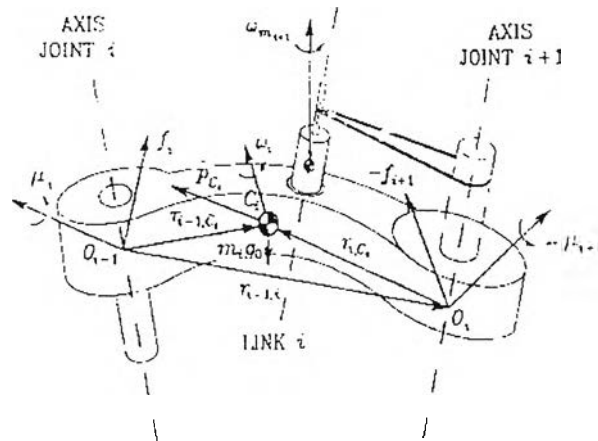
โดยที่ เมตริกซ์  $B$  เป็นผลของความเฉื่อย และเรียกว่า เมตริกซ์ความเฉื่อย (Inertia matrix), เมตริกซ์  $C$  แทนผลของแรงโคริโอลิส (Coriolis) กับแรงเข้าสู่ศูนย์กลาง (centrifugal) และเมตริกซ์  $G$  แทนผลของแรงโน้มถ่วง

ในการหาสมการพลวัตสามารถทำได้ 2 รูปแบบ คือ รูปแบบของลากรองจ์ กับนิวตัน-ออยเลอร์ โดยวิธีลากรองจ์จะมีข้อดีตรงที่ให้ภาพรวมของแรงต่างๆ ที่มากระทำ สามารถหาพจน์ต่างๆ ของเมตริกซ์ออกมาได้ แต่ใช้เวลาในการคำนวณนานมาก ไม่เหมาะสมสำหรับการทำการจำลองระบบ ส่วนวิธีของนิวตัน-ออยเลอร์ จะพิจารณาแขนเป็นท่อนๆ ที่มีแรงและโมเมนต์กระทำระหว่างกัน แล้วใช้หลักการสมดุลของแรงที่มากระทำ ดังรูปที่ 2.3 โดยที่ ตัวแขนท่อนที่  $i$  และมอเตอร์ตัวที่  $i+1$  ซึ่งกำหนดให้อยู่บนแขนนั้นจะมองรวมกันเป็น ท่อนแขนแต่งเต็ม (augmented link) ท่อนที่  $i$  โดยมีจุดศูนย์กลางของมวลอยู่ที่  $C_i$  และมีพารามิเตอร์อื่นๆ แสดงในตารางที่ 2.1 ซึ่งพจน์ของ  $\bar{I}_i = R_i \bar{I}_i^c R_i^T$  โดยเมตริกซ์  $\bar{I}_i^c$  เป็นเทนเซอร์ความเฉื่อย เมื่อหาเทียบกับแกนพิกัดที่  $i$  ซึ่งจะเป็นค่าคงที่ ส่วน  $R_i$  เป็นเมตริกซ์การหมุนจากแกนพิกัดที่  $i$  ไปยังแกนอ้างอิง (base frame) ขั้นตอนในการหาสมการประกอบด้วย 2 ส่วน คือ การเวียนเกิดไปข้างหน้า (forward recursion) และการเวียนเกิดไปข้างหลัง (backward recursion) แสดงรูปที่ 2.4 แสดงขั้นตอนการหาสมการ

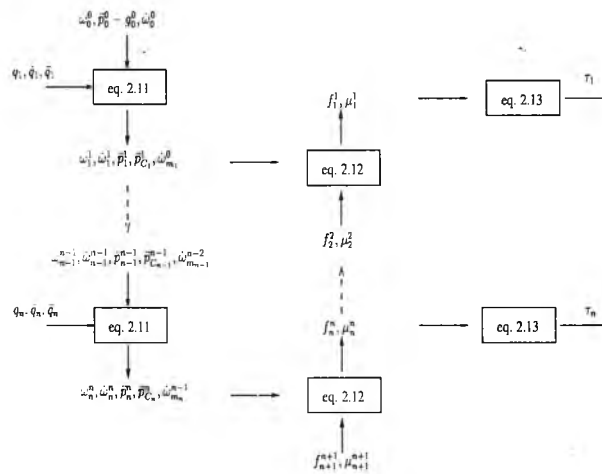
- การเวียนเกิดไปข้างหน้า โดยใช้ค่าของ  $\omega_0^0, \dot{\omega}_0^0$  และ  $\dot{p}_0^0 - \ddot{g}_0^0$  เป็นค่าเริ่มต้น แล้วใช้ค่าของ  $q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1$  ในการคำนวณหา  $\omega_1^1, \dot{\omega}_1^1, \dot{\omega}_m^1, \dot{p}_1^1$  และ  $\dot{p}_{C_1}^1$  สำหรับข้อต่อแรกแล้วทำต่อไปเรื่อยๆ จนถึงข้อต่อสุดท้ายโดยใช้สมการ (2.11)

