

ทฤษฎีในการวิเคราะห์

บทที่แล้วได้กล่าวถึงลักษณะของแบบจำลองชนิดต่างๆไปแล้ว ในบทนี้จะกล่าวถึงหลักการ และทฤษฎีต่างๆ ที่ใช้ในแบบจำลองเชิงรังสี ซึ่งประกอบไปด้วยระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต (Geometrical Optic, GO) ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต (Geometrical Theory of Diffraction, GTD) และทฤษฎีการเลี้ยวเบนเอกรูป (Uniform Theory of Diffraction, UTD) แบบจำลองเชิงรังสีทั่วไปจะเป็นการจับคู่ระหว่าง GO/GTD หรือ GO/UTD แบบใดแบบหนึ่ง สำหรับแบบจำลองใน วิทยานิพนธ์นี้เป็นแบบจำลองเชิงรังสีที่ใช้ระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตและทฤษฎีการเลี้ยวเบนเอกรูป (GO/UTD)

ระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเป็นวิธีประมาณเชิงวิเคราะห์ในย่านความถี่สูงสำหรับการ ศึกษาพฤติกรรมของคลื่นในตัวกลาง เช่น การตกกระทบ การสะท้อน และการหักเหที่ผิวรอยต่อ โดยใช้แนวความคิดเกี่ยวกับรังสีมาอธิบาย การเคลื่อนที่ของรังสีและการเคลื่อนไปของสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กตามลำรังสีเป็นแนวความคิดสำคัญในการวิเคราะห์คลื่นที่แผ่กระจายในชั้น บรรยากาศเมื่อความยาวคลื่นเข้าใกล้ศูนย์ ( $\lambda \rightarrow 0$ )

ระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตแบบดั้งเดิมนั้นถูกพัฒนาเพื่อวิเคราะห์การเคลื่อนที่ไปของ แสงซึ่งมีความถี่สูงพิเศษโดยไม่จำเป็นต้องพิจารณาธรรมชาติความเป็นคลื่นของแสง โดยการ เคลื่อนที่และการส่งผ่านพลังงานจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งสามารถคำนวณได้ด้วยหลักการพื้น ฐาน 2 ประการที่อธิบายการเคลื่อนที่ไปของคลื่นในลักษณะของรังสีคือ (อ้างจาก [16])

1. หลักการของแฟร์มาต์ (Fermat's principle) เป็นหลักการที่ทำให้ทราบว่าคลื่นเคลื่อนที่ ไปตามเส้นทางใด กล่าวไว้ว่า "แนวรังสีระหว่างจุดสองจุดใด ๆ  $P_1$  กับ  $P_2$  นั้นเป็นไปตามเส้นทางที่ ใช้เวลาในการเดินทางน้อยที่สุด" หรือคลื่นจะเคลื่อนที่ไปในเส้นทางที่ใช้เวลาน้อยที่สุดในการเดิน ทาง ซึ่งหลักการดังกล่าวนี้เขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds = 0 \tag{2.1}$$

โดยที่  $\delta$  แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงเส้นทางเดินเทียบกับ  $s$  ซึ่งเป็นระยะทางที่รังสีเคลื่อนไป และ  $n(s)$  คือดัชนีหักเหของตัวกลางซึ่งเท่ากับ  $k(s)/k_0$  เมื่อ  $k(s)$  เป็นค่าคงที่เฟสของคลื่นที่ตำแหน่ง  $s$  ใดๆ และ  $k_0$  เป็นค่าคงที่เฟสของคลื่นที่เดินทางในอวกาศว่าง (free space) และสมการที่ (2.1) บ่งบอกว่าเส้นทางเคลื่อนที่ของรังสีระหว่างจุดสองจุดใด ๆ  $P_1$  กับ  $P_2$  จะเป็นเส้นทางที่มีความยาวคงตัว (stationary) เมื่อการเปลี่ยนแปลงเส้นทางเดินเกิดขึ้นน้อยมากในทิศทางที่รังสีเคลื่อนไป

2. หลักการอนุรักษ์พลังงานภายในลำรังสีเล็ก ๆ บ่งบอกถึงการลดทอนความเข้มของคลื่นที่เคลื่อนไป โดยมีหลักว่า กำลังงานที่ส่งผ่านภาคตัดขวางใด ๆ ภายในลำรังสีเล็ก ๆ จะคงที่ตลอดความยาวของลำรังสีนั้น

จากหลักการทั้งสองข้างต้น การอธิบายพฤติกรรมการแพร่กระจายของคลื่นย่านความถี่สูงพิเศษจะเป็นการอธิบายพฤติกรรมของการเคลื่อนที่ไปของพลังงานในลำรังสี โดยในบทนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต และลักษณะการส่งผ่านพลังงานในลำรังสี รวมถึงการหาความสัมพันธ์ของขนาดและมุมเฟสของคลื่นที่เคลื่อนที่ไปโดยพิจารณาด้วยระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตด้วย

### ความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้ากับระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต

เนื่องจากระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตพิจารณาปรากฏการณ์คลื่นเป็นปรากฏการณ์แบบอนุภาค การอธิบายมุมมองของระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตที่มีต่อการเคลื่อนที่ไปของคลื่นว่าเป็นการส่งผ่านพลังงานในลำรังสีตามหลักการพื้นฐานทั้งสองที่กล่าวมาแล้วนั้น สามารถแสดงให้เห็นได้โดยการหาผลเฉลยของสมการแมกซ์เวลล์ซึ่งเป็นสมการเชิงเวกเตอร์ด้วยวิธีการประมาณเชิงวิเคราะห์ในย่านความถี่สูงมากหรือเมื่อความถี่เชิงมุมเข้าใกล้ค่าอนันต์ เริ่มต้นจากการกำหนดสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเป็นฟังก์ชันเวกเตอร์เชิงตำแหน่งดังนี้

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E} e^{-j\mu_0 L(\vec{r})} \quad (2.2k)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H} e^{-j\mu_0 L(\vec{r})} \quad (2.2ข)$$

โดย  $\vec{r}$  เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่ง,  $k_o$  เป็นค่าคงที่เฟสโดย  $k_o = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o}$  เมื่อ  $\omega$  เป็นความถี่เชิงมุมของคลื่น,  $\mu_o$  เป็นค่าความซึมได้ทางแม่เหล็กของอวกาศว่าง (permeability) มีค่าเท่ากับ  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m,  $\epsilon_o$  เป็นค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าของอวกาศว่าง (permittivity) มีค่าประมาณ  $8.85 \times 10^{-12}$  F/m และ  $c$  เป็นความเร็วของคลื่นที่เคลื่อนที่ในอวกาศว่าง มีค่าประมาณ  $3 \times 10^8$  m/s เมื่อพิจารณาที่ความถี่สูงมากจะประมาณ  $k_o \rightarrow \infty$  ได้

จากสมมติฐานข้างต้นประกอบกับสมการ Maxwell ทำให้การพิจารณาคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ความถี่สูงมากสามารถประมาณพฤติกรรมการเดินทางของคลื่นในตัวกลางเอกพันธ์ที่ไม่มีการสูญเสียเป็นการเดินทางของลำรังสีเส้นตรงจากจุดกำเนิดไปยังจุดสังเกต ซึ่งการพิสูจน์ความสัมพันธ์นี้แสดงไว้ในภาคผนวก ก. สำหรับขนาดสนามของคลื่นที่ตำแหน่งใดๆ ในแนวรังสีจะมีความสัมพันธ์กับขนาดของสนามที่ตำแหน่งข้างอิงใดๆ ในแนวรังสีนั้นโดยมีความสัมพันธ์กับตัวประกอบการลดทอนเชิงตำแหน่งซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

#### ตัวประกอบการลดทอนเชิงตำแหน่ง (spatial attenuation) และขนาดของสนามไฟฟ้า

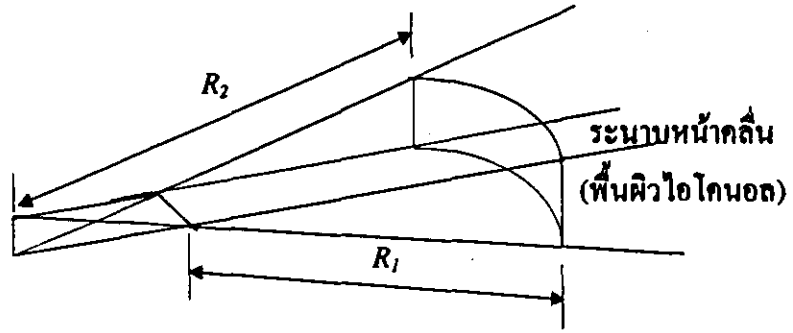
จากความสัมพันธ์ระหว่างระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตและทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ดังแสดงในภาคผนวก ก. พิสูจน์ได้ว่าการไหลของพลังงานในลำรังสีสอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์พลังงานที่สามารถกล่าวสรุปได้ว่า “กำลังงานที่ไหลอยู่ในทิศที่ตั้งฉากกับภาคตัดขวางของลำรังสีต้องมีค่าคงตัวตลอดลำรังสี” และจากกฎการอนุรักษ์พลังงานนี้เมื่อพิจารณาลำรังสีในรูปที่ 2.1 (ข) สามารถแสดงเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} |\vec{E} \times \vec{H}^*|_1 dA_1 &= |\vec{E} \times \vec{H}^*|_2 dA_2 \\ \frac{1}{\eta_1} |\vec{E}(O)|^2 dA_1 &= \frac{1}{\eta_2} |\vec{E}(P)|^2 dA_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

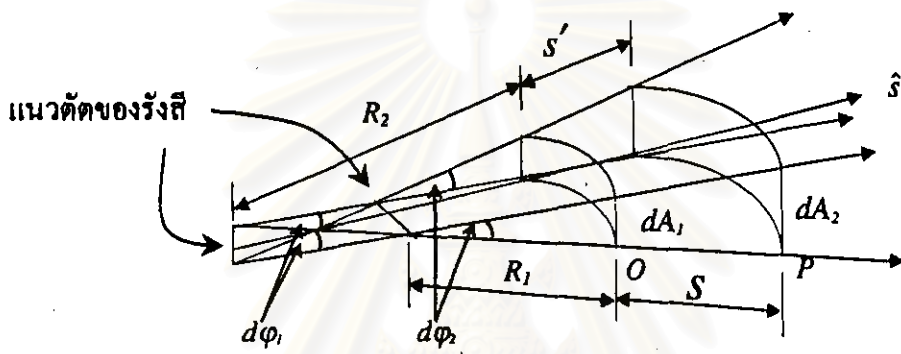
สำหรับตัวกลางที่เป็นอวกาศว่าง  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_o$  และจากรูปที่ 2.1 (ข) พบว่า

$$dA_1 \approx |(R_1 d\phi_1)(R_2 d\phi_2)| \quad (2.4)$$

$$dA_2 \approx |[(R_1 + s)d\phi_1][(R_2 + s)d\phi_2]| \quad (2.5)$$



(ก) พื้นผิวหน้าคลื่น



(ข) แนวการตัดกันของรังสี (caustic lines) และภาคตัดถ่วงรังสี

รูปที่ 2.1 ถ้ารังสีที่ใช้แทนการเคลื่อนที่ไปของคลื่นในตัวกลางเอกพันธ์ที่ไม่มี การสูญเสีย

แทนค่า  $dA_1$  และ  $dA_2$  จากสมการที่ (2.4) และ (2.5) ลงในสมการที่ (2.3) จะได้

$$|\bar{E}(P)| = |\bar{E}(O)| \sqrt{\frac{R_1 R_2}{(R_1 + s)(R_2 + s)}} \quad (2.6)$$

โดย  $\bar{E}(P)$  เป็นสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง  $s$  และ  $\bar{E}(O)$  เป็นสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง  $s=0$  เมื่อนำความสัมพันธ์ของขนาดในสมการที่ (2.6) โพลาริเซชัน และเฟสมารวมด้วย จะได้ผลเฉลยของสนามที่เดินทางในตัวกลางเอกพันธ์ด้วยระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเป็นดังนี้

$$\bar{E}(s) = \bar{E}_o(0) e^{j\phi_o(0)} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{(R_1 + s)(R_2 + s)}} e^{-jk s} \quad (2.7)$$

เมื่อ  $\bar{E}_o(0)$  คือขนาดของสนามที่จุดอ้างอิง  $s = 0$

$\phi_o(0)$  คือเฟสของสนามที่จุดอ้างอิง  $s = 0$

$\sqrt{\frac{R_1 R_2}{(R_1 + s)(R_2 + s)}}$  คือตัวประกอบการลดทอนเชิงตำแหน่ง

โดยที่ สำหรับ หน้าคลื่นทรงกลม  $R_1 = R_2 = R_o$

สำหรับ หน้าคลื่นทรงกระบอก  $R_1 = \infty, R_2 = R_o$  หรือ  $R_1 = R_o, R_2 = \infty$

และสำหรับ หน้าคลื่นระนาบ  $R_1 = R_2 = \infty$

การหาความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีคลื่นและระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตแบบดั้งเดิมนั้นจะต้องหาความสัมพันธ์ของขนาด เฟส โพลาริเซชัน และลักษณะการส่งผ่านพลังงาน โดยต้องแยกหาความสัมพันธ์ทีละส่วนแล้วจึงนำมารวมกัน ทำให้อาจเกิดความสับสนกับความสัมพันธ์โดยรวมได้ ดังนั้นระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตแบบดั้งเดิมจึงถูกปรับปรุงเพื่อให้สามารถอธิบายพฤติกรรมของคลื่นได้อย่างครบถ้วนด้วยการพิจารณาเพียงครั้งเดียว โดยหาผลเฉลยของสมการคลื่นด้วยวิธีสมมติผลเฉลยดังกล่าวให้อยู่ในรูปอนุกรม ซึ่ง Luneberg และ Kline (อ้างจาก [16]) สมมติว่าผลเฉลยของคลื่นที่ความถี่เชิงมุมมีค่ามากอยู่ในรูปอนุกรมที่เป็นส่วนกลับของความถี่เชิงมุมกำลังต่าง ๆ ดังนี้

$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{E}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m} e^{-jk_o L(\bar{r})} \quad (2.8ก)$$

$$\bar{H}(\bar{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{H}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m} e^{-jk_o L(\bar{r})} \quad (2.8ข)$$

และเมื่อแทนผลเฉลยที่สมมติด้วยสมการที่ (2.8ก) และสมการที่ (2.8ข) ลงในสมการแมกซ์เวลล์ในบริเวณปราศจากแหล่งกำเนิดและใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์ประกอบการพิจารณาจะได้สมการที่ (2.9ก) - (2.9ข)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\nabla \times \bar{E}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m} + \frac{jk_o \bar{E}_m(\bar{r}) \times \nabla L(\bar{r})}{(j\omega)^m} \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j\omega \bar{H}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m} = 0 \quad (2.9ก)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\nabla \times \bar{H}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m} + \frac{jk_o \bar{H}_m(\bar{r}) \times \nabla L(\bar{r})}{(j\omega)^m} \right] - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j\omega \bar{E}_m(\bar{r})}{(j\omega)^m} = 0 \quad (2.9ข)$$

$$\sum_m \left[ \frac{\epsilon \nabla \cdot \bar{E}_m(\vec{r})}{(j\omega)^m} - \frac{jk_0 \epsilon \bar{E}_m(\vec{r}) \cdot \nabla L(\vec{r})}{(j\omega)^m} \right] = 0 \quad (2.9ก)$$

$$\sum_m \left[ \frac{\mu \nabla \cdot \bar{H}_m(\vec{r})}{(j\omega)^m} - \frac{jk_0 \mu \bar{H}_m(\vec{r}) \cdot \nabla L(\vec{r})}{(j\omega)^m} \right] = 0 \quad (2.9ง)$$