$m_i$	เป็นมวลของท่อนแขนแต่งเดิม
$\bar{I}_i$	เป็นเมตริกซ์เทนเซอร์ความเฉื่อย (Inertia Tensor) ของท่อนแขนแต่งเดิม
$I_{mi}$	เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของส่วนโรเตอร์ของมอเตอร์
$r_{i-1,C_i}$	เป็นเวกเตอร์ที่ชี้จากจุดกำเนิดของแกนพิกัด $i - 1$ ไปยังจุดศูนย์กลางมวล $C_i$
$r_{i-1,i}$	เป็นเวกเตอร์ที่ชี้จากจุดกำเนิดของแกนพิกัด $i - 1$ ไปยังจุดกำเนิดของแกนพิกัด $i$
$\dot{p}_{C_i}$	เป็นความเร็วเชิงเส้นของจุดศูนย์กลางมวล $C_i$
$\dot{p}_i$	เป็นความเร็วเชิงเส้นของจุดกำเนิดของแกนพิกัด $i$
$\omega_i$	เป็นความเร็วเชิงมุมของท่อนแขน
$\omega_{mi}$	เป็นความเร็วเชิงมุมของโรเตอร์
$\dot{p}_{C_i}$	เป็นความเร่งเชิงเส้นของจุดศูนย์กลางมวล $C_i$
$\dot{p}_i$	เป็นความเร่งเชิงเส้นของจุดกำเนิดของแกนพิกัด $i$
$\dot{\omega}_i$	เป็นความเร่งเชิงมุมของท่อนแขน
$\dot{\omega}_{mi}$	เป็นความเร่งเชิงมุมของโรเตอร์
$g_0$	เป็นความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง
$f_i$	เป็นแรงซึ่งกระทำจากท่อนที่ $i - 1$ บนท่อนที่ $i$
$-f_{i+1}$	เป็นแรงซึ่งกระทำจากท่อนที่ $i + 1$ บนท่อนที่ $i$
$\mu_i$	เป็นโมเมนต์ซึ่งกระทำจากท่อนที่ $i - 1$ บนท่อนที่ $i$ เทียบกับจุดกำเนิดของแกน $i 1$
$-\mu_{i+1}$	เป็นโมเมนต์ซึ่งกระทำจากท่อนที่ $i + 1$ บนท่อนที่ $i$ เทียบกับจุดกำเนิดของแกน $i$

ตารางที่ 2.1: พารามิเตอร์สำหรับท่อนแขนต่อเดิมที่  $i$



รูปที่ 2.3: ลักษณะของแขนท่อนที่  $i$  สำหรับการหาแบบจำลองพลวัตโดยวิธีนิวตันออยเลอร์