จากสมการที่ (2.9ก-ง) เมื่อกระจายอนุกรมเทย์ของพจน์แรก ๆ แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังของความถี่เชิงมุมเท่ากันในสมการที่ (2.9ก) จะได้

$$k_0 \bar{E}_0 \times \nabla L = -\omega \mu \bar{H}_0 \quad (2.10ก)$$

$$\nabla \times \bar{E}_0 + \frac{k_0}{\omega} \bar{E}_1 \times \nabla L = -\mu \bar{H}_1 \quad (2.10ข)$$

ในทำนองเดียวกันสมการที่ (2.9ง) จะเป็น

$$k_0 \bar{H}_0 \times \nabla L = \omega \epsilon \bar{E}_0 \quad (2.11ก)$$

$$\nabla \times \bar{H}_0 + \frac{k_0}{\omega} \bar{H}_1 \times \nabla L = \epsilon \bar{E}_1 \quad (2.11ข)$$

และจากสมการที่ (2.9ค) จะได้

$$-jk_0 \epsilon \bar{E}_0 \cdot \nabla L = 0 \quad (2.12ก)$$

$$\epsilon \nabla \cdot \bar{E}_0 - \frac{k_0}{\omega} \epsilon \bar{E}_1 \cdot \nabla L = 0 \quad (2.12ข)$$

ในทำนองเดียวกันสมการที่ (2.9ง) จะเป็น

$$-jk_0 \mu \bar{H}_0 \cdot \nabla L = 0 \quad (2.13ก)$$

$$\mu \nabla \cdot \bar{H}_0 - \frac{k_0}{\omega} \mu \bar{H}_1 \cdot \nabla L = 0 \quad (2.13ข)$$

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เป็นผลเฉลยนั้นเกิดจากการแก้สมการหาผลเฉลยในอนุกรมลำดับแรก ๆ ก่อนแล้วแทนผลเฉลยในลำดับแรก ๆ ลงไปเพื่อหาผลเฉลยในลำดับต่อ ๆ ไป ซึ่งผลเฉลยแน่นอนตรงเกิดจากการรวมผลเฉลยในลำดับต่าง ๆ ที่ได้ แต่สำหรับการประมาณค่าผลเฉลยของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กโดยระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในลำดับแรกของผลเฉลยเท่านั้นที่ถูกนำมาใช้อธิบายพฤติกรรมต่าง ๆ ของคลื่น โดยประมาณ

ผลที่ได้จากการเทียบสัมประสิทธิ์ลำดับต่างๆ ของพจน์  $\omega$  จากสมการ (2.9ก) - (2.14ข) คือ

### 1. สมการไอโคนอล

$$|\nabla L|^2 = n^2 \quad (2.15)$$

เมื่อ  $L =$  ฟังก์ชันไอโคนอล (ฟังก์ชันหน้าคลื่น)

$n =$  ดัชนีหักเหของตัวกลาง

### 2. สมการการขนส่ง (transport equations)

$$\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial s} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\nabla^2 L}{n} \right\} \bar{E}_0 = 0 \quad \text{สำหรับผลเฉลยลำดับแรก} \quad (2.16ก)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_m}{\partial s} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\nabla^2 L}{n} \right\} \bar{E}_m = \frac{v}{2} \nabla^2 \bar{E}_{m-1} \quad \text{สำหรับผลเฉลยลำดับต่อไป} \quad (2.16ข)$$

โดย  $m = 1, 2, 3, \dots$

$v =$  ความเร็วแสงในตัวกลางที่พิจารณา

### 3. สมการเงื่อนไข (conditional equations)

$$\hat{s} \cdot \bar{E}_0 = 0 \quad \text{สำหรับผลเฉลยลำดับแรก} \quad (2.17ก)$$

$$\hat{s} \cdot \bar{E}_m = v \nabla \cdot \bar{E}_{m-1} \quad \text{สำหรับผลเฉลยลำดับต่อไป} \quad (2.17ข)$$

โดย  $m = 1, 2, 3, \dots$

$v =$  ความเร็วแสงในตัวกลางที่พิจารณา

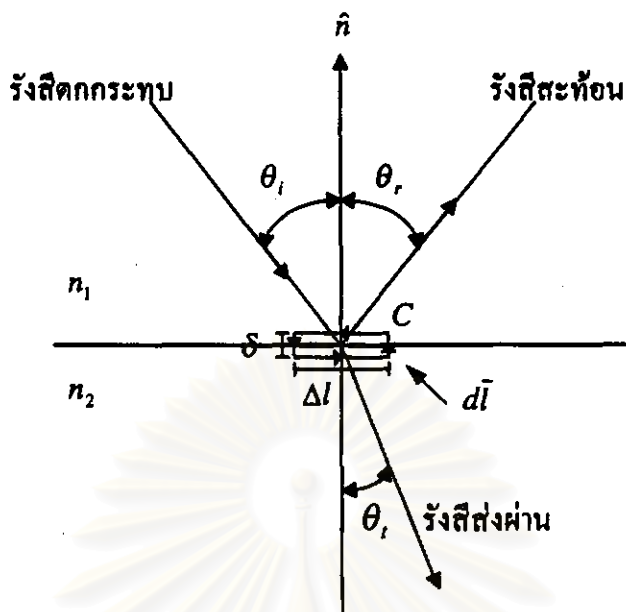
เมื่อ  $\hat{s} = \frac{\nabla L}{n}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเคลื่อนที่ของรังสี และตั้งฉากกับระนาบหน้าคลื่น และ  $s$  คือระยะของทางเดินรังสี เมื่ออินทิเกรตหาผลเฉลยจากสมการการขนส่งลำดับแรก โดยเทียบกับรูปที่ 2.1 (ก) และ 2.1 (ข) จะได้

$$\bar{E}(s) = \bar{E}(Q) \sqrt{\frac{R_1 R_2}{(R_1 + s)(R_2 + s)}} e^{-jk_0 s} \quad (2.18)$$

โดยที่  $\bar{E}(Q)$  คือ สนามไฟฟ้าที่จุดอ้างอิง  $Q$  ใด ๆ ซึ่งหากกำหนดจุดอ้างอิงเป็นจุดที่  $s = 0$  สนามจะมีค่าเท่ากับ  $\bar{E}_0(s_0 = 0) e^{-jk_0 s_0}$  และเมื่อพิจารณาสมการที่ (2.18) พบว่า สนามไฟฟ้าที่แผ่พลังงานจากจุดอ้างอิงใดๆ ไปยังจุดสังเกตนั้นมีการลดทอนเนื่องจากตัวประกอบการลดทอนเช่นเดียวกับในระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตแบบดั้งเดิมซึ่งหาได้จากหลักการอนุรักษ์พลังงานภายในตัวรังสีเล็กๆ แต่สมการที่ (2.18) สามารถบ่งบอกถึงโพลาไรเซชันและเฟสของของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้ โดยที่โพลาไรเซชันของคลื่นที่ตำแหน่งใดๆ เป็นไปตามโพลาไรเซชันของคลื่นที่จุดอ้างอิงใดๆ และเฟสของคลื่นแปรเปลี่ยนตามฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลของระยะทางที่รังสีเคลื่อนที่ และเมื่อพิจารณาสมการที่ (2.18) หรือ (2.7) พบว่าข้อเสียของระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตคือ ไม่สามารถหาสนามไฟฟ้าที่จุดหรือแนวการตัดกันของรังสี (caustic) ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อระยะทางที่รังสีเคลื่อนที่  $s$  เท่ากับ  $-R_1$  หรือ  $-R_2$  ซึ่งทำให้ค่าปัจจัยการลดทอนมีค่าเป็นอนันต์ โดยถ้า  $-R_2 < s < -R_1$  พจน์  $R_1 + s$  ในค่าปัจจัยการลดทอนจะเป็นลบทำให้ค่าปัจจัยการลดทอนเป็นจำนวนจินตภาพแท้ ดังนั้นเมื่อคลื่นผ่านจุดหรือแนวการตัดกันของรังสีจะทำให้เฟสของคลื่นเปลี่ยนไป 90 องศา และเมื่อ  $s < -R_2 < -R_1$  ทั้งพจน์  $R_1 + s$  และ  $R_2 + s$  จะเป็นลบดังนั้นเฟสของคลื่นก็จะเปลี่ยนไปอีก 90 องศา

การอธิบายพฤติกรรมคลื่นด้วยระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตข้างต้นเป็นการอธิบายถึงการเคลื่อนที่ไปของคลื่นในตัวกลางเอกพันธ์ โดยไม่ได้กล่าวถึงพฤติกรรมที่เกิดขึ้นที่ผิวรอยต่อของตัวกลาง เช่น การสะท้อน และการหักเห ดังนั้นในการอธิบายพฤติกรรมดังกล่าวเพื่อใช้ในการคำนวณขนาดสนามสะท้อนที่ผิวของอาคารหรือสิ่งกีดขวางอื่นๆ ในปัญหาการแพร่กระจายคลื่น จะต้องอาศัยกฎการสะท้อนและกฎการหักเหของสเนลล์ (Snell) ด้วย เพื่ออธิบายลักษณะของแนวทางการเดินทางของรังสีที่บริเวณรอยต่อระหว่างตัวกลางโดยพิจารณาจากรูปที่ 2.2





รูปที่ 2.2 การสะท้อนและการส่งผ่านระหว่างตัวกลาง

จากรูปที่ 2.2 คลื่นเดินทางผ่านรอยต่อของตัวกลางที่มีดัชนีหักเหเป็น  $n_1$  และ  $n_2$  โดยมีมุมตกกระทบ  $\theta_i$ , มุมสะท้อน  $\theta_r$  และมุมส่งผ่าน  $\theta_t$  ซึ่งเป็นมุมที่รังสีตกกระทบ, รังสีสะท้อน และรังสีส่งผ่านทำกับแนวเวกเตอร์ตั้งฉากของรอยต่อระหว่างตัวกลางตามลำดับ และจากกฎการสะท้อนและกฎการหักเหของ Snell จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

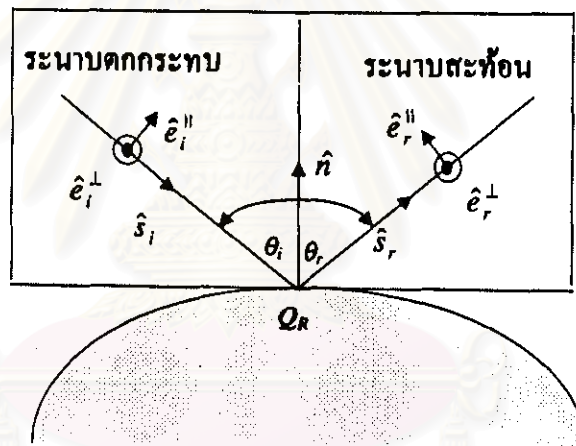
$$\theta_i = \theta_r \quad (2.19ก)$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (2.19ข)$$

สมการที่ (2.19ก) - (2.19ข) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างมุมของแนวรังสีและดัชนีหักเหแต่ไม่ได้บอกความสัมพันธ์ของขนาดสนามที่รอยต่อ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตและเงื่อนไขขอบเขต

### ขนาดของสนามจากการสะท้อนที่พื้นผิวตั้งกึ่งกลาง

สำหรับขนาดสนามสะท้อนสามารถคำนวณได้โดยพิจารณาสนามเนื่องจากระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตและเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวรอยต่อ ซึ่งในกรณีตัวกลางแบบเอกพันธุ์และไม่มี การสูญเสีย สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเนื่องจากระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตจะเคลื่อนที่ไปในลักษณะของคลื่นระนาบในทิศทางของรังสี ดังนั้นในการศึกษาพฤติกรรมของการสะท้อนของคลื่นสามารถหาได้โดยสมมติให้สนามไฟฟ้าที่มาตกกระทบที่จุด  $Q_R$  บนพื้นผิวสะท้อนเคลื่อนที่ไปในทิศทาง  $\hat{s}_i$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของการตกกระทบและมีโพลาไรเซชันในทิศทาง  $\hat{e}_i^\perp$  และ  $\hat{e}_i^\parallel$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากและขนานกับระนาบตกกระทบ (plane of incidence) ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์  $\hat{s}_i$  กับเวกเตอร์  $\hat{n}$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวสะท้อนที่จุด  $Q_R$  โดยที่ไม่มีองค์ประกอบในแนวการเคลื่อนที่ดังรูปที่ 2.3 และ  $\hat{s}_i$ ,  $\hat{e}_i^\perp$  และ  $\hat{e}_i^\parallel$  ถูกเลือกให้มีความสัมพันธ์ดังสมการที่ (2.20n) – (2.20v)



รูปที่ 2.3 ทิศทางและโพลาไรเซชันของสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบและที่สะท้อนจากจุด  $Q_R$  บนพื้นผิวสะท้อน

$$\hat{e}_i^\parallel = \hat{e}_i^\perp \times \hat{s}_i \quad (2.20n)$$

และ

$$\hat{e}_i^\perp = \frac{\hat{n} \times \hat{s}_i}{|\hat{n} \times \hat{s}_i|} \quad (2.20v)$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบที่จุด  $Q_R$  สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการได้เป็นสมการที่ (2.21)

$$\bar{E}^i(Q_R) = (\bar{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_r^\perp) \hat{e}_r^\perp + (\bar{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_r^{\parallel}) \hat{e}_r^{\parallel} \quad (2.21)$$

และถ้าสมมติว่าสนามไฟฟ้าที่สะท้อนที่จุด  $Q_R$  เกิดจากสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบที่จุด  $Q_R$  ถูกกับสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบไดแอดิก  $\bar{R}$  (dyadic reflection coefficient) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตบนพื้นผิวสะท้อน ดังนั้น

$$\bar{E}^r(Q_R) = \bar{E}^i(Q_R) \cdot \bar{R} \quad (2.22)$$

ในทำนองเดียวกันกับสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบที่จุด  $Q_R$  สนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากจุด  $Q_R$  ก็จะเคลื่อนที่ออกไปในลักษณะของคลื่นระนาบในทิศทางที่กำหนดโดย  $\hat{r}$ , ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของการสะท้อนและมีโพลาไรเซชันในทิศทาง  $\hat{e}_r^\perp$  และ  $\hat{e}_r^{\parallel}$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากและขนานกับระนาบสะท้อนที่ประกอบด้วยเวกเตอร์  $\hat{r}$ , กับเวกเตอร์  $\hat{k}$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวสะท้อนที่จุด  $Q_R$  และจากหลักการของแฟร์มาต์พบว่า  $\hat{r}$ , วางตัวอยู่ในระนาบสะท้อน (plane of reflection) ซึ่งเป็นระนาบเดียวกับระนาบตกกระทบดังรูปที่ 2.3 และ  $\hat{r}$ ,  $\hat{e}_r^\perp$  และ  $\hat{e}_r^{\parallel}$  ถูกเลือกให้มีความสัมพันธ์ดังสมการที่ (2.23ก) – (2.23ข)

$$\hat{e}_r^{\parallel} = \hat{e}_r^\perp \times \hat{r}, \quad (2.23ก)$$

และ

$$\hat{e}_r^\perp = \frac{\hat{k} \times \hat{r}}{|\hat{k} \times \hat{r}|} \quad (2.23ข)$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าสะท้อนที่จุด  $Q_R$  เป็น

$$\bar{E}^r(Q_R) = [\bar{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_r^\perp] \hat{e}_r^\perp + [\bar{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_r^{\parallel}] \hat{e}_r^{\parallel} \quad (2.24)$$