รูปที่ 2.4: ขั้นตอนการหาแบบจำลองพลวัตโดยวิธีนิวตันออยเลอร์

$$\begin{aligned}
 \omega_i^i &= \begin{cases} R_i^{i-1T} \omega_{i-1}^{i-1} & \text{สำหรับข้อต่อแบบเลื่อนที่} \\ R_i^{i-1T} (\omega_{i-1}^{i-1} + \dot{\vartheta}_i z_0) & \text{สำหรับข้อต่อแบบหมุน} \end{cases} \\
 \dot{\omega}_i^i &= \begin{cases} R_i^{i-1T} \dot{\omega}_{i-1}^{i-1} & \text{สำหรับข้อต่อแบบเลื่อนที่} \\ R_i^{i-1T} (\dot{\omega}_{i-1}^{i-1} + \dot{\vartheta}_i \omega_{i-1}^{i-1} \times z_0) & \text{สำหรับข้อต่อแบบหมุน} \end{cases} \\
 \ddot{p}_i^i &= \begin{cases} R_i^{i-1T} (\ddot{p}_{i-1}^{i-1} + \ddot{d}_i z_0) + 2\dot{d}_i \omega_i^i \times R_i^{i-1T} z_0 & \text{สำหรับข้อต่อแบบเลื่อนที่} \\ + \dot{\omega}_i^i \times r_{i-1,i}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{i-1,i}^i) & \text{สำหรับข้อต่อแบบหมุน} \\ R_i^{i-1T} \ddot{p}_{i-1}^{i-1} + \dot{\omega}_i^i \times r_{i-1,i}^i & \text{สำหรับข้อต่อแบบหมุน} \\ + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{i-1,i}^i) & \text{สำหรับข้อต่อแบบหมุน} \end{cases} \quad (2.11) \\
 \ddot{p}_{C_i}^i &= \ddot{p}_i^i + \dot{\omega}_i^i \times r_{i,C_i}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{i,C_i}^i) \\
 \dot{\omega}_{mi}^{i-1} &= \dot{\omega}_{i-1}^{i-1} + k_{ri} \dot{q}_i \omega_{i-1}^{i-1} \times z_{mi}^{i-1}
 \end{aligned}$$

โดยที่  $z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$

- การเวียนเกิดไปข้างหลัง ใช้ค่าของ  $f_{n+1}^{n+1}$  และ  $\mu_{n+1}^{n+1}$  ซึ่งเป็นแรงและโมเมนต์ภายนอกที่กระทำต่อปลายแขนเป็นค่าเริ่มต้น และใช้ผลจากการทำการเวียนเกิดไปข้างหน้าในสมการ (2.11) เพื่อคำนวณหา  $f_n^n$ ,  $\mu_n^n$  และ  $\tau_n$  แล้วทำย้อนกลับมาเรื่อยๆจนถึงข้อต่อที่ 1 โดยใช้สมการ (2.12) และ (2.13)

$$\begin{aligned} f_i^i &= R_{i+1}^i f_{i+1}^{i+1} + m_i \ddot{p}_{Ci} \\ \mu_i^i &= -f_i^i \times (r_{i-1,i}^i + r_{i,Ci}^i) + R_{i+1}^{iT} \mu_{i+1}^{i+1} + R_{i+1}^{iT} f_{i+1}^{i+1} \times r_{i,Ci}^{i+1} + \bar{I}_i^i \dot{\omega}_i^i \\ &\quad + \omega_i^i (\bar{I}_i^i \omega_i^i) + k_{r,i+1} \dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} z_{m_{i+1}}^i + k_{r,i+1} \dot{q}_{i+1} I_{m_{i+1}} \omega_i^i \times z_{m_{i+1}}^i \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\tau_i = \begin{cases} f_i^{iT} R_i^{i-1T} z_0 + k_{ri} I_{m_i} \dot{\omega}_{mi}^{i-1T} z_{mi}^{i-1} & \text{สำหรับข้อต่อแบบเลื่อนที่} \\ \mu_i^{iT} R_i^{i-1T} z_0 + k_{ri} I_{m_i} \dot{\omega}_{mi}^{i-1T} z_{mi}^{i-1} & \text{สำหรับข้อต่อแบบหมุน} \end{cases} \quad (2.13)$$

ขั้นตอนการหาสมการพลวัตข้างต้นเป็นการหาค่า  $\tau$  จากตัวแปร  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  ซึ่งมีประโยชน์ในการหาสัญญาณควบคุม แต่สำหรับการจำลองระบบจะต้องหาค่าของตัวแปร  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  จาก ค่า  $\tau$  ที่ใส่เข้าไป โดย  $\ddot{q}$  หาจากสมการ (2.14)

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= B^{-1}(\tau - C\dot{q} - G) \\ &= B^{-1}(\tau - \tau') \end{aligned} \quad (2.14)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (2.10) ค่าของ  $\tau'$  หากจากการกำหนดให้เฉพาะเทอม  $\ddot{q}$  มีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุกข้อต่อส่วนพจน์อื่นคงเดิมแล้วทำการหา  $\tau$  ตามสมการ (2.11)–(2.13) ซึ่งค่าที่ได้จะเป็นค่าของ  $\tau'$