จากสนามไฟฟ้าตกกระทบดังสมการที่ (2.21) และสนามไฟฟ้าสะท้อนดังสมการที่ (2.24) เมื่อแทนลงในสมการที่ (2.22) ทำให้สัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบไดแอดิกที่สอดคล้องเป็นดังสมการที่ (2.25)

$$\bar{R} = R_s \hat{e}_r^\perp \hat{e}_r^\perp + R_p \hat{e}_r^{\parallel} \hat{e}_r^{\parallel} \quad (2.25)$$

โดยที่  $R_s$  คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนเนื่องจากสนามไฟฟ้าตกกระทบที่มีโพลาไรเซชันในทิศที่ขนานกับระนาบตกกระทบ (hard polarization) และ  $R_p$  คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนเนื่องจากสนามไฟฟ้าตกกระทบที่มีโพลาไรเซชันในทิศที่ตั้งฉากกับระนาบตกกระทบ (soft polarization) เมื่อแทนสมการที่ (2.25) ลงในสมการที่ (2.22) จะได้

$$\bar{E}'(Q_R) = \bar{E}^i(Q_R) \cdot [R_s \hat{e}_i^\perp \hat{e}_r^\perp + R_p \hat{e}_i^\parallel \hat{e}_r^\parallel] = [\bar{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_i^\perp] R_s \hat{e}_r^\perp + [\bar{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_i^\parallel] R_p \hat{e}_r^\parallel \quad (2.26)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสนามไฟฟ้าสะท้อนจากสมการที่ (2.25) กับ (2.26) จะได้

$$\bar{E}'(Q_R) \cdot \hat{e}_r^\perp = \bar{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_i^\perp R_s \quad (2.27ก)$$

และ 
$$\bar{E}'(Q_R) \cdot \hat{e}_r^\parallel = \bar{E}^i(Q_R) \cdot \hat{e}_i^\parallel R_p \quad (2.27ข)$$

โดยสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบตั้งฉากและขนานแสดงดังสมการที่ (2.28ก) และ (2.28ข) ซึ่งวิธีคำนวณโดยละเอียดแสดงในภาคผนวก ก.

$$R_{s,\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_i}} \quad (2.28ก)$$

$$R_{p,\parallel} = \frac{\sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_i} - \epsilon \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta_i} + \epsilon \cos \theta_i} \quad (2.28ข)$$

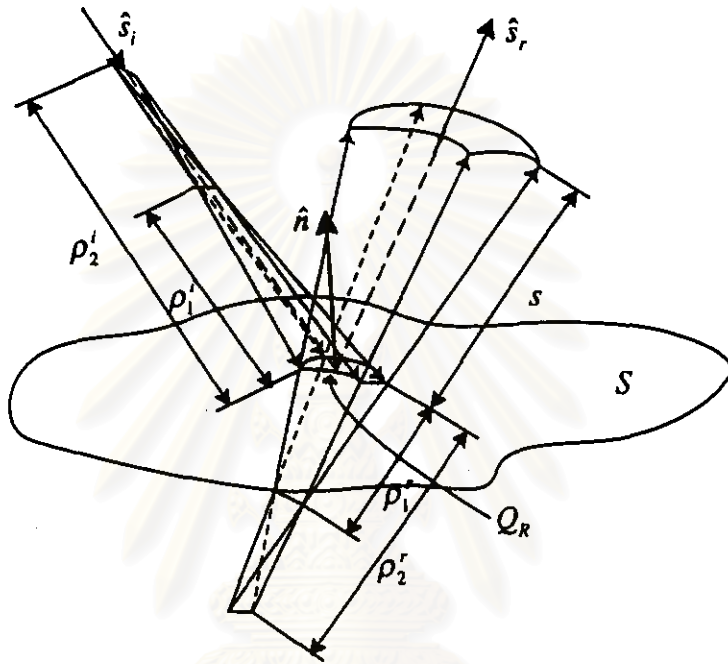
สมการที่ (2.18) แสดงความสัมพันธ์ของขนาดสนามไฟฟ้าที่เดินทางออกจากจุดอ้างอิงใดๆ เทียบกับขนาดของสนามที่จุดอ้างอิงนั้น ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณารูปที่ 2.4 จะเขียนสมการที่ (2.18) สำหรับขนาดสนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากจุดสะท้อน  $Q_R$  ได้ดังสมการที่ (2.29)

$$\bar{E}'(s) = \bar{E}'(Q_R) \sqrt{\frac{\rho_1' \rho_2'}{(\rho_1' + s)(\rho_2' + s)}} e^{-\beta s} \quad (2.29)$$

โดยที่  $\bar{E}'(Q_R)$  คือ สนามไฟฟ้าที่จุดอ้างอิง  $Q_R$  ใด ๆ ซึ่งหากกำหนดจุดอ้างอิงเป็นจุดที่เกิดการสะท้อน สนามจะมีค่ามีค่าเท่ากับ  $\bar{E}'(Q_R) = \bar{E}^i(Q_R) \cdot \bar{R}$  ดังนั้นสมการที่ (2.29) จะเขียนใหม่ได้เป็นสมการที่ (2.30)

$$\bar{E}^r(s) = \bar{E}^i(Q_R) \cdot \tilde{R} \sqrt{\frac{\rho_1^i \rho_2^r}{(\rho_1^i + s)(\rho_2^r + s)}} e^{-\mu s} \quad (2.30)$$

เมื่อ  $\rho_1^i, \rho_2^r$  คือระยะตัดกัน (caustic) ของลำรังสีสะท้อนลำดับที่หนึ่งและสอง และ  $\rho_1^i, \rho_2^r$  คือระยะตัดกันของลำรังสีตกกระทบลำดับที่หนึ่งและสองตามลำดับ



รูปที่ 2.4 ลำรังสีที่ใช้แทนหน้าคลื่นและการเคลื่อนที่ไปของสนามตกกระทบและสนามสะท้อนที่พื้นผิวสะท้อนในดวงกลางเอกพันธ์ที่ไม่มีการสูญเสีย

สำหรับปัญหาการสะท้อนเนื่องจากการแพร่กระจายคลื่นในเขตเมือง การสะท้อนเกิดที่ผิวที่สมมติว่าเรียบ และสมมติหน้าคลื่นตกกระทบเป็นหน้าคลื่นทรงกลมซึ่งทำให้  $\rho_1^i = \rho_2^i = s'$  และเมื่อใช้ทฤษฎีรูปภาพเสมือน จะได้  $\rho_1^r = \rho_1^i = s'$  และ  $\rho_2^r = \rho_2^i = s'$  และเนื่องจากสามารถเขียนสนามที่ตำแหน่งสะท้อนได้ด้วย  $\bar{E}^i(Q_R) \propto \frac{1}{s'} = \frac{\bar{E}_o^i}{s'} e^{-\mu s'}$  เมื่อให้  $\bar{E}_o^i$  เป็นสนามที่แผ่ออกจากแหล่งกำเนิด ทำให้สามารถเขียนสมการที่ (2.30) ได้ใหม่ดังนี้

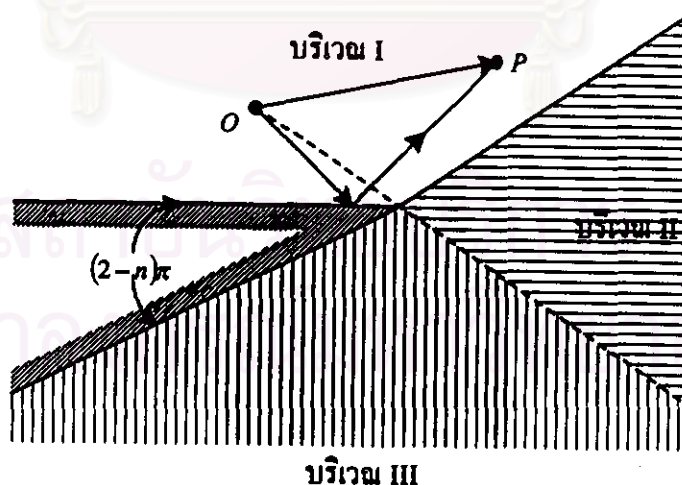
$$\bar{E}^r(s) = \frac{\bar{E}_o^i}{s'} \cdot e^{-\mu s'} \cdot \tilde{R} \sqrt{\frac{s \cdot s'}{(s' + s)(s' + s)}} e^{-\mu s}$$

$$\bar{E}'(s) = \frac{E_o}{s'+s} \cdot \bar{R} \cdot e^{-\mu_o(s'+s)}$$

$$\bar{E}'(s) = \bar{E}_o \cdot \bar{R} \quad (2.31)$$

เมื่อ  $\bar{E}_o$  คือสนามเนื่องจากรังสีเดินทางเป็นเส้นตรงในตัวกลางเอกพันธ์ที่ไม่มีการสูญเสีย ด้วยระยะทาง  $s'+s$  สมการ (2.31) เป็นสมการสำหรับการสะท้อนครั้งเดียวถ้าหากเป็นการสะท้อนหลายครั้งสัมประสิทธิ์การสะท้อนจะเป็นผลคูณของสัมประสิทธิ์การสะท้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นทุกๆ จุดสะท้อน

จากระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่กล่าวมาทั้งหมด ทำให้สามารถอธิบายกลไกการแพร่กระจายของคลื่นได้ตามแบบคือการแพร่กระจายแบบเดินทางเป็นเส้นตรงผ่านตัวกลางเอกพันธ์ การแพร่กระจายแบบผ่านการสะท้อนที่รอยต่อของตัวกลางเอกพันธ์สองชนิด การเดินทางแบบส่งผ่านรอยต่อของตัวกลางเอกพันธ์โดยการหักเห แต่ไม่สามารถอธิบายการที่มีพลังงานบางส่วนเดินทางแบบเงาเบนไปยังบริเวณเงา (shadow region) ในบริเวณ III ในรูปที่ 2.5 ได้ ไม่ว่าจะอธิบายด้วยระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตแบบดั้งเดิมหรือด้วยการสมมุติผลเฉลยแบบอนุกรมของ Luneberg และ Kline ดังนั้น J.B. Keller (อ้างจาก [16]) ได้ขยายแนวความคิดของระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเพื่อนำมาอธิบายปรากฏการณ์เกิดสนามในบริเวณเงาและเกิดเป็นทฤษฎีการเงาเบนเชิงเรขาคณิตขึ้น



รูปที่ 2.5 บริเวณและขอบเขตต่างๆ ที่บริเวณขอบหรือยอดของสิ่งกีดขวาง

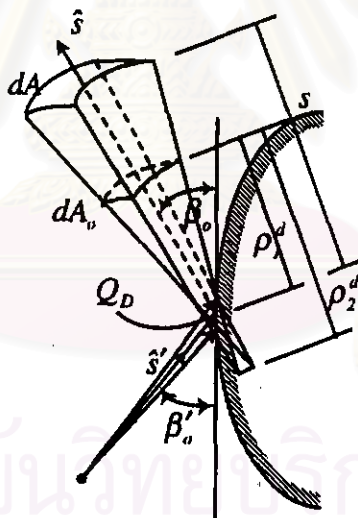
บริเวณ I รังสีตรง, รังสีสะท้อนและรังสีเงาเบน

บริเวณ II รังสีตรงและรังสีเงาเบน

บริเวณ III รังสีเงาเบน

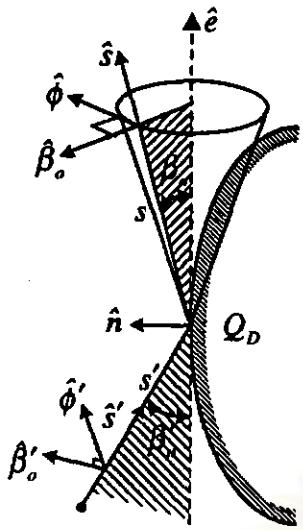
### ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต

เมื่อระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตใช้อธิบายสนามที่เกิดจากการเลี้ยวเบนไม่ได้ J.B. Keller จึงขยายแนวคิดของระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต โดยกล่าวว่า มีสนามปริมาณหนึ่งเกิดขึ้นภายในขอบเขตบริเวณเงาเมื่อมีสนามตกกระทบที่ขอบ (edge) มุม (corner) หรือจุดยอด (vertex) แล้วเลี้ยวเบนเข้าไปในบริเวณเงา และเรียกสนามนี้ว่าสนามเลี้ยวเบน (diffracted field) นอกจากนี้ Keller ได้ตั้งกฎการเลี้ยวเบน (law of diffraction) ซึ่งมีพื้นฐานอยู่บนกฎของ Snell และ/หรือหลักการของ Fermat โดยกล่าวว่า สำหรับตัวกลางเอกพันธ์ รังสีที่มาจากการเลี้ยวเบนที่ขอบมีทิศทางทำมุมกับแนวแกนที่สัมผัสขอบเท่ากับมุมที่รังสีตกกระทบทำกับแนวแกนที่สัมผัสขอบที่จุดเลี้ยวเบน ในทุกระนาบรอบแกนนั้น ทำให้อาจพิจารณาว่ารังสีเลี้ยวเบน (diffracted ray) มีทิศทางอยู่บนผิวกรวยที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดเลี้ยวเบนและมีมุมยอดเท่ากับสองเท่าของมุมระหว่างรังสีตกกระทบและแนวแกนที่สัมผัสขอบดังรูปที่ 2.6

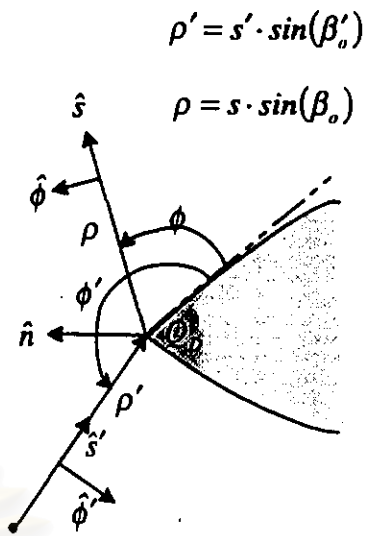


(ก) ลักษณะการรังสีเลี้ยวเบน

รูปที่ 2.6 ลักษณะทางเรขาคณิตบริเวณจุดเลี้ยวเบนที่ขอบรูปร่างใดๆ



(ข) แนวเวกเตอร์สนามของรังสีตกกระทบ และรังสีเดี่ยวบนมุมมองด้านข้าง



(ค) มุมมองด้านบนของแนวเวกเตอร์

รูปที่ 2.6 ลักษณะทางเรขาคณิตบริเวณจุดเดี่ยวบนที่ขอบรูปร่างใดๆ (ต่อ)

จากแนวความคิดของ Keller เมื่อมีสนามไฟฟ้าตกกระทบพื้นผิวที่เป็นขอบในบริเวณตัวกลางเอกพันธ์ดังรูปที่ 2.6 สนามไฟฟ้าจากการเดี่ยวบนที่จุดขอบสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้เหมือนกับการหาสนามเนื่องจากการสะท้อนที่ผิวสะท้อนในหัวข้อระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต ดังนี้

$$\bar{E}^d(s) = \bar{E}^d(O') \sqrt{\frac{\rho_1^d \rho_2^d}{(\rho_1^d + s)(\rho_2^d + s)}} e^{-jk_0 s} \quad (2.32)$$

โดย  $\bar{E}^d(O')$  คือสนามเดี่ยวบนที่จุดอ้างอิง  $O'$  ใดๆ

$s$  คือระยะทางตามแนวรังสีจากจุดอ้างอิง  $O'$  ใดๆ

$\rho_1^d, \rho_2^d$  คือรัศมีความโค้งหลักของสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเดี่ยวบน หรือคือระยะตัดกันของลำรังสีเดี่ยวบนลำดับที่หนึ่งและสองตามลำดับ