สำหรับเมตริกซ์  $B$  หาโดยการกำหนดให้  $\dot{q} = 0$  และความเร่งจากแรงโน้มถ่วงเป็นศูนย์ แล้วทำการหาที่ละคอลัมน์ ซึ่งคอลัมน์ที่  $i$  ได้จากการหา  $\tau$  ตามสมการ (2.11)–(2.13) โดยกำหนดให้  $\dot{q}_i = 1$  และ  $\dot{q}_j = 0$  เมื่อ  $i \neq j$  ซึ่ง  $B$  ที่ได้มีคุณสมบัติที่สามารถหาค่าผกผัน (inverse) ได้เสมอไม่ว่าอยู่  $q$  ค่าใดก็ตาม หลังจากได้ค่า  $\ddot{q}$  แล้วนำมาทำการอินทิเกรตเพื่อหา  $\dot{q}$  และ  $q$  ต่อไป

## 2.2 ทฤษฎีการควบคุมการเคลื่อนที่

### 2.2.1 การควบคุมแบบพลวัตผกผัน (Inverse Dynamic Control)

การควบคุมวิธีนี้ อาศัยหลักการป้อนกลับส่วนไม่เป็นเชิงเส้นเพื่อหักล้างทำให้ระบบรวมที่ได้กลายเป็นระบบใหม่ที่เป็นระบบเชิงเส้น และสามารถใช้ทฤษฎีเชิงเส้นในการออกแบบระบบใหม่นี้ได้ จากสมการแบบจำลอง (2.10) เมื่อกำหนดให้สัญญาณควบคุมเป็น

$$u = By + N(q, \dot{q}) \quad (2.15)$$

$$y = \ddot{q}_d + K_v \dot{q} + K_p \bar{q} \quad (2.16)$$

โดย สัญญาณควบคุม  $u$  เป็นแรงบิดที่ให้กับแขนหุ่นยนต์ และ  $\bar{q} = q_d - q$  ซึ่งทำให้ได้สมการพลวัตของระบบใหม่เป็นเชิงเส้น คือ

$$\ddot{\bar{q}} + K_v \dot{\bar{q}} + K_p \bar{q} = 0 \quad (2.17)$$

ซึ่งเราสามารถปรับค่า  $K_v$  และ  $K_p$  เพื่อให้ได้ผลตอบตามต้องการ

## 2.2.2 การควบคุมแบบโครงสร้างแปรผันได้ (Variable Structure Control)

ในความเป็นจริง ผลของความไม่แน่นอนในค่าพารามิเตอร์ ทำให้เกิดความแตกต่างของค่าพารามิเตอร์จริงในระบบ กับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ในตัวควบคุมเป็น  $\hat{B}$ ,  $\hat{n}$  และให้ความคลาดเคลื่อนของพารามิเตอร์เป็น  $\tilde{B} = \hat{B} - B$ ,  $\tilde{n} = \hat{n} - n$  ผลของความคลาดเคลื่อนนี้ทำให้สมการความผิดพลาดใน (2.17) กลายเป็น

$$\ddot{\bar{q}} + K_v \dot{\bar{q}} + K_p \bar{q} = \eta \quad (2.18)$$

โดยที่

$$\eta = (I - B^{-1}\hat{B})y - B^{-1}\tilde{n} \quad (2.19)$$

ก่อนที่จะหาสัญญาณควบคุมใหม่ จะกำหนดตัวแปรสถานะ  $\xi = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix}$  ซึ่งจะสามารถเขียนสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งของระบบได้เป็น

$$\dot{\xi} = H\xi + D(\dot{\bar{q}}_d - y + \eta) \quad (2.20)$$

โดยที่  $H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  มีขนาดเป็น  $(2n \times 2n)$ ,  $D = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$  มีขนาดเป็น  $(2n \times n)$