จากสมการที่ (2.32) ถ้าเลือกจุดอ้างอิง  $O'$  ใดๆเป็นจุดขอบ  $Q_D$  ที่เกิดการเดี่ยวบน ดังนั้นระยะตัดกันของลำรังสีเดี่ยวบนลำดับที่ 1 จะมีค่าเป็นศูนย์ ( $\rho_1^d = 0$ ) และสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเดี่ยวบนที่จุดขอบนี้ต้องมีค่าจำกัดเมื่อ ( $\rho_1^d \rightarrow 0$ ) และถ้าหากสมมุติว่าความสัมพันธ์ของสนาม



เกี่ยวข้องกับสนามคกระทบเป็นไปแบบเดียวกับความสัมพันธ์ของสนามสะท้อนและสนามคกระทบ ดังนั้นจะได้

$$\bar{E}^d(Q_D) = \lim_{\rho_1^d \rightarrow 0} \bar{E}^d(Q_D) \sqrt{\rho_1^d} = \bar{E}^i(Q_D) \cdot \bar{D} \quad (2.33)$$

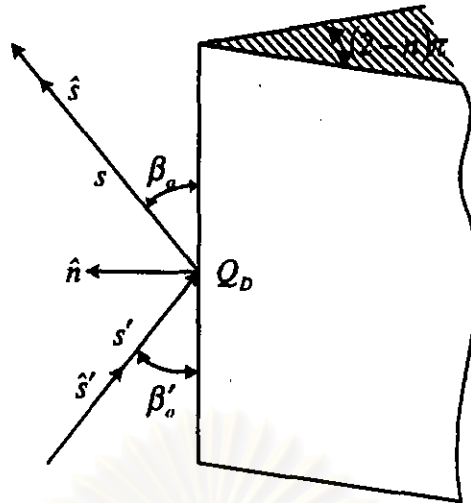
เมื่อ  $\bar{D}$  คือสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิก (dyadic diffraction coefficient) ซึ่งคล้ายกับสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบไดแอดิกในระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต เมื่อแทนสมการที่ (2.33) ลงในสมการที่ (2.32) จะได้สมการสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ตำแหน่งใดๆ เมื่อจุดอ้างอิงอยู่ที่จุดขอบดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{E}^d(s) &= \lim_{\rho_1^d \rightarrow 0} \left\{ \left[ \bar{E}^d(O') \sqrt{\rho_1^d} \right] \sqrt{\frac{\rho_2^d}{(\rho_1^d + s)(\rho_2^d + s)}} e^{-jk_0 s} \right\} \\ \bar{E}^d(s) &= \bar{E}^i(Q_D) \cdot \bar{D} \sqrt{\frac{\rho_2^d}{s(\rho_2^d + s)}} e^{-jk_0 s} \end{aligned} \quad (2.34)$$

สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบไดแอดิกประกอบด้วยองค์ประกอบทั้งโพลาไรเซชันแบบอ่อนและแบบแข็ง  $\bar{D} = -\hat{\beta}'_n \cdot \hat{\beta}_n D_s - \hat{\phi}' \cdot \hat{\phi} D_h$  เมื่อ  $D_s$  และ  $D_h$  เป็นสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบสเกลาร์สำหรับโพลาไรเซชันแบบอ่อนและแบบแข็งตามลำดับ  $\sqrt{\rho_2^d / [s(\rho_2^d + s)]}$  คือตัวประกอบการลดทอนเชิงตำแหน่ง (spatial attenuation factor) สำหรับขอบเลี้ยวเบนต้นโค้ง

สำหรับการพิจารณาการเลี้ยวเบนในปัญหาการแพร่กระจายคลื่นในเขตเมือง การเลี้ยวเบนจะเกิดขึ้นที่มุมของตึกหรือขอบต้นของยอดตึก ซึ่งพิจารณาเป็นขอบโคอิเลกตริกแบบเส้นตรงดังรูปที่ 2.7 และถ้าให้หน้าคลื่นของสนามคกระทบเป็นหน้าคลื่นทรงกลมโดยมีระยะเดินทางจากแหล่งกำเนิดเป็น  $s'$  ค่าระยะตัดกันของลำรังสีเลี้ยวเบนลำดับที่สองกำหนดโดย  $\rho_2^d = s'$  ดังนั้นตัวประกอบการลดทอนในสมการที่ (2.34) จะเป็น

$$\bar{E}^d(s) = \bar{E}^i(Q_D) \cdot \bar{D} \sqrt{\frac{s'}{s(s' + s)}} e^{-jk_0 s} \quad (2.35)$$



รูปที่ 2.7 การเลี้ยวเบนที่จุดเลี้ยวเบนบนขอบของต้นครึ่ง

สมการที่ (2.35) เป็นสมการสำหรับการเลี้ยวเบน เพียงหนึ่งครั้งที่จุดเลี้ยวเบน  $Q_D$  ถ้าหากเกิดการเลี้ยวเบนสองครั้ง สมการสนามเลี้ยวเบนสามารถแสดงดังสมการที่ (2.36) สำหรับสนามในกรณีการเลี้ยวเบนเกิดขึ้นหลายครั้งกว่านี้ก็สามารถหาได้โดยใช้หลักการเดียวกัน โดยถ้าหากเป็นการเลี้ยวเบนที่จุดเลี้ยวเบนสองจุดสามารถเขียนสมการแสดงสนามเนื่องจากการเลี้ยวเบนได้ดังสมการที่ (2.36)

$$\bar{E}^d = \frac{\bar{E}_0}{s'} \bar{D}(Q_1) \bar{D}(Q_2) \sqrt{\frac{s'}{s(s'+s)}} \sqrt{\frac{s}{s^+(s+s^+)}} e^{-jk_0(s'+s+s^+)} \quad (2.36)$$

โดย  $s'$  เป็นระยะทางที่รังสีเดินทางจากแหล่งกำเนิดไปยังจุดเลี้ยวเบนจุดแรก  $s$  เป็นระยะทางที่รังสีเดินทางจากจุดเลี้ยวเบนจุดแรกไปยังจุดเลี้ยวเบนที่สอง และ  $s^+$  เป็นระยะทางที่รังสีเดินทางจากจุดเลี้ยวเบนที่สองไปยังจุดรับ ซึ่งตัวประกอบการลดทอน  $1/s', \sqrt{s'/[s(s'+s)]}$  และ  $\sqrt{s/[s^+(s+s^+)}}$  เป็นตัวประกอบการลดทอนเชิงตำแหน่งของการแพร่กระจายจากแหล่งกำเนิดไปยังจุดเลี้ยวเบนจุดแรก จากจุดเลี้ยวเบนจุดแรกไปยังจุดเลี้ยวเบนที่สอง และจากจุดเลี้ยวเบนที่สองไปยังจุดรับ ตามลำดับ