เมื่อกำหนดให้สัญญาณควบคุม  $y$  มีค่าเป็น

$$y = \dot{\bar{q}}_d + K_v \dot{\bar{q}} + K_p \bar{q} + w \quad (2.21)$$

จะทำให้ได้สมการ (2.20) กลายเป็น

$$\dot{\xi} = \tilde{H}\xi + D(\eta - w) \quad (2.22)$$

โดยที่  $\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix}$  และ  $w$  เป็นสัญญาณที่ทำหน้าที่จัดการความไม่แน่นอนของค่าพารามิเตอร์ซึ่งหาจากการพิสูจน์เสถียรภาพโดยวิธีของเลียปูนอฟ โดยกำหนดเลียฟังก์ชันเลียปูนอฟ (Lyapunov function)

$$V(\xi) = \xi^T Q \xi > 0, \quad \forall \xi \neq 0 \quad (2.23)$$

ซึ่งจะได้อนุพันธ์อันดับหนึ่งเป็น

$$\dot{V} = -\xi^T P \xi + 2\xi^T Q D(\eta - w) \quad (2.24)$$



โดยที่

$$P = -\bar{H}^T Q - Q \bar{H} > 0 \quad (2.25)$$

จากสมการ (2.24) จะเห็นว่าถ้า  $\xi \in \mathcal{N}(D^T Q)$  จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนลู่เข้าสู่ศูนย์ได้ แต่ในกรณีอื่นที่  $\xi \notin \mathcal{N}(D^T Q)$  จะต้องเลือกให้

$$w = \frac{\rho}{\|z\|} z \quad (2.26)$$

โดยที่  $z = D^T Q \xi$  และเลือกให้  $\rho \geq \|\eta\|$ ,  $\forall q, \dot{q}, \ddot{q}$  ซึ่งจะทำให้ค่าของ  $\dot{V}$  น้อยกว่าศูนย์เสมอ

เมื่อ  $\xi$  เริ่มต้นที่ค่าใดๆ จะถูกทำให้มีค่าวิ่งเข้าสู่ระนาบ  $z = 0$  แล้วลู่เข้าสู่ศูนย์ซึ่งเรียกระนาบนี้ว่า ระนาบลื่นไถล (sliding plane) แต่เนื่องจากการที่ตัวควบคุมไม่สามารถตอบสนองได้เร็วพอ จึงทำให้แทนที่ค่าของ  $\xi$  จะติดอยู่บนระนาบ ก็จะถูกผลักเลยระนาบออกไป ก่อนที่จะถูกผลักกลับเข้ามา ซึ่งปรากฏการณ์ที่สวิตช์เกิดการผลักกลับไปมานี้ เรียกว่า แชนเทอริง เพื่อจะแก้ผลนี้ สามารถทำได้โดยการกำหนดขอบเขตรอบๆระนาบ เรียกชั้นเขตแดนและให้สัญญาณควบคุมมีความต่อเนื่องในบริเวณขอบเขตนั้น ในที่นี้จะกำหนดขอบเขตเป็นบริเวณที่  $\|z\| \leq \epsilon$  โดย  $\epsilon$  มีค่าเป็นบวก ซึ่งถ้ามีค่ามากจะทำให้ไม่เกิดการแชนเทอริง แต่จะมีความคลาดเคลื่อนมากขึ้นและได้สัญญาณควบคุมเป็น

$$w = \begin{cases} \frac{\rho}{\|z\|} z & \|z\| \geq \epsilon \\ \frac{\rho}{\epsilon} z & \|z\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (2.27)$$

### 2.2.3 การควบคุมแบบ PID

แม้ว่าแขนหุ่นยนต์จัดเป็นระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นสูง แต่ตัวควบคุม PID ก็ถูกใช้อย่างแพร่หลายในแขนกลตามโรงงานอุตสาหกรรม เนื่องจากมีข้อดีคือ หลักการหาสัญญาณควบคุมนั้นเข้าใจได้ง่าย สามารถคำนวณได้เร็วพอที่ใช้ควบคุมแขนกลจริง และให้ผลการควบคุมที่ดี เมื่อปรับพารามิเตอร์ได้เหมาะสม

ตัวควบคุม PID ที่ใช้ในคลังโปรแกรมเป็นแบบเวลาต่อเนื่อง โดยมีสมการเป็น

$$\tau = K_p e - K_d \dot{q} + K_i e_i \quad (2.28)$$

โดยที่  $e = q_d - q$  และ  $\dot{e}_i = e$

ในกรณีที่ใช้ตัวควบคุมเฉพาะ PD จะมีความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเกิดขึ้น เนื่องจากผลของแรงโน้มถ่วง ซึ่งถ้าต้องการให้ความคลาดเคลื่อนนี้หายไป ก็จำเป็นต้องนำผลของแรงโน้มถ่วงเข้าไปรวมกับสัญญาณควบคุมที่ได้ด้วย