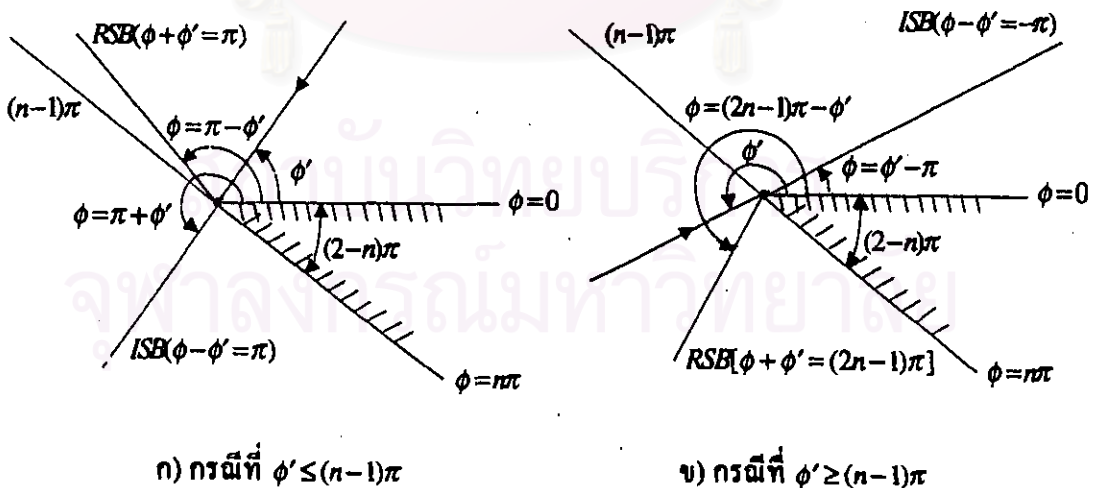
สำหรับสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบสเกลาร์ที่ขอบโคอีเลคตริกซึ่งความนำไฟฟ้ามีค่าจำกัดตามทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตของ Keller นั้นสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2.37ก) - (2.37ข)

$$D_s = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin \beta_o} \left\{ \begin{aligned} &\cot \left[ \frac{\pi + (\phi - \phi')}{2n} \right] + R_s^a \cot \left[ \frac{\pi + (\phi + \phi')}{2n} \right] \\ &+ \cot \left[ \frac{\pi - (\phi - \phi')}{2n} \right] + R_s^o \cot \left[ \frac{\pi - (\phi + \phi')}{2n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.37\text{ก})$$

$$D_h = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin \beta_o} \left\{ \begin{aligned} &\cot \left[ \frac{\pi + (\phi - \phi')}{2n} \right] + R_h^a \cot \left[ \frac{\pi + (\phi + \phi')}{2n} \right] \\ &+ \cot \left[ \frac{\pi - (\phi - \phi')}{2n} \right] + R_h^o \cot \left[ \frac{\pi - (\phi + \phi')}{2n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.37\text{ข})$$

เมื่อ  $R_{s,h}^o$  เป็นสัมประสิทธิ์การสะท้อนของพื้นผิวด้านรังสีตกกระทบด้วยมุมตกกระทบเท่ากับ  $\phi'$  สำหรับโพลาไรเซชันแบบอ่อนและแบบแข็งตามลำดับ และ  $R_{s,h}^a$  เป็นสัมประสิทธิ์การสะท้อนของพื้นผิวด้านรังสีเลี้ยวเบนออกจากขอบด้วยมุมสะท้อนเท่ากับ  $n\pi - \phi$  สำหรับโพลาไรเซชันแบบอ่อนและแบบแข็งตามลำดับ

จากสมการของสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนพบว่าสนามไฟฟ้าเนื่องจากการเลี้ยวเบนที่ขอบนั้นมีค่าจำกัดเมื่อจุดสังเกตไม่อยู่ใกล้ๆ กับขอบเขตเงาของการตกกระทบ (incident shadow boundaries, ISB) และการสะท้อน (reflection shadow boundaries, RSB) ดังรูปที่ 2.8 เนื่องจากที่บริเวณใกล้ๆ กับขอบเขตเงาทั้งสอง ค่าของสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนที่มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์



รูปที่ 2.8 ขอบเขตเงาของการตกกระทบและการสะท้อน

ในกรณีที่จุดสังเกตอยู่ใกล้ๆ กับขอบเขตเงาทั้งสองนั้นสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบดั้งเดิมของ Keller ไม่สามารถคำนวณได้ ต่อมา L.B. Felsen และ N. Marcuvitz ได้ดัดแปลงโดยการเพิ่มฟังก์ชันที่ชดเชยความไม่ต่อเนื่องตรงบริเวณขอบเขตเงา (อ้างจาก [12] และ [16]) ทำให้ได้สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนหลังจากเพิ่มฟังก์ชันชดเชยเข้าไปแล้วดังนี้

$$D_s = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k \sin \beta_o}} \left\{ \begin{array}{l} \cot \left[ \frac{\pi + (\phi - \phi')}{2n} \right] F[kLa^+(\phi - \phi')] \\ + \cot \left[ \frac{\pi - (\phi - \phi')}{2n} \right] F[kLa^-(\phi - \phi')] \\ + R_s^+ \cot \left[ \frac{\pi + (\phi + \phi')}{2n} \right] F[kLa^+(\phi + \phi')] \\ + R_s^- \cot \left[ \frac{\pi - (\phi + \phi')}{2n} \right] F[kLa^-(\phi + \phi')] \end{array} \right\} \quad (2.38\text{ก})$$

$$D_h = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k \sin \beta_o}} \left\{ \begin{array}{l} \cot \left[ \frac{\pi + (\phi - \phi')}{2n} \right] F[kLa^+(\phi - \phi')] \\ + \cot \left[ \frac{\pi - (\phi - \phi')}{2n} \right] F[kLa^-(\phi - \phi')] \\ + R_h^+ \cot \left[ \frac{\pi + (\phi + \phi')}{2n} \right] F[kLa^+(\phi + \phi')] \\ + R_h^- \cot \left[ \frac{\pi - (\phi + \phi')}{2n} \right] F[kLa^-(\phi + \phi')] \end{array} \right\} \quad (2.38\text{ข})$$

เมื่อ  $F(x) = 2j\sqrt{x}e^{jx} \int_x^\infty e^{-j\tau^2} d\tau$  เป็นฟังก์ชันทรานซิชัน (transition function) ที่ใช้ชดเชยความไม่ต่อเนื่องบริเวณขอบเขตเงา, โดยมีค่าปัจจัย  $L$  เป็นค่าปัจจัยทางระยะทาง กำหนดโดย  $L = \frac{ss' \sin^2 \beta_o}{s+s'}$  และฟังก์ชัน  $a^\pm(x)$  กำหนดโดย  $a^\pm(x) = 2 \cos^2 \left[ \frac{2n\pi N^\pm - x}{2} \right]$  เมื่อ  $N^\pm$  คือ เลขจำนวนเต็มที่ทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ค่าใกล้เคียงที่สุด

$$2n\pi N^+ - x = \pi$$

$$2n\pi N^- - x = -\pi$$

เมื่อได้สัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนที่ชดเชยความไม่ต่อเนื่องที่บริเวณเงาแล้ว ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตจึงเปลี่ยนมาเรียกว่าทฤษฎีการเลี้ยวเบนเอกกรุป (Uniform Theory of Diffraction,

UTD) ซึ่งเป็นทฤษฎีที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เมื่อพิจารณาปัญหาการเลี้ยวเบนที่ขอบหรือยอดคดก ในการแพร่กระจายคลื่นในเขตเมือง

### สรุป

จากการประมาณสมบัติของคลื่นย่านความถี่สูงพิเศษด้วยการพิจารณาว่าค่าคงที่เฟสมีค่าเข้าใกล้อนันต์จึงเกิดระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตซึ่งทำให้สามารถวิเคราะห์การแพร่กระจายของคลื่นด้วยกรรมวิธีที่ง่ายกว่าการวิเคราะห์ด้วยสมการคลื่นแบบดั้งเดิมคือสมการของ Maxwell และจากแนวคิดระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตก็พัฒนาเป็นทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตจนกระทั่งเป็นทฤษฎีการเลี้ยวเบนเอกรูปในที่สุด สำหรับปัญหาการแพร่กระจายคลื่นในเขตเมืองในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตและทฤษฎีการเลี้ยวเบนเอกรูปเป็นหลัก ซึ่งนอกจากระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตและทฤษฎีการเลี้ยวเบนเอกรูปที่ใช้ในการคำนวณขนาดสนามไฟฟ้าแล้ว กฎการสะท้อนของ Snell และกฎการเลี้ยวเบนของ Keller ก็ถูกนำมาใช้เพื่อหาเส้นทางเดินของรังสีสัญญาณจากสายอากาศส่งที่สถานีฐานผ่านตึกกีดขวางไปยังสายอากาศรับที่ตำแหน่งใดๆ โดยวิธีการหาเส้นทางเดินรังสีและการคำนวณขนาดสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งรับใดๆ จะได้กล่าวถึงในบทต่อไป

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย