การเปรียบเทียบชิ้นส่วนความเค้นพันทางและชิ้นส่วนผสมสำหรับแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้น

นายปิยวิทย์ ศรีชุมพวง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2544

ISBN 974-03-1347-7

COMPARISON OF HYBRID-STRESS AND MIXED FINITE ELEMENTS
FOR LAMINATED COMPOSITE PLATES

Mr.Piyawit Srichumpaung

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering
Department of Civil Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2001
ISBN 974-03-1347-7

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การเปรียบเทียบชิ้นส่วนความเค้นพันทางและชิ้นส่วนผสมสำหรับแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้น
โดย	นายปิยวิทย์ ศรีชุมพวง
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เริงเดชา รัชตโพธิ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สุธรรม สุริยะมงคล)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เริงเดชา รัชตโพธิ์)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย)

ปิยวิทย์ ศรีชุมพวง : การเปรียบเทียบชิ้นส่วนความเค้นพันทางและชิ้นส่วนผสมสำหรับแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้น. (COMPARISON OF HYBRID-STRESS AND MIXED FINITE ELEMENTS FOR LAMINATED COMPOSITE PLATES) อ. ที่ปรึกษา : ผศ.ดร.เริงเดชา รัชตโพธิ์, 135 หน้า. ISBN 974-03-1347-7.

งานวิจัยนี้ได้เปรียบเทียบชิ้นส่วนพันทาง และชิ้นส่วนผสมที่สร้างจากหลักการแปรผันต่างๆสำหรับวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นภายใต้ภาวะสถิตเชิงเส้นโดยใช้แผ่นที่มีความหนา แรงกระทำ และเงื่อนไขที่ขอบที่แตกต่างกันไปในการทดสอบ

ผลการวิจัยพบว่าชิ้นส่วนอันดับต่ำ (ชิ้นส่วน 4 ขั้ว) ซึ่งไม่มีการสมมุติการกระจัดส่วนเพิ่ม คือ ชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วนจากหลักการจิง-เลียว และชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรด้วยวิธีทัณฑกรรมให้ผลเฉลยแม่นยำ แต่จะเกิดการยึดเนื่องจากแรงเฉือนเมื่ออัตราส่วนความยาวต่อความหนามีค่าเกิน 100 ในขณะที่ชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้ว และชิ้นส่วนผสมจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ซึ่งทั้งสองแบบต่างก็มีการสมมุติการกระจัดส่วนเพิ่มนั้นให้ผลเฉลยแม่นยำเช่นกัน แต่ควรที่จะสมมุติให้จำนวนพารามิเตอร์ต่างๆมีค่าอัตราส่วน $\dfrac{n_\beta}{n_q + n_\lambda}$ ไม่เกิน 3 เพื่อมิให้ค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากคลาดเคลื่อนในโครงสร้างที่มีอัตราส่วนความยาวต่อความหนามากๆ

ทุกกรณีที่ศึกษา ค่าการกระจัดของชิ้นส่วนที่ศึกษาส่วนใหญ่แม่นยำไม่ต่ำกว่าร้อยละ 90 เมื่ออัตราส่วนความยาวต่อความหนามีค่าไม่เกิน 100 ในโครงสร้างแผ่นต่างวัสดุที่มีการรองรับแบบธรรมดานั้น ความเค้นดัดของชิ้นส่วนที่ศึกษาส่วนใหญ่แม่นยำไม่ต่ำกว่าร้อยละ 90 เช่นกัน ส่วนความเค้นเฉือนตั้งฉากที่ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นจำนวน 9 ชั้นนั้น ชิ้นส่วนที่ไม่ได้ใช้สนามการกระจัดแบบรวม หรือ สนามการกระจัดชั้นเดียวสมมูลจะให้ค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากคลาดเคลื่อนเกินร้อยละ 50 ในขณะที่ชิ้นส่วนที่ใช้สนามการกระจัดดังกล่าวจะให้ค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากคลาดเคลื่อนไม่เกินร้อยละ 15 ทั้งนี้ชิ้นส่วนที่ศึกษาจะให้ค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากที่ดีในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นจำนวน 3 ชั้น และมีความยืนยงทุกชิ้นส่วน แต่ในการทดสอบแบบหย่อมนั้น พบว่าชิ้นส่วนที่ศึกษาจะไม่ผ่านการดัดและการบิด

จากการทดสอบหากพิจารณาด้านความแม่นของการกระจัดและความเค้นดัด ชิ้นส่วนที่ศึกษาในงานวิจัยนี้จะให้ค่าการกระจัดที่แม่นยำใกล้เคียงกัน แต่หากจะพิจารณาจากแง่ของความแม่นของความเค้นแล้วพบว่าชิ้นส่วน 4HbHsz2 4HbMd1 และ 4HbMd2 ซึ่งเสนอโดยผู้วิจัย และชิ้นส่วน 4HeHsz ซึ่งเสนอโดยชวงและไต [24] ให้ผลค่อนข้างดี และในกรณีที่ต้องการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นที่ไม่มีสมมาตรกับระนาบ xy พบว่าชิ้นส่วน 4HbMd2 จะให้การกระจายตัวของความเค้นตลอดความหนาของโครงสร้างที่ดีกว่าชิ้นส่วนอื่นที่ได้ศึกษา

ภาควิชา.......วิศวกรรมโยธา............. ลายมือชื่อนิสิต...

สาขาวิชา.......วิศวกรรมโยธา............. ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..

ปีการศึกษา 2544

4170409821 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEY WORD: HYBRID / MIXED / FINITE ELEMENT / LAMINATED PLATES

PIYAWIT SRICHUMPAUNG : COMPARISON OF HYBRID-STRESS AND MIXED FINITE ELEMENTS FOR LAMINATED COMPOSITE PLATES. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. ROENGDEJA RAJATABHOTHI, Ph.D. 135 pp. ISBN 974-03-1347-7.

This research compares hybrid-stress and mixed finite elements formulated from variational principles for analyzing laminated composite plates in static linear problems. A wide range of plates with varying thickness were examined for different loadings and boundary conditions.

The results show that two lower-order (4-node) elements which do not assume additional displacements, namely, a partial hybrid element based on Jing-Liao principle and a hybrid element based on Hellinger-Reissner principle, generally gave good solutions but underwent shear locking when the length-to-thickness ratio exceeded 100. Hybrid elements formulated from modified Hellinger-Reissner principle and mixed elements formulated from Hellinger-Reissner principle, both assuming additional displacements, also performed similarly. However, the parameters should be assumed such that the ratio $\dfrac{n_\beta}{n_q + n_\lambda}$ is kept under 3 to prevent error in transverse shear when plates become very thin.

All plates tested showed more than 90 percent accuracy of displacement when the length-to-thickness ratio does not exceed 100. For simple supported laminated composite plates, flexural stresses were also more than 90 percent accurate. However, the accuracy of transverse shear stresses in investigating nine-layer laminated composite plates using elements in which the displacement fields are not MDT or ESLT(with zigzag function) gave errors in transverse shear stresses exceeding 50 percent. Elements using MDT or ESLT(with zigzag function) in their displacement fields on the other hand showed less than 15 percent errors. All elements gave accurate transverse shear stresses in three-layer laminated composite plates and are invariant. However, none of the elements passed the patch test in bending and twisting.

Regarding displacement and flexural stresses, all elements showed comparable accuracy. Based on transverse shear stress considerations, however, the 4HbHsz2 element, the 4HbMd1 element and the 4HbMd2 element proposed in this research and the 4HeHsz element proposed by Cheung and Di [24] performed equally well. For laminated plates without symmetric laminations about the x-y plane, the 4HbMd2 element gave better transverse shear stress distribution throughout plate thickness than all other elements studied.

Department.......Civil Engineering............... Student's signature ....

Field of study.......Civil Engineering............ Advisor's signature ....

Academic year 2001

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงลงได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เริงเดชา รัชตโพธิ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้กรุณาให้คำแนะนำ และข้อคิดต่างๆในการวิจัยมาด้วยดีตลอด นอกจากนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. สุธรรม สุริยะมงคล ประธานคณะกรรมการ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย ที่ได้ให้คำชี้แนะเพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณครูบาอาจารย์ทุกท่านที่ได้เคยประสิทธิประสาทวิชาความรู้ให้ข้าพเจ้า ขอบคุณผู้เขียนหนังสือทุกท่าน หนังสือของพวกท่านสามารถเป็นกุญแจไขไปสู่คำตอบแก่ข้าพเจ้าได้เสมอ ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา ซึ่งสนับสนุนในด้านการเงิน และทุนอุดหนุนการวิจัยของทบวงมหาวิทยาลัยที่ได้มอบแก่ผู้วิจัยจนสำเร็จการศึกษา

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

$[\,]^T$	การสับเปลี่ยนเมตริกซ์ (matrix transpose)
$[\,]^{-1}$	เมตริกซ์ผกผัน (matrix inverse)
$"\_"$	เวกเตอร์สดมภ์
$\underline{\bar{T}}$	แรงกระทำที่ทราบค่าที่ขอบ
$\underline{\bar{f}}$	แรงตัว (body force)
DOF	ระดับขั้นความเสรี (degree(s) of freedom)
Π	หลักการแปรผัน (variational principle) เช่น Π_P คือหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุด
k	เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน
x, y, z	พิกัดฉาก (Cartesian coordinates)
ξ, η, ζ	พิกัดธรรมชาติของชิ้นส่วน (natural coordinates)
u	การกระจัดในแนวแกน x
v	การกระจัดในแนวแกน y
w	การกระจัดในแนวแกน z
$\underline{u}$	เวกเตอร์ของการกระจัดโดยที่ $\underline{u} = [u \quad v \quad w]^T$
$\underline{\sigma}$	เวกเตอร์ของความเค้น
$\underline{\varepsilon}$	เวกเตอร์ของความเครียด
D	เมตริกซ์ตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์ (differential operator)
S_σ	พื้นที่ผิวส่วนที่ไม่ทราบค่าการกระจัดซึ่งมีแรงกระทำ
S_U	พื้นที่ผิวส่วนที่ทราบค่าการกระจัด
V	ปริมาตรของปัญหาที่สนใจ
∂V	พื้นที่ผิวของปัญหาที่สนใจโดยที่ $\partial V = S_\sigma + S_U$
$\underline{q}$	เวกเตอร์การกระจัดที่ขั้ว
$\underline{\lambda}$	เวกเตอร์พารามิเตอร์การกระจัดส่วนเพิ่ม
$\underline{\beta}$	เวกเตอร์พารามิเตอร์ความเค้น
$\underline{\alpha}$	เวกเตอร์พารามิเตอร์ความเครียด
C	เมตริกซ์ปรุงแต่ง(constitutive matrix) ที่ทำการเปลี่ยนจากความเค้นเป็นความเครียด
S	เมตริกซ์สอดคล้อง (compliance matrix) ที่ทำการเปลี่ยนจากความเครียดเป็นความเค้น
$\underline{u}_q$	เวกเตอร์การกระจัดที่เข้ากันได้
$\underline{u}_\lambda$	เวกเตอร์การกระจัดส่วนเพิ่ม
NE	จำนวนชิ้นส่วนทั้งหมด
NL	จำนวนชั้นของแผ่นพื้นต่างวัสดุที่วางซ้อนกัน
ND	จำนวนขั้วของชิ้นส่วน
n_u	จำนวนของพารามิเตอร์การกระจัด

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

n_σ	จำนวนของพารามิเตอร์ความเค้นของชิ้นส่วน
n_ε	จำนวนของพารามิเตอร์ความเครียดของชิ้นส่วน
r	จำนวนรูปแบบการเคลื่อนแบบวัตถุแข็งเกร็งของชิ้นส่วน
n_q	จำนวนของการกระจัดที่เข้ากันได้ต่อขั้วของชิ้นส่วน
n_λ	จำนวนพารามิเตอร์การกระจัดส่วนเพิ่มของชิ้นส่วน
ESLT	ทฤษฎีการกระจัดชั้นเดียวสมมูล (Equivalent Single-Layer Theory)
CLT	ทฤษฎีแบบชั้นตามแบบฉบับ (Classical Laminate Theory)
FSDT	ทฤษฎีการผิดรูปจากแรงเฉือนอันดับแรก (First-order Shear Deformation Theory)
HSDT	ทฤษฎีการผิดรูปจากแรงเฉือนอันดับสูง (Higher-order Shear Deformation Theory)
LWT	ทฤษฎีการกระจัดหลายชั้น (Layer-wise theory)
PLWT	ทฤษฎีการกระจัดหลายชั้นบางส่วน (Partial Layer-wise Theory)
FLWT	ทฤษฎีการกระจัดหลายชั้นครบส่วน (Full Layer-wise Theory)
MDT	ทฤษฎีการกระจัดแบบรวม (Multiple Displacement Field Theory)
N	ฟังก์ชันสัณฐาน (shape function)
J	เมตริกซ์จาโคบี
$\lvert J \rvert$	ตัวกำหนด (determinant)ของเมตริกซ์จาโคบี
h_I	ความหนาของแผ่นพื้นชั้นที่ I
t	ความหนาทั้งหมดของโครงสร้างโดยที่ $t = \sum_{I=1}^{NL} h_I$
E	โมดูลัสยืดหยุ่น (elastic modulus)
G	โมดูลัสเฉือน (shear modulus)
υ	อัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson's ratio)
W, L	ความกว้าง และความยาวของโครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความนำ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) เป็นวิธีวิเคราะห์โครงสร้างที่มีประสิทธิภาพซึ่งใช้กันอย่างกว้างขวาง และสามารถนำไปประยุกต์กับปัญหาหลายๆรูปแบบที่มีความสลับซับซ้อน หลักการสำคัญของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือ การแบ่งโครงสร้างที่ต้องการวิเคราะห์ออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ แล้วทำการรวมชิ้นส่วนดังกล่าวโดยสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ หลักการวิเคราะห์ดังกล่าวนี้เหมาะที่จะนำไปเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งทำให้การวิเคราะห์ปัญหามีความสะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น

ปัจจุบันแนวคิดและความสนใจในการนำวัสดุผสม (composite materials) เช่น แผ่น FRP (Fiber-Reinforced Plastic) มาใช้ประโยชน์ได้เพิ่มขึ้นทั้งนี้เพราะวัสดุดังกล่าวมีค่ากำลังต้านทานแรงดึง(tensile strength) และความทนทานต่อสภาพสภาวะอากาศ (durability) สูง อีกทั้งง่ายในการนำไปประยุกต์ อาทิเช่น เพื่อเพิ่มกำลังรับน้ำหนักแก่ คาน เสา หรือ แผ่นพื้น

แต่เนื่องจากวัสดุที่ทำมาจาก FRP นั้นค่อนข้างมีราคาสูง ดังนั้นการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาปริมาณ, ตำแหน่ง และทิศทางการวางแผ่นวัสดุ ก็จะช่วยให้สามารถใช้วัสดุได้อย่างมีประสิทธิภาพ อันนำไปสู่การลดค่าใช้จ่ายต่างๆลงด้วย ทั้งนี้การวิเคราะห์โดยใช้ชิ้นส่วนแบบชั้น (laminated element) ก็เป็นแนวทางหนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่เสริมแผ่น FRP และการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ยังสามารถช่วยให้เข้าใจพฤติกรรมของโครงสร้างดังกล่าวได้ดียิ่งขึ้น

1.2 การศึกษาที่ผ่านมา

ทฤษฎีโครงสร้างแบบชั้น (laminate theory) มีอยู่หลายทฤษฎี ทฤษฎีแรกที่ถูกเสนอคือ ทฤษฎีแบบชั้นตามแบบฉบับ(Classical Laminate Theory, CLT) ซึ่งเป็นทฤษฎีอย่างง่ายและใช้หลักการตามสมมติฐานเคอร์ชอฟ-เลิฟ(Kirchhoff-Love)ที่กล่าวไว้ว่า “เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบกลาง (midplane) ของแผ่นพื้นก่อนการผิดรูปนั้นยังคงตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นพื้นหลังการผิดรูป” ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \text{ และ } \phi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (1.2\text{-}1)$$

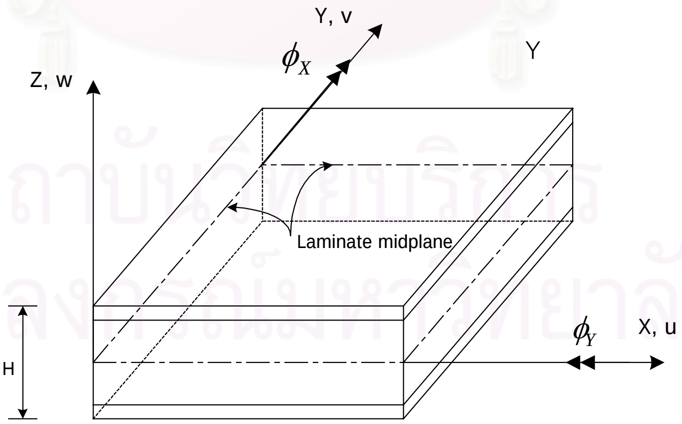
ดังแสดงในรูปที่ 1.2-1 โดยที่ทฤษฎีนี้จะไม่คิดผลของการผิดรูปจากแรงเฉือน (shear deformation) ดังนั้นจึงส่งผลให้การวิเคราะห์ที่ใช้สมมติฐานนี้ได้ผลไม่แม่นยำนักโดยเฉพาะอย่างยิ่งในวัสดุ FRP ซึ่งมีอัตราส่วน

ของค่าโมดูลัสยืดยุ่น (elastic modulus) กับค่าโมดูลัสเฉือน (shear modulus) อยู่ช่วง 20-50 ในขณะที่วัสดุเนื้อเดียวที่มีสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic material) ทั่วไปมีค่าอัตราส่วนดังกล่าวไม่เกิน 3 [36] ทั้งนี้พบว่าค่าความเค้นเฉือนตั้งฉาก (transverse shear) จะมีผลต่อการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นบางแบบชั้นที่มีค่าอัตราส่วนของความหนากับความยาวของแผ่นบางน้อยกว่า 0.05 [23]

ต่อมาทฤษฎี CLT ได้ถูกปรับปรุงตามแบบจำลองของไรสเนอร์ (Reisser) และมินด์ลิน (Mindlin) โดยมีสมมติฐานว่า "เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นพื้นก่อนการผิดรูปนั้นไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นพื้นหลังการผิดรูป" ซึ่งแบบจำลองนี้ถูกเสนอขึ้นมาเพราะมีความสนใจในการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นแบบชั้นที่เป็นวัสดุที่มีสมบัติแต่ละทิศทางต่างกัน (laminated anisotropic plates) โดยรวมผลของการผิดรูปจากแรงเฉือนไว้ด้วย ทฤษฎีที่ปรับปรุงแล้วนี้รวมเรียกว่า " ทฤษฎีการผิดรูปจากแรงเฉือนอันดับแรก (First-order Shear-Deformation Theory, FSDT)" ซึ่งจะกำหนดให้สนามการกระจัด (displacement) ในแนวระนาบขึ้นอยู่กับค่าพิกัดความหนากำลังหนึ่งดังในการศึกษาของ จันทราเชการะ(Chandrashekhara) [34] แสดงในสมการที่ 1.2-2

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= u(x,y,0) + z\phi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v(x,y,0) + z\phi_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w(x,y,0) \end{aligned}\right\} \quad (1.2\text{-}2)$$

โดยที่ u(x,y,z), v(x,y,z) และ w(x,y,z) คือการกระจัดในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ u(x,y,0), v(x,y,0) และ w(x,y,0) คือการกระจัดที่ระนาบกลาง และ ϕ_x และ ϕ_y คือมุมหมุนตั้งฉาก (normal rotations)



รูปที่ 1.2-1 โครงสร้างแผ่นพื้นแบบชั้น

ทฤษฎี FSDT นี้สามารถให้ผลการวิเคราะห์อันน่าพอใจสำหรับปัญหาโครงสร้างทั่วไป แม้กระทั่งในปัญหาโครงสร้างแบบชั้นที่มีความหนาปานกลาง ทั้งนี้ความแม่นยำในการวิเคราะห์ตามทฤษฎี FSDT ดังกล่าว

ข้างต้นนั้นจะขึ้นอยู่กับค่าของตัวประกอบแก้ไขแรงเฉือน (shear correction factors) ที่จะต้องใช้ในการวิเคราะห์ว่ามีความถูกต้องเหมาะสมเพียงใด อาทิเช่นในการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นบางเนื้อเดียว (homogeneous plate) นั้นมักนิยมใช้ค่าตัวประกอบแก้ไขแรงเฉือนเท่ากับ $\frac{5}{6}$

ภายหลังได้มีผู้ศึกษาคือนัวร์ (Noor) และคณะ(1989) เสนอวิธีการปรับปรุงผลการวิเคราะห์ตามทฤษฎี FSDT โดยการสมมติค่าตัวประกอบแก้ไขแรงเฉือนเริ่มต้นค่าหนึ่งขึ้นมาใช้วิเคราะห์ตามทฤษฎี FSDT ในขั้นแรก หลังจากนั้นจึงนำผลลัพธ์ที่ได้ไปคำนวณหาค่าตัวประกอบแก้ไขแรงเฉือนใหม่ แล้วนำค่าที่ได้ใหม่นี้ไปใช้ในการวิเคราะห์ตามทฤษฎี FSDT อีกครั้ง หลักการที่เสนอข้างต้นนี้มีข้อจำกัดในการนำไปวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ เพราะหลักการนี้จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องสามารถวิเคราะห์ผลลัพธ์จากสมการสมดุลสามมิติ (three-dimensional equilibrium equation) ได้

ล่าสุดทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างจากแรงเฉือนอันดับสูง (Higher-order Shear-Deformation Theory, HSDT) ได้ถูกพัฒนาขึ้นมาเพื่อเอาชนะข้อจำกัดของทฤษฎี FSDT ทั้งนี้สามารถแบ่งย่อยลงไปได้อีกเป็นสองวิธีคือ การสร้างแบบชั้นเดียว [11] (single-layer formulation) และแบบหลายชั้น [6, 12] (multi-layer formulation) แบบแรกนั้นจะทำการเพิ่มอันดับของพจน์ในสูตรของการกระจัดในส่วนพิกัดของความหนา (thickness coordinates) ในส่วนของแบบที่สองนั้นจะทำการสมมติสนามการกระจัดในแต่ละชั้น

ตัวอย่างการกำหนดการกระจัดตามทฤษฎี HSDT ในการศึกษาของเรดดี (Reddy) [11] ซึ่งเป็นการสร้างแบบชั้นเดียวแสดงในสมการที่ 1.2-3

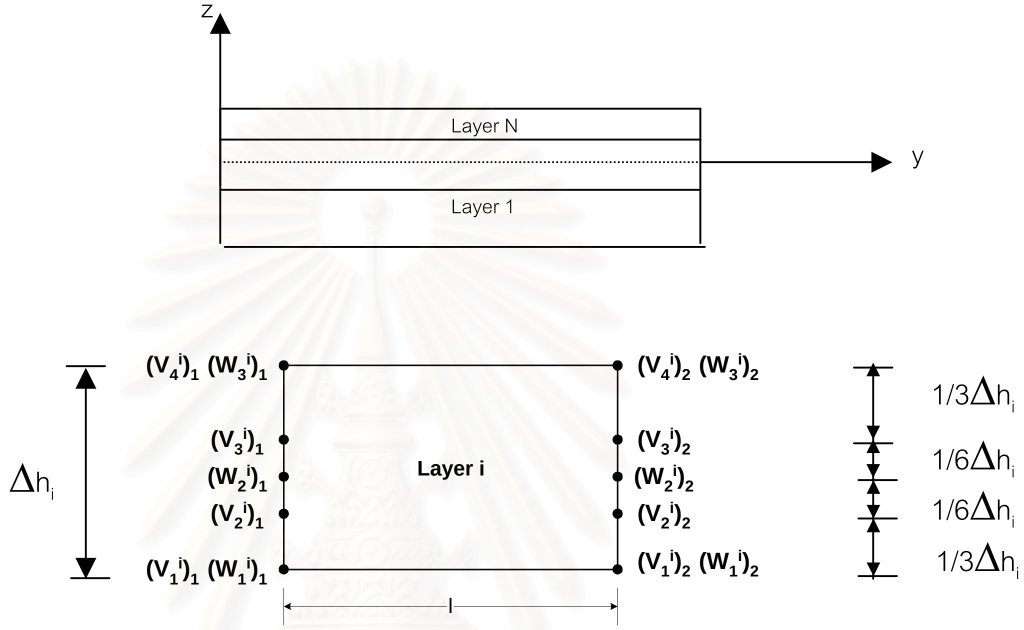
$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= u(x,y,0) + z\phi_x(x,y) + z^2\xi_x(x,y) + z^3\zeta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v(x,y,0) + z\phi_y(x,y) + z^2\xi_y(x,y) + z^3\zeta_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w(x,y,0) \end{aligned}\right\} \quad (1.2\text{-}3)$$

ดังจะเห็นว่าสมการที่ 1.2-3 นั้นคล้ายกับสมการที่ 1.2-2 โดยที่สมการที่ 1.2-3 นั้นจะมีฟังก์ชันของ ξ_x ξ_y ζ_x และ ζ_y ซึ่งจะต้องถูกคำนวณหาให้เข้ากันได้กับสภาวะที่หน่วยแรงเฉือนตั้งฉากเท่ากับศูนย์ผิวของแผ่นพื้นบนและล่าง ดังแสดงในสมการที่ 1.2-4

$$\sigma_{xz}(x,y,\pm\frac{t}{2}) = 0 \text{ และ } \sigma_{yz}(x,y,\pm\frac{t}{2}) = 0 \qquad (1.2\text{-}4)$$

เมื่อ t คือความหนาของโครงสร้างแบบชั้น

ตัวอย่างการกำหนดการกระจัดซึ่งเป็นการสร้างแบบหลายชั้นตามทฤษฎี HSDT ในการศึกษาของสปิลเกอร์ (Spilker) [6] ที่ศึกษาปัญหาความเค้นในระนาบ (plane strain) ซึ่งขั้วทางซ้ายมือเป็นขั้วที่ 1 ส่วนขั้วทางขวามือเป็นขั้วที่ 2 ดังแสดงในสมการที่ 1.2-5 และรูปที่ 1.2-2



รูปที่ 1.2-2 การกระจัดตามทฤษฎี HSDT แบบหลายชั้น [6]

$$\left.\begin{aligned}
V^i(\varsigma) &= \left[H_1(\varsigma)V_1^i + H_2(\varsigma)V_2^i + H_3(\varsigma)V_3^i + H_4(\varsigma)V_4^i\right](1-y/l)+ \\
&\quad \left[H_1(\varsigma)V_1^i + H_2(\varsigma)V_2^i + H_3(\varsigma)V_3^i + H_4(\varsigma)V_4^i\right](y/l) \\
W^i(\varsigma) &= \left[F_1(\varsigma)W_1^i + F_2(\varsigma)W_2^i + F_3(\varsigma)W_3^i\right]_1(1-y/l)+ \\
&\quad \left[F_1(\varsigma)W_1^i + F_2(\varsigma)W_2^i + F_3(\varsigma)W_3^i\right]_2(y/l)
\end{aligned}\right\} \qquad (1.2\text{-}5)$$

โดยที่ $H_n(\varsigma)$ และ $F_n(\varsigma)$ เป็นฟังก์ชันของ ς กำลัง 3 และ 2 ตามลำดับ เมื่อ ς คือค่าปรกติ (normalized) ของพิกัดความหนาซึ่งจะเท่ากับ –1 ที่ z=h_i และ +1 ที่ z=h_{i+1} ของแผ่นชั้นที่ I Δh_i คือความหนาของแผ่นพื้นชั้นที่ i

รอบบินส์และเรดดี (Robbins and Reddy) [65] พบว่าการใช้แบบจำลองการกระจัดตามทฤษฎีใดทฤษฎีหนึ่งเพียงทฤษฎีเดียวอาจไม่ใช่วิธีที่เหมาะสมที่สุดในการวิเคราะห์โครงสร้างต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นทั่วๆไป ดังนั้นการใช้แบบจำลองการกระจัดตามทฤษฎีต่างๆร่วมกัน และหรือการใช้ระดับการแบ่งขนาดของชิ้นส่วนที่ต่าง

กันในการวิเคราะห์ในแต่ละส่วนของโครงสร้างต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นตามความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ต้องการซึ่งเรียกว่า วิธีวิเคราะห์โดยแบบจำลองการกระจัดแบบรวม (multiple model analysis) จึงน่าจะเป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่เหมาะสมที่จะสามารถให้ทั้งความแม่นยำและความประหยัดในการคำนวณ

ชิ้นส่วนแผ่นพื้นแบบชั้นที่สร้างมาจากแบบจำลองการกระจัดสมมติ (assumed displacement model) และได้รวมผลของความเค้นเฉือนแนวขวางไว้แล้วนั้นได้ถูกพัฒนาขึ้นมาโดยนักวิจัยหลายท่าน [3, 5, 7] นอกจากนี้ยังได้มีความพยายามปรับปรุงชิ้นส่วนที่ถูกเสนอโดย Mindlin นี้ด้วยการใช้วิธีการอินทิเกรตแบบลดและเลือก (reduced and selective integration techniques) [4] ซึ่งชิ้นส่วนดังกล่าวนี้ก็ยังไม่สามารถที่จะให้ผลการวิเคราะห์แม่นยำนัก คือยังมีผลของการยึดตัวเนื่องจากแรงเฉือน (shear locking) ในแผ่นบาง (thin plate) และหรือการที่มีค่าลำดับชั้น (rank) ของเมตริกซ์ของสติฟเนสไม่ถูกต้อง

ความยุ่งยากในการสร้างชิ้นส่วนแผ่นพื้นตามแบบจำลองของ Mindlin ให้เข้ากันได้กับสภาวะของความเค้นที่จุดต่างๆ โดยการสมมติการกระจัดนั้นสามารถหลีกเลี่ยงได้ด้วยการใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พันทาง (hybrid-stress finite-element model) แทน โดยการใช้วิธีการพันทางได้ถูกพัฒนาขึ้นครั้งแรกโดยเพียน(Pian)(1964) ทั้งนี้แบบจำลองชิ้นส่วนพันทางนั้นจะใช้หลักการของพลังงานส่วนเติมเต็มที่ดัดแปรแล้ว (modified complementary energy) ซึ่งมีหลักการว่าความเค้นภายในชิ้นส่วน (intra-element stresses) และการกระจัดภายใน หรือที่ขอบของชิ้นส่วนนั้นจะถูกประมาณค่าในช่วง (interpolated) ด้วยพารามิเตอร์ของความเค้น (stress parameter) และค่าการกระจัดที่ขั้ว (nodal displacement) โดยไม่ขึ้นแก่กัน

การศึกษาระยะแรก [1, 7] นั้นส่วนมากมักจะสมมติการกระจัดแนวระนาบแปรผันเชิงเส้นตลอดความหนาของแผ่นบางแต่ละชั้น ในขณะที่การกระจัดแนวขวางจะสมมติให้คงที่ตลอดความหนาของโครงสร้างแบบชั้น โดยชิ้นส่วนที่ได้สามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์กับแผ่นบางที่มีอัตราส่วนความหนาต่อความยาวของแผ่นบางไม่เกิน 0.25

สปิลเกอร์ [8, 23] พบว่าในจำนวนชิ้นส่วนพันทางชั้นเดียว (single-layer hybrid-stress plate element) ชิ้นส่วนแบบ 8 ขั้วให้ผลการวิเคราะห์ที่แม่นยำเมื่อคำนึงถึงจำนวนระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ดังนั้นในการศึกษาต่อมาในส่วนของชิ้นส่วนแผ่นพื้นแบบชั้น สปิลเกอร์จึงได้เลือกพัฒนาชิ้นส่วนแบบ 8 ขั้วเพื่อใช้ในการวิเคราะห์แผ่นบางซึ่งให้ค่าลำดับชั้นที่ถูกต้องและไม่เกิดการยึดเนื่องจากแรงเฉือนในแผ่นบาง

วิธีการสร้างชิ้นส่วนพันทางด้วยการใช้การกระจัดส่วนเพิ่ม(additional displacement) และเงื่อนไขบังคับของพลังงาน (energy constraint) ได้ถูกเสนอซึ่งสามารถนำไปประยุกต์กับปัญหา และชิ้นส่วนชนิดต่างๆ ได้อย่างดีเยี่ยมโดยที่หลักการของวิธีการดังกล่าวได้แสดงไว้ในการศึกษาของเพียน (Pian) และวู (Wu)(1988) [13] เนื่องจากสภาวะสมดุล (equilibrium condition) นั้นไม่ได้ถูกบังคับในหลักการแปรผัน (variational principle) ความยุ่งยากในการเลือกพจน์ของความเค้นที่สมดุลนั้นจึงหมดไป ทำให้วิธีการนี้เหมาะสมในการวิเคราะห์ปัญหาที่เป็นโครงสร้างแผ่นพื้นแบบชั้น

ชวง (Cheung) และ ไต (Di)(1993) [24] ก็ได้ทำการศึกษาโดยใช้หลักการเบื้องต้นกับการแปรผันที่ดัดแปรแล้วของเฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์ (Hellinger-Reissner) ซึ่งจะแบ่งการกระจัดออกเป็นสองส่วนคือ การกระจัดเข้ากันได้ที่ถูกประมาณกับการกระจัดที่ขั้วและการกระจัดส่วนเพิ่ม ร่วมกับทฤษฎี HSDT โดยใช้ฟังก์ชันฟันเลื่อยในการจำลองการผิดรูปด้วยแรงเฉือนของหน้าตัดโครงสร้างแบบชั้น ในการศึกษานี้พบว่าชิ้นส่วนดังกล่าวให้ผลลัพธ์ที่ลู่เข้า และแม่นยำโดยเฉพาะการกระจายตัวของการกระจัดและความเค้นตลอดความหนาของโครงสร้าง

อย่างไรก็ตามปัญหาสำคัญของการสร้างชิ้นส่วนพันทางนั้นพบว่าจะอยู่ที่การสร้างสนามความเค้นซึ่งมีความซับซ้อนยุ่งยาก และต้องการระยะเวลาที่ยาวนานขึ้นในการคำนวณที่มีพารามิเตอร์ความเค้นจำนวนมากที่สมมติขึ้นมา ดังนั้นจึงได้มีการพัฒนาระเบียบวิธีการชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วน (partial hybrid stress method) เพื่อใช้ในการแก้ไขปัญหาเบื้องต้น โดยการแบ่งความเค้นออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนของการดัดและแรงเฉือนตั้งฉาก ซึ่งจะทำการสมมติสนามความเค้นเฉพาะในส่วนของแรงเฉือนตั้งฉากขึ้นมาในแต่ละชั้น จากการศึกษาของยอง (Yong) และโช (Cho) [38] พบว่าการสร้างชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วนโดยใช้หลักการของเฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์ ตามสมมติฐานความเค้นของจิง (Jing) และเซง (Tseng) นั้นใช้พารามิเตอร์ความเค้นเพียง (18NL -12) ในขณะที่การสร้างชิ้นส่วนพันทางแบบเต็มส่วนอย่างเช่นในการศึกษาของสปิลเกอร์ [23] ใช้พารามิเตอร์ความเค้น (52NL -12) เมื่อ NL คือจำนวนชั้นของแผ่นพื้นในโครงสร้าง ในขณะที่ผลการวิเคราะห์จะได้การกระจายตัวของหน่วยแรงเฉือนตั้งฉากที่มีความแม่นยำมากกว่าการใช้ทฤษฎี HSDT อีกด้วย

การศึกษาของออริชิโอ (Auricchio) และแซคโค (Sacco) [26] ได้เลือกศึกษาชิ้นส่วน 4 ขั้วซึ่งเป็นชิ้นส่วนที่ง่ายในการแบ่งโครงสร้างที่จะวิเคราะห์เป็นชิ้นส่วนย่อย และการคำนวณตามขั้นตอนทฤษฎี FSDT ที่จะต้องหาค่าตัวประกอบแก้ไขแรงเฉือนค่าใหม่ไปใช้ในการวิเคราะห์ครั้งต่อไปดังที่กล่าวไว้แล้วข้างต้น โดยใช้หลักการการสร้างแบบผสม (mixed formulation) ที่สร้างสนามความเค้นแบบบางส่วน โดยจะปรับปรุงการเปลี่ยนรูปร่างในแนวระนาบ (in-plane deformation) ด้วยการใช้ฟังก์ชันฟองสบู่ (bubble function) เพิ่มเข้าไปในระดับขั้นความเสรี และฟังก์ชันที่เชื่อมการกระจัดตั้งฉาก (transverse displacement) กับมุมหมุน (rotation) ชิ้นส่วนที่ได้จะไม่เกิดการยึดจากแรงเฉือน ไม่เกิดรูปแบบการไร้พลังงาน (zero energy modes) และสามารถทำนายการผิดรูปทั้งแนวระนาบและแนวขวางได้ถูกต้อง

จากการศึกษาของผู้วิจัยต่างๆที่กล่าวมาข้างต้นจึงได้เกิดความสนใจในการนำชิ้นส่วนพันทางและชิ้นส่วนผสมสำหรับแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นมาเปรียบเทียบ พัฒนาแบบจำลองและหรือสนามตัวแปรเพื่อจะได้มีชิ้นส่วนมาใช้ในการวิเคราะห์อย่างมีประสิทธิภาพที่ดีขึ้น

1.3 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1) เพื่อศึกษาหลักการและการพัฒนาชิ้นส่วนแผ่นพื้นแบบชั้น(laminated plate element)

2) เพื่อนำชิ้นส่วนแผ่นพื้นแบบชั้นประเภทต่างๆมาเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการคำนวณทางคอมพิวเตอร์

3) เพื่อพัฒนาแบบจำลองและหรือสนามตัวแปรในการนำชิ้นส่วนแผ่นพื้นแบบชั้นมาไปใช้ในการวิเคราะห์ได้อย่างมีประสิทธิภาพที่ดีขึ้น

1.4 ขอบเขตของงานวิจัย

1) การโก่งตัว (deflection) ของแผ่นพื้นแบบชั้นมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนา
2) ทำการศึกษาชิ้นส่วนแผ่นแบบชั้นทั้งที่เป็นชิ้นส่วนพันทาง(hybrid elements)และชิ้นส่วนแบบผสม
(mixed elements)
3) การวิเคราะห์ปัญหาเชิงเส้น (linear analysis)
4) พิจารณาการวิเคราะห์ในสภาวะสถิต (static)
5) วัสดุมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่น

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1) การทบทวนและรวบรวมข้อมูลของการศึกษาที่ผ่านมาในอดีตให้ครอบคลุมเนื้อหาทั้งหมด

2) ทำการเปรียบเทียบแบบจำลอง และทฤษฎีต่างๆที่ได้ศึกษาข้างต้น โดยเขียนโปรแกรมให้คอมพิวเตอร์ทำการสร้างตามระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นพื้นแบบชั้นอาทิเช่น ความเค้น และการกระจัด ณ จุดที่สนใจจะถูกนำมาใช้เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำของคำตอบที่ได้

3) พยายามเสนอแบบจำลองที่ดีขึ้น หรือหากมีแบบจำลองเดิมที่ดีอยู่แล้วก็จะยึดแบบจำลองนั้น และพยายามปรับปรุงประสิทธิภาพการวิเคราะห์ของชิ้นส่วนที่ได้ศึกษา

4) สรุปผลการศึกษา

บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมนั้นมักต้องมีแบบจำลองทางเลขคณิตซึ่งประกอบด้วยสมการอนุพันธ์และสภาวะกำหนดเงื่อนไข โดยที่แบบจำลองจะมีสมมุติฐานเพื่อทำให้ปัญหาง่ายขึ้นและในที่สุดแบบจำลองก็จะใช้เป็นตัวบ่งบอกถึงพฤติกรรมของระบบที่จะทำการวิเคราะห์ ทั้งนี้สมการอนุพันธ์ดังกล่าวมักมีความยุ่งยากในการหาผลลัพธ์ซึ่งแสดงพฤติกรรมของปัญหานั้นๆ ด้วยความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีของคอมพิวเตอร์ทำให้มีการพัฒนาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข(numerical solution technique) เพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณจากสมการอนุพันธ์ดังกล่าว

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่นิยมมากวิธีหนึ่งเพราะสามารถเขียนโปรแกรมให้คอมพิวเตอร์ทำการคำนวณได้ง่ายโดยเฉพาะในปัญหาที่มีความซับซ้อนของรูปร่างและสภาวะที่ถูกกำหนด วิธีการไฟไนต์เอลิมเนต์จะทำการแบ่งปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อยซึ่งปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ก็จะประกอบขึ้นจากการรวมชิ้นส่วนต่างๆเข้าด้วยกันนั้นเอง กระบวนการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแบ่งได้ดังนี้

1) ทำการวางรูปแบบของชิ้นส่วนต่างๆในปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์
2) ทำการรวม (assemble) คุณสมบัติของชิ้นส่วนต่างๆเข้าด้วยกัน
3) หาผลลัพธ์ของระบบสมการ (algebraic equation) แทนการหาผลลัพธ์จากสมการอนุพันธ์

ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะขึ้นกับจำนวน รูปร่างของชิ้นส่วนและวิธีการที่ใช้สร้างชิ้นส่วนในการวิเคราะห์ปัญหา โดยที่การสร้างชิ้นส่วนนั้นจะขึ้นอยู่กับหลักการแปรผัน(Variational principles) ที่ใช้ โดยทั่วไปแล้วระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ในการวิเคราะห์โครงสร้างนั้นจะอยู่บนพื้นฐานของการสมมติการกระจัดในแต่ละชิ้นส่วน และอาศัยหลักการงานเสมือน หรือหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุดในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วน ในบทนี้จึงจะกล่าวถึงหลักการแปรผันต่างๆที่ได้ถูกเสนอให้ใช้ในการวิเคราะห์ทางกลศาสตร์ และรวมถึงสนามตัวแปรต่างๆที่สามารถสมมุติในหลักการแปรผันต่างๆนั้นด้วยเช่นกัน

2.1 หลักการแปรผัน (Variational Principle)

หลักการแปรผันสามารถแบ่งออกเป็นหลักการที่มีหนึ่งสนามตัวแปร และหลักการที่มีหลายสนามตัวแปรซึ่งอาจมีตั้งแต่สองสนามตัวแปรหรือมากกว่านั้น ในหลักการของพลังงานศักย์ต่ำสุด (The principle of minimum potential energy) และหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุด (The principle of minimum complementary energy) นั้นจะเป็นแบบหนึ่งสนามตัวแปร ในขณะที่หลักการอื่นๆอาจมีสนามตัวแปรมาก

กว่าหนึ่งซึ่งหลักการแปรผันส่วนใหญ่ก็มักจะเหลือเพียงแค่การกระจัดที่ขั้วในสมการเมตริกซ์เช่นเดียวกับหลักการของพลังงานศักย์ต่ำสุดในท้ายที่สุด

2.1.1 หลักการแปรผันเบื้องต้นในการวิเคราะห์ทางกลศาสตร์

หลักการแปรผันในการวิเคราะห์ทางกลศาสตร์ที่จะได้กล่าวเบื้องต้นนี้เป็นหลักการแปรผันสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่การโก่งตัวมีค่าน้อยทั้งมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่นซึ่งเป็นหลักการที่ได้ถูกนำเสนอสำหรับวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ในระยะแรกๆ โดยจะประกอบด้วยหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุด หลักการฮู-วาชิซู (Hu-Washizu principle) หลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ (Hellinger-Reissner principle) และหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุด ซึ่งหลักการเหล่านี้จะเป็นหลักการที่สามารถนำไปดัดแปรได้ด้วยวิธีการต่างๆ เช่น วิธีตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange multiplier method) วิธีทัณฑกรรม (penalty method) หรือการกำหนดเงื่อนไขของพลังงาน (energy constraint condition) เป็นต้น เพื่อให้ได้ชิ้นส่วนที่มีคุณสมบัติที่ดีขึ้นตามต้องการซึ่งได้แสดงวิธีดังกล่าวข้างต้นไว้ในหัวข้อต่างๆที่เป็นการเสนอหลักการแปรผันที่ดัดแปรแล้วของหลักการแปรผันข้างต้นในส่วนต่อไป

สนามตัวแปรทั้งสามในปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็งคือ การกระจัด $\underline{u}$ ความเครียด $\underline{\varepsilon}$ และความเค้น $\underline{\sigma}$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \underline{u} &= \{u, v, w\} \\ \underline{\varepsilon} &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\} \\ \underline{\sigma} &= \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\} \end{aligned}\right\} \quad (2.1.1\text{-}1)$$

ซึ่งเครื่องหมายขีดเส้นใต้ (_) ใช้แสดงว่าเป็นเวกเตอร์สดมภ์ ในทำนองเดียวกัน แรงตัว $\underline{\bar{f}}$ (body force loading) ซึ่งเป็นแรงต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร และแรงกระทำที่ขอบ $\underline{T}$ (แรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่) สามารถเขียนได้ว่า

$$\underline{\bar{f}} = \{\bar{f}_X, \bar{f}_Y, \bar{f}_Z\} \quad (2.1.1\text{-}2)$$

$$\underline{T} = \{T_X, T_Y, T_Z\} \quad (2.1.1\text{-}3)$$

อาศัยหลักการสมดุลของแรงกระทำที่ขอบซึ่งเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n_X & 0 & 0 & 0 & n_Z & n_Y \\ 0 & n_Y & 0 & n_Z & 0 & n_X \\ 0 & 0 & n_Z & n_Y & n_X & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{Bmatrix} \text{ หรือ } n\,\underline{\sigma} = \underline{T} \quad (2.1.1\text{-}4)$$

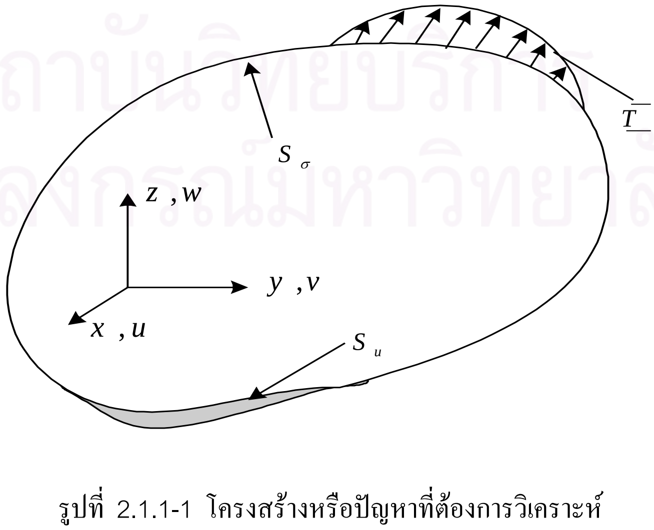
เมื่อ n คือเมตริกซ์โคไซน์แสดงทิศทางบนพื้นผิวของชิ้นส่วน ∂V ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดคือ

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \text{ หรือ } \underline{\varepsilon} = D\,\underline{u} \quad (2.1.1\text{-}5)$$

เมื่อ D คือเมตริกซ์ตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์ (differential operator) จากข้างต้นสมการสมดุลสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = 0$$

$$\text{หรือ } D^T\,\underline{\sigma} + \underline{\bar{f}} = 0 \qquad (2.1.1\text{-}6)$$



รูปที่ 2.1.1-1 โครงสร้างหรือปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์

จากรูปที่ 2.1.1-1 แสดงรูปร่างส่วนต่างๆของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ซึ่งมีปริมาตร V มีพื้นที่ผิว $\partial V = S_u + S_\sigma$ จะสามารถเขียน *หลักการพลังงานศักย์ต่ำสุด* ได้ดังนี้

$$\Pi_P = \int_V [\frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^T C \underline{\varepsilon} - \underline{\bar{f}}^T \underline{u}] dV - \int_{S_\sigma} \underline{\bar{T}}^T \underline{u}\, dS = \min imum \qquad (2.1.1\text{-}7)$$

ซึ่งมีข้อกำหนดว่า $\underline{\varepsilon} - D\underline{u} = 0$ ในปริมาตร V (2.1.1-8)

$\underline{u} - \underline{\bar{u}} = 0$ บนพื้นที่ผิวที่ทราบค่าการกระจัด S_u (2.1.1-9)

เมื่อกำหนดให้
V = ปริมาตรของโครงสร้างที่จะวิเคราะห์ซึ่งมีแรงตัว $\underline{\bar{f}}$ กระทำอยู่
S_σ = พื้นที่ผิวที่ไม่ทราบค่าการกระจัดซึ่งมีแรงกระทำที่ขอบ $\underline{\bar{T}}$ กระทำอยู่
$\underline{\bar{u}}$ = คือการกระจัดที่รู้ค่าที่อยู่บนพื้นที่ผิว S_u
C = เมตริกซ์ปรุงแต่ง (constitutive matrix) ที่ทำการเปลี่ยนจากความเค้นเป็นความเครียด

ในปัญหาทางโครงสร้าง และทางกลศาสตร์คุณสมบัติของชิ้นส่วนก็คือเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน k ซึ่งได้จากการแปรผันหลักการแปรผัน โดยที่เมตริกซ์สิตฟเนส k นี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่ขั้วและการกระจัดที่ขั้ว ทั้งนี้ขั้นตอนการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสจะกล่าวในส่วนต่อไป โดยที่เมตริกซ์สติฟเนสของระบบ (global stiffness matrix) K จะได้จากการรวมคุณสมบัติของชิ้นส่วนต่างๆเข้าด้วยกัน ปัญหาในสภาวะสถิตตามวิธีการกระจัดสามารถเขียนผลลัพธ์ของการกระจัดไม่ทราบค่าที่ขั้ว (unconstrained nodal displacement) ให้อยู่ในรูปของระบบสมการได้คือ

$$K\underline{q} = \underline{F} \qquad (2.1.1\text{-}10)$$

โดยที่ $\underline{F}$ คือแรงกระทำที่ขั้ว และ $\underline{q}$ คือการกระจัดไม่ทราบค่าที่ขั้ว หลักการพลังงานศักย์ต่ำสุดจะเป็นหลักการพื้นฐานที่สามารถดัดแปรตามวิธีการตัวคูณลากรองจ์ซึ่งใช้กับข้อกำหนดในสมการที่ 2.1.1-8 และ 2.1.1-9 ดังเขียนใหม่ได้ว่า

$$\Pi = \int_V [\frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^T C \underline{\varepsilon} - \underline{\lambda}^T(\underline{\varepsilon} - D\underline{u}) - \underline{\bar{f}}^T \underline{u}] dV - \int_{S_\sigma} \underline{\bar{T}}^T \underline{u}\, dS - \int_{S_U} \underline{\mu}^T (\underline{u} - \underline{\bar{u}}) dS \qquad (2.1.1\text{-}11)$$

เมื่อ $\underline{\lambda}(x,y,z)$ และ $\underline{\mu}(x,y,z)$ คือตัวคูณลากรองจ์ที่ไม่ขึ้นแก่กันซึ่งเพิ่มเข้าไป ทำให้หลักการพลังงานใหม่ที่ได้มีตัวแปร 4 ตัวคือ $\underline{u}, \underline{\varepsilon}, \underline{\lambda}$ และ $\underline{\mu}$ โดยเมื่อทำการแปรผันหลักการพลังงานใหม่นี้เทียบกับตัวแปรทั้ง 4 ตัวนี้จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\delta\Pi = &\int_V [(\frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^T C - \underline{\lambda}^T)\delta\underline{\varepsilon} - \delta\underline{\lambda}^T(\underline{\varepsilon} - D\underline{u}) + \underline{\lambda}^T(D\,\delta\underline{u}) - \underline{\bar{f}}^T\delta\underline{u}]dV \\ &- \int_{S_\sigma}\underline{\bar{T}}^T\delta\underline{u}\,dS - \int_{S_u}[\delta\underline{\mu}^T(\underline{u} - \underline{\bar{u}}) + \underline{\mu}^T\delta\underline{u}]dS = 0\end{aligned} \tag{2.1.1-12}$$

เมื่อ δ แสดงการแปรผัน และเนื่องจาก $\underline{u}, \underline{\varepsilon}, \underline{\lambda}$ และ $\underline{\mu}$ เป็นตัวแปรที่สามารถแปรผันได้อย่างอิสระจึงสรุปได้ว่าสัมประสิทธิ์ของ $\delta\underline{u}, \delta\underline{\varepsilon}, \delta\underline{\lambda}$ และ $\delta\underline{\mu}$ ทั้งในหลักการพลังงานส่วนปริมาตร และพื้นที่ผิวส่วนต่างๆจะต้องเป็นศูนย์โดยเป็นอิสระต่อกัน จากข้อสรุปข้างต้นทำเขียนความสัมพันธ์ต่างๆได้ดังนี้

(1) จากพจน์ $\delta\underline{\varepsilon}$ ในส่วนปริมาตร V ได้ว่า

$$\underline{\varepsilon}^T C - \underline{\lambda}^T = 0 \quad \text{หรือ} \quad \underline{\lambda} = C\underline{\varepsilon} \tag{2.1.1-13}$$

โดยจากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียด

$$C\underline{\varepsilon} = \underline{\sigma} \qquad \text{ในปริมาตร V} \tag{2.1.1-14}$$

จะได้ว่า

$$\underline{\lambda} = \underline{\sigma} \qquad \text{ในปริมาตร V} \tag{2.1.1-15}$$

(2) จากสมการที่ 2.1.1-15 และโดยอาศัยความสัมพันธ์จากทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์(divergence theorem) คือ

$$\int_V \underline{\sigma}^T(D\underline{u})dV = -\int_V (D^T\underline{\sigma})^T\underline{u} + \int_{S_U+S_\sigma}(n\,\underline{\sigma})^T\underline{u}\,dS \tag{2.1.1-16}$$

ซึ่งหากทำการแปรผันเทียบกับการกระจัด $\underline{u}$ จะเขียนได้ว่า

$$\int_V \underline{\sigma}^T(D\delta\underline{u})dV = -\int_V (D^T\underline{\sigma})^T\delta\underline{u} + \int_{S_U+S_\sigma}(n\,\underline{\sigma})^T\delta\underline{u}\,dS$$

แทนลงในสมการที่ 2.1.1-12 ดังนั้นหากพิจารณาพจน์ $\delta\underline{u}$ ในส่วนของปริมาตร V สามารถเขียนได้ว่า

$$D^T\underline{\sigma} + \underline{\bar{f}} = 0 \qquad \text{ในปริมาตร V} \tag{2.1.1-17}$$

ซึ่งสมการข้างต้นนี้ก็คือสมการสมดุลนั่นเอง

(3) และจากการใช้ความสัมพันธ์ของทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ซึ่งทำการแปรผันเทียบกับการกระจัดดังในข้อ (2) เมื่อพิจารณาพจน์ $\delta \underline{u}$ ในส่วนของพื้นที่ผิวส่วนต่างๆได้ว่า

$$\underline{\bar{T}} = n \, \underline{\sigma} \quad \text{บนพื้นที่ผิว } S_{\sigma} \qquad (2.1.1\text{-}18)$$

ซึ่งสมการดังกล่าวเป็นสมการสมดุลบนพื้นที่ผิว S_{σ} ที่มีแรงภายนอกกระทำ และได้ความสัมพันธ์

$$\underline{\mu} = n \, \underline{\sigma} \quad \text{บนพื้นที่ผิว } S_{U} \qquad (2.1.1\text{-}19)$$

ซึ่งสามารถที่สามารถสรุปได้ว่า $$\underline{\mu} = \underline{T} \qquad (2.1.1\text{-}20)$$

และ $$\underline{T} = n \, \underline{\sigma} \qquad (2.1.1\text{-}21)$$

(4) พิจารณาพจน์ $\delta \underline{\lambda}$ และ $\delta \underline{\mu}$ จะได้สมการกำหนดเงื่อนไขคือสมการที่ 2.1.1-8 และ 2.1.1-9 และจากการแทนสมการที่ (2.1.1-15) และ (2.1.1-20) ลงในสมการที่ (2.1.1-11) จะได้หลักการแปรผันซึ่งเขียนใหม่คือ

$$\begin{aligned}\Pi_{HW} &= \int_V [\frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T C \underline{\varepsilon} - \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma}^T (D\underline{u}) - \underline{\bar{f}}^T \underline{u}] dV - \int_{S_\sigma} \underline{\bar{T}}^T \underline{u} dS \\ &- \int_{S_U} \underline{T}^T (\underline{u} - \underline{\bar{u}}) dS = stationary\end{aligned} \qquad (2.1.1\text{-}22)$$

สมการที่ได้นี้เรียกว่า *หลักการฮู-วาชิซู* ซึ่งมีการกระจัด $\underline{u}$ ความเครียด $\underline{\varepsilon}$ และความเค้น $\underline{\sigma}$ เป็นสนามตัวแปรที่ทำการสมมุติโดยไม่ขึ้นแก่กัน เมื่อทำการแปรผันหลักการนี้จะพบว่าหลักการ Π_{HW} นั้นเป็นหลักการที่ไม่มีข้อจำกัดเลยในสนามตัวแปรต่างๆดังนี้

1. สมการสมดุลตามสมการที่ 2.1.1-17
2. ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด และการกระจัดตามสมการที่ 2.1.1-8
3. ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียดตามสมการที่ 2.1.1-14
4. เงื่อนไขสมดุลที่ขอบตามสมการที่ 2.1.1-21
5. การกระจัดทราบค่าที่ขอบตามสมการที่ 2.1.1-9
6. แรงกระทำทราบค่าที่ขอบตามสมการที่ 2.1.1-18

นอกจากนี้ยังสามารถเขียนหลักการใหม่ขึ้นมาจากหลักการ Π_{HW} คือกำจัด $\underline{\varepsilon}$ ด้วยการแทนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียด คือ

$$\underline{\varepsilon} = C^{-1}\underline{\sigma} = S\,\underline{\sigma} \qquad (2.1.1\text{-}23)$$

เมื่อ S คือเมตริกซ์สอดคล้อง (compliance matrix) ที่ทำการเปลี่ยนจากความเครียดเป็นความเค้น แทนสมการที่ 2.1.1-23 ลงในสมการที่ 2.1.1-22 จะได้หลักการแปรผันใหม่คือ

$$\begin{aligned}\Pi_{HR} &= \int_V [-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^T S\,\underline{\sigma} + \underline{\sigma}^T(D\underline{u}) - \underline{\bar{f}}^T\underline{u}]dV - \int_{S_\sigma}\underline{\bar{T}}^T\underline{u}dS \\ &\quad - \int_{S_U}\underline{T}^T(\underline{u} - \underline{\bar{u}})dS = stationary\end{aligned} \qquad (2.1.1\text{-}24)$$

สมการที่ได้นี้เรียกว่า หลักการ *เฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์* ซึ่งหลักการนี้มีสองสนามตัวแปรคือการกระจัด $\underline{u}$ และความเค้น $\underline{\sigma}$ และหากทำการแปรผันหลักการ Π_{HR} เทียบกับ $\underline{u}$ และ $\underline{\sigma}$ จะได้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} S\,\underline{\sigma} &= D\underline{u} \\ D^T\underline{\sigma} + \underline{\bar{f}} &= 0 \end{aligned} \quad \text{ในส่วนของปริมาตร } V \qquad (2.1.1\text{-}25)$$

ดังนั้นหลักการที่ได้ใหม่นี้จะเป็นหลักการแปรผันที่ไม่มีข้อจำกัดในส่วนของสนามการกระจัด $\underline{u}$ และความเค้น $\underline{\sigma}$ ซึ่งสามารถสมมุติสนามตัวแปรทั้งสองได้โดยไม่ขึ้นแก่กันนั้นเอง นอกจากนี้หากแทนสมการความสัมพันธ์จากทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ลงไปในหลักการของเฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์ ก็จะทำให้ได้อีกทางเลือกหนึ่งของหลักการของเฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์ คือ

$$\begin{aligned}\Pi_{HR}^{\;*} &= \int_V [-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^T S\,\underline{\sigma} - (D^T\underline{\sigma})^T\underline{u} - \underline{\bar{f}}^T\underline{u}]dV + \int_{S_\sigma}(\underline{T} - \underline{\bar{T}})^T\underline{u}dS \\ &\quad + \int_{S_U}\underline{T}^T\underline{\bar{u}}dS = stationary\end{aligned} \qquad (2.1.1\text{-}26)$$

หากความเค้นมีสมดุลเป็นไปตามสมการที่ 2.1.1-17 และแรงกระทำที่ขอบเป็นไปตามสมการที่ 2.1.1-18 จะสามารถกำจัดการกระจัด $\underline{u}$ ซึ่งเป็นตัวแปรตัวหนึ่งออกไปจากหลักการ $-\Pi_{HR}^{\;*}$ ได้

$$\Pi_C = \int_V \frac{1}{2}\underline{\sigma}^T S\,\underline{\sigma}\,dV - \int_{S_U}\underline{T}^T\underline{\bar{u}}\,dS = \min imum \qquad (2.1.1\text{-}27)$$

สมการที่ 2.1.1-27 นี้ก็คือ *หลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุด* ซึ่งได้กล่าวไว้ว่า ในสภาวะที่ทั้งระบบสมดุลจะทำให้ Π_C มีค่าต่ำสุด

2.1.2 หลักการแปรผันที่ได้รับการดัดแปร

จากหลักการแปรผันที่ได้กล่าวไปแล้วเบื้องต้นนั้นสามารถทำการดัดแปรได้โดยวิธีการต่างๆ เช่น วิธีตัวคูณลากรองจ์ การกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติม เป็นต้น เพื่อให้ได้ชิ้นส่วนที่มีคุณสมบัติที่ดีขึ้นตามต้องการดังนี้

2.1.2.1 การดัดแปรหลักการฮู-วาชิซู

โดยในที่นี้หากเปลี่ยนข้อกำหนดในสมการที่ 2.1.1-9 เป็น

$$\underline{u} - \underline{\tilde{u}} = 0 \quad \text{บนพื้นที่ผิว } \partial V \qquad (2.1.2.1\text{-}1)$$

เมื่อกำหนดให้ $\underline{\tilde{u}}$ = คือการกระจัดที่ขอบบนพื้นที่ผิว ∂V

เมื่อต้องการสมมุติให้การกระจัด $\underline{u}$ เข้ากันไม่ได้กับการกระจัดที่ขอบ $\underline{\tilde{u}}$ แต่จะดำเนินการตามวิธีตัวคูณลากรองจ์เพื่อบังคับให้เกิดความเข้ากันได้ดังในหัวข้อ 2.1.1 จะได้หลักการฮู-วาชิซูซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้ (42, 43)

$$\begin{aligned}\Pi_{HW} &= \int_V [\frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^T C\,\underline{\varepsilon} - \underline{\sigma}^T\,\underline{\varepsilon} + \underline{\sigma}^T(D\underline{u}) - \underline{\bar{f}}^T\,\underline{u}]dV - \int_{\partial V}\underline{T}^T(\underline{u} - \underline{\tilde{u}})dS \\ &- \int_{S_\sigma}\underline{\bar{T}}^T\,\underline{\tilde{u}}\,dS \quad = \ stationary\end{aligned} \qquad (2.1.2.1\text{-}2)$$

ซึ่งมีความเค้น $\underline{\sigma}$ ความเครียด $\underline{\varepsilon}$ การกระจัด $\underline{u}$ และการกระจัดที่ขอบ $\underline{\tilde{u}}$ เป็นตัวแปรที่ต้องสมมุติ โดยในที่นี้การกระจัด $\underline{u}$ ก็จะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ

$$\underline{u} = \underline{u}_q + \underline{u}_\lambda \qquad (2.1.2.1\text{-}3)$$

เมื่อ $\underline{u}_q$ คือการกระจัดที่เข้ากันได้ซึ่งเขียนอยู่ในรูปการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}$ ส่วน $\underline{u}_\lambda$ คือการกระจัดส่วนเพิ่ม (additional displacement) ซึ่งจะเขียนอยู่ในรูปพารามิเตอร์ส่วนเพิ่ม (additional parameter) λ โดยหากกำหนดความสัมพันธ์ว่า

$$\underline{u}_\lambda = \underline{u} - \underline{\tilde{u}} \quad \text{บนพื้นที่ผิว } \partial V \qquad (2.1.2.1\text{-}4)$$

หากอาศัยความสัมพันธ์ในสมการที่ 2.1.1-16 ซึ่งสามารถเขียนได้ใหม่คือ

$$\int_V \underline{\sigma}^T (D\underline{u}_\lambda)dV = -\int_V (D^T \underline{\sigma})^T \underline{u}_\lambda + \int_{\partial V} (n\,\underline{\sigma})^T \underline{u}_\lambda \, dS \qquad (2.1.2.1\text{-}5)$$

อาศัยความสัมพันธ์ในสมการที่ 2.1.2.1-4 จะได้ว่า

$$\underline{\tilde{u}} = \underline{u} - \underline{u}_\lambda = \underline{u}_q \text{ บนพื้นที่ผิว } \partial V \qquad (2.1.2.1\text{-}6)$$

แทนสมการที่ 2.1.2.1-5 และ 2.1.2.1-6 ลงในสมการที่ 2.1.2.1-2 ซึ่งละพจน์ของแรงตัวจะได้หลักการฮู-วาชิซูที่ดัดแปรแล้ว [42] คือ

$$\begin{aligned}\Pi_{mHW} &= \int_V [\frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^T C \underline{\varepsilon} - \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma}^T (D\underline{u}_q) - (D^T \underline{\sigma})^T \underline{u}_\lambda] dV \\ &- \int_{S_\sigma} \underline{\bar{T}}^T \underline{u}_q dS\end{aligned} \qquad (2.1.2.1\text{-}7)$$

หลักการข้างต้นนี้จะมีความเค้น $\underline{\sigma}$ ความเครียด $\underline{\varepsilon}$ การกระจัด $\underline{u}_q$ และการกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_\lambda$ เป็นตัวแปรที่ต้องสมมุติ โดยที่เงื่อนไขการสมดุลของความเค้นในพจน์สุดท้ายของสมการที่ 2.1.2.1-7 จะมีการกระจัด $\underline{u}_\lambda$ ทำหน้าที่เป็นตัวคูณลากรองจ์ที่บังการสมดุลของความเค้นนั้นเอง

2.1.2.2 การดัดแปรหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์

ในทำนองเดียวกันหลักการ Π_{HR} ซึ่งใช้ข้อกำหนดในสมการที่ 2.1.2.1-1 และสมการที่ 2.1.1-23 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\Pi_{HR} &= \int_V [-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^T S \underline{\sigma} + \underline{\sigma}^T (D\underline{u}) - \underline{\bar{f}}^T \underline{u}] dV - \int_{\partial V} \underline{T}^T (\underline{u} - \underline{\tilde{u}}) dS \\ &- \int_{S_\sigma} \underline{\bar{T}}^T \underline{\tilde{u}} dS\end{aligned} \qquad (2.1.2.2\text{-}1)$$

ซึ่งมีความเค้น $\underline{\sigma}$ การกระจัด $\underline{u}$ และการกระจัดที่ขอบ $\underline{\tilde{u}}$ เป็นตัวแปรที่ต้องสมมุติ หากอาศัยความสัมพันธ์ในสมการที่ 2.1.2.1-3 ถึง 2.1.2.1-6 สามารถเขียนหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ซึ่งละพจน์ของแรงตัวจะได้หลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้ว [42, 44] คือ

$$\Pi_{mHR} = \int_V [-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^T S\,\underline{\sigma} + \underline{\sigma}^T (D\underline{u}_q) - (D^T \sigma)^T \underline{u}_\lambda] dV - \int_{S_\sigma} \underline{\overline{T}}^T \underline{u}_q dS \qquad (2.1.2.2\text{-}2)$$

เช่นเดียวกันหลักการข้างต้นนี้จะมีความเค้น $\underline{\sigma}$ การกระจัด $\underline{u}_q$ และการกระจัดที่ขอบ $\underline{u}_\lambda$ เป็นตัวแปรที่ต้องสมมุติ โดยที่เงื่อนไขการสมดุลของความเค้นในพจน์สุดท้ายของสมการที่ 2.1.2.2-2 ก็จะมีการกระจัด $\underline{u}_\lambda$ ทำหน้าที่เป็นตัวคูณลากรองจ์ที่บังคับการสมดุลของความเค้นเช่นเดียวกับสมการที่ 2.1.2.1-7

นอกจากหลักการข้างต้นที่จะทำการที่สมมุติสนามความเค้นทั้งส่วนของแรงดัด (flexural part) และส่วนของแรงเฉือนตั้งฉาก (transverse shear part) แล้วได้มีผู้เสนอคือ จิงและเลียว (Jing and Liao) [45, 46] ให้ใช้หลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้วซึ่งจะทำการสมมุติความเค้นเฉพาะส่วนของแรงเฉือนตั้งฉาก

จากการที่ความเค้นเฉือนตั้งฉากจะขึ้นอยู่กับเฉพาะความเครียดเฉือนตั้งฉากเท่านั้นทำให้สามารถที่จะแยกความเค้นส่วนของแรงเฉือนตั้งฉากออกจากส่วนของแรงดัด อันได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\underline{\sigma}_f = C_f\,\underline{\varepsilon}_f = C_f\,(D_f\,\underline{u}) \qquad (2.1.2.2\text{-}3)$$

$$\underline{\sigma}_t = P_t\,\underline{\beta}_t \qquad (2.1.2.2\text{-}4)$$

เมื่อ f จะหมายถึงส่วนของแรงดัดโดยที่ $\underline{\sigma}_f = \{\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z, \sigma_{XY}\}$ ในขณะที่ t จะหมายถึงส่วนของแรงเฉือนตั้งฉาก ซึ่ง $\underline{\sigma}_t = \{\sigma_{XZ}, \sigma_{YZ}\}$ ทั้งนี้สามารถหาความเครียดจากการกระจัดที่สมมุติได้ว่า

$$\underline{\varepsilon}_f = D_f u = B_f\,\underline{q} \qquad (2.1.2.2\text{-}5)$$

$$\underline{\varepsilon}_t = D_t u = B_t\,\underline{q} \qquad (2.1.2.2\text{-}6)$$

ทั้งนี้ S_f และ S_t เป็นเมตริกซ์สอดคล้องที่ทำการเปลี่ยนความเครียดเป็นความเค้นซึ่งได้จากการหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ปรุงแต่ง C_f และ C_t ตามลำดับ ส่วน D_f และ D_t คือเมตริกซ์ตัวปฏิบัติการหาอนุพันธ์ในส่วนของแรงดัด และส่วนของแรงเฉือนตั้งฉากตามลำดับ โดยอาจกำหนดให้

$$D_f = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } D_t = \begin{bmatrix} \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{bmatrix} \qquad (2.1.2.2\text{-}7)$$

จากการแยกส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดข้างต้นทำให้ได้หลักการแปรผันใหม่จากการดัดแปรหลักการเฮลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ในสมการที่ 2.1.1-24 ขึ้นมาซึ่งมีหลักการสำคัญอยู่ที่การแทนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด และการกระจัดในส่วนของแรงดัด (สมการที่ 2.1.2.2-3) ลงไปจะเขียนหลักการ Π_{HR} ดังกล่าวซึ่งละพจน์ของแรงตัว และการกระจัดที่สมมุติจะมีความเข้ากันได้บนพื้นที่ผิว S_u ได้ใหม่ดังนี้

$$\Pi_{JL} = \int_V [\frac{1}{2}(D_f \underline{u})^T C_f (D_f \underline{u}) + \sigma_t^T (D_t \underline{u}) - \frac{1}{2}\underline{\sigma}_t^T S_t \underline{\sigma}_t]dV - \int_{S_\sigma} \underline{\overline{T}}^T \underline{u} dS \qquad (2.1.2.2\text{-}8)$$

หลักการในสมการที่ 2.1.2.2-8 อาจจะเรียกว่า *หลักการจิง-เลียว* (47) ซึ่งจะใช้ในการสร้างชิ้นส่วนที่จะสมมุติเฉพาะความเค้นเฉือนตั้งฉาก $\underline{\sigma}_t$ และการกระจัด $\underline{u}$ ซึ่งการที่สมมุติความเค้นเฉือนตั้งฉาก $\underline{\sigma}_t$ ทำให้ใช้พารามิเตอร์ความเค้นที่น้อยลงอันนำไปสู่เวลาที่ใช้ในการสร้างชิ้นส่วนที่น้อยลงตามไปด้วยนั้นเอง

จากหลักการเฮลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ในสมการที่ 2.1.1-24 ซึ่งความเค้นที่สมมุตินั้นไม่จำเป็นต้องมีสมดุล แต่อย่างไรก็ตามยังสามารถบังคับความเค้นให้มีสมดุลโดยการใช้วิธีทัณฑกรรมของการสมดุลเพิ่มเข้าไปในหลักการเฮลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ซึ่งเสนอโดยวู (Wu) และชวง (Cheung) (48) หากพิจารณาสมการสมดุลซึ่งไม่คิดผลของแรงกระทำภายนอกคือ $D^T \underline{\sigma} = 0$ ทำให้เขียนหลักการเฮลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ซึ่งละพจน์ของแรงกระทำภายนอก และการกระจัดที่สมมุติจะมีความเข้ากันได้บนพื้นที่ผิว S_u ได้ใหม่ได้ว่า

$$\Pi_{HR*} = \int_V [-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^T S \underline{\sigma} + \underline{\sigma}^T (D\underline{u})]\, dV - \chi \int_V (D^T \underline{\sigma})^T (D^T \underline{\sigma}) dV \qquad (2.1.2.2\text{-}9)$$

เมื่อ χ เป็นเลขบวกที่มีค่ามากกว่าหนึ่ง จากการทำการแปรผัน $\delta \Pi_{HR*} = 0$ จะได้สมการดังนี้

$$\int_V (D^T \underline{\sigma})^T \delta [u + \chi (D^T \underline{\sigma})] dV = 0 \qquad (2.1.2.2\text{-}10)$$

ทั้งนี้เมื่อ χ มีค่ามากๆจะทำให้สมการที่ 2.1.2.2-10 เขียนใหม่ได้ว่า

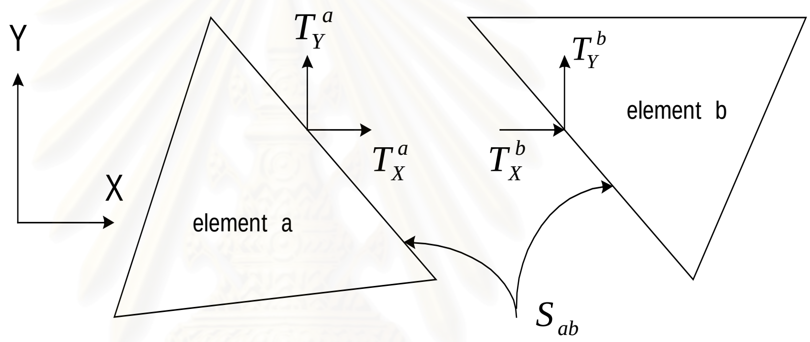
$$\int_V (D^T \underline{\sigma})^T \delta (D^T \underline{\sigma}) dV = 0 \quad \text{หรือ} \quad \int_V (D^T \underline{\sigma})^T (D^T \underline{\sigma}) dV = \text{minimum} \qquad (2.1.2.2\text{-}11)$$

ซึ่งหมายความว่าเงื่อนไขสมดุลของความเค้นนั้นจะถูกบังคับนั้นเอง และแม้ว่าวิธีวิธีทัณฑกรรมจะมีข้อดีตรงที่ไม่ต้องเพิ่มตัวแปรเข้าไปในหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์เหมือนในสมการที่ 2.1.2.2-2 แต่การเลือกค่า χ นั้นจะอยู่ในช่วงค่าหนึ่งซึ่งมีประสิทธิภาพในการบังคับการสมดุลของความเค้น แต่ต้องไม่มีค่าที่มากเกินไปอันจะทำให้เกิดความยุ่งยากในการคำนวณเชิงตัวเลขอันเนื่องมาจากจำนวนหลักของตัวเลขที่สามารถใช้ในการคำนวณ (73)

2.1.2.3 การดัดแปรหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุด

จากหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุดข้างต้นซึ่งต้องเลือกใช้ความเค้นที่เข้ากันได้กับสมการสมดุลแล้ว ยังสามารถทำการดัดแปรสมการพลังงานขึ้นใหม่ได้จากหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุดได้โดยบังคับให้แรงกระทำที่ขอบระหว่างชิ้นส่วนมีความต่อเนื่องจากการใช้วิธีตัวคูณลากรองจ์ จากหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุดซึ่งมีข้อกำหนดการสมดุลของความเค้นดังสมการที่ 2.1.1-17 และสภาวะสมดุลของแรงกระทำที่ขอบดังสมการที่ 2.1.1-18

จากการแบ่งปัญหาออกเป็นจำนวน NE ชิ้นส่วนโดยหากพิจารณาชิ้นส่วน a และชิ้นส่วน b ดังแสดงในรูปที่ 2.1.2.3-1 สมการกำหนดเงื่อนไขตามขอบของชิ้นส่วนสามารถเขียนได้ว่า



รูปที่ 2.1.2.3-1 แรงกระทำที่ขอบระหว่างชิ้นส่วน

$$\underline{T} = \overline{\underline{T}} \qquad \text{บนพื้นที่ผิว } S_\sigma^{\,e} \qquad (2.1.2.3\text{-}1)$$

$$T^a + T^b = 0 \qquad \text{บนพื้นที่ผิว } S_{ab} \qquad (2.1.2.3\text{-}2)$$

เมื่อ S_{ab} คือพื้นที่ผิวระหว่างชิ้นส่วน a และชิ้นส่วน b โดยหากกำหนดให้ตัวคูณลากรองจ์ที่ใช้คือ $\underline{\lambda}$ และ $\underline{\lambda}_{ab}$ เป็นตัวคูณลากรองจ์สำหรับการกำหนดเงื่อนไขในสมการที่ 2.1.2.3-1 และ 2.1.2.3-2 ตามลำดับเพิ่มในหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุดในสมการที่ 2.1.1-27 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\Pi_{mC} = \sum_{e=1}^{NE}\Big[\int_{V^e}\frac{1}{2}\underline{\sigma}^T S\,\underline{\sigma}dV\Big] - \int_{S_U^{\,e}}\underline{T}^T\,\overline{\underline{u}}dS + \int_{S_\sigma^{\,e}}(\underline{T}-\overline{\underline{T}})^T\,\underline{\lambda}dS\Big] \\ + \sum_{ab}\int(\underline{T}^a+\underline{T}^b)^T\,\underline{\lambda}_{ab}dS\end{aligned} \qquad (2.1.2.3\text{-}3)$$

เมื่อ V^e คือปริมาตรของชิ้นส่วนชิ้นที่ e และ $S_\sigma^{\,e}$ คือพื้นที่ผิวที่แรงกระทำ $\overline{\underline{T}}$ กระทำอยู่ของชิ้นส่วนชิ้นที่ e โดยจากสมการข้างต้นสามารถสรุปได้ว่าทั้ง $\underline{\lambda}$ และ $\underline{\lambda}_{ab}$ จะเป็นการกระจัดที่ขอบของชิ้นส่วน $-\underline{\tilde{u}}$

แต่ในการสมมุติการกระจัดหากสมมุติการกระจัดที่มีความเข้ากันได้ระหว่างชิ้นส่วนคือ $\underline{u} = \underline{\tilde{u}}$ ซึ่งจะเป็นการประมาณการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}$ ดังนั้นจะสามารถเขียนหลักการ Π_{mC} ได้ใหม่เป็น (50)

$$\Pi_{mC} = \sum_{e=1}^{NE} [\int_{V^e} \frac{1}{2} \underline{\sigma}^T S \underline{\sigma} dV] - \int_{\partial V^e} \underline{T}^T \underline{u} dS + \int_{S_\sigma^e} \underline{\bar{T}}^T \underline{u} dS] = stationary \qquad (2.1.2.3\text{-}4)$$

และเมื่อนำทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ในสมการที่ 2.1.1-16 โดยที่ $D^T \underline{\sigma} = 0$ จากการที่ความเค้นที่ใช้มีสมดุล เมื่อแทนลงไปในสมการที่ 2.1.2.3-4 จะเขียนใหม่คือ

$$\Pi_{mc} = \sum_{e=1}^{NE} [\int_{V^e} [\frac{1}{2} \underline{\sigma}^T S \underline{\sigma} - \underline{\sigma}^T (D\underline{u})] dV + \int_{S_\sigma^e} \underline{\bar{T}}^T \underline{u} dS] = stationary \qquad (2.1.2.3\text{-}5)$$

สมการนี้เรียกว่า *หลักการพลังงานส่วนเติมเต็มที่ดัดแปรแล้ว* (principle of modified complementary energy) ซึ่งมีการกระจัด $\underline{u}$ และความเค้น $\underline{\sigma}$ เป็นตัวแปรที่ต้องสมมุติ โดยที่สปิลเกอร์ (18, 23) และผู้ร่วมวิจัย(8, 9) ได้ใช้หลักการนี้ในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น

2.2 **ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์** (Finite Element Method)

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นอาจสามารถแบ่งออกเป็นระเบียบวิธีที่มีการสมมุติสนามตัวแปรเพียงหนึ่งตัวแปร และระเบียบวิธีที่มีการสมมุติสนามตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัวแปร ทั้งนี้ระเบียบวิธีที่มีการสมมุติสนามตัวแปรเพียงหนึ่งตัวแปรประกอบด้วยระเบียบวิธีการกระจัด (Displacement method) และระเบียบวิธีแรง (Equilibrium method) ส่วนระเบียบวิธีที่มีการสมมุติสนามตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัวแปรนั้นจะประกอบด้วยระเบียบวิธีพันทาง (Hybrid method) และระเบียบวิธีผสม (Mixed method) โดยที่ในแต่ละระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็จะมีขั้นตอนการคำนวณเมตริกซ์สติฟเนสที่แตกต่างกันไป

2.2.1 ระเบียบวิธีการกระจัด

ระเบียบวิธีการกระจัดเป็นวิธีที่จะสมมุติเพียงแค่สนามการกระจัดโดยอาจสมมุติให้มีความเข้ากันได้ระหว่างชิ้นส่วนหรือไม่ก็ได้ ในการคำนวณเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนตามระเบียบวิธีการกระจัดนั้นจะใช้หลักการพลังงานศักย์ต่ำสุดในสมการที่ 2.1.1-7 ซึ่งการกระจัดที่สมมุติจะเข้ากันได้ระหว่างชิ้นส่วน ทั้งนี้หากแบ่งปัญหาที่จะวิเคราะห์ออกเป็นจำนวน NE ชิ้นส่วนจะสามารถเขียนหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุดที่ละพจน์ของแรงตัวได้ใหม่คือ

$$\Pi_P = \sum_{e=1}^{NE} \Pi_P^e = \sum_{e=1}^{NE} [\int_{V^e} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T C \underline{\varepsilon} \, dV - \int_{S_\sigma^e} \underline{\overline{T}}^T \underline{u} \, dS] \qquad (2.2.1\text{-}1)$$

เมื่อ V^e คือปริมาตรของชิ้นส่วนชิ้นที่ e และ S_σ^e คือพื้นที่ผิวที่แรงกระทำ $\underline{\overline{T}}$ กระทำอยู่ของชิ้นส่วนชิ้นที่ e หากให้การกระจัด $\underline{u}$ ของชิ้นส่วนชิ้นที่ e ถูกประมาณด้วยการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}$ คือ

$$\underline{u} = N\underline{q} \qquad (2.2.1\text{-}2)$$

เมื่อ N คือเมตริกซ์ของฟังก์ชันสัณฐาน (shape function) จากความสัมพันธ์ในสมการที่ 2.1.1-8 สามารถเขียนใหม่ว่า

$$\underline{\varepsilon} = D\underline{u} = B\underline{q} \qquad (2.2.1\text{-}3)$$

แทนสมการที่ 2.2.1-2 และ 2.2.1-3 ลงในสมการที่ 2.2.1-1 โดยพิจารณาเฉพาะชิ้นส่วนชิ้นที่ e จะได้ว่า

$$\Pi_P^e = \frac{1}{2} \underline{q}^T k_P \underline{q} - \underline{F}^{e^T} \underline{q} \qquad (2.2.1\text{-}4)$$

เมื่อ k_P คือเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนชิ้นที่ e $= \int_{V^e} B^T CB dV$

$\underline{F}^{e^T}$ คือเมตริกซ์แรงกระทำที่ขั้วของชิ้นส่วนชิ้นที่ e $= \int_{S_\sigma^e} \underline{\overline{T}}^T N dS$

เมื่อทำการแปรผันสมการที่ 2.2.1-4 เทียบกับการกระจัด $\underline{q}$ จะได้ความสัมพันธ์เหมือนดังได้แสดงในสมการที่ 2.1.1-10 เมื่อทำการรวมเมตริกซ์สติฟเนส และเมตริกซ์แรงกระทำที่ขั้วของทั้งระบบเข้าด้วยกันก็จะได้สมการดังแสดงในสมการที่ 2.1.1-10 และเมื่อใส่สภาวะเงื่อนไขการกระจัดที่ขอบลงในระบบสมการ แล้วทำการหาค่าการกระจัดที่ไม่ทราบค่า $\underline{q}$ ซึ่งสามารถนำค่าการกระจัดดังกล่าวไปคำนวณหาความเครียด(สมการที่ 2.2.1-3) และความเค้นโดยอาศัยเมตริกซ์ปรุงแต่ง C ได้ต่อไป

2.2.2 ระเบียบวิธีแรง

ระเบียบวิธีแรงจะเป็นการสมมุติสนามความเค้นเพียงอย่างเดียวซึ่งอาศัยหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุดในสมการที่ 2.1.1-27 โดยขั้นตอนในการสร้างชิ้นส่วนในที่นี้จะทำการสมมุติความเค้นที่สมดุล $\underline{\sigma}$ สำหรับการกระจัดทราบค่าที่ขอบ $\underline{\overline{u}}$ ซึ่งถูกเขียนในรูปของการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}$ หากพิจารณาปัญหาที่ถูกแบ่งออกเป็น NE ชิ้นส่วนจะสามารถเขียนสมการของหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุดของชิ้นส่วนชิ้นที่ e ได้เป็น [73]

$$\Pi_C^e = \int_{V^e} \frac{1}{2} \underline{\sigma}^T S \, \underline{\sigma} \, dV - \int_{S_U^e} \underline{T}^T \, \underline{\bar{u}} \, dA \qquad (2.2.2\text{-}1)$$

ความเค้นที่สมมตินั้นต้องมีสมดุลตามสมการที่ 2.1.1-6 โดยหากพิจารณาผลของแรงตัวด้วยนั้นการสมมติความเค้นที่สมดุลจะต้องมีผลเฉลยเฉพาะราย (particular solution) จากแรงตัวรวมเข้าไปด้วย ซึ่งความเค้นดังกล่าวสามารถเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$\underline{\sigma} = P^* \underline{\beta} \qquad (2.2.2\text{-}2)$$

โดยที่

$$\underline{T} = n \, \underline{\sigma} = R \, \underline{\beta} \qquad (2.2.2\text{-}3)$$

เมื่อ P^* คือเมตริกซ์การประมาณของสนามความเค้นที่เข้ากันได้กับสมการสมดุล $\underline{\beta}$ คือพารามิเตอร์ความเค้น ส่วนการกระจัดทราบค่าที่ขอบ $\underline{\bar{u}}$ ถูกประมาณด้วยฟังก์ชันการประมาณ L และการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}$ ดังนี้

$$\underline{\bar{u}} = L \underline{q} \qquad (2.2.2\text{-}4)$$

จากสมการข้างต้นสามารถเขียนสมการพลังงานใหม่ได้ว่า

$$\Pi_C^e = \frac{1}{2} \underline{\beta}^T H^* \underline{\beta} - \underline{\beta}^T G_C \underline{q} \qquad (2.2.2\text{-}5)$$

เมื่อ

$$H^* = \int_{V^e} P^{*T} S P^* \, dV \qquad (2.2.2\text{-}6)$$

$$G_C = \int_{S_U^e} R^T L \, dS \qquad (2.2.2\text{-}7)$$

โดยหากการทำการแปรผันหลักการ Π_C^e เทียบกับ $\underline{\beta}$ จะได้

$$H^* \underline{\beta} = G_C \underline{q} \quad \text{หรือ} \quad \underline{\beta} = H^{*-1} G_C \underline{q} \qquad (2.2.2\text{-}8)$$

โดยสมการข้างต้นจะเป็นการคำนวณหาสนามความเค้นภายในชิ้นส่วนเมื่อทราบค่าการกระจัดที่ขอบนั้นเอง ทั้งนี้จากที่พลังงานความเครียด (strain energy) จะเขียนได้ว่า $U^e = \frac{1}{2} \underline{q}^T k \, \underline{q}$ ดังนั้นอาจจะเขียนเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน k_C ในระเบียบวิธีแรงซึ่งมีรูปแบบสอดคล้องกับพลังงานความเครียดข้างต้นได้ว่า

$$k_C = G_C^T H^{*-1} G_C \qquad (2.2.2\text{-}9)$$

ข้อดีของการสมมติความเค้นแบบนี้คือ จะเหมาะสมกับการวิเคราะห์ปัญหาที่ต้องการการกระจัดภายในชิ้นส่วนที่มีความต่อเนื่องอันดับหนึ่ง เช่น ในการกระจัดตามทฤษฎีของเคอร์ชอฟซึ่งจะได้กล่าวต่อไป เพราะไม่จำเป็นต้องสร้างการกระจัดที่เข้ากันได้ภายในชิ้นส่วน $\underline{u}$ อีกต่อไป

2.2.3 ระเบียบวิธีผสม

ระเบียบวิธีผสมในที่นี้จะเป็นชิ้นส่วนที่สร้างจากหลักการที่มีการสมมุติสนามตัวแปรมากกว่าหนึ่งสนามตัวแปรซึ่งก็คือ หลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ และหลักการฮู-วาชิซูที่ยังไม่ได้ทำการดัดแปรหลักการด้วยวิธีการใดๆไม่ว่าจะเป็น วิธีตัวคูณลากรองจ์ หรือวิธีทัณฑกรรม เพื่อบังคับการต่อเนื่องของการกระจัดหรือแรงระหว่างชิ้นส่วน หรือเพื่อให้ได้ชิ้นส่วนที่มีคุณสมบัติที่ดีขึ้น [50] ดังได้แสดงในหัวข้อ 2.1.1 ทั้งนี้ระเบียบวิธีผสมจะร่วมถึงชิ้นส่วนที่มีตัวแปรในสติฟเนสเมตริกซ์ขั้นสุดท้ายมากกว่าหนึ่งตัวแปร [51] ซึ่งจะไม่กล่าวในที่นี้เพราะหลักการดังกล่าวจะเป็นการเพิ่มตัวแปรที่จะต้องคำนวณในขั้นตอนสุดท้ายจึงไม่น่าสนใจในการศึกษา

2.2.3.1 การสร้างชิ้นส่วนผสมจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์

เช่นเดียวกับข้างต้น หลักการในสมการที่ 2.1.1-24 ซึ่งละพจน์ของแรงตัวและการกระจัดที่สมมุตินั้นเข้ากันได้กับการกระจัดที่ขอบบนพื้นที่ $S_U{}^e$ สามารถเขียนหลักการ Π_{HR}^e สำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e ได้ใหม่ดังนี้

$$\Pi_{HR}^e = \int_{V^e} [-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^T S\,\underline{\sigma} + \underline{\sigma}^T (D\underline{u}) - \underline{\bar{f}}^T \underline{u}]dV - \int_{S_\sigma{}^e} \underline{\bar{T}}^T \underline{u} dS \qquad (2.2.3.1\text{-}1)$$

โดยที่ความเค้น $\underline{\sigma}$ จะถูกประมาณด้วยพารามิเตอร์ความเค้น $\underline{\beta}$ ซึ่งไม่จำเป็นต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุล คือ

$$\underline{\sigma} = P\,\underline{\beta} \qquad (2.2.3.1\text{-}2)$$

ส่วนการกระจัดจะถูกประมาณด้วยการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}$ ดังในสมการที่ 2.2.1-2 และสามารถเขียนการหาความเครียดจากการกระจัดได้ดังในสมการที่ 2.2.1-3 เมื่อแทนความสัมพันธ์ดังกล่าวลงในสมการที่ 2.2.3.1-1 ซึ่งละพจน์ของแรงกระทำจะเขียนหลักการ Π_{HR}^e ได้ใหม่ คือ

$$\Pi_{HR}^e = -\frac{1}{2}\underline{\beta}^T H \underline{\beta} + \underline{\beta}^T G \underline{q} \qquad (2.2.3.1\text{-}3)$$

เมื่อกำหนดให้
$$H = \int_{V^e} P^T SP\, dV \quad \text{และ} \quad G = \int_{V^e} P^T B\, dV \qquad (2.2.3.1\text{-}4)$$

หากทำการแปรผัน $\partial \Pi_{HR}^{e} / \partial \beta_i = 0$ จะได้ความสัมพันธ์

$$\underline{\beta} = H^{-1} G \underline{q} \qquad (2.2.3.1\text{-}5)$$

ซึ่งนำไปแทนในสมการที่ 2.2.3.1-3 สามารถเขียนเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนได้

$$k_{HR} = G^T H^{-1} G \qquad (2.2.3.1\text{-}6)$$

แต่ทั้งนี้เพื่อที่จะให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้นชิ้นส่วนพันทางในส่วนนี้มักจะใช้เมตริกซ์ P ที่เข้ากันได้กับสมการสมดุลซึ่งทำให้ต้องเขียนเมตริกซ์ P อยู่ในรูปของพิกัดฉาก X, Y และ Z

นอกจากจะทำการสมมุติสนามตัวแปรการกระจัด และความเค้นแล้ว อาจจะใช้หลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์โดยที่ทำการสมมุติเพียงแค่สนามการกระจัด และความเครียด ดังที่ได้เสนอโดย ปินสกี (Pinsky) และแจสติ (Jasti) [40, 41] และ วิลต์ (Wilt) ซาลีบ (Saleeb) และ ชาง (Chang) [58] หลักการของผู้เสนอกลุ่มหลังนั้นจะเป็นชิ้นส่วนผสมที่ใช้หลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์เมื่อแทนความสัมพันธ์ $\underline{\sigma} = C \underline{\varepsilon}$ ลงในหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ซึ่งเขียนได้ใหม่เป็น

$$\Pi_{HR}^{e} = \int_{V^e} [-\frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T C \underline{\varepsilon} + (\underline{\varepsilon}^T C)(D\underline{u})] \, dV \qquad (2.2.3.1\text{-}7)$$

แต่แทนที่จะใช้ความสัมพันธ์ของความเค้นดังสมการที่ 2.2.3.1-2 ก็จะใช้ความสัมพันธ์ของความเครียดดังนี้

$$\underline{\varepsilon} = E \underline{\alpha} \qquad (2.2.3.1\text{-}8)$$

ในทำนองเดียวกันหากการกระจัดจะถูกประมาณด้วยการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}$ คือ $\underline{u} = N \underline{q}$ และความเครียดจากการกระจัด $D\underline{u} = (DN)\underline{q}$ จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นจะสามารถเขียนหลักการ Π_{HR} สำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e ใหม่ คือ

$$\Pi_{HR}^{e} = -\frac{1}{2} \underline{\alpha}^T H \underline{\alpha} - \underline{\alpha}^T G \underline{q} \qquad (2.2.3.1\text{-}9)$$

เมื่อกำหนดให้ $H = \int_{V^e} E^T C E \, dV$ และ $G = \int_{V^e} E^T (DN) \, dV$ (2.2.3.1-10)

หากทำการแปรผัน $\partial\Pi / \partial\underline{\alpha} = 0$ จะได้ความสัมพันธ์

$$\underline{\alpha} = H^{-1}G\underline{q} \qquad (2.2.3.1\text{-}11)$$

ซึ่งนำไปแทนในสมการที่ 2.2.3.1-9 สามารถเขียนเมตริกซ์สติฟเนสได้เหมือนในสมการที่ 2.2.3.1-6 โดยที่เมตริกซ์ H และ G จะเป็นไปตามสมการที่ 2.2.3.1-10

ส่วนที่เสนอโดย ปินสกี และ แจสติ นั้นจะแตกต่างจากข้างต้นคือจะทำการสมมุติสนามการกระจัดเป็น $\underline{u} = \underline{u}_q + \underline{u}_\lambda$ จะทำให้สามารถเขียนหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์สำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e ได้ว่า

$$\Pi^e_{HR} = \int_{V^e}[-\frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^T C\underline{\varepsilon} + (\underline{\varepsilon}^T C)(D\underline{u}_q + D\underline{u}_\lambda)]\,dV - \int_{S_\sigma^e}\underline{\overline{T}}^T(\underline{u}_q + \underline{u}_\lambda)\,dS \qquad (2.2.3.1\text{-}12)$$

หากกำหนดให้ การกระจัด $\underline{u}_q = N_q\,\underline{q}$ และ $\underline{u}_\lambda = N_\lambda\,\underline{\lambda}$ (2.2.3.1-13)

ความเครียดจากการกระจัดคือ $\underline{\varepsilon}_q = B_q\underline{q}$ และ $\underline{\varepsilon}_\lambda = B_\lambda\underline{q}$ (2.2.3.1-14)

สามารถเขียนสมการที่ 2.2.3.1-12 ได้ใหม่ว่า

$$\Pi^e_{HR} = -\frac{1}{2}\underline{\alpha}^T H\underline{\alpha} + \underline{\alpha}^T G\underline{q} + \underline{\alpha}^T R\underline{\lambda} - \underline{F}_1{}^T\underline{q} - \underline{F}_2{}^T\underline{\lambda} \qquad (2.2.3.1\text{-}15)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} H &= \int_{V_n} P^T CP\,dV \\ G &= \int_{V_n} P^T B_q\,dV \\ R &= \int_{V_n} P^T B_\lambda\,dV \\ \underline{F}_1{}^T &= \int_{S_\sigma}\underline{\overline{T}}^T N_q\,dS \\ \underline{F}_2{}^T &= \int_{S_\sigma}\underline{\overline{T}}^T N_\lambda\,dS \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.3.1\text{-}16)$$

หากทำการแปรผันเทียบกับ $\underline{\alpha}$ และ $\underline{\lambda}$ จะได้ความสัมพันธ์

$$\underline{\alpha} = H^{-1}(G\underline{q} + R\underline{\lambda}) \qquad (2.2.3.1\text{-}17)$$

$$R^{T}\underline{\alpha} = 0 \qquad (2.2.3.1\text{-}18)$$

ซึ่งนำไปแทนในสมการที่ 2.2.3.1-15 แล้วสามารถเขียนความสัมพันธ์

$$\underline{\lambda} = -(R^{T}H^{-1}R)^{-1}(R^{T}H^{-1}G\underline{q} - \underline{F}_{2}) \qquad (2.2.3.1\text{-}19)$$

แทนสมการที่ 2.2.3.1-19 ลงในสมการที่ 2.2.3.1-17 ได้ว่า

$$\underline{\alpha} = H^{-1}\hat{G}\underline{q} + H^{-1}R(R^{T}H^{-1}R)^{-1}\underline{F}_{2} \qquad (2.2.3.1\text{-}20)$$

เมื่อ $$\hat{G} = G - R(R^{T}H^{-1}R)^{-1}R^{T}H^{-1}G$$

แทนสมการที่ 2.2.3.1-19 และ 2.2.3.1-20 ลงในสมการที่ 2.2.3.1-15 จะได้

$$\Pi^{e}_{HR} = \underline{q}^{T}k_{HR}\underline{q} - \underline{F}^{T}\underline{q} \qquad (2.2.3.1\text{-}21)$$

โดยเมตริกซ์สติฟเนส k และ เมตริกซ์แรงกระทำที่ขั้ว $\underline{F}$ คือ

$$k_{HR} = \hat{G}^{T}H^{-1}\hat{G} \qquad (2.2.3.1\text{-}22)$$

$$\underline{F} = \underline{F}_{1} - G^{T}H^{-1}R(R^{T}H^{-1}R)^{-1}\underline{F}_{2} \qquad (2.2.3.1\text{-}23)$$

2.2.3.2 การสร้างชิ้นส่วนผสมจากหลักการฮู-วาชิซู

ในที่นี้จะเป็นชิ้นส่วนผสมที่มีการสมมุติสนามตัวแปรทั้งการกระจัด ความเครียด และความเค้นโดยอาศัยหลักการฮู-วาชิซู ทั้งนี้สามารถเขียนหลักการดังแสดงในสมการที่ 2.1.1-22 เมื่อการกระจัดที่สมมุตินั้น

เข้ากันได้กับการกระจัดที่ทราบค่าบนพื้นที่ S_U และละพจน์ของแรงกระทำจะได้หลักการฮู-วาชิซูสำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e ได้ดังนี้ [53]

$$\Pi_{HW}^{e} = \int_{V^e} [\frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^T C \underline{\varepsilon} - \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma}^T (D\underline{u})]\, dV \qquad (2.2.3.2\text{-}1)$$

หากกำหนดความสัมพันธ์ให้สนามการกระจัด $\underline{u}$ ตามสมการที่ 2.2.1-2 สนามความเค้นที่ไม่ต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุล $\underline{\sigma}$ ตามสมการที่ 2.2.3.1-2 และสนามความเครียด $\underline{\varepsilon}$ ตามสมการที่ 2.2.3.1-8 แทนความสัมพันธ์ข้างต้นลงในสมการที่ 2.2.3.2-1 เขียนใหม่ได้ว่า

$$\Pi_{HW}^{e} = \int_{V^e} [\frac{1}{2}\underline{\alpha}^T \hat{H} \underline{\alpha} - \underline{\beta}^T J \underline{\alpha} + \underline{\beta}^T G \underline{q})]\, dV \qquad (2.2.3.2\text{-}2)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} \hat{H} &= \int_{V^e} E^T C E dV \\ J &= \int_{V^e} P^T E dV \\ G &= \int_{V^e} P^T (DN) dV \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.3.2\text{-}3)$$

เมื่อทำการแปรผันเทียบกับพารามิเตอร์ $\underline{\alpha}$ และ $\underline{\beta}$ จะได้

$$J\underline{\alpha} - G\underline{q} = 0 \qquad (2.2.3.2\text{-}4)$$

$$\hat{H}\underline{\alpha} - J^T \underline{\beta} = 0 \qquad (2.2.3.2\text{-}5)$$

ทำการขจัดพารามิเตอร์ $\underline{\beta}$ และ $\underline{\alpha}$ จะได้เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน k_{HW} คือ

$$k_{HW} = G^T (J\, \hat{H}^{-1} J^T)^{-1} G \qquad (2.2.3.2\text{-}6)$$

โดยหากเมตริกซ์ J สามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้จะเขียนเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน k_{HW} ได้ใหม่ว่า

$$k_{HW} = G^T J^{-T} \hat{H} J^{-1} G \qquad (2.2.3.2\text{-}7)$$

ซึ่งจะเป็นการหาเมตริกซ์ผกผันเพียงแค่เมตริกซ์ J เท่านั้น โดยการที่เมตริกซ์ J สามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้นั้นจำเป็นต้องมีจำนวนของพารามิเตอร์ความเค้นต้องเท่ากับพารามิเตอร์ความเครียด [53,54]

2.2.4 ระเบียบวิธีพันทาง

เพียน [55] ได้นิยามไว้ว่า ชิ้นส่วนพันทางจะเป็นชิ้นส่วนที่สร้างจากหลักการแปรผันที่ได้รับการดัดแปรด้วยวิธีตัวคูณลากรองจ์เพื่อบังคับการต่อเนื่องของการกระจัดหรือแรงระหว่างชิ้นส่วน แต่ในปัจจุบันนี้ชิ้นส่วนพันทางจะร่วมไปถึงหลักการแปรผันที่ได้รับการดัดแปรด้วยวิธีทัณฑกรรม และการกำหนดเงื่อนไขพลังงาน ซึ่งก็คือ หลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้ว หลักการจิง-เลียว หลักการฮู-วาชิซูที่ดัดแปรแล้ว และหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มที่ดัดแปรแล้ว ที่ได้กล่าวในหัวข้อ 2.1.2 นั้นเอง

นอกจากนี้ชิ้นส่วนพันทางที่สมมุติการกระจัด ร่วมกับความเค้นอาจเรียกว่า ชิ้นส่วนความเค้นพันทาง (hybrid stress element) ในขณะที่ชิ้นส่วนพันทางที่สมมุติการกระจัด ร่วมกับความเครียดอาจเรียกว่า ชิ้นส่วนความเครียดพันทาง (hybrid strain element) [42, 51]

2.2.4.1 การสร้างชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้ว

เพื่อให้ความเค้นซึ่งสมมุติโดยไม่ต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุลมีสมดุลในแง่การแปรผันจึงมีการใช้วิธีทัณฑกรรมของการสมดุลเพิ่มเข้าไปในหลักการเฮลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ซึ่งวิธีการดังกล่าวได้เสนอโดยวูและชวง [48] ดังแสดงในสมการที่ 2.1.2.2-9 โดยสามารถเขียนหลักการดังกล่าวสำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e โดยใช้ค่า $\dfrac{\chi}{2}$ แทนค่า χ จะได้ว่า

$$\Pi^e_{HR*} \;=\; \int_{V^e} [-\frac{1}{2}\,\underline{\sigma}^T S\,\underline{\sigma} \;+\; \underline{\sigma}^T (D\underline{u})]\,dV \;-\; \frac{\chi}{2}\int_{V^e} (D^T\,\underline{\sigma})^T\,(D^T\,\underline{\sigma})dV \qquad (2.2.4.1\text{-}1)$$

ในทำนองเดียวกัน หากใช้ความเค้นในสมการที่ 2.2.3.1-2 การกระจัดในสมการที่ 2.2.1-2 และความเครียดจากการกระจัดในสมการที่ 2.2.1-3 จะเขียนได้ใหม่ว่า

$$\Pi^e_{HR*} \;=\; \underline{\beta}^T G\,\underline{q} - \frac{1}{2}\,\underline{\beta}^T H\,\underline{\beta} - \frac{\chi}{2}\,\underline{\beta}^T H_p\,\underline{\beta} \qquad (2.2.4.1\text{-}2)$$

โดยกำหนดให้เมตริกซ์ H และเมตริกซ์ G ได้แสดงไว้ในสมการที่ 2.2.3.1-4

และ

$$H_p \;=\; \int_{V^e} (D^T P)^T\,(D^T P)dV \qquad (2.2.4.1\text{-}3)$$

ทำการแปรผันสมการที่ 2.2.4.1-2 เทียบกับ $\underline{\beta}$ จะได้ความสัมพันธ์คือ $\underline{\beta} = (H + \chi H_p)^{-1} G\underline{q}$ และเมื่อแทนลงในสมการที่ 2.2.4.1-2 จะได้เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน k_{HR*} เป็น

$$k_{HR*} = G^T (H + \chi H_p)^{-1} G \qquad (2.2.4.1\text{-}4)$$

นอกจากวิธีการถ่วงน้ำหนักเพื่อบังคับความเค้นที่สมมุติให้เข้ากันได้กับสมการสมดุลแล้วยังสามารถใช้หลักการเฮลลิงเกอร์ที่ดัดแปรแล้วในสมการที่ 2.1.2.2-2 หากไม่พิจารณาแรงตัวจะสามารถเขียนหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์ที่ดัดแปรแล้วสำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e ได้ว่า

$$\Pi^e_{mHR} = \int_{V^e} [-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^T S\,\underline{\sigma} + \underline{\sigma}^T (D\underline{u}_q) - (D^T\underline{\sigma})^T \underline{u}_\lambda] dV - \int_{S_\sigma^e} \underline{\overline{T}}^T \underline{u}_q dS \qquad (2.2.4.1\text{-}5)$$

ในการสร้างชิ้นส่วนจะสมมติความเค้น $\underline{\sigma}$ ซึ่งไม่ต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุลเช่นเดียวกับในสมการที่ 2.2.3.1-2 ทำให้เมตริกซ์ P สามารถเขียนอยู่ในรูปพิกัดธรรมชาติ และเป็นเมตริกซ์ที่ความเค้นเป็นอิสระแก่กันระหว่างความเค้นหนึ่งๆ

หากการกระจัดที่เข้ากันได้ $\underline{u}_q$ เป็นประมาณการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}$ ด้วยเมตริกซ์ N_q และการกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_\lambda$ เป็นประมาณพารามิเตอร์ส่วนเพิ่ม $\underline{\lambda}$ ด้วยเมตริกซ์ N_λ ดังแสดงในสมการที่ 2.2.3.1-13 ในทำนองเดียวกันความเครียดจากการกระจัดที่สมมุติข้างต้นก็ได้แสดงไว้ในสมการที่ 2.2.3.1-14 จากความสัมพันธ์ข้างต้นสามารถเขียนสมการที่ 2.2.4.1-5 ซึ่งได้ละพจน์ของแรงกระทำภายนอกได้ใหม่เป็น

$$\Pi^e_{mHR} = -\frac{1}{2}\underline{\beta}^T H \underline{\beta} + \underline{\beta}^T G \underline{q} - \underline{\beta}^T R \underline{\lambda} \qquad (2.2.4.1\text{-}6)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} H &= \int_{V^e} P^T S P \, dV \\ G &= \int_{V^e} P^T (D N_q) dV \\ R &= \int_{V^e} (D^T P)^T N_\lambda dV \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.4.1\text{-}7)$$

ดำเนินการแปรผันหลักการ Π^e_{mHR} เทียบกับ $\underline{\beta}$ และ $\underline{\lambda}$ ได้ว่า

$$\underline{\beta} = H^{-1}(G\underline{q} - R\underline{\lambda}) \qquad (2.2.4.1\text{-}8)$$

และ

$$R^T \underline{\beta} = 0 \qquad (2.2.4.1\text{-}9)$$

ทำการกำจัดพารามิเตอร์ความเค้น $\underline{\beta}$ โดยแทนสมการที่ 2.2.4.1-8 ลงในสมการที่ 2.2.4.1-6 แล้วทำการแปรผันเทียบกับ $\underline{\lambda}$ จะได้ความสัมพันธ์

$$\underline{\lambda} = (R^T H^{-1} R)^{-1} R^T H^{-1} G q \qquad (2.2.4.1\text{-}10)$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้นจะได้เมตริกซ์สติฟเนส k_{mHR} ของชิ้นส่วนดังนี้

$$k_{mHR} = G^T H^{-1} G - G^T H^{-1} R (R^T H^{-1} R)^{-1} R^T H^{-1} G \qquad (2.2.4.1\text{-}11)$$

ในการสร้างชิ้นส่วนนี้พบว่าความเค้นในนั้นไม่จำเป็นต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุล โดยที่เมตริกซ์ P สามารถเขียนอยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติแทนที่ต้องเขียนในระบบพิกัดฉาก ทำให้เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนที่ได้มีคุณสมบัติยืนยง

นอกจากนี้เมตริกซ์ P อาจเลือกให้เป็นอิสระต่อกันระหว่างความเค้นหนึ่งๆ ซึ่งเป็นผลให้เมตริกซ์เฟลกซิบิลิตี(flexibility matrix) H มีรูปแบบเฉพาะที่สามารถทำการหาเมตริกซ์ผกผันได้โดยง่าย

อีกทางเลือกหนึ่งในการสร้างชิ้นส่วนโดยใช้สมการที่ 2.2.4.1-9 เพื่อเป็นสมการที่ใช้ลดจำนวนพารามิเตอร์ความเค้น $\underline{\beta}$ ให้ลดน้อยลง [10, 52] แต่ทั้งนี้จะส่งผลให้เมตริกซ์ P จะไม่เป็นอิสระต่อกันในแต่ละความเค้นหนึ่งๆ และทำให้การหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ H ไม่สามารถทำได้โดยง่าย

2.2.4.2 การสร้างชิ้นส่วนพันทางจากหลักการจิง-เลียว

ในส่วนนี้จะแสดงการสร้างชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วน (partial hybrid stress element) ที่จะสมมุติการกระจัด $\underline{u}$ และความเค้นเฉือนตั้งฉาก $\underline{\sigma}_t$ โดยจะใช้หลักการจิง-เลียวดังแสดงในสมการที่ 2.1.2.2-8 ซึ่งหลักการจิง-เลียวสำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e สามารถเขียนได้ว่า

$$\Pi^e_{JL} = \int_{V^e} [\frac{1}{2}(D_f\,\underline{u})^T C_f\,(D_f\,\underline{u}) + \sigma_t^T\,(D_t\,\underline{u}) - \frac{1}{2}\underline{\sigma}_t^T S_t\,\underline{\sigma}_t\,]dV - \int_{S_\sigma^e} \underline{\overline{T}}^T \underline{u} dS \qquad (2.2.4.2\text{-}1)$$

โดยที่ในขั้นตอนการหาเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนจะทำได้โดยเขียนสมการที่ 2.2.4.2-1 ใหม่คือ

$$\Pi^e_{JL} = \frac{1}{2}\underline{q}^T k^f_{JL}\underline{q} + \underline{\beta}_t^T G_t\,\underline{q} - \frac{1}{2}\underline{\beta}_t^T H_t\,\underline{\beta}_t \qquad (2.2.4.2\text{-}2)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} k_{JL}^{f} &= \int_V B_f{}^T C_f B_f \, dV \\ G_t &= \int_V P_t{}^T B_t \, dV \\ H_t &= \int_V P_t{}^T S_t P_t \, dV \end{aligned}\right\} \quad (2.2.4.2\text{-}3)$$

เมื่อทำการแปรผัน Π_{JL}^{e} เทียบกับ $\underline{\beta}_t$ จะได้ความสัมพันธ์

$$\underline{\beta}_t = H_t{}^{-1} G_t \underline{q} \quad (2.2.4.2\text{-}4)$$

จากสมการที่ 2.2.4.2-4 สามารถเขียนเมตริกซ์สติฟเนส k_{JL} ของชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วน คือ

$$k_{JL} = k_{JL}^{f} + k_{JL}^{t} \quad (2.2.4.2\text{-}5)$$

เมื่อกำหนดให้

$$k_{JL}^{t} = G_t{}^T H_t{}^{-1} G_t \quad (2.2.4.2\text{-}6)$$

ทั้งนี้หลักการ Π_{JL} ได้ถูกนำมาวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นในงานวิจัยหลายงาน[38, 46, 56, 57]

2.2.4.3 การสร้างชิ้นส่วนพันทางจากหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มที่ดัดแปรแล้ว

นอกจากหลักการที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ชิ้นส่วนพันทางยังสามารถสร้างได้จากหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มที่ดัดแปรแล้วดังในสมการที่ 2.1.2.3-5 ซึ่งหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มที่ดัดแปรแล้วสำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e เขียนได้ว่า

$$\Pi_{mC}^{e} = \int_{V^e} [\frac{1}{2} \underline{\sigma}^T S \, \underline{\sigma} - \underline{\sigma}^T (D\underline{u})] dV + \int_{S_\sigma^e} \underline{\overline{T}}^T \underline{u} dS \quad (2.2.4.3\text{-}1)$$

ทั้งนี้หากความเค้น $\underline{\sigma}$ มีสมดุลดังสมการที่ 2.2.2-2 จะทำให้หลักการ Π_{HR}^{e} ที่ละพจน์ของแรงตัวจะเท่ากับ $-\Pi_{mC}^{e}$ ซึ่งหมายความว่าเมื่อความเค้นเป็นไปตามสมการสมดุล และการกระจัด $\underline{u}$ เข้ากันได้กับการกระจัดที่ขอบชิ้นส่วน $\underline{\tilde{u}}$ เมื่อดำเนินขั้นตอนเช่นเดียวกับในหลักการ Π_{HR}^{e} จะทำให้เมตริกซ์สติฟเนส k_{mC} เหมือนกับเมตริกซ์สติฟเนสที่ได้จากหลักการ Π_{HR}^{e} เขียนได้ดังนี้

$$k_{mC} = G^T H^{*-1} G \quad (2.2.4.3\text{-}2)$$

เมื่อเมตริกซ์ H^* และเมตริกซ์ G เป็นไปตามสมการที่ 2.2.2-6 และ 2.2.3.1-4 ตามลำดับ โดยในปัจจุบันนี้ที่การสร้างชิ้นส่วนจากหลักการ Π_{HR} ก็มักใช้ความเค้นที่เข้ากันได้กับสมการสมดุลนั้นจะทำให้ได้ชิ้นส่วนที่มีเหมือนกับชิ้นส่วนที่สร้างจากหลักการ Π_{mC}

2.2.4.4 การสร้างชิ้นส่วนพันทางจากหลักการฮู-วาชิซูที่ดัดแปรแล้ว

หลักการฮู-วาชิซูที่ดัดแปรแล้ว [42] ซึ่งเริ่มต้นด้วยการบังคับความต่อเนื่องของการกระจัดที่ขอบ แล้วใช้การกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_\lambda$ เป็นตัวคูณลากรองจ์ในการบังคับความเค้นที่สมมุติให้มีสมดุลก็สามารถใช้ในการสร้างชิ้นส่วนพันทางได้เช่นกัน โดยในที่นี้การกระจัด $\underline{u}$ ก็จะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนอีกเช่นกันซึ่งหลักการฮู-วาชิซูที่ดัดแปรแล้วของชิ้นส่วนชิ้นที่ e ซึ่งได้ละพจน์ของแรงกระทำไว้จะเขียนได้คือ

$$\Pi^e_{mHW} = \int_{V^e} [\frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^T C \underline{\varepsilon} - \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma}^T (D\underline{u}_q) - (D^T \underline{\sigma})^T \underline{u}_\lambda] dV \qquad (2.2.4.4\text{-}1)$$

ในที่นี้สนามตัวแปรทั้ง $\underline{\sigma}$ และ $\underline{\varepsilon}$ จะใช้เมตริกซ์การประมาณเดียวกันเพราะต้องหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ J ซึ่งจำนวนของพารามิเตอร์ความเค้นต้องเท่ากับพารามิเตอร์ความเครียดเหมือนข้อกำหนดในหลักการฮู-วาชิซู ดังแสดงข้างล่าง

$$\underline{\sigma} = P\,\underline{\beta} \qquad (2.2.4.4\text{-}2)$$

$$\underline{\varepsilon} = P\,\underline{\alpha} \qquad (2.2.4.4\text{-}3)$$

โดยที่เมตริกซ์ P จะสามารถเขียนให้ไม่ขึ้นแก่กันในแต่ละส่วน ในทำนองเดียวกันการกระจัดสามารถเขียนได้ดังแสดงในสมการที่ 2.2.3.1-13 และความเครียดจากการกระจัดที่สมมุติข้างต้นก็ได้แสดงไว้ในสมการที่ 2.2.3.1-14 จากที่ได้กล่าวมาในข้างต้นทำให้สามารถเขียนหลักการ Π^e_{mHW} ใหม่คือ

$$\Pi^e_{mHW} = \frac{1}{2}\underline{\alpha}^T \hat{H} \underline{\alpha} + \underline{\beta}^T J \underline{\alpha} + \underline{\beta}^T G_q \underline{q} - \underline{\beta}^T R \underline{\lambda} \qquad (2.2.4.4\text{-}4)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} \hat{H} &= \int_{V^e} P^T C P\, dV \qquad J = \int_{V^e} P^T P\, dV \\ G_q &= \int_{V^e} P^T (D N_q)\, dV \quad R = \int_{V^e} (D^T P)^T N_\lambda\, dV \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.4.4\text{-}5)$$

จากการที่เมตริกซ์ P ไม่ขึ้นแก่กันทำให้เมตริกซ์ H ประกอบด้วยเมตริกซ์ย่อย(submatrices)ในแนวทแยงมุมของเมตริกซ์ในลักษณะเดียวกับในการสร้างชิ้นส่วนตามหลักการ Π_{mHR} ซึ่งเป็นผลให้การหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ H สามารถหาจากเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ย่อยเหล่านั้นแทน

เมื่อทำการแปรผันหลักการ Π^{e}_{mHW} เทียบกับ $\underline{\alpha}$ $\underline{\beta}$ และ $\underline{\lambda}$ จะได้ความสัมพันธ์

$$\left.\begin{aligned} &\hat{H}\underline{\alpha} - J\underline{\beta} = 0 \\ &-J\underline{\alpha} + G_q\underline{q} - R\underline{\lambda} = 0 \\ &R^T\underline{\beta} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.2.4.4\text{-}6)$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถเขียนได้ว่า

$$\underline{\lambda} = (R^TWR)^{-1}R^TWG_q\underline{q} \qquad (2.2.4.4\text{-}7)$$

เมื่อ

$$W = J^{-1}\hat{H}J^{-1} \qquad (2.2.4.4\text{-}8)$$

แทนสมการที่ 2.2.4.4-6 และ 2.2.4.4-7 ลงในสมการที่ 2.2.4.4-5 เพื่อกำจัดสนามตัวแปร $\underline{\alpha}$ $\underline{\beta}$ และ $\underline{\lambda}$ จะได้เมตริกซ์สติฟเนส k_{mHW} ของชิ้นส่วนชิ้นที่ e คือ

$$k_{mHW} = G_q{}^TWG_q - G_q{}^TW^TR(R^TWR)^{-1}R^TWG_q \qquad (2.2.4.4\text{-}9)$$

ทั้งนี้จากการศึกษาของ เพียนและเชน [42] พบว่าหากใช้เมตริกซ์ P N_q และ N_λ ที่เหมือนกันจะได้ผลลัพธ์ที่เหมือนกับชิ้นส่วนที่สร้างจากหลักการ Π_{mHR}

2.2.5 หลักเกณฑ์เบื้องต้นในการพิจารณาการสมมุติสนามตัวแปร

จากที่การสมมุติสนามตัวแปรตามระเบียบวิธีพันทางและระเบียบวิธีผสมนั้นยังไม่มีหลักการที่แน่นนอน โดยส่วนใหญ่มักจะทำการสมมุติให้สนามความเค้น และหรือสนามความเครียดนั้นมีพจน์ที่เข้ากันได้กับความเครียดที่คำนวณจากการกระจัดที่สมมุติ ทั้งนี้จะมักพิจารณาร่วมกับหลักการเบื้องต้นในการพิจารณาจำนวนพารามิเตอร์ของสนามตัวแปรที่จะกล่าวต่อไป แต่อย่างไรก็ตามการสมมุติสนามตัวแปรตามหลักการที่จะกล่าวนี้ก็ยังอาจให้ชิ้นส่วนที่มีรูปแบบปลอมของการกระจัด (spurious kinematic deformation modes) **ได้** [48] **หากสนามความเค้น หรือความเครียดที่สมมุตินั้นไม่สามารถครอบคลุมรูปแบบการกระจัดซึ่งไม่รวมรูปแบบการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง** (rigid body mode) **ที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด**

2.2.5.1 หลักการแปรผันที่มีการสมมุติสองสนามตัวแปร

หลักการแปรผันที่สมมุติการกระจัด และความเค้นหรือความเครียดซึ่งก็คือหลักการ Π_{HR} และ Π_{mHR} นั้นเพียนและเชน [49] ได้เสนอเป็นครั้งแรกและผู้วิจัยอื่นๆ [13, 44, 58, 59] ก็ได้ใช้ข้อกำหนดเช่นเดียวกันคือจะพิจารณาพจน์พลังงานที่เกิดจากความเค้นที่สมมุติ $\underline{\sigma}$ หรือความเค้นจากความเครียดที่สมมุติ $\underline{\varepsilon}$ กับ

ความเครียดจากการกระจัดที่สมมุติ $D(\underline{u})$ โดยจะต้องไม่ลืมว่าการกระจัด $\underline{u}$ นี้ถ้าเป็นการกระจัดที่เข้ากันไม่ได้จะได้ว่า $\underline{u} = \underline{u}_q + \underline{u}_\lambda$

ดังนั้นเมื่อให้จำนวนของการกระจัดที่นำไปคิดเป็นความเครียดเป็น n_u ส่วนจำนวนรูปแบบการเคลื่อนแบบวัตถุแข็งเกร็งของชิ้นส่วนนั้นเป็น r จะได้ว่าจำนวนของพารามิเตอร์ความเค้น n_σ หรือจำนวนของพารามิเตอร์ความเครียด n_ε ต้องเป็นดังนี้

$$(n_\sigma, n_\varepsilon) \geq n_u - r \qquad (2.2.5.1\text{-}1)$$

มิฉะนั้นแล้วชิ้นส่วนจะมีรูปแบบปลอมของการกระจัดเมื่อชิ้นส่วนดังกล่าวจำกัดรูปแบบการเคลื่อนแบบวัตถุแข็งเกร็งไม่เพียงพอ หมายความว่าการเปลี่ยนรูปร่างของโครงสร้างบางแบบสามารถเกิดขึ้นโดยที่ไม่ต้องมีแรงกระทำเลยซึ่งเป็นรูปแบบปลอมของการกระจัดนั่นเอง

2.2.5.2 หลักการแปรผันที่มีการสมมุติสามสนามตัวแปร

ในส่วนของหลักการแปรผันที่สมมุติการกระจัด ความเค้น และความเครียดซึ่งก็คือหลักการ Π_{HW} ทั้งนี้เพื่อที่จะเป็นไปตามเงื่อนไขเสถียรภาพ (stability conditions) นั้นพบว่า [53, 54]

$$n_\varepsilon + n_u - r \geq n_\sigma \text{ และ } n_\sigma \geq n_u - r \qquad (2.2.5.2\text{-}1)$$

และจากการที่เมตริกซ์ J สามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้ซึ่งก็คือ $n_\sigma = n_\varepsilon$ อันส่งผลให้สมการแรกในสมการที่ 2.2.5.2-1 เป็นจริงโดยทันที นอกจากนี้หากต้องการจำนวนพารามิเตอร์ความเค้นที่น้อยที่สุดอาจใช้ $n_\sigma = n_u$ แทนสมการที่สองในสมการที่ 2.2.5.2-1 จากหลักเกณฑ์ข้างต้น

2.3 แบบจำลองการกระจัด (Displacement Models)

จากที่ได้กล่าวถึงหลักการแปรผันต่างๆไปแล้วในหัวข้อ 2.1 ในขณะที่ขั้นตอนการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนต่างๆก็ได้แสดงในหัวข้อ 2.2 โดยที่การสมมุติสนามการกระจัดนั้นเป็นขั้นตอนที่สำคัญขั้นตอนหนึ่งในระเบียบวิธีที่ได้กล่าวข้างต้น ทั้งนี้การสมมุติสนามการกระจัดจำเป็นต้องพิจารณาถึงสภาพ และลักษณะของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์เพื่อให้การกระจัดที่สมมุติสามารถให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด นอกจากนี้ยังต้องพิจารณาความยุ่งยากในการสร้างชิ้นส่วนด้วยเช่นกัน

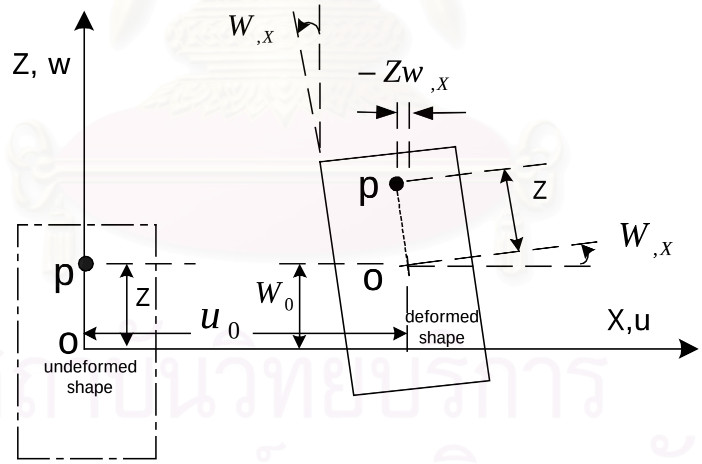
โดยหากพิจารณาปัญหาที่เป็นวัสดุเนื้อเดียว (homogeneous isotropic material) ที่มีคุณสมบัติเท่ากันทุกทิศทางเปรียบเทียบกับปัญหาที่เป็นต่างวัสดุซึ่งคุณสมบัติไม่เหมือนกันในแต่ละทิศทางโดยเฉพาะในแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นแล้วจะพบว่าในปัญหาอย่างหลังนี้การวิเคราะห์จะต้องให้ความสนใจในหลายระดับคือ ทั้งระดับโดยรวม (global level) และระดับแต่ละชั้น (ply level)

ในระดับโดยรวม ตัวอย่างเช่น การโก่งตัวของโครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นนั้นจะเกิดจากรูปแบบรวมของทั้งการดึง การดัด และการเฉือนร่วมกัน โดยจากการที่แผ่นพื้นต่างวัสดุมีค่าสติฟเนสแรงเฉือนต่ำก็จะทำให้มีการโก่งตัวจากแรงเฉือนเกิดขึ้นมากกว่าปัญหาที่เป็นวัสดุเนื้อเดียวที่มีคุณสมบัติเท่ากันทุกทิศทางเมื่อค่าอัตราส่วนความกว้างต่อความหนาของโครงสร้างมีค่าน้อยๆ

หากพิจารณาในระดับแต่ละชั้นจะพบว่าโครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นนั้นจะเกิดค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากสูงใกล้บริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติวัสดุ หรือรูปร่าง เช่นที่ขอบอิสระ เป็นต้น ซึ่งทำให้โครงสร้างบริเวณนี้มักเกิดความเสียหายจากการหลุดร่อนเป็นแผ่น (delamination), วัสดุแตกแยก (matrix cracking) และการแยกตัวของสารตัวยึด (adhesive joint separation)

แบบจำลองการกระจัดที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นนั้นสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ทฤษฎี [65] คือ ทฤษฎีการกระจัดชั้นเดียวสมมูล (Equivalent Single-layer Theory) ทฤษฎีการกระจัดหลายชั้น (Layer-wise Theory) และทฤษฎีการกระจัดแบบรวม (Multiple Displacement Field Theory) ดังจะกล่าวต่อไปนี้

2.3.1 ทฤษฎีการกระจัดชั้นเดียวสมมูล (ESLT)



รูปที่ 2.3.1-1 การเปลี่ยนรูปร่างของแผ่นเคอร์ชอฟฟ์ในระนาบ xz

ทฤษฎีการกระจัดชั้นเดียวสมมูลสำหรับแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นนั้นจะเหมือนกับแบบจำลองการกระจัดที่ใช้ในแผ่นบางชั้นเดียว โดยสามารถแยกได้เป็นแผ่นเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff plate) และแผ่นมินด์ลิน (Mindlin plate) ซึ่งแผ่นทั้งสองแบบมีสมมุติฐานว่า $\sigma_z = 0$ และมีการโก่งตัวน้อยเมื่อเทียบกับความหนา

แผ่นเคอร์ชอฟฟ์จะใช้หลักการตามสมมุติฐานของเคอร์ชอฟฟ์ มีการผิดรูปดังแสดงในรูปที่ 2.3.1-1 การผิดรูปมีสมมุติฐานว่า *เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นก่อนการผิดรูป(เส้นตรง OP)นั้นยังคงตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นหลังการผิดรูป* หมายความว่าการผิดรูปจะถูกสมมุติให้การผิดรูปเนื่องจากแรงเฉือนตั้งฉากเป็นศูนย์

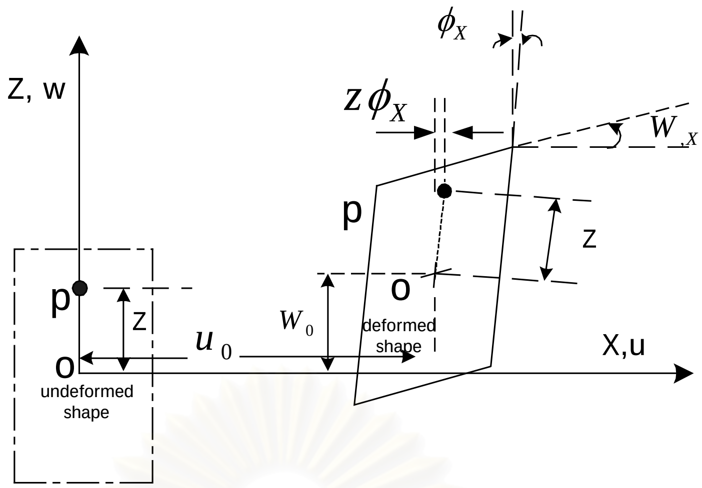
จากที่กล่าวมาข้างต้น ทฤษฎีของแผ่นที่ซ้อนเป็นชั้นที่ใช้ตามสมมุติฐานของเคอร์ชอฟฟ์ดังกล่าวเรียกว่า ทฤษฎีแบบชั้นตามแบบฉบับ (Classical Laminate Theory, CLT) สามารถเขียนสมการการกระจัดได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\,w_{0,X} \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\,w_{0,Y} \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1\text{-}1)$$

โดย u_0, v_0 และ w_0 คือการกระจัดของระนาบกลางหรือระนาบอ้างอิงของแผ่นซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x และ y ในแนวแกนพิกัด X , Y และ Z ตามลำดับ จากการกระจัดข้างต้นสามารถหาความเครียดที่เกิดขึ้นจากหลักกลศาสตร์วัสดุได้เป็น

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_X &= u_{,X} = u_{0,X} - zw_{0,XX} \\ \varepsilon_Y &= v_{,Y} = v_{0,Y} - zw_{0,YY} \\ \gamma_{XY} &= u_{,Y} + v_{,X} = u_{0,Y} + v_{0,X} - 2zw_{0,XY} \\ \gamma_{YZ} &= v_{,Z} + w_{0,Y} = 0 \\ \gamma_{XZ} &= u_{,Z} + w_{0,X} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1\text{-}2)$$

โดยที่เครื่องหมาย ($_{,x}$) คือการหาอนุพันธ์เทียบกับ x จะเห็นว่าจากสมการที่ 2.3.1-2 ความเครียดของชิ้นส่วนที่ใช้ทฤษฎีแบบชั้นตามแบบฉบับนั้นต้องการการกระจัดในแนวตั้งฉากที่มีความต่อเนื่องอันดับหนึ่ง (C^1 continuity) ส่วนการกระจัดในแนวระนาบนั้นต้องการเพียงความต่อเนื่องอันดับศูนย์ (C^0 continuity) ดังนั้นจึงมีความยุ่งยากในการสร้างฟังก์ชันสัณฐานในชิ้นส่วนอันดับต่ำ (lower order element) เช่นชิ้นส่วน 4 ขั้วซึ่งอาจแก้ปัญหาโดยการใช้ฟังก์ชันสัณฐานที่ไม่สอดคล้อง (non-conforming shape function) [36, 38] ทฤษฎี CLT จะให้ผลการวิเคราะห์ที่น่าพอใจเฉพาะในปัญหาแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นที่มีอัตราส่วนความยาวต่อความหนามากๆ ซึ่งค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเค้นในระนาบ



รูปที่ 2.3.1-2 การเปลี่ยนรูปร่างของแผ่นมินด์ลินในระนาบ xz

จากการที่แผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นนั้นความเค้นเฉือนตั้งฉากเป็นตัวแปรสำคัญในการหลุดร่อนเป็นแผ่นของโครงสร้างซึ่งไม่อาจละทิ้งได้ รวมทั้งความยุ่งยากในการสร้างฟังก์ชันสัณฐานของชิ้นส่วนทำให้ทฤษฎีแผ่นของมินด์ลินเป็นทางเลือกที่นำมาพิจารณา โดยการผิดรูปในทฤษฎีนี้ได้แสดงในรูปที่ 2.3.1-2 การผิดรูปมีสมมุติฐานว่า *เส้นตรงที่ตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นก่อนการผิดรูป(เส้นตรง OP)นั้นไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับระนาบกลางของแผ่นหลังการผิดรูป* หมายความว่าการผิดรูปจะถูกสมมุติให้มีการผิดรูปเนื่องจากแรงเฉือนตั้งฉาก

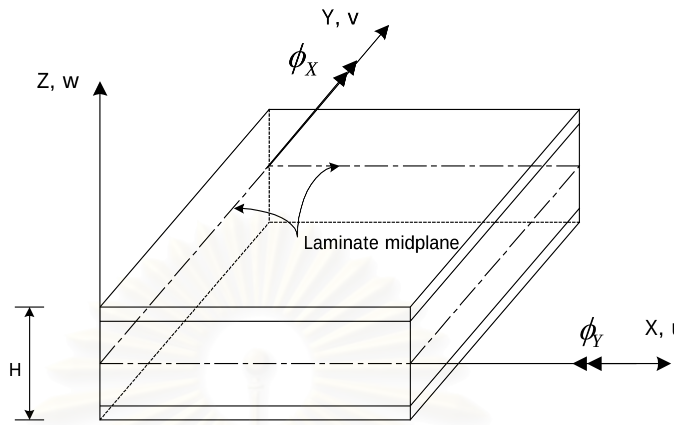
ทฤษฎีของแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นที่ใช้ตามสมมุติฐานของมินด์ลินดังกล่าวเรียกว่า ทฤษฎีการผิดรูปจากแรงเฉือนอันดับแรก (First-order Shear Deformation Theory, FSDT) สามารถเขียนสมการของการกระจัดได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\phi_X(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\phi_Y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned}\right\} \quad (2.3.1\text{-}3)$$

โดยที่ ϕ_X และ ϕ_Y คือมุมหมุนซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x และ y รอบแกนพิกัด Y และ X ตามลำดับ โดยจะมีทิศทางดังในรูปที่ 2.3.1-3 ในทำนองเดียวกัน จากการกระจัดนี้สามารถหาความเครียดที่เกิดขึ้นจากหลักกลศาสตร์วัสดุได้เป็น

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_X &= u_{,X} = u_{0,X} + z\phi_{X,X} \\ \varepsilon_Y &= v_{,Y} = v_{0,Y} + z\phi_{Y,Y} \\ \gamma_{XY} &= u_{,Y} + v_{,X} = u_{0,Y} + v_{0,X} + z(\phi_{X,Y} + \phi_{y,X}) \\ \gamma_{YZ} &= v_{,Z} + w_{0,Y} = \phi_Y + w_{0,Y} \end{aligned}\right\} \quad (2.3.1\text{-}4)$$

$$\gamma_{XZ} = u_{,Z} + w_{0,X} = \phi_X + w_{0,X}$$



รูปที่ 2.3.1-3 การกระจัดของทฤษฎีการผิดรูปจากแรงเฉือนอันดับแรก

จากสมการการกระจัดข้างต้นตามทฤษฎี FSDT จะเห็นว่าการกระจัดในแนวตั้งฉาก w และมุมหมุน ϕ จะสมมุติให้ถูกประมาณโดยเป็นอิสระแก่กันดังนั้นทำให้ชิ้นส่วนที่ใช้ทฤษฎีนี้ต้องการการกระจัดที่มีความต่อเนื่องอันดับศูนย์เท่านั้นซึ่งทำให้สามารถใช้ฟังก์ชันสัณฐานแบบไอโซพารามิเตริกในการสร้างชิ้นส่วนได้

ทฤษฎี FSDT นี้สามารถให้ผลการวิเคราะห์ที่น่าพอใจสำหรับปัญหาโครงสร้างทั่วไปโดยเฉพาะในปัญหาแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นที่มีความหนาปานกลาง ทั้งนี้ความแม่นยำในการวิเคราะห์ตามทฤษฎี FSDT ดังกล่าวข้างต้นนั้นจะขึ้นอยู่กับค่าของตัวประกอบแก้ไขแรงเฉือนที่จะต้องใช้ในการวิเคราะห์ว่ามีความถูกต้องเหมาะสมเพียงใด อาทิเช่นในการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นเนื้อเดียว (homogeneous plate) และในแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นก็มักนิยมใช้ค่าตัวประกอบแก้ไขแรงเฉือนเท่ากับ $\frac{5}{6}$ เหมือนกัน

แต่อย่างไรก็ตามชิ้นส่วนที่ใช้ทฤษฎี FSDT จะให้ค่าสติฟเนสจากส่วนแรงเฉือนตั้งฉากที่มากไปเมื่อแผ่นมีอัตราส่วนความยาวต่อความหนามากๆ โดยที่สาเหตุมาจากการที่ฟังก์ชันการประมาณที่ใช้ไม่สามารถเข้ากันได้ตามสภาวะของเคอร์ชอฟฟ์ คือค่าความเครียดเฉือนตั้งฉากเป็นศูนย์ หรือก็คือ $\phi_X = -w_{,X}$ และ $\phi_Y = -w_{,Y}$ เมื่อแผ่นมีความหนาน้อยๆ ทั้งนี้สามารถแก้ไขข้อบกพร่องดังกล่าวได้โดยใช้วิธีการอินทิเกรตแบบลดและเลือกในการคำนวณเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน แม้ว่าวิธีการอินทิเกรตแบบลดและเลือกจะเป็นวิธีการที่สะดวกและง่ายแต่ก็จะส่งผลให้ชิ้นส่วนมีการผิดรูปโดยที่ไม่เกิดความเครียดขึ้นได้ ซึ่งปรากฏการณ์ดังกล่าวเรียกว่า รูปแบบปลอมของการกระจัดนั่นเอง

นอกจากทฤษฎีการผิดรูปจากแรงเฉือนอันดับแรกซึ่งได้สมมุติให้ความเค้นเฉือนตั้งฉากซึ่งจะคำนวณจากความเครียดในสมการที่ 2.3.1-4 มีค่าคงที่ตลอดความหนาของโครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นแล้ว ได้นำ

ไปสู่ทฤษฎีการผิดรูปจากแรงเฉือนอันดับสูง (Higher-order Shear Deformation Theory, HSDT) [60] ซึ่งเป็นการสมมุติการกระจัดของชิ้นส่วนด้วยฟังก์ชันของ z ที่สูงขึ้น โดยเป็นอีกทางเลือกหนึ่งในการแก้ปัญหาค่าสติฟเนสจากส่วนแรงเฉือนตั้งฉากที่มากไปเมื่อแผ่นมีค่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนามากๆ คือการกระจัดสามารถที่จะให้ค่าเข้ากันได้กับสภาวะของเคอร์ชอฟฟ์ได้ดีขึ้น ตัวอย่างการกระจัดตามทฤษฎี HSDT กำลังสามคือ

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\phi_X(x,y) + z^2\kappa_X(x,y) + z^3\omega_X(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\phi_Y(x,y) + z^2\kappa_Y(x,y) + z^3\omega_Y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned}\right\} \quad (2.3.1\text{-}5)$$

ทั้งนี้การกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของ z ที่มีกำลังสูงตั้งแต่กำลังสองขึ้นไปเช่น ω_X ω_y κ_X และ κ_y ในสมการที่ 2.3.1-5 นี้ที่เป็นฟังก์ชันของ x และ y นั้นแม้ว่าจะไม่มีความหมายทางกายภาพแต่พบว่าจะช่วยให้ชิ้นส่วนดังกล่าวให้ค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากที่ดีขึ้น [14] โดยไม่จำเป็นต้องใช้ค่าของตัวประกอบแก้ไขแรงเฉือนเหมือนในทฤษฎี FSDT

จากการที่ปัญหาแผ่นที่วิเคราะห์จะไม่มีความเค้นเฉือนตั้งฉากที่ขอบบนและขอบล่างของโครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น อีกทั้งเป็นการลดจำนวนระดับขั้นความเสรีของชิ้นส่วนลงด้วยจึงมีการคำนวณความสัมพันธ์ของการกระจัดให้เข้ากันได้กับค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากดังสมการที่ 2.3.1-6 โดยที่ t คือความหนาของแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นทุกชั้นรวมกัน

$$\sigma_{XZ}(x,y,\pm\frac{t}{2}) = 0 \text{ และ } \sigma_{YZ}(x,y,\pm\frac{t}{2}) = 0 \quad (2.3.1\text{-}6)$$

ในที่นี้หากใช้การกระจัดตามทฤษฎี HSDT ในสมการที่ 2.3.1-5 เข้ากันได้กับสมการที่ 2.3.1-6 จะได้การกระจัดใหม่เขียนอยู่ในรูปทั่วไปคือ

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0 + z[\phi_X - \frac{4}{3}(\frac{z}{t})^2(\phi_X + w_{0,X})] \\ v(x,y,z) &= v_0 + z[\phi_Y - \frac{4}{3}(\frac{z}{t})^2(\phi_Y + w_{0,Y})] \\ w(x,y,z) &= w_0 \end{aligned}\right\} \quad (2.3.1\text{-}7)$$

แต่อย่างไรก็ตามจากสมการการกระจัดที่ได้นี้พบว่าความเครียดที่คำนวณจากสมการที่ 2.3.1-7 ตามหลักกลศาสตร์วัสดุจะต้องใช้การกระจัดในแนวตั้งฉากที่มีความต่อเนื่องอันดับหนึ่งเช่นเดียวกับในทฤษฎี CLT ซึ่งจะมีความยุ่งยากในการสร้างฟังก์ชันสัณฐานของการกระจัดในแนวตั้งฉากนั้นเอง

นอกจากนี้ในการสมมุติตามแบบจำลองการกระจัดชั้นเดียวสมมูลได้มีผู้วิจัย [24, 61, 62] เสนอการใช้ฟังก์ชันวกเวียน(zigzag function) ในส่วนของการกระจัดในแนวระนาบเพื่อวิเคราะห์โครงสร้างที่ซ้อนเป็นชั้น โดยที่ฟังก์ชันวกเวียนดังกล่าวจะทำให้ชิ้นส่วนสามารถมีความไม่ต่อเนื่องของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของการกระจัดในแนวระนาบที่รอยต่อแต่ละชั้นของโครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น โดยที่พจน์สุดท้ายในสองสมการแรกของสมการที่ 2.3.1-8 ซึ่งแสดงฟังก์ชันวกเวียนอย่างง่ายที่ คาร์เรรา (Carrera) [61] เป็นผู้เสนอ

$$\left.\begin{aligned} u^I(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\phi_X(x,y) + (-1)^I \zeta\varphi_X(x,y) \\ v^I(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\phi_Y(x,y) + (-1)^I \zeta\varphi_Y(x,y) \\ w^I(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned}\right\} \quad (2.3.1\text{-}8)$$

โดยที่ u^I v^I และ w^I คือการกระจัดในแนวพิกัดฉาก X Y และ Z ตามลำดับของแผ่นชั้นที่ I และ $(-1)^I \zeta\varphi_X(x,y)$ และ $(-1)^I \zeta\varphi_Y(x,y)$ คือพจน์ของฟังก์ชันวกเวียนที่เพิ่มเข้าไปในทฤษฎี FSDT ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x และ y โดยที่ ζ มีค่า –1 ถึง +1 ตลอดความหนาในแต่ละชั้นของแผ่นที่วางซ้อนเป็นชั้น

2.3.2 ทฤษฎีการกระจัดหลายชั้น (LWT)

การที่กล่าวถึงการกระจัดตามทฤษฎี ESLT ข้างต้นพบว่าทฤษฎีดังกล่าวนั้นมีความง่าย และไม่สิ้นเปลืองในการคำนวณ โดยให้ผลการวิเคราะห์ในระดับโดยรวม เช่น การโก่งตัว แรงในแนวแกน แรงดัดฯลฯ สำหรับโครงสร้างทั่วไปได้ดีพอสมควร แต่ทั้งนี้ก็ยังไม่สามารถที่จะให้ผลการวิเคราะห์สนามความเค้นสามมิติในระดับแต่ละชั้นได้ดีเพียงพอทำให้ไม่สามารถใช้อธิบายการหลุดร่อนเป็นแผ่นของโครงสร้างได้ เนื่องจากทฤษฎี ESLT นั้นสมมุติให้ความเครียดเฉือนตั้งฉากมีความต่อเนื่องตลอดความหนาของแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นซึ่งทำให้ความเค้นเฉือนตั้งฉากจะไม่ต่อเนื่องกันตรงรอยต่อแต่ละชั้นของโครงสร้างอันมีสาเหตุจากการที่แต่ละชั้นมีคุณสมบัติของวัสดุที่แตกต่างกันนั้นเอง โดยข้อด้อยนี้มักพบในโครงสร้างที่มีอัตราส่วนความยาวต่อความหนาน้อย ในส่วนของโครงสร้างที่มีความซับซ้อนแรงกระทำ หรือมีความไม่ต่อเนื่องของรูปร่างของโครงสร้าง

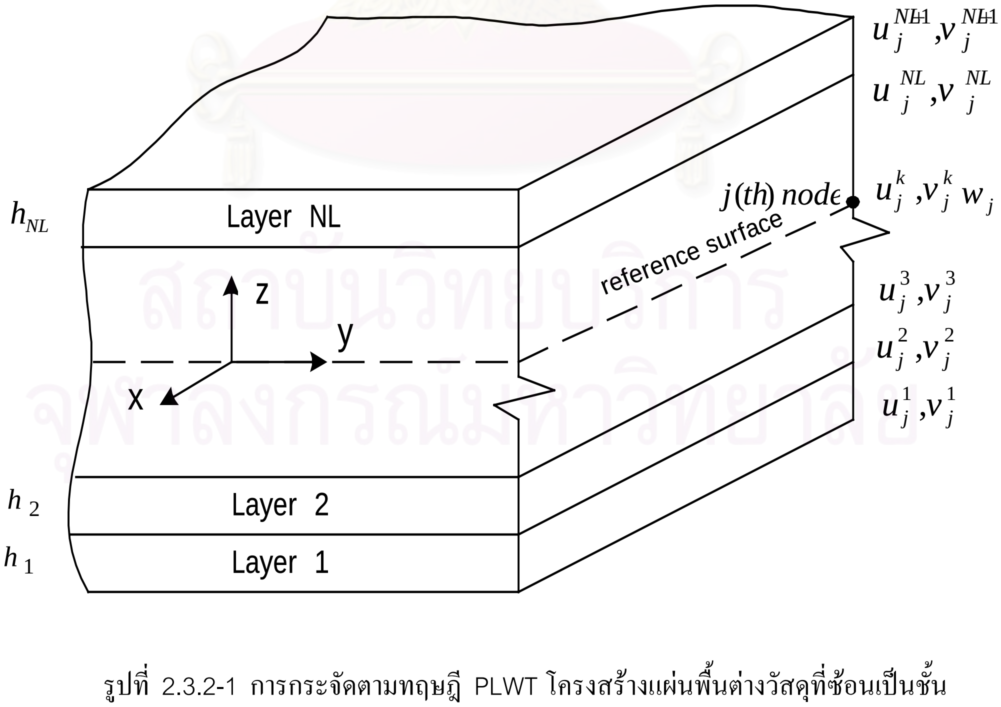
ทฤษฎีการกระจัดหลายชั้น (LWT) ไม่เหมือนกับทฤษฎี ESLT คือจะทำการสมมุติสนามการกระจัดในตลอดความหนาของโครงสร้างโดยที่ส่วนใหญ่แล้วมักจะสมมุติสนามการกระจัดตามแต่ละชั้นของโครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น ส่งผลให้ความเครียดไม่จำเป็นต้องต่อเนื่องกันในแต่ละชั้นอันนำไปสู่ความเค้นที่สามารถมีความต่อเนื่องได้ ทั้งนี้ทฤษฎีการกระจัดนี้อาจมีหลายวิธีในการทำให้การกระจัดที่ถูกสมมติในแต่ละชั้นนั้นมีความต่อเนื่องกันได้เช่นการใช้ตัวคูณลากรองจ์ หรือกำจัดการกระจัดบางตัวที่ขึ้นแก่กันออกไประหว่างการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสในแต่ละชิ้นส่วน เป็นต้น

การกระจัดตามทฤษฎี LWT สามารถแบ่งได้ 2 ประเภท [64, 65] คือ ทฤษฎีการกระจัดหลายชั้นบางส่วน (Partial Layerwise Theories, PLWT) และทฤษฎีการกระจัดหลายชั้นครบส่วน (Full Layerwise Theories, FLWT) โดยที่ในแต่ละการกระจัดในทฤษฎี LWT ทั้งสองแบบนั้นอาจเป็นการสมมุติการกระจัดที่รอยต่อของแต่ละชั้น หรือการสมมุติการกระจัดภายในแต่ละชั้นก็ได้ ความแตกต่างของทฤษฎีการกระจัดแบบ LWT ทั้งสองสามารถสรุปได้ดังนี้

- การกระจัดตามทฤษฎี PLWT คือทฤษฎีการกระจัดที่สมมุติให้การกระจัดในแนวระนาบ (u , v) เพียงเท่านั้นที่มีความต่อเนื่องตลอดความหนาของโครงสร้าง

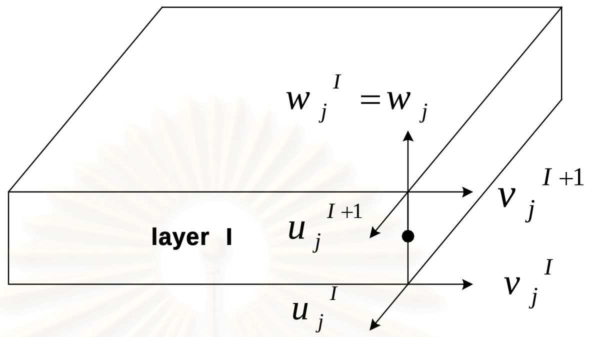
- การกระจัดตามทฤษฎี FLWT คือทฤษฎีการกระจัดที่สมมุติให้ทั้งการกระจัดในแนวระนาบ (u , v) และ การกระจัดในแนวตั้งฉาก (w) มีความต่อเนื่องตลอดความหนาของโครงสร้าง

ตัวอย่างการกระจัดตามทฤษฎี PLWT อย่างง่ายที่สปิลเกอร์ [30] ได้เสนอใช้ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นแสดงในรูปที่ 2.3.2-1 ตามสมการที่ 2.3.2-1 และ 2.3.2-2 ซึ่งได้สมมุติการกระจัดในแนวระนาบ (u ,v) กระจายตลอดความหนาในแต่ละชั้นของแผ่นพื้นต่างวัสดุ โดยที่จากรูปที่ 2.3.2-2 จะได้ว่าสมการที่ 2.3.2-1 คือสมการการกระจัดที่ขั้วที่ j ของชิ้นส่วนชั้นที่ I เมื่อ ζ คือพิกัดธรรมชาติในแนวตั้งฉากซึ่งมีค่าตั้งแต่ –1 ถึง +1 ในแต่ละชั้นของแผ่นพื้น ส่วนสมการที่ 2.3.2-2 ได้นำการกระจัดจากทุกขั้วตามสมการที่ 2.3.2-1 มาเขียนเป็นการกระจัดของชิ้นส่วนชั้นที่ I โดยใช้หลักการไอโซพาราเมตริกซ์เมื่อ $N_j(\xi,\eta)$ คือฟังก์ชันสัณฐานที่เขียนอยู่ในรูปพิกัดธรรมชาติในแนวระนาบเมื่อ ξ และ η มีค่าตั้งแต่ –1 ถึง +1 ในแต่ละชิ้นส่วน และ ND คือจำนวนขั้วของชิ้นส่วนในแนวระนาบ



รูปที่ 2.3.2-1 การกระจัดตามทฤษฎี PLWT โครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้น

$$
\left.\begin{aligned}
u_j{}^I(x,y,\zeta) &= \frac{1}{2}(1-\zeta)u_j{}^I(x,y)+\frac{1}{2}(1+\zeta)u_j{}^{I+1}(x,y)\\
v_j{}^I(x,y,\zeta) &= \frac{1}{2}(1-\zeta)v_j{}^I(x,y)+\frac{1}{2}(1+\zeta)v_j{}^{I+1}(x,y)\\
w_j{}^I(x,y,\zeta) &= w_j(x,y)
\end{aligned}\right\} \quad (2.3.2\text{-}1)
$$



รูปที่ 2.3.2-2 การกระจัดที่ขั้ว j ตามทฤษฎี PLWT ของแผ่นพื้นชั้นที่ I

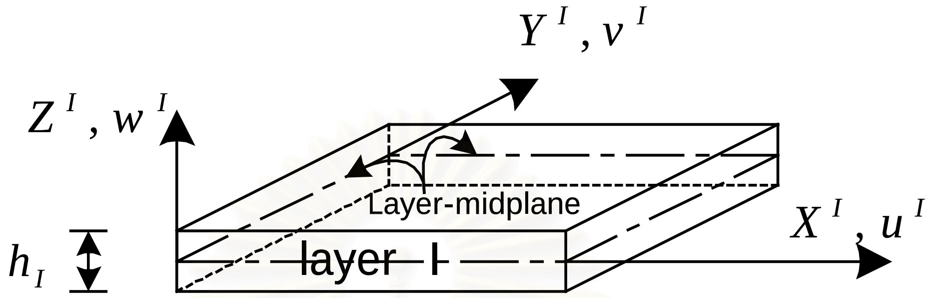
$$
\left.\begin{aligned}
u^I(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{j=1}^{ND} N_j(\xi,\eta)[\frac{1}{2}(1-\zeta)u_j{}^I+\frac{1}{2}(1+\zeta)u_j{}^{I+1}]\\
v^I(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{j=1}^{ND} N_j(\xi,\eta)[\frac{1}{2}(1-\zeta)v_j{}^I+\frac{1}{2}(1+\zeta)v_j{}^{I+1}]\\
w^I(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{j=1}^{ND} N_j(\xi,\eta)w_j
\end{aligned}\right\} \quad (2.3.2\text{-}2)
$$

จากสมการที่ 2.3.2-1 และ 2.3.2-2 อาจสามารถใช้เป็นต้นแบบในการเขียนสนามการกระจัดตามทฤษฎี FLWT โดยจะสมมุติการกระจัดในแนวตั้งฉาก $w_j{}^I$ ในแต่ละขั้ว j ของแต่ละชั้น I เพิ่มทำให้การกระจัดในแนวระนาบ (u , v) ของชั้นที่ I สามารถเขียนได้ดังสองสมการแรกในสมการที่ 2.3.2-1 และ 2.3.2-2 ส่วนการกระจัดในแนวตั้งฉาก (w) ของชิ้นส่วนที่ขั้ว j และของชั้นที่ I จะเขียนใหม่ตามลำดับได้ดังนี้

$$
\left.\begin{aligned}
w_j{}^I(x,y,\zeta) &= \frac{1}{2}(1-\zeta)w_j{}^I(x,y)+\frac{1}{2}(1+\zeta)w_j{}^{I+1}(x,y)\\
w^I(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{j=1}^{ND} N_j(\xi,\eta)[\frac{1}{2}(1-\zeta)w_j{}^I+\frac{1}{2}(1+\zeta)w_j{}^{I+1}]
\end{aligned}\right\} \quad (2.3.2\text{-}3)
$$

นอกจากนี้การสมมุติการกระจัดภายในแต่ละชั้นตามทฤษฎี FLWT ได้แสดงในรูปที่ 2.3.2-3 และสามารถเขียนได้ดังสมการที่ 2.3.2-4 โดยจะเหมือนกับการใช้การกระจัดตามทฤษฎี ESLT สมมุติการกระจัดในแต่ละชั้นของโครงสร้างคือ การกระจัดที่ขั้วในที่นี้จะเป็นฟังก์ชันของพิกัดฉากในแนวระนาบของแต่ละชั้น (x^I , y^I) โดยที่ u^I, v^I, w^I คือการกระจัดของแผ่นพื้นชั้นที่ I ในแนวพิกัดฉาก x^I, y^I, z^I

ซึ่งเป็นพิกัดฉากของชั้นที่ I ซึ่งจะขนานกับพิกัดฉากของระบบ โดยที่โครงสร้างจะมีระนาบ $x^I y^I$ วางตัวอยู่ตรงกลางของความหนาชั้นที่ I ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่ต้องใช้ตัวคูณลากรองจ์ (66, 67) เพื่อทำให้การกระจัดที่สมมุติมีความต่อเนื่องระหว่างชั้นซึ่งจะค่อนข้างยุ่งยาก และมีจำนวนระดับขั้นความเสรีที่มากเพราะจะเป็นการเพิ่มตัวแปรเข้ามาในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน



รูปที่ 2.3.2-3 ชั้นที่ I ของโครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นที่สมมุติการกระจัดภายในแต่ละชั้น

$$\left.\begin{aligned} u^I(x^I, y^I, z^I) &= u_0^I + z^I \phi_X^I + z^{I^2} \omega_X^I + z^{I^3} \kappa_X^I \\ u^I(x^I, y^I, z^I) &= u_0^I + z^I \phi_X^I + z^{I^2} \omega^I + z^{I^3} \kappa_X^I \\ w^I(x^I, y^I, z^I) &= w_0^I + z^I \phi_Z^I + z^{I^2} \omega_Z^I \end{aligned}\right\} \quad (2.3.2\text{-}4)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีการกระจัดแบบ ESLT แล้วพบว่าทฤษฎีการกระจัดแบบ PLWT นั้นจะสามารถอธิบายการผิดรูปของโครงสร้างต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นได้ดีกว่า ส่วนทฤษฎีการกระจัดแบบ FLWT จะมีส่วนเพิ่มจากทฤษฎีการกระจัดแบบ PLWT คือสามารถแสดงความเค้นตั้งฉาก σ_Z ที่ไม่ต่อเนื่องกันในแต่ละชั้นซึ่งเป็นผลจากการสมมุติการกระจัดในแนวตั้งฉากในแต่ละชั้นเพิ่มเข้ามานั่นเอง

ถึงแม้ว่าการใช้ทฤษฎีการกระจัดแบบ PLWT ซึ่งได้ละความเครียดตั้งฉากทิ้งไปจะประสบความสำเร็จในการวิเคราะห์ปัญหาส่วนใหญ่ แต่รอบบินส์และเรดดี (Robbins and Reddy) (64) พบว่าทฤษฎีการกระจัดแบบ PLWT ของชิ้นส่วนการกระจัดจะไม่สามารถให้ค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากที่แม่นยำในบริเวณที่มีความไม่ต่อเนื่อง เช่น ที่ขอบอิสระ ที่รูเจาะ และ ณ บริเวณที่เริ่มเกิดการหลุดร่อนเป็นแผ่นของโครงสร้างได้ ทั้งนี้ในการวิเคราะห์ในบริเวณดังกล่าวมีความจำเป็นต้องคิดรวมผลจากความเครียดตั้งฉากด้วยเหตุสองประการดังนี้

ประการแรกคือ ความเค้นตั้งฉากมีส่วนสำคัญในการเกิดการหลุดร่อนเป็นแผ่นของโครงสร้าง อีกประการหนึ่งคือ รอบบินส์และเรดดี พบว่าการไม่คิดผลของความเครียดตั้งฉากจะไม่สามารถทำให้ความเค้นเฉือนตั้งฉากที่ขอบอิสระเข้ากันได้กับสภาวะที่ขอบอิสระได้ ดังนั้นรอบบินส์และเรดดีจึงได้เสนอใช้ทฤษฎีการกระจัดแบบ FLWT เป็นอีกทางเลือกหนึ่งแทนที่จะใช้ชิ้นส่วนสามมิติ (three dimensional element) โดยทฤษฎีการกระจัดนี้เรียกว่า ทฤษฎีการกระจัดหลายชั้นสามัญ (Generalized Layerwise Theory, GLWT) ซึ่งคิดผลของความเค้นทั้งหกส่วนคือ $\underline{\sigma} = \{\sigma_X \ \sigma_Y \ \sigma_{XY} \ \sigma_Z \ \tau_{YZ} \ \tau_{XZ}\}$

การกระจัดตามทฤษฎี GLWT สามารถเขียนดังสมการที่ 2.3.2-5 ทฤษฎีนี้จะคล้ายกับสมการที่ 2.3.2-3 คือจะเป็นการใช้ฟังก์ชันสัณฐานแบบสองมิติในแนวระนาบร่วมกับฟังก์ชันสัณฐานแบบหนึ่งมิติในแนวตั้งฉาก ($\Phi^I(z)$) ซึ่งฟังก์ชัน $\Phi^I(z)$ จะๆไม่เป็นศูนย์เฉพาะที่ขั้ว หรือระนาบที่แบ่งนั้นทำให้สามารถใช้ฟังก์ชันการประมาณแบบลากรองจ์ (Lagrangian interpolation function) ที่เป็นฟังก์ชันของ Z โดยจะกำหนดให้ n คือจำนวนขั้ว หรือระนาบที่แบ่งตลอดความหนาของโครงสร้าง โดย u^I v^I และ w^I เป็นตัวแปรของการกระจัดบนระนาบที่ I ทั้งนี้การเพิ่มระดับของการกระจายของการกระจัดตามความหนาของโครงสร้างสามารถทำได้ง่ายๆ โดยอาจใช้ฟังก์ชัน $\Phi^I(z)$ ที่มีกำลังสูงขึ้น หรือการเพิ่มจำนวนระนาบ n ตลอดความหนา ในการวิเคราะห์ส่วนใหญ่มักจะกำหนดให้จำนวนระนาบที่จะแบ่งตลอดความหนาของโครงสร้างนั้นมีจำนวนมากกว่า หรือเท่ากันกับจำนวนชั้นของแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นของปัญหาที่จะวิเคราะห์นั่นเอง

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= \sum_{I=1}^{n} u^I(x,y)\Phi^I(z) \\ v(x,y,z) &= \sum_{I=1}^{n} v^I(x,y)\Phi^I(z) \\ w(x,y,z) &= \sum_{I=1}^{n} w^I(x,y)\Phi^I(z) \end{aligned}\right\} \quad (2.3.2\text{-}5)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} u^I(x,y) &= \sum_{j=1}^{ND} N_j(x,y) u_j^{\,I} \\ v^I(x,y) &= \sum_{j=1}^{ND} N_j(x,y) v_j^{\,I} \\ w^I(x,y) &= \sum_{j=1}^{ND} N_j(x,y) w_j^{\,I} \end{aligned}\right\} \quad (2.3.2\text{-}6)$$

แม้ว่าชิ้นส่วนที่ใช้ทฤษฎี GLWT จะคล้ายกับชิ้นส่วนสามมิติในแง่ของการใช้ฟังก์ชันการประมาณกระจายการกระจัดตลอดความหนาของโครงสร้าง และขนาดของปัญหาหรือจำนวนระดับขั้นความเสรี แต่ทฤษฎี GLWT นั้นจะยังคงมีลักษณะของโครงสร้างเป็นสองมิติเช่นเดียวกับการกระจัดตามทฤษฎี ESLT คือสามารถอินทิเกรตแยกส่วนได้เช่นเดียวกับการกระจัดตามทฤษฎี ESLT และการแบ่งขนาดชิ้นส่วนในแนวระนาบที่เป็นสองมิติกับการแบ่งขนาดชิ้นส่วนในแนวตั้งฉากที่เป็นหนึ่งมิตินั้นสามารถทำได้อย่างมีอิสระแก่กัน ซึ่งทำให้มีข้อดีกว่าชิ้นส่วนสามมิติ

2.3.3 ทฤษฎีการกระจัดแบบรวม (MDT)

รอบบินส์ และเรดดี [65] พบว่าแบบจำลองการกระจัดตามทฤษฎี ESLT, PLWT และ FLWT นั้นมีจุดเด่นและจุดด้อยแตกต่างกันในแต่ละทฤษฎีทั้งในด้านความแม่นยำของผลลัพธ์, ความง่ายในการสร้างชิ้นส่วน

และความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้เทียบกับประสิทธิภาพทางการคำนวณ โดยการที่จะใช้แบบจำลองการกระจัดตามทฤษฎีใดทฤษฎีหนึ่งเพียงทฤษฎีเดียวอาจไม่ใช่วีธีที่เหมาะสมที่สุดในการวิเคราะห์โครงสร้างต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นทั่วๆไป ดังนั้นการใช้แบบจำลองการกระจัดตามทฤษฎีต่างๆร่วมกัน และหรือการใช้ระดับการแบ่งขนาดของชิ้นส่วนที่ต่างกันในการวิเคราะห์ในแต่ละส่วนของโครงสร้างต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นตามความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ต้องการซึ่งเรียกว่า วิธีวิเคราะห์โดยแบบจำลองการกระจัดแบบรวม (Multiple model analysis) จึงน่าจะเป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่เหมาะสมที่จะสามารถให้ทั้งความแม่นยำและความประหยัดในการคำนวณ

ทั้งนี้ความยุ่งยากของวิธีวิเคราะห์โดยแบบจำลองการกระจัดแบบรวมซึ่งใช้แบบจำลองการกระจัดตามทฤษฎีต่างๆร่วมกันนั้นจะอยู่ที่การทำให้การกระจัดมีความต่อเนื่อง และแรงกระทำมีสมดุลที่ขอบของแต่ละส่วนของโครงสร้างที่เราใช้แบบจำลองการกระจัดที่แตกต่างกันนั้นเอง จึงจำเป็นที่ต้องใช้ตัวคูณลากรองจ์ หรือใช้ชิ้นส่วนปรับเปลี่ยนแบบพิเศษ (special transition elements) เพื่อบังคับความต่อเนื่องระหว่างส่วนของโครงสร้างที่ใช้แบบจำลองการกระจัดต่างกัน แต่ทั้งนี้ทั้งการใช้ชิ้นส่วนปรับเปลี่ยนแบบพิเศษ และตัวคูณลากรองจ์นั้นมีความยุ่งยาก

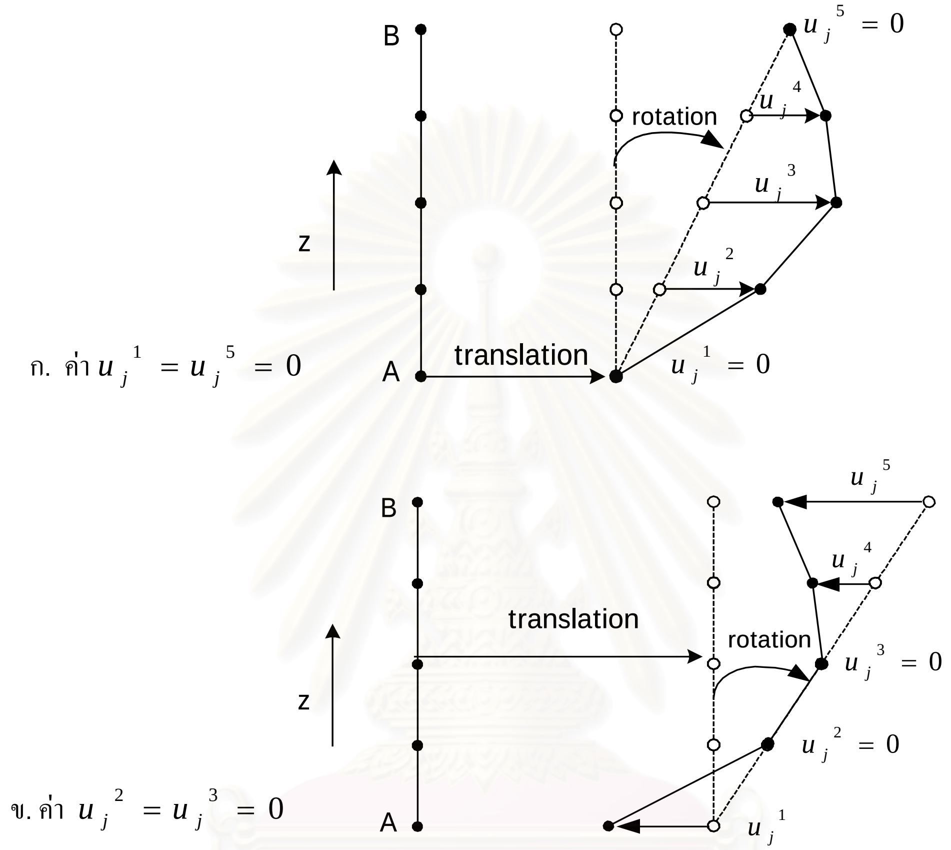
การใช้ตัวคูณลากรองจ์จะไปเพิ่มจำนวนตัวแปรในสมการพลังงาน หรือ หลักการแปรผันที่ใช้สร้างเมตริกซ์สติฟเนสจะเป็นการเพิ่มงานที่ต้องทำในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนส คือต้องกำจัดตัวแปรดังกล่าวในระหว่างสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วน ขณะที่การใช้ชิ้นส่วนปรับเปลี่ยนแบบพิเศษ จะต้องใช้ชนิดของชิ้นส่วนตามชนิดของชิ้นส่วนที่ต้องการให้มาเชื่อมต่อกัน อีกทั้งหากว่าส่วนของโครงสร้างที่ต้องเชื่อมต่อกันมีลักษณะเป็นมุมก็จะทำให้ต้องการชนิดของชิ้นส่วนปรับเปลี่ยนแบบพิเศษเพิ่มในการเชื่อมต่อชิ้นส่วนที่มุมนี้ด้วย

เพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากดังกล่าวทำให้รอบบินส์และเรดดี [65] ได้เสนอแบบจำลองการกระจัดแบบรวม (Multiple displacement model) ที่เกิดจากการนำแบบจำลองการกระจัดสองแบบตามทฤษฎีการกระจัด FSDT และ FLWT มาใช้ร่วมกันซึ่งสามารถทำให้การกระจัดมีความต่อเนื่องในแต่ละส่วนของปัญหาในการวิเคราะห์โดยสามารถเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z) &= u^{ESL}(x,y,z) + u^{LWT}(x,y,z) \\ v(x,y,z) &= v^{ESL}(x,y,z) + v^{LWT}(x,y,z) \\ w(x,y,z) &= w^{ESL}(x,y,z) + w^{LWT}(x,y,z) \end{aligned}\right\} \quad (2.3.3\text{-}1)$$

โดยที่ u^{ESL} และ u^{LWT} คือการกระจัดของแบบจำลองการกระจัดตามทฤษฎี FSDT และ FLWT ตามลำดับ คือแบบจำลองการกระจัดตามทฤษฎี FSDT จะเหมือนกับสมการที่ 2.3.1-3 เช่นเดียวกันแบบจำลองการกระจัดตามทฤษฎี FLWT จะเหมือนกับในสมการที่ 2.3.2-4 โดยที่สนามการกระจัดตามทฤษฎี FLWT นั้นจะเป็นการกระจัดส่วนเพิ่มเติมที่จะทำให้การกระจัดตามทฤษฎี FSDT สามารถที่จะแสดงการผิดรูปได้ครบถ้วนเมื่อใช้วิเคราะห์ส่วนของโครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นตามความแม่นยำที่ต้องการ ทั้งนี้จะใช้การกระจัดตามทฤษฎี FLWT เพิ่มเข้าไปในการวิเคราะห์ส่วนของโครงสร้างที่ต้องการความแม่นยำเป็นพิเศษนั่นเอง

ทั้งนี้ความต่อเนื่องของการกระจัดระหว่างชิ้นส่วนต่างชนิดกันทำได้โดยบังคับการกระจัดที่ขอบตามทฤษฎี FLWT ที่เพิ่มให้หายไปเหลือเพียงการกระจัดตามทฤษฎี FSDT ซึ่งจะเป็นการกระจัดที่ใช้เชื่อมต่อกัน และดังที่กล่าวมาทำให้ความจำเป็นที่ต้องใช้ตัวคูณลากรองจ์, ชิ้นส่วนปรับเปลี่ยนแบบพิเศษ หรือวิธีการฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ในการบังคับการกระจัดให้ต่อเนื่องจึงหมดไป



รูปที่ 2.3.3-1 การผิดรูปที่ขั้ว j (เส้นตรง AB) ตามแบบจำลองการกระจัดแบบรวม [65]

ทั้งนี้ประเด็นสำคัญต้องไม่ลืมว่าการกระจัดตามทฤษฎี FLWT นั้นสามารถจำลองการผิดรูปของโครงสร้างที่การกระจัดตามทฤษฎี FSDT จำลองได้ด้วย ดังนั้นชิ้นส่วนที่ใช้การกระจัดตามทฤษฎีทั้งสองร่วมกันจึงมีตัวแปรการกระจัด 5 ตัวแปรที่ต้องกำหนดค่าให้เป็นศูนย์หรือละทิ้งเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียว (unique solution) และจากการที่การกระจัดตามทฤษฎี FSDT นั้นจำเป็นต้องใช้ในการเชื่อมต่อของชิ้นส่วนที่ต่างชนิดกันจึงทำให้การกระจัดตามทฤษฎี FLWT ถูกกำหนดค่าให้เท่ากับศูนย์ดังแสดงในรูปที่ 2.3.3-1

$$u_j^1 = u_j^5 = 0,\ v_j^1 = v_j^5 = 0,\ w_j^1 = 0 \qquad (2.3.3\text{-}2)$$

รูปที่ 2.3.3-1 แสดงการผิดรูปที่เป็นไปได้ของการกระจัดในแนวระนาบ (u) ที่ขั้ว j ของชิ้นส่วนบนเส้นตรงในแนวตั้งฉากเส้นหนึ่งซึ่งเป็นความหนาของโครงสร้างที่ได้ใช้สนามการกระจัดตามทฤษฎี FLWT ร่วมกับ

ทฤษฎี FSDT โดยที่เส้นตรงนี้ถูกแบ่งออกเป็น 5 ชั้นตลอดความหนาของโครงสร้างและเลือกใช้ระนาบอ้างอิงอยู่ที่ขอบล่างของโครงสร้าง จากรูปที่ 2.3.3-1ก จะได้ว่าการเลือกระนาบอ้างอิงอยู่ที่ขอบล่างของโครงสร้างจะทำให้เลือกกำหนดให้ $w_j^{\,1} = 0$ นอกจากนี้พบว่าของการกระจัด $u_j^{\,I}$ ที่ต้องกำหนดค่าให้เป็นศูนย์จะเป็นตัวใดก็ได้ อีกทั้งตำแหน่งของระนาบอ้างอิงนั้นก็ไม่จำเป็นต้องอยู่ที่ขอบล่างของโครงสร้างเช่นเดียวกัน เพราะถึงแม้ว่าการกระจัด $u_j^{\,I}$ ที่กำหนดค่าให้เป็นศูนย์จะต่างกัน หรือระนาบอ้างอิงไม่ได้อยู่ที่ขอบล่างของโครงสร้างอันจะทำให้ได้การกระจัดที่ไม่เป็นศูนย์ที่เหลือมีค่าต่างกัน แต่อย่างไรก็ตามในท้ายที่สุดแล้วก็จะให้การผิดรูปสุดท้ายที่เหมือนกันดังแสดงในรูปที่ 2.3.3-1ข โดยที่การเลือกกำหนดค่าการกระจัด $v_j^{\,I}$ ให้เท่ากับศูนย์นั้นจะทำในทำนองเดียวกันกับการเลือกกำหนดค่าของ $u_j^{\,I}$ ที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น

2.4 **สนามความเค้น** (Stress Fields)

ในการสร้างชิ้นส่วนพันทาง และชิ้นส่วนผสมซึ่งต้องมีการสมมติความเค้นนั้นเมตริกซ์การประมาณของการกระจัด $\underline{u}$ และ $\underline{\tilde{u}}$ นั้นจะสามารถเขียนได้โดยง่ายหากเป็นการประมาณการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}$ แต่ในส่วนของความเค้นนั้นถ้าจำนวนของพารามิเตอร์ความเค้นมีมากจะส่งผลให้ชิ้นส่วนที่ได้แข็งเกินไป คือจำนวนของพารามิเตอร์ความเค้นจำเป็นต้องสมดุลกับจำนวนของการกระจัดที่สมมติด้วย [18] ดังที่ได้กล่าวในหัวข้อ 2.2.5 แต่อย่างไรก็ตามยังไม่มีกฎเกณฑ์ที่แน่นอนในการเลือกความเค้นซึ่งสิ่งนี้เป็นจุดด้อยที่สำคัญของชิ้นส่วนพันทางและชิ้นส่วนผสมที่ต้องสมมุติสนามความเค้น

สนามความเค้นจะต่างกันออกไปเนื่องจากหลักการแปรผันที่ใช้ในการสร้างชิ้นส่วนในแต่ละระเบียบวิธีนั้นเอง ทั้งนี้อาจจะแบ่งการสมมุติความเค้นได้ 2 ประเภทคือ สนามความเค้นที่เขียนอยู่ในรูปของพิกัดฉาก และสนามความเค้นที่เขียนอยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ ดังนี้

2.4.1 การสมมุติความเค้นโดยเขียนอยู่ในรูปของพิกัดฉาก (x, y, z)

การสมมุติสนามความเค้นที่เขียนอยู่ในรูปของพิกัดฉากนั้นเกิดจากการใช้หลักการแปรผันที่กำหนดให้ความเค้นที่ใช้ในการสร้างชิ้นส่วนนั้นต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุล เช่น หลักการพลังงานส่วนเติมเต็มต่ำสุดในระเบียบวิธีแรง และหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มที่ดัดแปรแล้วในระเบียบวิธีพันทาง หรืออาจใช้ร่วมกับหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ในบางครั้งทั้งที่ตามทฤษฎีแล้วหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ไม่จำเป็นต้องสมมุติความเค้นให้เข้ากันได้กับสมการสมดุลแต่อย่างใด

การสมมุติสนามความเค้นให้เข้ากันได้กับสมการสมดุลนั้นมักจะเริ่มด้วยการสมมุติความเค้นในระนาบของแผ่นพื้นชั้นที่ I ($\sigma_X^I , \sigma_Y^I , \sigma_{XY}^I$) ให้มีพจน์ครบถ้วนที่ระดับหนึ่ง และมีจำนวนพารามิเตอร์ความเค้น n_σ เข้ากันได้กับหลักเกณฑ์ในหัวข้อที่ 2.2.5 โดยอาศัยสมการสมดุลที่ละพจน์ของแรงตัวจะได้ว่าความเค้นเฉือนตั้งฉาก ($\sigma_{XZ}^I ,\ \sigma_{YZ}^I$) และความเค้นตั้งฉาก ($\sigma_Z^I$) ของแผ่นพื้นชั้นที่ I จะหาได้จากสมการที่ 2.4.1-1 ทั้งนี้ค่าคงที่ของการอินทิเกรตจะต้องเข้ากันได้กับเงื่อนไขของแรงที่ขอบของโครงสร้าง

$$\left.\begin{aligned}\sigma^{I}_{XZ} &= -\int\left(\frac{\partial\sigma^{I}_{X}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma^{I}_{XY}}{\partial y}\right)dz\\ \sigma^{I}_{YZ} &= -\int\left(\frac{\partial\sigma^{I}_{XY}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma^{I}_{Y}}{\partial y}\right)dz\\ \sigma^{I}_{Z} &= -\int\left(\frac{\partial\sigma^{I}_{XZ}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma^{I}_{YZ}}{\partial y}\right)dz\end{aligned}\right\} \quad (2.4.1\text{-}1)$$

ตัวอย่างการใช้ความเค้นที่เขียนอยู่ในรูปของพิกัดฉากคือ สปิลเกอร์ [23] ซึ่งสร้างชิ้นส่วนพันทาง 8 ขั้วจากหลักการพลังงานส่วนเติมเต็มที่ดัดแปรแล้ว โดยจากความเค้นที่ใช้ต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุล และเงื่อนไขของแรงที่ขอบทำให้มีความยุ่งยากในการสมมุติ และจำนวนพารามิเตอร์ความเค้น n_σ ที่ใช้มีถึง ($52\,NL-12$) พารามิเตอร์เมื่อ NL คือจำนวนชั้นทั้งหมดของโครงสร้างแผ่นที่ซ้อนเป็นชั้น ทั้งนี้ขั้นตอนในการสร้างชิ้นส่วนตามระเบียบวิธีพันทางนั้นจำเป็นต้องหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ H ซึ่งมีขนาด ($n_\sigma \times n_\sigma$) ดังได้กล่าวไปแล้วทำให้หากใช้จำนวนพารามิเตอร์ความเค้น n_σ ที่มากแล้วจะส่งผลให้ใช้เวลาในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสมากตามไปด้วยเช่นกัน

นอกจากการใช้ความเค้นที่เขียนอยู่ในรูปของพิกัดฉากจะสิ้นเปลืองเวลาในการสร้างชิ้นส่วนแล้วยังยากที่จะสมมุติความเค้นที่มีพจน์ครบสมบูรณ์เพื่อให้ชิ้นส่วนมีคุณสมบัติยืนยงพร้อมๆกับยังเข้ากันได้กับสมการสมดุลด้วย อีกทั้งการใช้ความเค้นที่มีพจน์ครบสมบูรณ์นั้นมักจะทำให้ชิ้นส่วนมีความแข็งเกินไป ดังนั้นจึงมีผู้เสนอให้ใช้ความเค้นที่เขียนอยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติซึ่งเป็นผลให้ชิ้นส่วนมีความยืนยง และสามารถให้ผลลัพธ์ที่ดีในชิ้นส่วนที่มีการบิดเบี้ยว (distortion) จากที่กล่าวข้างต้นเป็นสาเหตุให้มีการพัฒนาชิ้นส่วนที่ไม่จำเป็นต้องสมมุติความเค้นที่เข้ากันได้กับสมการสมดุลดังแสดงในหัวข้อถัดไป

2.4.2 การสมมุติความเค้นโดยเขียนอยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ (ξ, η, ζ)

ความเค้นที่เขียนอยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติจะเกิดจากการที่สนามความเค้นที่ใช้ไม่จำเป็นต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุลดังในหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ใช้ข้อจำกัดของพลังงานในระเบียบวิธีพันทาง และในระเบียบวิธีผสม หรือหลักการฮู-วาชิซูในระเบียบวิธีผสม เป็นต้น ทั้งนี้ เพียน [59] ได้เสนอการสร้างชิ้นส่วนโดยจะเลือกความเค้นให้เข้ากันได้กับการกระจัดที่สมมติ ตัวอย่างเช่น กระบวนการสร้างชิ้นส่วนที่ใช้การกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_\lambda$ เริ่มจากการที่โดยทั่วไปแล้วการกระจัดที่เข้ากันได้ $\underline{u}_q$ ซึ่งจะมีพจน์ไม่ครบสมบูรณ์ ดังนั้นการกระจัด $\underline{u}_\lambda$ จึงถูกเลือกให้ $\underline{u} = \underline{u}_q + \underline{u}_\lambda$ มีพจน์ครบถ้วนถึงระดับหนึ่ง ส่วนการสมมุติความเค้นนั้นจะเลือกความเค้นให้มีพจน์ครบถ้วนที่ระดับเดียวกับความเครียดที่คำนวณจากการกระจัด $D(\underline{u})$ และมีจำนวนพารามิเตอร์ความเค้น n_σ ดังที่ได้กล่าวในหัวข้อ 2.2.5

ในหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์สนามความเค้นที่เลือกให้เข้ากันได้กับสนามการกระจัดนั้นอาจเพิ่มข้อจำกัดของพลังงานดังในการศึกษาของเพียนและวู [13] โดยเป็นทางเลือกหนึ่งในการเลือกสนามความเค้นดังนี้

หากพิจารณาชิ้นส่วนพันทางที่ใช้หลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้วในสมการที่ 2.1.2.2-1 โดยละส่วนของแรงกระทำ ซึ่งสนามการกระจัดที่สมมุติเขียนได้เป็น $\underline{u} = \underline{u}_q + \underline{u}_\lambda$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\Pi_{HR} = \sum_{e=1}^{NE} \{ \int_{V^e} [-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^T S \underline{\sigma} + \underline{\sigma}^T (D\underline{u})] dV - \int_{\partial V^e} \underline{T}^T \underline{u}_\lambda dS \} \quad (2.4.2\text{-}1)$$

โดยที่เพียนและวู [13] ได้เสนอเงื่อนไขบังคับของสนามความเค้นที่สมมุติคือ

$$\sum_{e=1}^{NE} \int_{\partial V^e} (n\underline{\sigma})^T \delta\underline{u}_\lambda dS = 0 \quad \text{หรืออาจเขียนว่า} \quad \int_{\partial V^e} (n\underline{\sigma})^T \underline{u}_\lambda dS = 0 \quad (2.4.2\text{-}2)$$

หมายความว่าต้องไม่เกิดงานจากแรงกระทำที่ขอบ $\underline{T} = n\underline{\sigma}$ กับการกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_\lambda$ ตามขอบของชิ้นส่วน ∂V^e โดยหากทำการแบ่งสนามความเค้นออกเป็นส่วนคงที่ $\underline{\sigma}_c$ และส่วนอันดับสูง $\underline{\sigma}_h$ คือ $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_c + \underline{\sigma}_h$ จึงทำให้สามารถเขียนเงื่อนไขของพลังงานในสมการที่ 2.4.2-2 ได้เป็นสองเงื่อนไขคือ

$$\int_{\partial V^e} (n\underline{\sigma}_c)^T \underline{u}_\lambda dS = 0 \quad \text{หรือ} \quad \int_{\partial V^e} D\underline{u}_\lambda dV = 0 \quad (2.4.2\text{-}3)$$

และ

$$\int_{\partial V^e} (n\underline{\sigma}_h)^T \underline{u}_\lambda dS = 0 \quad (2.4.2\text{-}4)$$

ทั้งนี้สมการที่ 2.4.2-3 นั้นเป็นเงื่อนไขของการลู่เข้าของผลเฉลยสำหรับชิ้นส่วนที่มีการสมมุติการกระจัดส่วนเพิ่มซึ่งสามารถใช้ในการเลือกการกระจัด $\underline{u}_\lambda$ ที่เหมาะสมได้ตามการศึกษาของวูและคณะ [68] ส่วนสมการที่ 2.4.2-4 จะเป็นเงื่อนไขพลังงานที่ใช้ปรับปรุงสนามความเค้นของชิ้นส่วนพันทางนั้นเอง

หากต้องการปรับปรุงสนามความเค้นด้วยสมการที่ 2.4.2-4 โดยกำหนดให้การกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_\lambda = N_\lambda \underline{\lambda}$ และความเค้นที่สมมุติคือ $\underline{\sigma} = P\underline{\beta}$ ทั้งนี้สามารถเขียนสนามความเค้นใหม่เป็น

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_c + \underline{\sigma}_h = \underline{\beta}_c + P_h \underline{\beta}_h = \underline{\beta}_c + [P_1 \; P_2] \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 \\ \underline{\beta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.2\text{-}5)$$

ทั้งนี้จำนวนของพารามิเตอร์ความเค้น $\underline{\beta}_2$ ต้องเท่ากับจำนวนพารามิเตอร์การกระจัด $\underline{\lambda}$ จึงสามารถเขียนสมการที่ 2.4.2-4 ใหม่ได้ว่า

$$\int_{\partial V^e} \underline{u}_{\lambda}^{T}(n\,\underline{\sigma}_h)dS \;=\; \lambda^T M\beta_h \;=\; 0 \qquad (2.4.2\text{-}6)$$

เมื่อ

$$M = \int_{\partial V^e} N_{\lambda}^{T} n[P_1\,P_2]dS \;=\; [M_1\,M_2] \qquad (2.4.2\text{-}7)$$

และจากสมการที่ 2.4.2-6 ทำให้สามารถเขียนพารามิเตอร์ความเค้น $\underline{\beta}_2$ อยู่ในรูปของพารามิเตอร์ความเค้น β_1 ได้ ทั้งนี้เมตริกซ์ M_2 จะต้องสามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้ จากที่ได้กล่าวข้างต้นจึงได้สนามความเค้นสุดท้าย $\underline{\breve{\sigma}}$ คือ

$$\breve{\sigma} \;=\; \sigma_c + \breve{\sigma}_h \;=\; [I \;\; \breve{P}_h\,]\begin{bmatrix}\beta_c\\ \beta_1\end{bmatrix} = \breve{\breve{P}}\beta \qquad (2.4.2\text{-}8)$$

เมื่อ $\breve{P}_h \;=\; P_1 - P_2 M_2^{-1} M_1$

โดยเมื่อความเค้นที่สมมุติเข้ากันได้กับสมการที่ 2.4.2-4 คือ $\underline{\breve{\sigma}} = \underline{\sigma}_c + \underline{\breve{\sigma}}_h$ แทนลงไปในสมการที่ 2.4.2-1 และจากการที่พจน์ของพลังงานที่เกิดจากความเค้นส่วนอันดับสูง $\underline{\sigma}_h$ กับความเครียดที่จากการกระจัดส่วนเพิ่ม $D\underline{u}_{\lambda}$ นั้นเป็นพลังงานที่เกิดจากพจน์ที่มีอันดับสูงซึ่งมีค่าน้อยจึงสามารถละทิ้งได้ ทำให้ได้หลักการเฮลลิงเกอร์อย่างง่ายซึ่งไม่มีการกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_{\lambda}$ ปรากฏอยู่ในสมการ [13, 24] คือ

$$\Pi_{HRs} \;=\sum_{e=1}^{NE}\{\int_{V^e}[-\frac{1}{2}\underline{\breve{\sigma}}^T S\,\underline{\breve{\sigma}} \;+\; \underline{\breve{\sigma}}^T(D\underline{u}_q)]\,dV\;\} \qquad (2.4.2\text{-}9)$$

ซึ่งจะได้ว่าขั้นตอนการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสจะเหมือนกับในหัวข้อ 2.2.3.1 เมื่อการกระจัดที่ใช้เป็นการกระจัดที่เข้ากันได้ $\underline{u}_q$ นั่นเอง

2.5 **สนามความเครียด** (Strain Fields)

การสมมุติสนามความเครียดนั้นจะพบว่ามักจะใช้แทนการสมมุติความเค้นร่วมกับหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์หรือหรือหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้ว และพบในชิ้นส่วนที่มีการสมมุติสามสนามตัวแปรคือทั้งสนามการกระจัด ความเค้น และความเครียดในหลักการฮู-วาชิซู หรือหลักการหลักการฮู-วาชิซูที่ดัดแปรแล้ว โดยจากที่หลักการที่ดังกล่าวนี้ไม่ได้บังคับว่าความเค้นที่ได้จากการสมมุติความเครียดขึ้นมานี้ต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุล ดังนั้นจึงทำให้สนามความเครียดที่สมมุตินี้จะสามารถเขียนอยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ

เช่นเดียวกับการสมมุติสนามความเค้น คือจำนวนของพารามิเตอร์ความเครียดจำเป็นต้องสมดุลกับจำนวนของการกระจัดที่สมมติด้วย [18] ดังที่ได้กล่าวในหัวข้อ 2.2.5 แต่อย่างไรก็ตามยังไม่มีกฎเกณฑ์ที่แน่นอนในการเลือกความเครียด ตัวอย่างเช่น กระบวนการสร้างชิ้นส่วนที่ใช้การกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_{\lambda}$ เริ่มจากการที่

โดยทั่วไปแล้วการกระจัด $\underline{u}_q$ ซึ่งจะมีพจน์ไม่ครบสมบูรณ์ ดังนั้นการกระจัด $\underline{u}_\lambda$ จึงถูกเลือกให้ $\underline{u} = \underline{u}_q + \underline{u}_\lambda$ มีพจน์ครบถ้วนถึงระดับหนึ่ง ส่วนการสมมติความเครียดนั้นจะเลือกความเค้นให้มีพจน์ครบถ้วนที่ระดับเดียวกับความเครียดที่คำนวณจากการกระจัด $D(\underline{u})$

ทั้งนี้หลักการสมมุติความเครียดข้างต้นซึ่งเหมือนกับหลักการสมมุติความเค้นจะสอดคล้องกับการสร้างชิ้นส่วนพันทางจากหลักการ Π_{mHW} และชิ้นส่วนผสมจากหลักการ Π_{HW} ซึ่งมักนิยมใช้เมตริกซ์ P ที่ใช้ในการประมาณพารามิเตอร์ความเค้นเป็นเมตริกซ์ที่ใช้ในการประมาณพารามิเตอร์ความเครียดด้วยในขณะเดียวกัน อันเนื่องมาจากความจำเป็นที่ถูกบังคับให้จำนวนพารามิเตอร์ความเค้น n_σ เท่ากับจำนวนพารามิเตอร์ความเครียด n_ε ดังแสดงในสมการที่ 2.2.4.4-3 และ 2.2.4.4-4

2.6 ความได้เปรียบของชิ้นส่วนพันทาง และชิ้นส่วนผสม

จากหัวข้อต่างๆที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้นจะเห็นว่ามีชิ้นส่วนแบบต่างๆมากมายตามระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ต่างกัน ทำให้เกิดข้อสงสัยในการเลือกใช้ชิ้นส่วนในการวิเคราะห์ แต่ทั้งนี้ชิ้นส่วนที่ดีนั้นควรจะมีคุณสมบัติดังนี้ [44]

- ไม่มีรูปแบบปลอมของการกระจัด
- มีคุณสมบัติยืนยง
- มีประสิทธิภาพทางการคำนวณ
- ไม่เป็นชิ้นส่วนที่แข็งเกร็งเกินไป (overly rigid)
- ให้ค่าความเค้นที่แม่นยำ

ชิ้นส่วนตามระเบียบวิธีการกระจัดนั้นมักจะสามารถมีคุณสมบัติในสามข้อแรกข้างต้น คือชิ้นส่วนตามระเบียบวิธีการกระจัดที่ทำการสมมุติการกระจัดเพียงอย่างเดียวซึ่งจะใช้หลักการพลังงานศักย์ต่ำสุดนั้นจะมีการสร้างชิ้นส่วนที่ง่ายโดยเฉพาะในปัญหาที่การกระจัดต้องการความต่อเนื่องอันดับศูนย์ซึ่งสามารถใช้ฟังก์ชันสัณฐานอย่างง่ายที่เขียนในรูปพิกัดธรรมชาติ ทั้งนี้จากการที่เขียนในรูปพิกัดธรรมชาติทำให้ชิ้นส่วนมีความยืนยงด้วยเช่นกัน แต่อย่างไรก็ตามชิ้นส่วนการกระจัดก็มีข้อด้อยดังนี้

ในปัญหาที่ต้องการความต่อเนื่องอันดับหนึ่ง ตัวอย่างเช่นในปัญหาแผ่นพื้นแบบบางซึ่งต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขของเคอร์เชอฟ (การกระจัดตามทฤษฎี CLT) ซึ่งเป็นการยากที่จะสร้างฟังก์ชันสัณฐานที่ยังคงมีความต่อเนื่องของอนุพันธ์ตั้งฉาก (normal derivatives) ตามขอบเชื่อมต่อระหว่างชิ้นส่วน ทั้งนี้หากว่าไม่มีความต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วนแล้วจะจำเป็นต้องมีการทดสอบแบบหย่อม (pacth test) เพื่อทดสอบการลู่เข้าสู่คำตอบ การแก้ปัญหาในข้อนี้อาจทำได้โดยรวมความเครียดเฉือนตั้งฉาก หรือมุมหมุน ϕ ในการกระจัดตามทฤษฎี FSDT ในการสร้างชิ้นส่วน แต่อย่างไรก็ตามปัญหาการยึดตัวเนื่องจากแรงเฉือนนั้นก็จะยังมีอยู่ นอกจากนี้ขจัดปัญหานี้

อาจทำได้โดยใช้การอินทิเกรตแบบลดหรือเลือกในการสร้างชิ้นส่วน แต่เช่นกันการอินทิเกรตแบบลดหรือเลือกนั้นก็จะมีข้อบกพร่องคือจะทำให้เกิดรูปแบบปลอมของการกระจัด

ในชิ้นส่วนอันดับต่ำ (lower-order element) เช่นชิ้นส่วนแผ่นพื้น 4 ขั้วซึ่งการกระจัดจะเป็นเส้นตรงตามขอบของชิ้นส่วนอันเป็นที่มาของการยึดตัวเนื่องจากแรงเฉือนในปัญหาการรับแรงดัด เพราะชิ้นส่วนจะไม่สามารถแสดงพฤติกรรมการรับแรงดัดได้ดีโดยเฉพาะในแผ่นพื้นแบบบาง ซึ่งส่งผลให้เกิดความคลาดเคลื่อนของความเค้นที่คำนวณได้จากชิ้นส่วนการกระจัด และนอกจากนี้ชิ้นส่วนการกระจัดยังเป็นชิ้นส่วนที่แข็งเกินไป ส่วนชิ้นส่วนตามระเบียบวิธีแรงก็จะอ่อนเกินไปจากการศึกษาของเพียนและคณะ [50]

จากที่ชิ้นส่วนพันทาง และชิ้นส่วนผสมสามารถให้ค่าความเค้นที่แม่นยำขึ้น คือ มีการสมมุติสนามความเค้น และหรือสนามความเครียดร่วมกับการกระจัดทำให้ความผิดพลาดของแต่ละสนามตัวแปรเป็นอิสระต่อกัน นอกจากนี้การสมมุติสนามความเค้น และหรือความเครียดทำให้สามารถเลือกพจน์ของสนามตัวแปรที่เข้ากันได้กับสภาวะเงื่อนไขของความเค้นที่ขอบของโครงสร้างซึ่งมักมีค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากเป็นศูนย์ในปัญหาส่วนใหญ่ที่พบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในส่วนของชิ้นส่วนพันทาง และชิ้นส่วนผสมที่สามารถเขียนเมตริกซ์การประมาณของความเค้น หรือความเครียดในรูปของพิกัดธรรมชาติซึ่งสามารถให้ชิ้นส่วนที่มีความยืนยง และผลลัพธ์ไม่ได้รับผลกระทบมากนักเมื่อใช้ชิ้นส่วนที่บิดเบี้ยวในการวิเคราะห์ปัญหา [42, 44]

บทที่ 3

ชิ้นส่วนที่ทำการศึกษา

จากหลักการแปรผัน ทฤษฎีการกระจัด ตลอดจนวิธีทัณฑกรรม และการกำหนดเงื่อนไขของพลังงานที่ได้กล่าวในบทที่ 2 จะถูกนำมากล่าวโดยละเอียดว่าในการศึกษานี้ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาชิ้นส่วนใด มีการสมมุติสนามความเค้น และหรือสนามความเครียดอย่างไรบ้าง ทั้งนี้หลักการแปรผันต่างๆ วิธีทัณฑกรรม และการกำหนดเงื่อนไขของพลังงานข้างต้นนั้นจะกล่าวในลักษณะของปัญหาทั่วไปในบทที่ 2 แต่ในที่นี้ซึ่งเป็นปัญหาของแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นจึงต้องมีการดัดแปรเปลี่ยนแปลงหลักการแปรผันต่างๆ วิธีทัณฑกรรม และเงื่อนไขของพลังงานที่ได้กล่าวไว้แล้วดังจะกล่าวต่อไป

ในบทนี้จะแบ่งออกเป็นชิ้นส่วนพันทาง และชิ้นส่วนผสมตามหลักการแปรผันที่ใช้ โดยที่ในแต่ละชิ้นส่วนที่แบ่งข้างต้นก็อาจแบ่งย่อยลงไปตามสนามการกระจัด สนามความเค้น และหรือสนามความเครียดที่ใช้ได้อีก ชิ้นส่วนที่ทำการศึกษาสามารถแบ่งออกได้ดังนี้

ชิ้นส่วนพันทาง :

- ชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรด้วยการกำหนดเงื่อนไขของพลังงาน
- ชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วนจากหลักการจิง-เลียว
- ชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรด้วยวิธีทัณฑกรรม
- ชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้ว
- ชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้วร่วมกับวิธีทัณฑกรรม

ชิ้นส่วนผสม :

- ชิ้นส่วนผสมจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์(โดยสมมุติการกระจัดส่วนเพิ่ม)

3.1 ชิ้นส่วนพันทาง

3.1.1 ชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรด้วยการกำหนดเงื่อนไขของพลังงาน

ระเบียบวิธีพันทางนั้นสามารถใช้วิเคราะห์แผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นหนาได้ดี แต่ในที่นี้จะมีเพียงชิ้นส่วนเดียวที่ศึกษาซึ่งชวงและได [24] ได้นำเสนอชิ้นส่วนพันทางนี้โดยไม่ต้องใช้สนามความเค้นที่เข้ากันได้กับสมการสมดุลเอกพันธุ์จึงเป็นการง่ายที่ในการเลือกสนามความเค้น โดยที่ใช้การกำหนดเงื่อนไขของพลังงานซึ่งเสนอโดยเพียน และวู [13] ในหัวข้อ 2.4.2 ในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน โดยที่ในที่นี้จะกำหนดชื่อชิ้นส่วนนี้ว่า 4HeHsz

3.1.1.1.หลักการแปรผัน

โดยในหัวข้อ 2.4.2 นั้นจะเป็นการใช้เงื่อนไขของพลังงานบนปริมาตรของแต่ละชิ้นส่วน แต่ในที่นี้จะเป็นการใช้เงื่อนไขของพลังงานบนปริมาตรแผ่นพื้นแต่ละชั้นของแต่ละชิ้นส่วนแทนซึ่งทำให้สามารถเขียนหลักการได้ใหม่ จากการสมมุติสนามการกระจัดของชิ้นที่ I คือ $\underline{u}^I = \underline{u}^I_q + \underline{u}^I_\lambda$ และความเค้นของชิ้นที่ I คือ $\underline{\sigma}^I = \underline{\sigma}^I_c + \underline{\sigma}^I_h$ สามารถเขียนหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์ที่ถูกดัดแปรแล้วสำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e ของโครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นที่มีทั้งหมด NL ชั้นได้ว่า

$$\begin{aligned}\Pi^e_{mHR} = {} & \sum_{I=1}^{NL} \int_{V^{eI}} [-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^{I^T} S\, \underline{\sigma}^I + \underline{\sigma}^{I^T}(D\underline{u}^I)]dV - \int_{\partial V^{eI}} \underline{\sigma}^{I^T} n^T \underline{u}^I_\lambda dS \\ & - \int_{S_\sigma^{eI}} \underline{\bar{T}}^{I^T} \underline{u}^I_q dS\end{aligned} \tag{3.1.1.1-1}$$

เมื่อ V^{eI} และ S_σ^{eI} คือปริมาตร และพื้นที่ผิวที่แรงภายนอกกระทำของชิ้นส่วนชิ้นที่ e ชั้นที่ I ทั้งนี้ถ้าหากความเค้นส่วนอันดับสูงที่สมมุติตอนแรก $\underline{\sigma}^I_h$ สามารถเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับของพลังงานคือ

$$\int_{\partial V^{eI}} \underline{\sigma}^{I^T}_h n^T \underline{u}^I_\lambda dS = 0 \quad \text{หรือ} \quad \int_{\partial V^{eI}} \underline{u}^{I^T}_\lambda n\, \underline{\sigma}^I_h\, dS = 0 \tag{3.1.1.1-2}$$

แล้วจะเขียนใหม่ว่า $\underline{\hat{\sigma}}^I_h$ ดังนั้นความเค้นรวมของแผ่นพื้นชั้นที่ I จะเขียนใหม่ได้ว่า

$$\underline{\hat{\sigma}}^I = \underline{\sigma}^I_c + \underline{\hat{\sigma}}^I_h \tag{3.1.1.1-3}$$

หากพิจารณาตามข้อกำหนดในสมการที่ 3.1.1.1-2 และความเค้นในสมการที่ 3.1.1.1-3 ทำให้สมการที่ 3.1.1.1-1 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\Pi^e_{mHR} = {} & \sum_{I=1}^{NL} \int_{V^{eI}} [-\frac{1}{2}\underline{\hat{\sigma}}^{I^T} S^I\, \underline{\hat{\sigma}}^I + \underline{\hat{\sigma}}^{I^T}(D\underline{u}^I_q) + \underline{\hat{\sigma}}^{I^T}_h(D\underline{u}^I_\lambda)]dV \\ & - \int_{S_\sigma^{eI}} \underline{\bar{T}}^{I^T} \underline{u}^I_q dS\end{aligned} \tag{3.1.1.1-4}$$

และจากการที่ $\underline{\hat{\sigma}}^I_h$ เป็นความเค้นส่วนอันดับสูงของความเค้นรวมที่สมมติซึ่งทำให้งานเสมือนระหว่าง $\underline{\hat{\sigma}}^I_h$ และ $\underline{u}^I_\lambda$ ก็จะเป็นพลังงานส่วนอันดับสูงของสมการพลังงานซึ่งสามารถที่ละทิ้งได้ ดังนั้นสมการพลังงานในสมการที่ 3.1.1.1-4 จะเขียนใหม่ได้ว่า

$$\Pi^{e}_{HRs} = \sum_{I=1}^{NL} \int_{V^{eI}} [-\frac{1}{2} \hat{\underline{\sigma}}^{I^T} S^{I} \hat{\underline{\sigma}}^{I} + \hat{\underline{\sigma}}^{I^T} (D\underline{u}^{I}_{q})]dV - \int_{S_{\sigma}^{eI}} \underline{\bar{T}}^{I^T} \underline{u}^{I}_{q} dS \qquad (3.1.1.1\text{-}5)$$

จากสมการพลังงานข้างต้นจะเห็นว่าจะไม่มีการกระจัดส่วนเพิ่มปรากฏอยู่เลยทำให้ชิ้นส่วนที่ได้จากสมการนี้ยังคงเป็นไปตามแบบจำลองที่เข้ากันได้ (compatible model) โดยที่ความเค้นที่สมมตินั้นต้องเข้ากันได้กับสมการที่ 3.1.1.1-2 เท่านั้น ในการหาความเค้นส่วนอันดับสูงซึ่งเข้ากันได้กับสมการที่ 3.1.1.1-2 นั้น ถ้าหากความเค้นส่วนอันดับสูงที่สมมติเริ่มต้นเป็น

$$\underline{\sigma}^{I}_{h} = [P^{I}_{1} \; P^{I}_{2}] \begin{Bmatrix} \underline{\beta}^{I}_{1} \\ \underline{\beta}^{I}_{2} \end{Bmatrix} \qquad (3.1.1.1\text{-}6)$$

เมื่อ P และ $\underline{\beta}$ คือเมตริกซ์การประมาณ และพารามิเตอร์ความเค้นตามลำดับ โดยที่สนามการกระจัดส่วนเพิ่มนั้นจะประมาณพารามิเตอร์ $\underline{\lambda}$ ด้วยฟังก์ชันสัณฐาน N_{λ} คือ

$$\underline{u}^{I}_{\lambda} = N_{\lambda} \underline{\lambda} \qquad (3.1.1.1\text{-}7)$$

ทำการแทนสมการที่ 3.1.1.1-6 และ 3.1.1.1-7 ลงในสมการที่ 3.1.1.1-2 จะได้ว่า

$$\underline{\lambda}^{T} [M^{I}_{1} \; M^{I}_{2}] \begin{Bmatrix} \underline{\beta}^{I}_{1} \\ \underline{\beta}^{I}_{2} \end{Bmatrix} = 0 \qquad (3.1.1.1\text{-}8)$$

เมื่อกำหนดให้

$$M^{I}_{1} = \int_{\partial V^{eI}} N^{T}_{\lambda} n P^{I}_{1} dS \quad \text{และ} \quad M^{I}_{2} = \int_{\partial V^{eI}} N^{T}_{\lambda} n P^{I}_{2} dS \qquad (3.1.1.1\text{-}8ก)$$

ทำการแปรผันสมการที่ 3.1.1.1-8 เทียบกับพารามิเตอร์ $\underline{\lambda}$ จะได้ว่าพารามิเตอร์ความเค้น $\underline{\beta}^{I}_{2}$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของพารามิเตอร์ความเค้น $\underline{\beta}^{I}_{1}$ ได้ดังนี้

$$\underline{\beta}^{I}_{2} = -M^{I^{-1}}_{2} M^{I}_{1} \underline{\beta}^{I}_{1} \qquad (3.1.1.1\text{-}9)$$

แทนสมการที่ 3.1.1.1-9 ลงในสมการที่ 3.1.1.1-6 ทำให้ความเค้นใหม่ $\hat{\underline{\sigma}}^{I}$ สามารถเขียนเป็น

$$\hat{\underline{\sigma}}^{I} = I_{5} \underline{\beta}^{I}_{c} + \hat{P}^{I}_{h} \underline{\beta}^{I}_{1} = \hat{P}^{I} \hat{\underline{\beta}}^{I} \qquad (3.1.1.1\text{-}10)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} \hat{P}^{I} &= [I_5 \ \hat{P}_h^I], \quad \hat{P}_h^I = P_1^I - P_2^I {M_2^I}^{-1} M_1^I \\ I_5 & \text{ คือ เมตริกซ์หนึ่งหน่วยขนาด 5x5} \\ \underline{\beta}_c &= [\beta_1 \ \beta_2 \ ..... \ \beta_5]^T \\ \hat{\underline{\beta}}^I &= \begin{Bmatrix} \underline{\beta}_c \\ \underline{\beta}_1^I \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.1.1\text{-}11)$$

จากหลักการข้างต้นจะเห็นว่า ${M_2^I}^{-1}$ นั้นจะต้องสามารถหาได้ ซึ่งกล่าวได้ว่าจะต้องมีการเลือกฟังก์ชันการประมาณ P_2^I ที่เหมาะสมนั้นเอง สนามการกระจัด $\underline{u}_q^I$ จะถูกประมาณจากค่าการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}$ คือ

$$\underline{u}^I{}_q = N_q^I \underline{q} \qquad (3.1.1.1\text{-}12)$$

โดยที่ความเครียดจากการกระจัด $\underline{u}_q^I$ สามารถหาได้จากความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างความเครียดและการกระจัดคือ

$$\underline{\varepsilon}^I = D\underline{u}_q^I = DN_q^I \underline{q} = B_q^I \underline{q} \qquad (3.1.1.1\text{-}13)$$

เมื่อแทนสมการที่ 3.1.1.1-11 – 3.1.1.1-13 ลงในสมการที่ 3.1.1.1-5 จะได้ว่า

$$\Pi_{HRs}^e = \sum_{I=1}^{NL} \left(-\frac{1}{2} \underline{\beta}^{I^T} H^I \underline{\beta}^{I^T} + \underline{\beta}^{I^T} G^I \underline{q} - F^{eI^T} \underline{q}\right) \qquad (3.1.1.1\text{-}14)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} H^I &= \int_{V^{eI}} \hat{P}^{I^T} S^I \hat{P}^I dV \\ G^I &= \int_{V^{eI}} \hat{P}^{I^T} B_q^I dV \\ F^{eI^T} &= \int_{S_\sigma^{eI}} \underline{\overline{T}}^{I^T} N_q^I dS \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.1.1\text{-}14\text{ก})$$

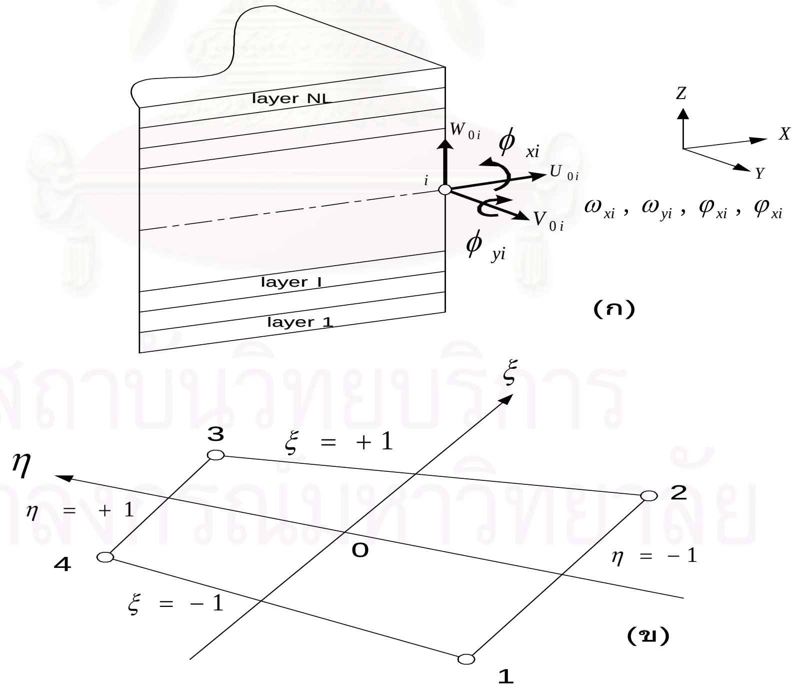
จากสมการที่ 3.1.1.1-14 อาศัยหลักการแปรผันเทียบกับ $\underline{\beta}^{I}$ ก็จะได้เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนชิ้นที่ e ในโครงสร้างที่ซ้อนเป็นชั้นคือ

$$K_{HRs}{}^{e} = \sum_{I=1}^{NL} k_{HRs}^{I} = \sum_{I=1}^{NL} G^{I^{T}} H^{I^{-1}} G^{I} \qquad (3.1.1.1\text{-}15)$$

เมื่อทำการรวมเมตริกซ์สติฟเนส และเมตริกซ์แรงกระทำที่ขั้วของทั้งระบบเข้าด้วยกันก็จะได้สมการดังแสดงในสมการที่ 2.1.1-10 และเมื่อใส่สภาวะเงื่อนไขการกระจัดที่ขอบลงในระบบสมการ แล้วทำการหาค่าการกระจัดที่ไม่ทราบค่า $\underline{q}$ ซึ่งสามารถนำค่าการกระจัดดังกล่าวไปคำนวณหาความเครียด และความเค้นได้ต่อไป

3.1.1.2.การสมมุติสนามตัวแปร

จากหลักการแปรผันข้างต้นจะมีการสมมุติสนามการกระจัด ร่วมกับสนามความเค้นโดยหากพิจารณาชิ้นส่วนแผ่นพื้นแบบชั้นที่ประกอบด้วย NL ชั้นซึ่งแต่ละชั้นเชื่อมกันโดยสมบูรณ์ (perfectly bonded) ดังแสดงในรูปที่ 3.1.1.1-1



รูปที่ 3.1.1.1-1 ระบบพิกัดของชิ้นส่วนแบบชั้น (ก) ที่ขั้ว i ของชิ้นส่วนแบบชั้น (ข) ระบบพิกัดธรรมชาติ

จากการอาศัยผลเฉลยช่วงยืดหยุ่นสามมิติ (three-dimensional elastic solution) โดย พากาโน(Pagano) [15, 17] พบว่าการเพิ่มส่วนกำลังอันดับสาม และฟังก์ชันวกเวียนสำหรับการกระจัดในระนาบ u และ v น่าจะสามารถทำให้มีการกระจายของการกระจัด และความเค้นที่ถูกต้องแม่นยำขึ้น ทั้งนี้ส่วนที่เพิ่มเข้ามานี้ก็ยังมีส่วนสำคัญในการจำลองพฤติกรรมการบิดงอ (warping) ของแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้น จากข้างต้นสามารถเขียนการกระจายของการกระจัดตลอดความหนาของโครงสร้างแบบชั้นได้ดังนี้

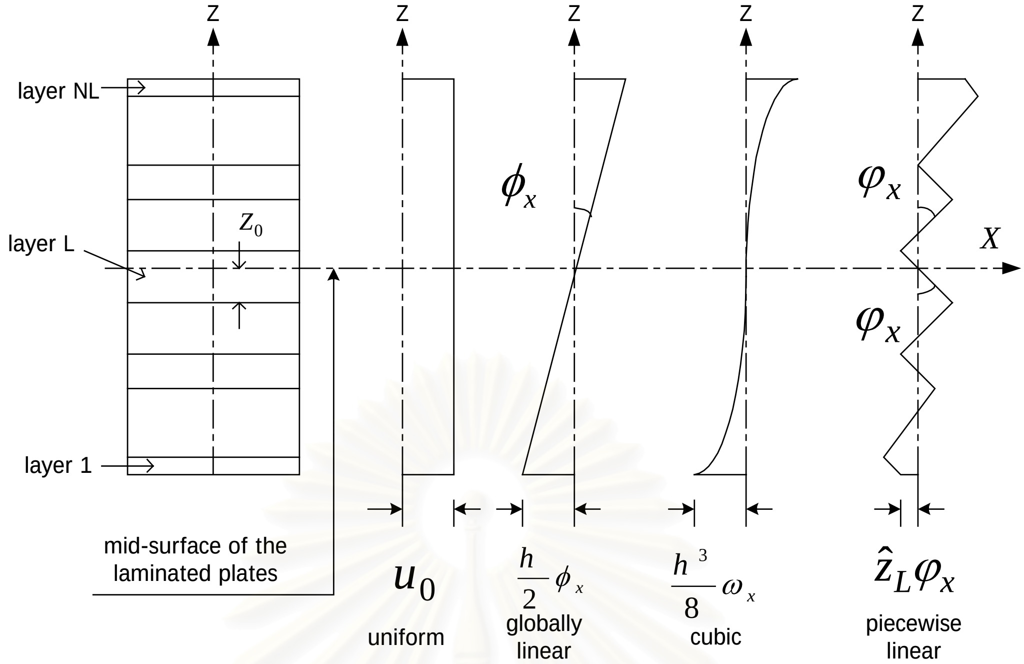
$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_q \\ v_q \end{Bmatrix}^I &= \begin{Bmatrix} u_o \\ v_0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{Bmatrix} + \hat{z} \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \\ w_q^I &= w_0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.1.1\text{-}16)$$

เมื่อตัวยก I จะหมายถึงชั้นลำดับที่ I , u_0, v_0 และ w_0 การกระจัดที่ระนาบกลาง, ϕ_x และ ϕ_y คือมุมหมุนตั้งฉากของระนาบกลางของโครงสร้างแบบชั้น, ω_x และ ω_Y คือพารามิเตอร์ของฟังก์ชันกำลังสาม และ φ_x และ φ_y คือมุมหมุนตั้งฉากของแต่ละชั้น(ฟังก์ชันวกเวียน) โดยที่ตัวแปรไม่ทราบค่าต่างๆเหล่านี้จะเป็นฟังก์ชันของพิกัดธรรมชาติ ξ, η เท่านั้นเมื่อใช้ฟังก์ชันสัณฐานแบบไอโซพาราเมตริก โดยที่รูปร่างของแต่ละฟังก์ชันนั้นได้แสดงในรูปที่ 3.1.1.1-2 ซึ่งหากให้ระนาบกลางของโครงสร้างแบบชั้นมีตำแหน่งอยู่ในแผ่นพื้นชั้นที่ L จะสามารถเขียน $\hat{z}$ ได้ว่า

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^{I-1} (-1)^i h_i + (-1)^I (1+\zeta) \frac{h_I}{2} - \hat{z}_L \qquad (3.1.1.1\text{-}17)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\hat{z}_L = \sum_{i=1}^{L-1} (-1)^i h_i + (-1)^L z_0 \qquad (3.1.1.1\text{-}17ก)$$



รูปที่ 3.1.1.1-2 การกระจัดในระนาบของทฤษฎีอันดับสูงที่มีฟังก์ชันวกเวียน

กำหนดให้ z_o คือระยะระหว่างระนาบกลางของโครงสร้างแบบชั้นกับผิวล่างของแผ่นพื้นชั้นที่ L ดังแสดงในรูปที่ 3.1.1.1-2 เมื่อ h_i คือความหนาของแผ่นพื้นชั้นที่ i และ ζ คือพิกัดธรรมชาติของแต่ละชั้นซึ่งมีค่าระหว่าง -1 ถึง +1 ที่ผิวบน และผิวล่างของชั้นนั้นๆตามลำดับ

โดยทั่วไปแล้วการเรียงตัวของแผ่นพื้นแต่ละชั้นนั้นจะมีสมมาตรกับระนาบกลางของโครงสร้างแบบชั้น ทำให้พจน์ของกำลังสองในสมการที่ 3.1.1.1-16 สำหรับการกระจัดในระนาบนั้นสามารถที่จะละทิ้งได้ในกรณีดังกล่าว แต่อย่างไรก็ตามพจน์ดังกล่าวอาจจำเป็นต้องมีหากต้องใช้วิเคราะห์โครงสร้างแบบชั้นที่ไม่มีสมมาตรกับระนาบกลางของโครงสร้างแบบชั้น

เฉพาะในแผ่นพื้นแบบชั้นเดียวพจน์ที่สอง และพจน์สุดท้ายจะมีลักษณะการประมาณที่เหมือนกัน แต่ในแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นนั้นพจน์ทั้งสองนี้จะให้ผลที่แตกต่างกันอย่างมาก ส่วนพจน์กำลังสามนั้นสามารถที่จะละทิ้งได้เพื่อลดจำนวนระดับขั้นความเสรี ทั้งนี้เพราะการกระจายของการกระจัดในระนาบของแผ่นพื้นแบบชั้นเดียวจะลักษณะเชิงเส้นตามความหนาของแผ่นพื้น นอกจากนี้ผลของฟังก์ชันกำลังสาม และฟังก์ชันวกเวียนสามารถละทิ้งได้ถ้าหากว่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนาของแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นมีค่ามากๆ จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นทำให้เลือกการกระจายของการกระจัดตามสมการที่ 3.1.1.1-16 สำหรับการวิเคราะห์โดยทั่วๆไป

สำหรับชิ้นส่วน 4 ขั้วซึ่งแสดงในรูปที่ 3.1.1.1-1 นั้นอาศัยหลักการไอโซพาราเมตริกที่จะใช้ฟังก์ชันสัณฐานแบบไอโซพาราเมตริกซึ่งเขียนอยู่ในพิกัดธรรมชาติ ξ และ η จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{ND=4} N_j x_j \quad \text{และ} \quad y = \sum_{j=1}^{ND=4} N_j y_j \\ N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned}\right\} \quad (3.1.1.1\text{-}18)$$

จากสมการที่ 3.1.1.1-16 และ 3.1.1.1-18 จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\underline{u}_q^I = N_q^I \underline{q} = [\breve{N}_{q1}^I \ \breve{N}_{q2}^I \ ..... \ \breve{N}_{q4}^I] \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_4 \end{Bmatrix} \qquad (3.1.1.1\text{-}19)$$

จำนวนการกระจัดที่ขั้วทั้งหมดของชิ้นส่วนแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น 1 ชิ้นส่วนซึ่งประกอบด้วยแผ่นพื้น NL ชั้น มี 36 ค่าซึ่งไม่ขึ้นกับจำนวนชั้นของแผ่นพื้นเมื่อ $\underline{q}_i$ คือการกระจัดสามัญที่ขั้ว j เขียนได้ว่า

$$\underline{q}_i = [u_{0i} \ v_{0i} \ w_{0i} \ \phi_{Xj} \ \phi_{Yj} \ \omega_{Xj} \ \omega_{Yj} \ \varphi_{Xj} \ \varphi_{Yi}]^T \qquad (3.1.1.1\text{-}20)$$

โดยที่เมตริกซ์ $\breve{N}_{qj}^I$ คือ

$$\breve{N}_{qj}^I = \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 & zN_j & 0 & z^3N_j & 0 & \breve{z}N_j & 0 \\ 0 & N_j & 0 & 0 & zN_j & 0 & z^3N_j & 0 & \breve{z}N_j \\ 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.1.1.1\text{-}21)$$

สามารถเขียนความสัมพันธ์ในกรณีของแผ่นพื้นซึ่งจะมีพิกัดฉากในแนวตั้งฉาก Z อยู่ในแนวเดียวกับพิกัดธรรมชาติในแนวตั้งฉากของแผ่นพื้นแต่ละชั้น ζ

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x,_\xi & y,_\xi & 0 \\ x,_\eta & y,_\eta & 0 \\ 0 & 0 & z,_\zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad (3.1.1.1\text{-}22)$$

เมื่อกำหนดให้ $x,_{\xi}$ แทนการหาอนุพันธ์ของ x เทียบกับ ξ โดยที่ $J = \begin{bmatrix} x,_{\xi} & y,_{\xi} & 0 \\ x,_{\eta} & y,_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & z,_{\zeta} \end{bmatrix}$ และ $J_S = \begin{bmatrix} x,_{\xi} & y,_{\xi} \\ x,_{\eta} & y,_{\eta} \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = R \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \text{ เมื่อ } R = J^{-1} = \frac{1}{|J|}\begin{bmatrix} J_{33}(J_{22}) & J_{33}(-J_{12}) & 0 \\ J_{33}(-J_{21}) & J_{33}(J_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & |J_S| \end{bmatrix} \qquad (3.1.1.1\text{-}23)$$

โดยที่ J_{ij} คือ แถวที่ i หลักที่ j ของเมตริกซ์จาโคบี ในขณะที่ $|J|$ และ $|J_S|$ คือค่าตัวกำหนด (determinant)ของเมตริกซ์ J และ J_S ตามลำดับ

โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดตามทฤษฎี HSDT ที่เพิ่มฟังก์ชันวกเวียนสำหรับแต่ละชั้นของแผ่นพื้นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\underline{\varepsilon}^I = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_{XY} \\ \varepsilon_{YZ} \\ \varepsilon_{XZ} \end{Bmatrix}^I = [B_{q1}\, B_{q2}\, B_{q3}\, B_{q4}]^I \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \underline{q}_3 \\ \underline{q}_4 \end{Bmatrix} = B_q^I \underline{q} \qquad (3.1.1.1\text{-}24)$$

จากสมการข้างต้นสามารถเขียนเมตริกซ์ย่อย B_{qj}^I ได้ว่า

$$B_{qj}^I = \begin{bmatrix} N_{j,X} & 0 & 0 & zN_{j,X} & 0 & z^3 N_{j,X} & 0 & \hat{z}N_{j,X} & 0 \\ 0 & N_{j,Y} & 0 & 0 & zN_{j,Y} & 0 & z^3 N_{j,Y} & 0 & \hat{z}N_{j,Y} \\ N_{j,Y} & N_{j,X} & 0 & zN_{j,Y} & zN_{j,X} & z^3 N_{j,Y} & z^3 N_{j,X} & \hat{z}N_{j,Y} & \hat{z}N_{j,X} \\ 0 & 0 & N_{j,Y} & 0 & N_j & 0 & 3z^2 N_j & 0 & (-1)^I N_j \\ 0 & 0 & N_{j,X} & N_j & 0 & 3z^2 N_j & 0 & (-1)^I N_j & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.1.1.1\text{-}25)$$

โดยที่อนุพันธ์ของฟังก์ชันสัณฐานที่ขั้ว j เทียบกับพิกัดฉาก X และ Y สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ในสมการที่ 3.1.1.1-23 ตัวอย่างเช่น $N_{j,X} = R_{11}N_{j},_{\xi} + R_{12}N_{j},_{\eta}$ และ $N_{j,Y} = R_{21}N_{j},_{\xi} + R_{22}N_{j},_{\eta}$ เป็นต้น โดยที่อนุพันธ์ของฟังก์ชันสัณฐานเทียบกับพิกัดธรรมชาติในแนวระนาบคือ

$$\left.\begin{array}{llll} N_1,_{\xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) & & N_1,_{\eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) \\ N_2,_{\xi} = +\frac{1}{4}(1-\eta) & & N_2,\eta = -\frac{1}{4}(1+\xi) \\ N_3,_{\xi} = +\frac{1}{4}(1+\eta) & & N_3,_{\eta} = +\frac{1}{4}(1+\xi) \\ N_4,_{\xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta) & & N_4,_{\eta} = +\frac{1}{4}(1-\xi) \end{array}\right\} \quad (3.1.1.1\text{-}26)$$

นอกจากนี้ยังกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉาก z และพิกัดธรรมชาติ ζ ของแผ่นพื้นชั้นที่ I คือ

$$z = \sum_{i=1}^{I} h_i - (1-\zeta)\frac{h_I}{2} - \frac{H}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{h_I}{2} \quad (3.1.1.1\text{-}27)$$

หลักการเลือกการฟังก์ชันกระจัดส่วนเพิ่ม [24] ($\underline{u}_{\lambda}^{I}$) นั้นจะต้องเป็นอิสระจากฟังก์ชันการกระจัดที่เข้ากันได้ $\underline{u}_{q}^{I}$ ซึ่งในกรณีนี้ $\underline{u}_{q}^{I}$ จะใช้ฟังก์ชันสัณฐานแบบไอโซพาราเมตริกก็จะทำให้การกระจัดส่วนเพิ่มนี้จะเป็นการกระจัดส่วนอันดับสูงของการกระจัดรวม $\underline{u}^{I}$ การกระจัดส่วนเพิ่มนั้นจะถูกสมมติโดย

$$\underline{u}_{\lambda}^{I} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \xi^2 & \eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 & \eta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_6 \end{Bmatrix} \quad (3.1.1.1\text{-}28)$$

ในขณะที่ความเค้นเริ่มแรกที่สมมติขึ้นคือ

$$\underline{\sigma}^{I} = \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \\ \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \end{Bmatrix}^{I} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_5 \end{Bmatrix}^{I} + [P_1^I \ P_2^I] \begin{Bmatrix} \beta_6 \\ \vdots \\ \beta_{30} \\ \beta_{31} \\ \vdots \\ \beta_{36} \end{Bmatrix}^{I} = \underline{\beta}_c^I + [P_1^I \ P_2^I] \begin{Bmatrix} \underline{\beta}_1^I \\ \underline{\beta}_2^I \end{Bmatrix} \quad (3.1.1.1\text{-}29)$$

เมื่อกำหนดให้

$$P_1^I = \begin{bmatrix} \eta & \zeta & \xi\zeta & \eta\zeta & \zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \zeta & \xi\zeta & \eta\zeta & \zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \zeta & \xi\zeta & \eta\zeta & \zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \zeta & \xi\zeta & \eta\zeta & \zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \zeta & \xi\zeta & \eta\zeta & \zeta^2 \end{bmatrix}$$

$$P_2^I = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \quad (3.1.1.1\text{-}29ก)$$

หลักการสมมติความเค้นเริ่มแรกนั้น จากที่การกระจัดมีการประมาณค่าในช่วงแบบเชิงเส้น (bilinear interpolation) จึงเลือกที่จะใช้ความเค้นมีการกระจายเชิงเส้นที่ครบถ้วนในพิกัดระนาบ ξ และ η นอกจากนี้ความเครียดที่คำนวณจากการกระจัดในสมการที่ 3.1.1.1-16 นั้นมีกำลังสองของ ζ ดังนั้นจึงเลือกความเค้นให้มีพจน์ ζ^2 ในสมการที่ 3.1.1.1-29ก ทั้งนี้ต้องไม่ลืมว่าเมตริกซ์ P_2^I นั้นต้องทำการเลือกอย่างระมัดระวังเพื่อที่เมตริกซ์ M_2^{-1} สามารถหาค่าได้ตามสมการที่ 3.1.1.1-9 โดยที่จำนวนของพารามิเตอร์ $\underline{\lambda}$ และพารามิเตอร์ความเค้นต้องเป็นไปตามสมการคือ $\dim(\underline{\beta}_2^I) = \dim(\underline{\lambda})$ เพื่อที่จะสามารถขจัดพารามิเตอร์ $\underline{\beta}_2^I$ ได้ตามสมการที่ 3.1.1.1-2 ดังนั้นความเค้นสุดท้ายที่ได้ก็จะประกอบด้วยพารามิเตอร์ $\underline{\beta}_c^I$ และ $\underline{\beta}_1^I$ ตามที่เสนอโดยเพียนและวู[13] ซึ่งจะเป็นไปตามที่เพียนและวูได้เสนอ คือ $\dim(\hat{\underline{\beta}}^I) = \dim(\underline{q}) - r = 36 - 6 = 30$ จากสมการที่ 3.1.1.1-22 – 3.1.1.1-23 จะสามารถเขียนการอินทิเกรตเชิงตัวเลขของสมการที่ 3.1.1.1-14ก ได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} H^I &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^{I^T} S^I P^I \left|J\right| d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ G^I &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P^{I^T} B_q^I \left|J\right| d\xi\, d\eta\, d\zeta \end{aligned}\right\} \quad (3.1.1.1\text{-}30)$$

$$F^{eI^T} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underline{\overline{T}}^{I^T} N_q^I \left|J_S\right| d\xi\, d\eta$$

โดยที่ในพจน์ของ F^{eI^T} นั้นในที่นี้แรงกระทำภายนอกที่ทราบค่า $\underline{\overline{T}}$ เป็นแรงที่กระทำในแนวตั้งฉากของระนาบของโครงสร้าง (แรงขนานแกนพิกัด Z) จึงทำให้ $dS = |J_S| d\xi\, d\eta$

3.1.2 ชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วนจากหลักการจิง-เลียว

ชิ้นส่วนพันทางสามารถบังคับความต่อเนื่องของความเค้นให้เข้ากันได้กับสภาวะที่ขอบของโครงสร้างได้ด้วยการสมมติสนามความเค้น แต่การสร้างชิ้นส่วนพันทางนั้นจะใช้เวลานานในการหาพารามิเตอร์ความเค้น ดังนั้นวิธีพันทางแบบบางส่วนจึงเป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่จะแก้ไขข้อบกพร่องข้างต้นได้ โดยที่วิธีนี้จะทำการสมมติสนามความเค้นเฉพาะส่วนของหน่วยแรงเฉือนตั้งฉากซึ่งจะทำให้พารามิเตอร์ความเค้นมีจำนวนลดลงไปมาก

ในที่นี้ชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วนที่ทำการศึกษาจะมีทั้งหมด 3 ชิ้นส่วนคือชิ้นส่วน 8 ขั้วที่เสนอโดยยองและโช [38] ซึ่งใช้สนามการกระจัดตามทฤษฎี HSDT จะกำหนดชื่อชิ้นส่วนนี้ว่า 8PhHs ส่วนอีกสองชิ้นส่วนที่เหลือจะเป็นชิ้นส่วน 8 ขั้ว และชิ้นส่วน 4 ขั้วซึ่งใช้สนามการกระจัดตามทฤษฎี HSDT ซึ่งมีฟังก์ชันวกเวียนเหมือนกับชิ้นส่วน 4HeHsz ในที่นี้จะกำหนดชื่อชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วนทั้งสองชิ้นส่วนหลังว่า 8PhHsz, 4PhHsz ตามลำดับ

3.1.2.1 หลักการแปรผัน

การที่จะทำการสร้างชิ้นส่วนนั้นโครงสร้างที่ต้องการวิเคราะห์จะต้องถูกแบ่งออกเป็น NE ชิ้นส่วน ดังนั้นสามารถเขียนสมการพลังงานตามหลักการจิง-เลียวของชิ้นส่วนชิ้นที่ e ซึ่งประกอบด้วยแผ่นพื้นทั้งหมด NL ชั้น คือ

$$\begin{aligned}\Pi^e \;=\; & \sum_{I=1}^{NL}\Big[\int_{V^{eI}}\Big(\frac{1}{2}\underline{q}^T {B_f^I}^T C_f^I B_f^I \underline{q} + {\underline{\beta}_t^I}^T {P_t^I}^T B_t \underline{q} - \frac{1}{2}{\underline{\beta}_t^I}^T {P_t^I}^T S_t^I P_t^I \underline{\beta}_t^I \\ & - \int_{S_\sigma^{eI}} {\underline{\overline{T}}^I}^T N^I \underline{q}\, dS\Big]\end{aligned} \qquad (3.1.2.1\text{-}1)$$

โดยที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่ดูง่ายได้ดังนี้

$$\Pi^e = \sum_{I=1}^{NL}\Big[\frac{1}{2}\underline{q}^T k_f^I \underline{q} + {\underline{\beta}_t^I}^T G_t^I \underline{q} - \frac{1}{2}{\underline{\beta}_t^I}^T H_t^I \underline{\beta}_t^I - {\underline{F}^{eI}}^T \underline{q}\, dS\Big] \qquad (3.1.2.1\text{-}2)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} k_f^I &= \int_{V^{eI}} {B_f^I}^T C_f^I B_f^I\, dV \\ G_t^I &= \int_{V^{eI}} {P_t^I}^T B_t^I\, dV \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.2.1\text{-}3)$$

$$H_t^I = \int_{V^{eI}} P_t^{I^T} S_t^I P_t^I dV$$
$$\underline{F}^{eI^T} = \int_{S_\sigma^{eI}} \underline{\overline{T}}^{I^T} N^I dS$$

การอินทิเกรตที่แสดงข้างต้นจะทำในแต่ละชั้นของชิ้นส่วนในโครงสร้างเนื่องจากคุณสมบัติของวัสดุจะแตกต่างกันไปในแต่ละชั้นนั้นเอง นอกจากนี้ยังกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉาก z และพิกัดธรรมชาติ ζ ของแผ่นพื้นชั้นที่ I ดังในสมการที่ 3.1.1.1-27 และจากสมการที่ 3.1.1.1-22 – 3.1.1.1-23 สามารถเขียนเมตริกซ์ในสมการที่ 3.1.2.1-3 ของชิ้นส่วนชิ้นที่ e สำหรับชั้นที่ I ในรูปของการอินทิเกรตเชิงตัวเลขได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} k_f^I &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} B_f^{I^T} C_f^I B_f^I \left|J\right| (h_I/t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta_I \\ G_t^I &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} P_t^{I^T} B_t^I \left|J\right| (h_I/t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ H_t^I &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} P_t^{I^T} S_t^I P_t^I \left|J\right| (h_I/t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ \underline{F}^{eI^T} &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \underline{\overline{T}}^{I^T} N^I \left|J_S\right| d\xi\, d\eta \end{aligned}\right\} \quad (3.1.2.1\text{-}4)$$

หลังจากได้ดำเนินการรวมทุกชั้นในชิ้นส่วนหนึ่งๆดังแสดงในสมการที่ 3.1.2.1-2 สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\Pi^e = \frac{1}{2}\underline{q}^T k_f \underline{q} + \underline{\beta}_t^T G_t \underline{q} - \frac{1}{2}\underline{\beta}_t^T H_t \underline{\beta}_t - \underline{F}^{e^T}\underline{q} \quad (3.1.2.1\text{-}5)$$

โดยที่

$$\left.\begin{aligned} k_f &= \sum_{I=1}^{NL} k_f^I = \sum_{I=1}^{NL} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} B_f^{I^T} C_f^I B_f^I \left|J\right| d\xi d\eta d\zeta \\ G_t &= \sum_{I=1}^{NL} G_t^I = \sum_{I=1}^{NL} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} P_t^{I^T} B_t^I \left|J\right| d\xi d\eta d\zeta \\ H_t &= \sum_{I=1}^{NL} H_t^I = \sum_{I=1}^{NL} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} P_t^{I^T} S_t^I P_t^I \left|J\right| d\xi d\eta d\zeta \\ \underline{F}^e &= \sum_{I=1}^{NL} F^{eI} = \sum_{I=1}^{NL} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} N^T \underline{\overline{T}}^I \left|J_S\right| d\xi d\eta \end{aligned}\right\} \quad (3.1.2.1\text{-}6)$$

โดยที่ในที่นี้เมตริกซ์ G_t^I และ H_t^I จะทำการรวมตามพารามิเตอร์ความเค้นเฉือน $\underline{\beta}_t^I$ เป็นเมตริกซ์ G_t และ H_t ซึ่งมีขนาด $n_\sigma \times n_u$ และ $n_\sigma \times n_\sigma$ ตามลำดับอันเป็นผลจากการสมมุติความเค้นเฉือนที่ต่อเนื่องที่ขอบของแผ่นพื้นแต่ละชั้นตลอดความหนาของโครงสร้างดังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป จากการทำการแปรผันของสมการที่ 3.1.2.1-5 เทียบกับ $\underline{\beta}_t$ จะได้

$$G_t \underline{q} - H_t \underline{\beta}_t = 0 \quad (3.1.2.1\text{-}7)$$

ซึ่งเขียนใหม่ได้ว่า

$$\underline{\beta}_t \;=\; H_t^{-1} G_t \underline{q} \qquad (3.1.2.1\text{-}8)$$

แทนสมการที่ 3.1.2.1-8 ลงในสมการที่ 3.1.2.1-5 จะได้

$$\Pi^e \;=\; \frac{1}{2} \underline{q}^T k_{JL} \underline{q} - \underline{F}^{e^T} \underline{q} \qquad (3.1.2.1\text{-}9)$$

โดยที่

$$k_{JL} \;=\; k_f + k_t \qquad (3.1.2.1\text{-}9\text{ก})$$

$$k_t \;=\; G_t^T H_t^{-1} G_t \qquad (3.1.2.1\text{-}9\text{ข})$$

จากการทำการแปรผันของสมการที่ 3.1.2.1-9 เทียบกับ $\underline{q}$ จะได้

$$k_{JL} \underline{q} \;=\; \underline{F}^e \qquad (3.1.2.1\text{-}10)$$

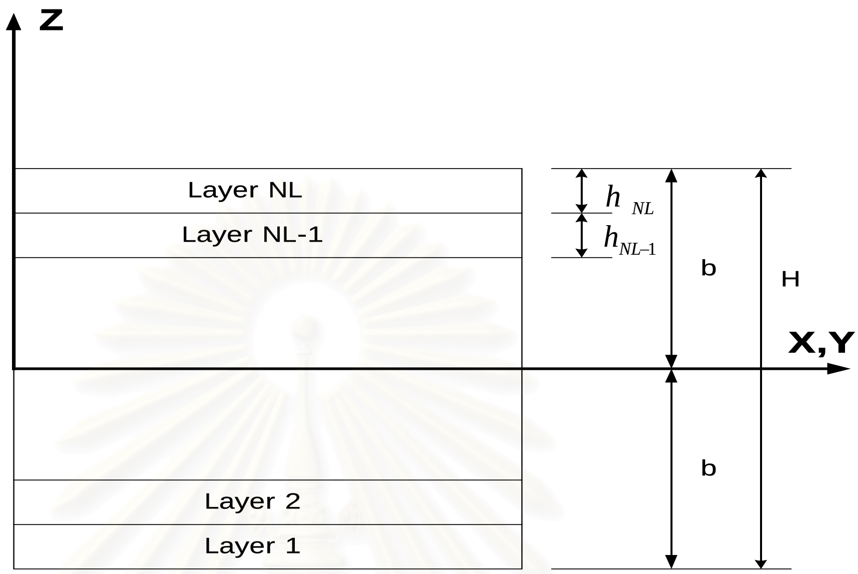
จากสมการที่ 3.1.2.1-6ก จะเห็นว่าสติฟเนสแรงดัดของชิ้นส่วน k_f ที่ได้จะเหมือนกับสติฟเนสแรงดัดของชิ้นส่วนแบบการกระจัด ในขณะที่สมการที่ 3.1.2.1-9ข จะแสดงสติฟเนสแรงเฉือนของชิ้นส่วน k_t ซึ่งก็จะเหมือนกับของชิ้นส่วนพันทาง ทั้งนี้ในการคำนวณหาความเค้นนั้นจะแบ่งออกเป็นสองแบบคือ ความเค้นในส่วนของแรงดัดจะหาจากความเครียดซึ่งคำนวณจากการกระจัดคือ $\sigma_f^{\ I} = C_f^{\ I} (B_f^{\ I} q^I)$ ส่วนความเค้นในส่วนของแรงเฉือนสามารถคำนวณจากพารามิเตอร์ความเค้นเฉือนตั้งฉาก $\underline{\beta}_t$ จากสมการที่ 3.1.2.1-8 ซึ่งจะได้ความเค้นเฉือนตั้งฉากของชั้นที่ I คือ $\sigma_t^{\ I} = P_t^{\ I} \underline{\beta}_t^{\ I}$ ทั้งนี้เมื่อทำการรวมเมตริกซ์สติฟเนส และเมตริกซ์แรงกระทำที่ขั้วของทั้งระบบเข้าด้วยกันก็จะได้สมการที่ 2.1.1-10 และเมื่อใส่สภาวะเงื่อนไขการกระจัดที่ขอบลงในระบบสมการ แล้วทำการหาค่าการกระจัดที่ไม่ทราบค่า $\underline{q}$ ก็สามารถนำค่าการกระจัดดังกล่าวไปคำนวณหาความเครียด และความเค้นได้ต่อไป

3.1.2.2 การสมมุติสนามตัวแปร

ในที่นี้จะแสดงรายละเอียดเฉพาะชิ้นส่วน 8PhHs ซึ่งใช้การกระจัดตามทฤษฎี HSDT ส่วนชิ้นส่วน 8PhHsz และ 4PhHsz นั้นดูรายละเอียดได้จากภาคผนวก หากพิจารณาโครงสร้างแบบชั้นที่ประกอบด้วย NL ชั้น โดยที่แต่ชั้นจะขนานกับแกนพิกัด X และ Y ที่ตำแหน่งกึ่งกลางชั้นของโครงสร้างดังแสดงในรูปที่ 3.1.2.2-1 ซึ่งการกระจัดที่จุดใดๆในโครงสร้างแบบชั้นจะถูกกระจายในรูปยกกำลังของพิกัดความหนาดังนี้

$$\left.\begin{aligned} u^I &= u = u_0 + z\phi_X + z^2\kappa_X + z^3\omega_X \\ v^I &= v = v_0 + z\phi_Y + z^2\kappa_Y + z^3\omega_Y \\ w^I &= w = w_0 + z\phi_Z + z^2\kappa_Z \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.2.2\text{-}1)$$

u , v และ w เป็นการกระจัดในแกนพิกัด x , y และ z ตามลำดับ ทั้งนี้การที่ w ถูกสมมติให้กระจายแค่กำลังสองของ z เพื่อทำให้ความเครียดเฉือนจากการกระจัดในระนาบ u และ v จะมีกำลังเท่ากับความเครียดที่คิดจาก w



รูปที่ 3.1.2.2-1 โครงสร้างแบบชั้นตามทฤษฎี HSDT

ในส่วนของการสมมติสนามความเค้นเฉือนตั้งฉากนั้นจะถูกสมมติให้เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ความเค้น($\underline{\beta}_t$) โดยที่แรงเฉือนตั้งฉากของโครงสร้างชั้นที่ I สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sigma_t^I = P_t^{\ I} \, \underline{\beta}_t^{\ I} \qquad (3.1.2.2\text{-}2)$$

จากที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นจะสามารถเขียนความเค้นเฉือนตั้งฉากของชั้นที่ I ได้เป็น

$$\underline{\sigma}_t^I = \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^I \\ \tau_{xz}^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{tY}^{\ I} & 0 \\ 0 & P_{tX}^{\ I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\beta}_{YZ}^I \\ \underline{\beta}_{XZ}^I \end{Bmatrix} \qquad (3.1.2.2\text{-}3)$$

ในการวิเคราะห์โครงสร้างโดยใช้การสมมติสนามความเค้นนั้น สนามความเค้นที่เลือกจะยังไม่ต้องเข้ากันได้กับสมการเงื่อนไขใดๆก่อน แต่จะต้องมีการกระจายที่มีสมมาตรของพจน์กำลังอันดับสอง(symmetric second-order tensor field) จากที่เป็นชิ้นส่วน 8 ขั้วซึ่งสามารถหาอนุพันธ์อันดับสองได้ในแต่ละพิกัด ดังนั้นเมตริกซ์ $P_{tY}^{\ I}$ และ $P_{tX}^{\ I}$ ในสมการที่ 3.1.2.2-3 สามารถสร้างตามกระบวนการดังนี้

1) จากที่สนามการกระจัดเป็นแบบอันดับสูง(higher-order displacement field) ในสมการที่ 3.1.2.2-1 ทำให้ความเครียดที่ได้ควรประกอบด้วย

$$(1, \zeta, \zeta^2)$$

2) จากการใช้ชิ้นส่วน 8 ขั้วทำให้สนามความเครียดในระนาบ (in-plane stress field) ประกอบด้วย

$$(1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^2\eta, \xi\eta^2)$$

3) จาก 2 ข้อข้างต้น และการหาอนุพันธ์ของความเค้นในระนาบเทียบกับ ξ และ η ทำให้สนามความเค้นเฉือนตั้งฉากประกอบด้วยพจน์ต่อไปนี้

$$[(1, \xi, \eta), \zeta(1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2), \zeta^2(1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2)]$$

จากการที่สนามความเค้นเฉือนตั้งฉากนั้นจะถูกสมมติในแต่ละชั้นของโครงสร้าง ทำให้ ζ ซึ่งมีค่าอยู่ –1 และ +1 ที่ขอบล่าง และขอบบนของแผ่นพื้นแต่ละชั้นตามลำดับ โดยจะมีส่วนเกี่ยวข้องในเงื่อนไขที่จะต้องใช้บังคับในการสมมติสนามความเค้นคือ

- เงื่อนไขความต่อเนื่องของความเค้นระหว่างชั้น(interface traction continuity condition)

$$[\tau_{YZ}^{I}, \tau_{XZ}^{I}]_{\zeta=1} = [\tau_{YZ}^{I+1}, \tau_{XZ}^{I+1}]_{\zeta=-1}$$

- เงื่อนไขความเค้นที่ขอบโครงสร้าง(traction-free boundary condition)

$$[\tau_{YZ}^{1}, \tau_{XZ}^{1}]_{\zeta=-1} = [\tau_{YZ}^{NL}, \tau_{XZ}^{NL}]_{\zeta=1} = 0$$

จากข้อกำหนดต่างๆข้างต้นสามารถเขียนสนามความเค้นทั่วไปที่สำหรับชั้นใดๆของโครงสร้างแบบชั้นได้ดังนี้

(1) ความเค้นในสมการที่ 3.1.2.2-3 จะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนดังนี้

$$\tau_{YZ}^{I} = P_{ty}{}^{I}\,\underline{\beta}_{YZ}^{I} \quad \text{และ} \quad \tau_{XZ}^{I} = P_{tX}{}^{I}\,\underline{\beta}_{XZ}^{I}$$

โดยที่ $P_t{}^I$, $\underline{\beta}_{YZ}^{I}$ และ $\underline{\beta}_{XZ}^{I}$ ถูกกำหนดไว้ดังต่อไปนี้

<u>สำหรับชั้นล่างสุด :</u>

$$P_{tY}^{1} = P_{tX}^{1} = [(1-\zeta^2)(1, \xi, \eta), \zeta(1+\zeta)(1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2)] \qquad \text{(3.1.2.2-3}$$

ก)

$\underline{\beta}_{YZ}^{1} = \underline{\beta}_{i}{}^{T}$ เมื่อ i=1,2,3,…..9

$\underline{\beta}_{XZ}^{1} = \underline{\beta}_{j}{}^{T}$ j=9(NL -1)+3+ i เมื่อ $NL \geq 2$ และ i=1,2,3,…..9

สำหรับชั้นบนสุด :

$$P_{tY}^{NL} = P_{tX}^{NL} = [-\zeta(1-\zeta)(1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2), (1-\zeta^2)(1, \xi, \eta)] \qquad \text{(3.1.2.2-3}$$

ข)

$\underline{\beta}_{YZ}^{NL} = \underline{\beta}_{k}{}^{T}$ k=9(NL -2)+3+ i เมื่อ $NL \geq 2$ และ i=1,2,3,…..9

$\underline{\beta}_{XZ}^{NL} = \underline{\beta}_{l}{}^{T}$ l=9(2NL -3)+6+ i เมื่อ $NL \geq 2$ และ i=1,2,3,…..9

สำหรับชั้นใดๆที่อยู่ระหว่างชั้นล่างสุด และชั้นบนสุด :

$$P_{tY}^{I} = P_{tX}^{I} = [-\zeta(1-\zeta)(1,\xi,\eta,\xi^2,\xi\eta,\eta^2),(1-\zeta^2)(1,\xi,\eta), \zeta(1+\zeta)(1,\xi,\eta,\xi^2,\xi\eta,\eta^2)] \quad (3.1.2.2\text{-}3$$

ค)

$\underline{\beta}_{YZ}^{I} = \underline{\beta}_{f}^{T}$ f=9(I -2)+3+ i เมื่อ $I \geq 2$ และ i=1,2,3,…..15

$\underline{\beta}_{XZ}^{I} = \underline{\beta}_{g}^{T}$ g=9(NL -1)+9(I -2)+6+ i เมื่อ $NL \geq 2$, $I \geq 2$ และ i=1,2,3,…..15

(2) กระบวนการรวม(assembly process) ก็จะทำเช่นเดียวกับกระบวนการรวมของชิ้นส่วน ทั้งนี้จากการใช้ความเค้นที่สมมติข้างต้นจะทำให้มีพารามิเตอร์ความเค้นที่ใช้ในการสร้างชิ้นส่วนเพียง (18NL -12)

ในส่วนของชิ้นส่วน 8PhHsz และ 4PhHsz จะแสดงรายละเอียดในภาคผนวกโดยที่ชิ้นส่วน 8PhHsz จะใช้สนามความเค้นเฉือนตั้งฉากเดียวกันกับชิ้นส่วน 8PhHs ซึ่งได้กล่าวไปข้างต้น ในขณะที่สนามการกระจัดจะใช้ตามสมการที่ 3.1.1.1-16 เช่นเดียวกับชิ้นส่วน 4HeHsz

3.1.3 ชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรด้วยวิธีทัณฑกรรม

ชิ้นส่วนพันทางในที่นี้จะเป็นชิ้นส่วน 4 ข้้วซึ่งใช้การกระจัดตามสมการที่ 3.1.1.1-16 โดยอาศัยหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรด้วยวิธีทัณฑกรรมดังนั้นจึงกำหนดให้ใช้ชื่อว่า 4HpHsz ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

3.1.3.1 หลักการแปรผัน

จากที่ได้กล่าวในหัวข้อ 2.2.4.1 เพื่อให้ความเค้นซึ่งสมมุติโดยไม่ต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุลมีสมดุลในแง่การแปรผันจึงมีการใช้วิธีทัณฑกรรมของการสมดุลเพิ่มเข้าไปในหลักการเฮลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ซึ่งวิธีการดังกล่าวได้เสนอโดยวูและชวง[48] โดยสามารถเขียนหลักการดังกล่าวที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นโดยละพจน์ของแรงตัวสำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e ซึ่งจะได้ว่า

$$\Pi_{HR*}^{e} = \sum_{I=1}^{NL}[\int_{V^{eI}} \{-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^{I^T} S^I \underline{\sigma}^I + \underline{\sigma}^{I^T}(D\underline{u}^I) - \frac{\chi}{2}\int_{V^{eI}}(D^T\underline{\sigma}^I)^T(D^T\underline{\sigma}^I)dV\} - \int_{S_\sigma^{eI}} \overline{\underline{T}}^{I^T}\underline{u}^I dS] \quad (3.1.3.1\text{-}1)$$

ในที่นี้จะไม่สมมุติการกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_{\lambda}^{I}$ ทำให้ได้ว่า $\underline{u}^{I} = \underline{u}_{q}^{I}$ ในทำนองเดียวกัน หากสมมติความเค้นตามสมการที่ 2.2.3.1-2 การกระจัดตามสมการที่ 2.2.1-2 และความเครียดจาการกระจัดตามสมการที่ 2.2.1-3 จะเขียนได้ใหม่ว่า

$$\Pi_{HR*}^{e} = \sum_{I=1}^{NL}[-\frac{1}{2}\underline{\beta}^{I^T} H^{I}\underline{\beta}^{I} + \underline{\beta}^{I^T} G^{I}\underline{q} - \frac{\chi}{2}\underline{\beta}^{I^T} H_{p}^{I}\underline{\beta}^{I} - F^{eI^T}\underline{q}] \qquad (3.1.3.1\text{-}2)$$

โดยกำหนดให้เมตริกซ์ H^{I} และเมตริกซ์ G^{I} ได้แสดงไว้ในสมการที่ 3.1.1.1-30

และ

$$H_{p}^{I} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(D^{T}P^{I})^{T}(D^{T}P^{I})\left|J\right|d\xi d\eta d\zeta \qquad (3.1.3.1\text{-}3)$$

ทำการแปรผันสมการที่ 3.1.3.1-2 เทียบกับ $\underline{\beta}^{I}$ จะได้ความสัมพันธ์คือ $\underline{\beta}^{I} = (H^{I} + \chi H_{p}^{I})^{-1}G^{I}\underline{q}$ และเมื่อแทนลงในสมการที่ 3.1.3.1-2 จะได้เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน k_{HR*} เป็น

$$k_{HR*} = \sum_{I=1}^{NL} G^{I^T}(H^{I} + \chi H_{p}^{I})^{-1}G^{I} \qquad (3.1.3.1\text{-}4)$$

3.1.3.2 การสมมุติสนามตัวแปร

การสมมติสนามการกระจัดจะเหมือนกับชิ้นส่วน 4HeHsz ส่วนการสมมติสนามความเค้นนั้นจะเหมือนกับในภาคผนวก ข.

3.1.4 ชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้ว

ชิ้นส่วนพันทางในส่วนนี้จะมีทั้งชิ้นส่วนพันทางที่ใช้การกระจัดชั้นเดียวตามสมการที่ 3.1.1.1-16 คือชิ้นส่วน 4HbHsz1 และ 4HbHsz2 ชิ้นส่วนพันทางที่ใช้สนามการกระจัดหลายชั้นแบบบางส่วนคือ 4HbPl และชิ้นส่วนพันทางที่ใช้สนามการกระจัดแบบรวมคือ 4HbMd1 และ 4HbMd2

3.1.4.1 หลักการแปรผัน

จากที่ได้กล่าวในหัวข้อ 2.2.4.1 ในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น หากละพจน์ของแรงตัวจะสามารถเขียนหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์ที่ดัดแปรแล้วสำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e ซึ่งการกระจัดที่เข้า

กันได้ของชั้นที่ I คือ $\underline{u}_q^I$ จะเป็นประมาณการกระจัดที่ขั้วของชั้นที่ I คือ $\underline{q}^I$ ด้วยเมตริกซ์ N_q^I และการกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_\lambda^I$ เป็นประมาณพารามิเตอร์ส่วนเพิ่ม $\underline{\lambda}$ ด้วยเมตริกซ์ N_λ^I ได้ดังนี้

$$\Pi_{mHR}^e = \sum_{I=1}^{NL} [\int_{V^{eI}} [-\frac{1}{2} \underline{\sigma}^{I^T} S^I \underline{\sigma}^I + \underline{\sigma}^{I^T} (D\underline{u}^I{}_q) - (D^T \underline{\sigma}^I)^T \underline{u}^I_\lambda] dV - \int_{S_\sigma^{eI}} \underline{\overline{T}}^{I^T} \underline{u}^I{}_q dS] \tag{3.1.4.1-1}$$

จากสมการที่ 3.1.4.1-1 สามารถเขียนได้ใหม่ว่า

$$\Pi_{mHR}^e = \sum_{I=1}^{NL} [-\frac{1}{2} \underline{\beta}^{I^T} H^I \underline{\beta}^I + \underline{\beta}^{I^T} G^I \underline{q}^I - \underline{\beta}^{I^T} R^I \underline{\lambda} - \underline{F}^{eI^T} \underline{q}^I] \tag{3.1.4.1-2}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} H^I &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} P^{I^T} S^I P^I \, |J| d\xi \, d\eta \, d\zeta \\ G^I &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} P^{I^T} (DN_q^I) \, |J| d\xi \, d\eta \, d\zeta \\ R^I &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (D^T P^I)^T N_\lambda^I \, |J| d\xi \, d\eta \, d\zeta \end{aligned}\right\} \tag{3.1.4.1-3}$$

$$\underline{F}^{eI^T} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \underline{\overline{T}}^{I^T} N_q^I \, |J_S| d\xi \, d\eta$$

ดำเนินการแปรผันหลักการ Π_{mHR}^e เทียบกับ $\underline{\beta}^I$ และ $\underline{\lambda}^I$ ได้ว่า

$$\underline{\beta}^I = H^{I^{-1}} (G^I \underline{q}^I - R^I \underline{\lambda}^I) \tag{3.1.4.1-4}$$

และ

$$R^{I^T} \underline{\beta}^I = 0 \tag{3.1.4.1-5}$$

ทำการกำจัดพารามิเตอร์ความเค้น $\underline{\beta}^I$ โดยแทนสมการที่ 3.1.4.1-4 ลงในสมการที่ 3.1.4.1-2 แล้วทำการแปรผันเทียบกับ $\underline{\lambda}^I$ จะได้ความสัมพันธ์

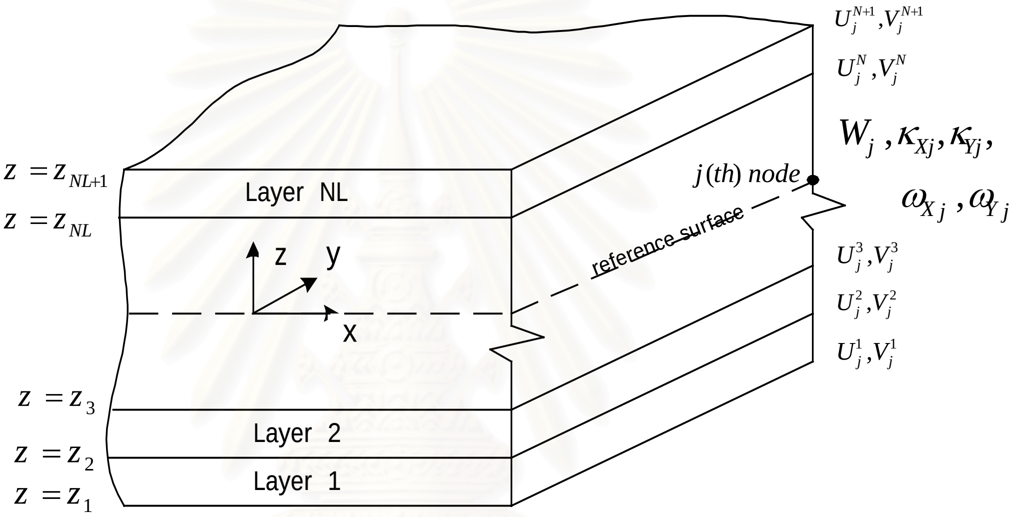
$$\underline{\lambda}^I = (R^{I^T} H^{I^{-1}} R^I)^{-1} R^{I^T} H^{I^{-1}} G^I \underline{q}^I \tag{3.1.4.1-6}$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้นจะได้เมตริกซ์สติฟเนส k_{mHR} ของชิ้นส่วนดังนี้

$$k_{mHR} = \sum_{I=1}^{NL} G^{I^T} H^{I^{-1}} G^{I} - G^{I^T} H^{I^{-1}} R^{I} (R^{I^T} H^{I^{-1}} R^{I})^{-1} R^{I^T} H^{I^{-1}} G^{I} \qquad (3.1.4.1\text{-}7)$$

3.1.4.2 การสมมุติสนามตัวแปร

ในที่นี้จะยกตัวอย่างสนามการกระจัดแบบรวมซึ่งเป็นสนามการกระจัดแบบหลายชั้น [30] ผสมกับแบบชั้นเดียวของชิ้นส่วน 4HbMd2 โดยจะสมมติให้สนามการกระจัดของชิ้นส่วนในชั้นที่ I ขั้วที่ j มีการกระจัด U_j^I และ V_j^I เป็นแบบสนามการกระจัดแบบหลายชั้น ส่วนมุมหมุน κ_{Xj} , κ_{Yj} , ω_{Xj} และ ω_{yj} นั้นจะเป็นสนามการกระจัดชั้นเดียว ดังนั้นสามารถเขียนได้ดังนี้



รูปที่ 3.1.4.2-1 สนามการกระจัดและพิกัดฉากตามทฤษฎี PLWT

$$\left.\begin{aligned}
u^I &= \sum_{j=1}^{4} N_j(\xi,\eta)\{[\frac{1}{2}(1-\zeta)u_j^I + \frac{1}{2}(1+\zeta)u_j^{I+1}] + z^2\kappa_{Xj} + z^3\,\omega_{Xj}\} \\
v^I &= \sum_{j=1}^{4} N_j(\xi,\eta)\{[\frac{1}{2}(1-\zeta)v_j^I + \frac{1}{2}(1+\zeta)v_j^{I+1}] + z^2\kappa_{Yj} + z^3\omega_{Yj}\} \\
w^I &= \sum_{j=1}^{4} N_j(\xi,\eta)W_j
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1.4.1\text{-}8)$$

โดยที่ ξ และ η คือค่าพิกัดธรรมชาติในแนวระนาบ ส่วน ζ คือค่าพิกัดธรรมชาติในแนวตั้งฉากของแผ่นพื้นแต่ละชั้นซึ่งมีค่า –1 ถึง +1 ในชั้นนั้นๆ ซึ่งจะได้ว่า $z = \frac{1}{2}[(z_i + z_{i+1}) + \zeta(z_{i+1} - z_i)]$

$$\underline{q}^I = [\underline{q}_1, \underline{q}_2, ..., \underline{q}_4]^T \qquad (3.1.4.1\text{-}9)$$

เมื่อ $\underline{q}_j = [u_j^1, u_j^2, ..., u_j^{N+1}, v_j^1, v_j^2, ..., v_j^{N+1}, \kappa_{Xj}, \kappa_{Yj}, \omega_{Xj}, \omega_{Yj}, w_j]^T$ ตามสนามการกระจัดที่สมมติในสมการที่ 3.1.4.1-1 หรือ $\underline{u}_q^I = N_q^I \underline{q}^I$ โดย N_q^I คือเมตริกซ์ประมาณการกระจัดซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$N_q^I = [\hat{N}_{q1}^I, \hat{N}_{q2}^I, ..., \hat{N}_{q4}^I] \qquad (3.1.4.1-10)$$

โดยที่

$$\hat{N}_j^I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\zeta)N_j & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_j & 0 & 0 & z^2N_j & 0 & z^3N_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\zeta)N_j & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_j & 0 & z^2N_j & 0 & z^3N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \qquad (3.1.4.1-11)$$

$\underline{\varepsilon}^I = [\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_{XY}, \gamma_{YZ}, \gamma_{XZ}]^T = B_q^I \underline{q}^I = (D\hat{N}_q^I)\underline{q}^I$ เมื่อ D คือเมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์ จาก $B_q^I = [B_{q1}^I, B_{q2}^I, ..., B_{q4}^I]$ จะได้

$$B_{qj}^I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,X} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,X} & 0 & 0 & z^2N_{j,X} & 0 & z^3N_{j,X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,Y} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,Y} & 0 & z^2N_{j,Y} & 0 & z^3N_{j,Y} & 0 \\ \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,Y} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,Y} & \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,X} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,X} & z^2N_{j,Y} & z^2N_{j,X} & z^3N_{j,Y} & z^3N_{j,X} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_I}N_j & \frac{1}{h_I}N_j & 0 & 2zN_j & 0 & 3z^2N_j & N_{j,Y} \\ -\frac{1}{h_I}N_j & \frac{1}{h_I}N_j & 0 & 0 & 2zN_j & 0 & 3z^2N_j & 0 & N_{j,X} \end{bmatrix} \qquad (3.1.4.1-12)$$

เมื่อ $\frac{\partial}{\partial z} = (\frac{2}{h_I})\frac{\partial}{\partial \zeta}$ โดยที่ h_I คือ ความหนาของแผ่นพื้นชั้นที่ I ในที่นี้การสมมติสนามความเค้นนั้นจะเหมือนกับในภาคผนวก ข.

3.1.5 ชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้วร่วมกับวิธีทัณฑกรรม

จากชิ้นส่วนพันทางในหัวข้อ 3.1.4 ผู้วิจัยจึงได้เสนอชิ้นส่วน 4 ขั้วที่ใช้วิธีทัณฑกรรมเพื่อใช้ร่วมกับชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้วโดยชื่อของชิ้นส่วนนี้คือ 4HbpHsz ซึ่งใช้สนามการกระจัดตามสมการที่ 3.1.1.1-16 และสนามความเค้นจะใช้เหมือนกับชิ้นส่วน 4HbHsz2

3.1.5.1 หลักการแปรผัน

จากที่ได้กล่าวในหัวข้อ 3.1.3 และ 3.1.4 ซึ่งกล่าวถึงชิ้นส่วนพันทางที่ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนัก และการสมมุติการกระจัดส่วนเพิ่มตามลำดับ ทำให้เกิดความสนใจที่จะใช้สองวิธีการสร้างชิ้นส่วนพันทางข้างต้นร่วมกันเพื่อที่อาจจะได้ชิ้นส่วนพันทางที่มีคุณสมบัติที่ดียิ่งขึ้น

ในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นหากละพจน์ของแรงตัวจะสามารถเขียนหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์ที่ดัดแปรแล้วร่วมกับวิธีการถ่วงน้ำหนักสำหรับชิ้นส่วนชิ้นที่ e ซึ่งการกระจัดที่เข้ากันได้ของชั้นที่ I คือ $\underline{u}_q^I$ เป็นประมาณการกระจัดที่ขั้วของชั้นที่ I คือ $\underline{q}$ ด้วยเมตริกซ์ $\mathrm{N}_\mathrm{q}^\mathrm{I}$ และการกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_\lambda^I$ เป็นประมาณพารามิเตอร์ส่วนเพิ่ม $\underline{\lambda}$ ด้วยเมตริกซ์ $\mathrm{N}_\lambda^\mathrm{I}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\Pi^e_{mHR*} = \sum_{I=1}^{NL}\{ \int_{V^{eI}} [-\frac{1}{2}\underline{\sigma}^{I^T} S^I \underline{\sigma}^I + \frac{\chi}{2}(D^T\underline{\sigma}^I)^T(D^T\underline{\sigma}^I) + \underline{\sigma}^{I^T}(D^T\underline{u}_q^I) \\ -(D^T\underline{\sigma}^I)^T\underline{u}_\lambda^I]dv - \int_{S_\sigma^{eI}} \underline{\overline{T}}^{I^T}\underline{u}_q^I dS \}\end{aligned} \qquad (3.1.5.1\text{-}1)$$

จากสมการที่ 3.1.5.1-1 สามารถเขียนได้ใหม่ว่า

$$\Pi^e_{mHR*} = \sum_{I=1}^{NL}[-\frac{1}{2}\underline{\beta}^{I^T}\hat{H}^I\underline{\beta}^I + \underline{\beta}^{I^T}G^I\underline{q}^I - \underline{\beta}^{I^T}R^I\underline{\lambda} - \underline{F}^{eI^T}\underline{q}] \qquad (3.1.5.1\text{-}2)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned}\hat{H}^I &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}[P^{I^T}S^IP^I + \chi(D^TP^I)^T(D^TP^I)]\,|J|\,d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ G^I &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}P^{I^T}(DN_q^I)\,|J|\,d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ R^I &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(D^TP^I)^TN_\lambda^I\,|J|\,d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ \underline{F}^{eI^T} &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\underline{\overline{T}}^{I^T}N_q^I\,|J_S|\,d\xi\, d\eta\end{aligned}\right\} \qquad (3.1.5.1\text{-}3)$$

ดำเนินการแปรผันหลักการ Π^e_{mHR*} เทียบกับ $\underline{\beta}^I$ และ $\underline{\lambda}^I$ ได้ว่า

$$\underline{\beta}^I = \hat{H}^{I^{-1}}(G^I\underline{q} - R^I\underline{\lambda}^I) \qquad (3.1.5.1\text{-}4)$$

และ $$R^{I^T} \underline{\beta}^I = 0 \qquad (3.1.5.1\text{-}5)$$

ทำการกำจัดพารามิเตอร์ความเค้น $\underline{\beta}^I$ โดยแทนสมการที่ 3.1.5.1-4 ลงในสมการที่ 3.1.5.1-2 แล้วทำการแปรผันเทียบกับ $\underline{\lambda}^I$ จะได้ความสัมพันธ์

$$\underline{\lambda}^I = (R^{I^T} \hat{H}^{I^{-1}} R^I)^{-1} R^{I^T} \hat{H}^{I^{-1}} G^I \underline{q} \qquad (3.1.5.1\text{-}6)$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้นจะได้เมตริกซ์สติฟเนส k_{mHR*} ของชิ้นส่วนดังนี้

$$k_{mHR*} = \sum_{I=1}^{NL} G^{I^T} \hat{H}^{I^{-1}} G^I - G^{I^T} \hat{H}^{I^{-1}} R^I (R^{I^T} \hat{H}^{I^{-1}} R^I)^{-1} R^{I^T} \hat{H}^{I^{-1}} G^I \qquad (3.1.5.1\text{-}7)$$

3.1.5.2 การสมมติสนามตัวแปร

การสมมติสนามการกระจัดจะเหมือนกับชิ้นส่วน 4HeHsz ส่วนการสมมติสนามความเค้นนั้นสามารถดูรายละเอียดได้จากภาคผนวก ก.

3.2 ชิ้นส่วนผสม

3.2.1 ชิ้นส่วนผสมจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์(โดยสมมุติการกระจัดส่วนเพิ่ม)

ชิ้นส่วน 4 และ 9 ขั้วซึ่งกำหนดชื่อเป็น 4MiFs และ 9MiFs ตามลำดับนี้ได้ถูกเสนอโดยปินสกี และแจสติ [40] เพื่อใช้วิเคราะห์แผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นซึ่งให้ค่าการกระจัด และความเค้นที่แม่นยำ การสร้างชิ้นส่วนนั้นจะอาศัยหลักการพลังงานของเฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์บนพื้นฐานของทฤษฎีแผ่นพื้นของมินด์ลิน ความเค้นต่างๆจะถูกสมมติโดยไม่ขึ้นแก่กัน และยังไม่ต้องเข้ากันได้กับสมการสมดุลก่อนด้วย นอกจากนี้การกระจัดก็จะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนของการกระจัดที่ขั้ว และส่วนของการกระจัดที่เพิ่มเข้าไปซึ่งจะมีบทบาทสำคัญในความแม่นยำของชิ้นส่วนนี้ โดยที่การกระจัดที่เพิ่มเข้าไปนี้จะช่วยขจัดปัญหาการยึดแน่นเนื่องจากแรงเฉือน และเพิ่มความแม่นยำของความเค้นในแง่ของหลักการแปรผัน

3.2.1.1 หลักการแปรผัน

สมการพลังงานของเฮลลิงเกอร์-ไรสเนอร์สำหรับชิ้นส่วนแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นสามารถเขียนได้ว่า

$$\Pi_R = \sum_{e=1}^{NE}\sum_{I=1}^{NL}\{ -\frac{1}{2}\int_{V^{eI}}[\,\underline{\sigma}^{I^T} S^I \underline{\sigma}^I + \underline{\sigma}^{I^T}(D\underline{u}_q + D\underline{u}_\lambda)]dV - \int_{S_\sigma^I}(\underline{u}_q + \underline{u}_\lambda)^T \underline{\overline{T}} dS \;\} \tag{3.2.1.1-3}$$

โดยที่ V^{eI} คือปริมาตรของชิ้นส่วนของชั้นที่ I และ $V^e = \sum_{I=1}^{NL} V^{eI}$ เมื่อ $\underline{\sigma}^I$ และ S^I คือความเค้น และเมตริกซ์สอดคล้องกันของชั้นที่ I ส่วน S_σ^I คือขอบเขตของชิ้นส่วนที่มีแรงกระทำของชั้นที่ I

โดยจาการสมมุติสนามการกระจัดแบบชั้นเดียว และสนามความเครียดซึ่งจะกล่าวในหัวข้อ 3.2.1.2 โดยอาศัยหลักความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียดเขียนได้ว่า

$$\sigma^I = C^I \underline{\varepsilon} = C^I E \underline{\alpha} = P^I(\xi,\eta,\varsigma)\underline{\alpha} \tag{3.2.1.1-2}$$

ในสมการที่ 3.2.1.1-2 สมการพลังงานในสมการที่ 3.2.1.1-1 เขียนใหม่เป็น

$$\Pi = \sum_{e=1}^{NE}\left[-\frac{1}{2}\underline{\alpha}^T H \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^T G \underline{q} + \underline{\alpha}^T R \underline{\lambda} - \underline{F}_1^T \underline{q} - \underline{F}_2^T \underline{\lambda}\right] \tag{3.2.1.1-3}$$

เมื่อ

$$H = \sum_{I=1}^{NL} H^I \;,\; G = \sum_{I=1}^{NL} G^I \;,\; R = \sum_{I=1}^{NL} R^I \tag{3.2.1.1-4}$$

$$\underline{F}_1^T q = \int_{S_\sigma^I} \underline{\overline{T}}^T \underline{u}_q dS \;,\; \underline{F}_2^T \lambda = \int_{S_\sigma^I} \underline{\overline{T}}^T \underline{u}_\lambda dS \tag{3.2.1.1-5}$$

$$\left.\begin{aligned} H^I &= \int_{V^{eI}} P^{I^T} S^I P^I dV \\ G^I &= \int_{V^{eI}} P^{I^T} B_q dV \\ R^I &= \int_{V^{eI}} P^{I^T} B_\lambda dV \end{aligned}\right\} \tag{3.2.1.1-6}$$

และจากหลักการคงที่ของพลังงานเมื่อคิดเทียบกับ $\underline{\alpha}$ และ $\underline{\lambda}$ จะได้ว่า

$$\underline{\alpha} = H^{-1}(G\underline{q} + R\underline{\lambda}) \tag{3.2.1.1-7}$$

$$R^T \underline{\alpha} = \underline{F}_2 \tag{3.2.1.1-8}$$

จากสมการที่ 3.2.1.1-7 และ 3.2.1.1-8 สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\underline{\lambda} = -(R^T H^{-1} R)^{-1}(R^T H^{-1} G\underline{q} - \underline{F}_2) \tag{3.2.1.1-9}$$

แทนสมการที่ 3.2.1.1-9 ลงในสมการที่ 3.2.1.1-7 จะได้

$$\underline{\alpha} = H^{-1}\tilde{G}\underline{q} + H^{-1}R(R^T H^{-1}R)^{-1}\underline{F}_2 \qquad (3.2.1.1\text{-}10)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\tilde{G} = G - R(R^T H^{-1}R)^{-1}R^T H^{-1}G \qquad (3.2.1.1\text{-}11)$$

ทำการแทนสมการที่ 3.2.1.1-9 และ 3.2.1.1-10 ลงในสมการที่ 3.2.1.1-3 จะได้

$$\Pi = \sum_{e=1}^{NE}[\frac{1}{2}\underline{q}^T k_{HR}\underline{q} - \underline{F}^{e^T}\underline{q}] \qquad (3.2.1.1\text{-}12)$$

เมื่อ k_{HR} คือเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน โดยที่

$$k_{HR} = \tilde{G}^T H^{-1}\tilde{G} \qquad (3.2.1.1\text{-}13)$$

และ

$$\underline{F}^e = \underline{F}_1 - G^T H^{-1}R(R^T H^{-1}R)^{-1}\underline{F}_2 \qquad (3.2.1.1\text{-}14)$$

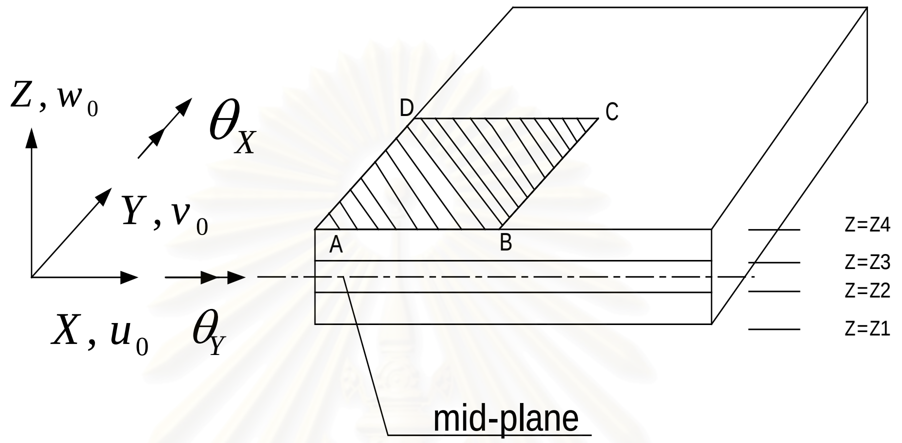
จากข้างต้นทำการแปรผันสมการที่ 3.2.1.1-12 เทียบกับ $\underline{q}$ สามารถเขียนสมการได้ว่า $k\underline{q} = \underline{F}$

3.2.1.2 การสมมุติสนามตัวแปร

พิจารณาแผ่นที่มีครึ่งหนึ่งของความหนาเท่ากับ $\frac{t}{2}$ และประกอบด้วย NL ชั้นซึ่งยึดติดกันอย่างสมบูรณ์ ระนาบกลางอ้างอิงของแผ่นพื้น (ระนาบ XY) จะถูกแบ่งออกเป็น NE ชิ้นส่วน โดยแต่ละชิ้นส่วนจะมีระนาบ Ω^e ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ว่า $V^e = \Omega^e \times [-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$ เมื่อ V^e คือปริมาตรของแต่ละชิ้นส่วน สนามการกระจัดจะแบ่งออกสองส่วนคือ ส่วนที่ประมาณโดยการกระจัดที่ขั้ว $\underline{u}_q$ และส่วนที่ประมาณโดยการกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_\lambda$ สนามการกระจัดจะถูกประมาณด้วยระบบพิกัดธรรมชาติ ξ และ η

บนระนาบ Ω^e และ ς ตลอดความหนาของชิ้นส่วน $[-\frac{t}{2},\frac{t}{2}]$ ซึ่งไม่เหมือนกับ ζ ที่จะเป็นพิกัดธรรมชาติในแนวตั้งฉากของแต่ละชั้นของแผ่นพื้น

ในที่นี้ทฤษฎีการกระจัดแผ่นพื้นของมินด์ลินจะมีเครื่องหมาย และทิศทางที่ต่างไปจากที่กล่าวในสมการที่ 2.3.1-3 และรูปที่ 2.3.1-3 โดยได้แสดงการกระจัด $\underline{u} = \underline{u}_q + \underline{u}_\lambda$ ในที่นี้คือ



รูปที่ 3.2.1.2-1 แผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นตามการกระจัดแผ่นมินด์ลิน

$$\left.\begin{aligned} u_q &= u_{0q}(\xi,\eta) - \frac{t}{2}\varsigma\theta_{Xq}(\xi,\eta) \\ v_q &= v_{0q}(\xi,\eta) - \frac{t}{2}\varsigma\theta_{Yq}(\xi,\eta) \\ w_q &= w_{0q}(\xi,\eta) \end{aligned}\right\} \quad (3.2.1.2\text{-}1)$$

และ

$$\left.\begin{aligned} u_\lambda &= u_{0\lambda}(\xi,\eta) - \frac{t}{2}\varsigma\,\theta_{X\lambda}(\xi,\eta) \\ v_\lambda &= v_{0\lambda}(\xi,\eta) - \frac{t}{2}\varsigma\theta_{Y\lambda}(\xi,\eta) \\ w_\lambda &= w_{0\lambda}(\xi,\eta) \end{aligned}\right\} \quad (3.2.1.2\text{-}2)$$

เมื่อ u_0 และ v_0 คือการกระจัดที่ระนาบกลางในทิศทางแกน X และ Y ตามลำดับ และ θ_x และ θ_y คือมุมหมุนดังแสดงในรูปที่ 3.2.1.2-1 โดยที่ฟังก์ชันที่ใช้ประมาณการกระจัดส่วนเพิ่ม $\underline{u}_\lambda$ จะเลือกฟังก์ชันที่มีค่าเป็นศูนย์ที่ขอบของชิ้นส่วน ซึ่งจากเหตุผลดังกล่าวนี้จึงเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันฟองสบู่(bubble function) โดยจะทำการประมาณพารามิเตอร์ฟองสบู่(bubble parameter) ทั้งนี้จำนวนของตัวแปรไม่ทราบค่าก็จะไม่ขึ้นกับจำนวนชั้นของแผ่นพื้นอีกด้วย

จากการที่การกระจัดในระนาบนั้นถูกประมาณด้วยการกระจัดที่ระนาบกลาง และมุมหมุนซึ่งสมมติให้เท่ากันในทุกชั้นของแผ่นพื้นตามทฤษฎีแผ่นของมินด์ลินทำให้ความเค้นในแต่ละชั้นนั้นก็จะถูกประมาณด้วยพารามิเตอร์เดียวกันตลอดความหนาของแผ่นพื้นเช่นเดียวกัน ดังนั้นจึงทำการสมมติสนามความเครียดที่มีการประมาณตลอดความหนาของแผ่นพื้น และสามารถคำนวณความเค้นได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ทั้งนี้สนามความเครียดที่สมมุติขึ้น ($\underline{\varepsilon}$) จะต้องไม่สับสนกับความเครียดที่คำนวณจากสนามการกระจัด สนามความเครียด $\underline{\varepsilon}$ สำหรับชิ้นส่วนนี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta}(\xi,\eta) + \frac{t}{2}\varsigma\varepsilon^{b}_{\alpha\beta}(\xi,\eta) \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{t^{2}}{8}(1-\varsigma^{2})\,\varepsilon_{\alpha 3}(\xi,\eta) \\ \tilde{\varepsilon}_{33} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.2.1.2\text{-}4)$$

โดยที่ $\varepsilon_{\alpha\beta}$ และ $\varepsilon_{\alpha 3}$ จะถูกประกอบด้วยฟังก์ชันที่อยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติ ดังนั้นสามารถคำนวณความเค้นได้ดังนี้

$$\underline{\sigma}_f = \begin{Bmatrix} \sigma^I_{11} \\ \sigma^I_{22} \\ \sigma^I_{12} \end{Bmatrix} = C^I_f \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.2.1.2\text{-}5)$$

และ

$$\underline{\sigma}_t = \begin{Bmatrix} \sigma^I_{13} \\ \sigma^I_{23} \end{Bmatrix} = C^I_t \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.2.1.2\text{-}6)$$

เมื่อ C^I_f และ C^I_t คือเมตริกซ์ผกผันของ S^I ส่วนของแรงดัดและส่วนของแรงเฉือนตั้งฉากตามลำดับ โดยจะสังเกตว่าความเค้นในระนาบของแต่ละชั้นจะถูกสมมติให้มีการกระจายเป็นเชิงเส้นตลอดความหนาของแผ่นพื้น และยอมให้ความเค้นมีค่าไม่ต่อเนื่องที่รอยต่อระหว่างชั้น และยังไม่ต้องเข้ากันได้กับเงื่อนไขความต่อเนื่องของความเค้นตามพิกัดความหนา

ฟังก์ชันการกระจัด u_{0q}, v_{0q}, w_{0q} และ $\theta_{\alpha q}$ จะประมาณการกระจัดที่ขั้วด้วยฟังก์ชันสัณฐานแบบลากรองจ์(Largrangian shape function) ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} u_{0q} \\ v_{0q} \\ \theta_{Xq} \\ \theta_{Yq} \\ w_{0q} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{ND} N_j(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_{0q} \\ v_{0q} \\ \theta_{Xq} \\ \theta_{Yq} \\ w_{0q} \end{Bmatrix}_j \qquad (3.2.1.2\text{-}11)$$

เมื่อ ND คือจำนวนขั้วในแต่ละชิ้นส่วน, $N_j(\xi, \eta)$ คือฟังก์ชันสัณฐานสำหรับขั้วที่ j และ $\underline{u}_j$ คือค่าการกระจัดที่ขั้ว j ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกันฟังก์ชันการกระจัดฟองสบู่ $u_{0\lambda}$, $v_{0\lambda}$, $w_{0\lambda}$ และ $\theta_{\alpha\lambda}$ ก็จะสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} u_{0\lambda} \\ v_{0\lambda} \\ \theta_{X\lambda} \\ \theta_{Y\lambda} \\ w_{0\lambda} \end{Bmatrix} = \sum_{J=1}^{NB} \begin{Bmatrix} U_j^1 \\ U_j^2 \\ \Theta_j^1 \\ \Theta_j^2 \\ U_j^3 \end{Bmatrix} \underline{\lambda}_J \qquad (3.2.1.2\text{-}12)$$

เมื่อ NB คือจำนวนของพารามิเตอร์ฟองสบู่ โดยที่ฟังก์ชันฟองสบู่ U_j^α และ Θ_j^α นั้นจะมีค่าเป็นศูนย์ที่ขอบของชิ้นส่วนเพื่อความเข้ากันได้ของการกระจัดที่ขอบตามทฤษฎีแผ่นพื้นของมินด์ลิน อาศัยหลักการไอโซพาราเมตริก และตัวปฏิบัติการจาโคบีทำให้ความเครียดสามารถเขียนอยู่ในรูปของการกระจัดที่ขั้ว และพารามิเตอร์ฟองสบู่ได้ดังนี้

$$D\underline{u} = D\underline{u}_q + D\underline{u}_\lambda \qquad (3.2.1.2\text{-}13)$$

เมื่อ

$$D\underline{u}_q = B_q(\xi, \eta, \varsigma)\underline{q} \qquad (3.2.1.2\text{-}14)$$

และ

$$D\underline{u}_\lambda = B_\lambda(\xi, \eta, \varsigma)\underline{\lambda} \qquad (3.2.1.2\text{-}15)$$

จากสมการที่ 3.2.1.2-4 การหาความเค้นนั้นจำเป็นต้องเลือกฟังก์ชันการประมาณซึ่งจะทำการประมาณพารามิเตอร์ความเครียด ดังแสดงต่อไปนี้

$$\varepsilon_{11} = a(\xi, \eta)\underline{\alpha}_1 + \frac{t}{2}\varsigma\, b(\xi, \eta)\underline{\alpha}_2$$

$$\varepsilon_{12} = a(\xi,\eta)\underline{\alpha}_3 + \frac{t}{2}\varsigma\, b(\xi,\eta)\underline{\alpha}_4$$
$$2\varepsilon_{12} = a(\xi,\eta)\underline{\alpha}_5 + \frac{t}{2}\varsigma\, b(\xi,\eta)\underline{\alpha}_6 \qquad (3.2.1.2\text{-}16)$$
$$2\varepsilon_{23} = \frac{t^2}{8}(1-\varsigma^2)\, c(\xi,\eta)\underline{\alpha}_8$$
$$2\varepsilon_{13} = \frac{t^2}{8}(1-\varsigma^2)\, c(\xi,\eta)\underline{\alpha}_7$$
$$\tilde{\varepsilon}_{33} = 0$$

โดยที่ $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}]^T$ เมื่อ a, b และ c จะเป็นฟังก์ชันของระบบพิกัดธรรมชาติ ξ และ η

ฟังก์ชันความเค้น และฟังก์ชันฟองสบู่นั้นจะถูกเลือกโดยที่ไม่ให้ไปมีผลต่อเงื่อนไขที่จะทำให้ชิ้นส่วนต้องเสียเสถียรภาพไป นอกจากนี้ฟังก์ชันความเค้นก็จะถูกเลือกให้มีรูปแบบพิเศษในเฟลกซิบิลิตี้เมตริกซ์เพื่อประสิทธิภาพในการสร้างชิ้นส่วน คือสามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้ง่าย ในส่วนของฟังก์ชันฟองสบู่นั้นจะมีส่วนสำคัญในการขจัดปัญหาการยึดแน่นเนื่องจากแรงเฉือน โดยที่เฉพาะฟังก์ชัน U_3 และ Θ_α จะเป็นฟังก์ชันฟองสบู่ที่มีส่วนช่วยขจัดการยึดแน่นเนื่องจากแรงเฉือน ในขณะที่ฟังก์ชันฟองสบู่ U_1 และ U_2 จะไม่มีส่วนช่วยขจัดการยึดแน่นเนื่องจากแรงเฉือนนี้เลยแต่จะเพียงช่วยเพิ่มข้อจำกัดของสมดุล ดังนั้นในที่นี้ฟังก์ชันฟองสบู่ U_1 และ U_2 จะถูกสมมติให้มีค่าเป็นศูนย์ โดยที่การกระจัดฟองสบู่จะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} u_{0\lambda} \\ v_{0\lambda} \\ \theta_{X\lambda} \\ \theta_{Y\lambda} \\ w_{0\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix} \underline{\lambda} \qquad (3.2.1.2\text{-}17)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ชิ้นส่วน 4MiFs} & a = b = c = [1,\xi,\eta,\xi\eta] \\ & L_1 = L_2 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)[1,\xi,\eta] \\ \text{ชิ้นส่วน 9MiFs} & a = b = [1,\xi,\eta,\xi^2,\xi\eta,\eta^2,\xi^3,\xi^2\eta,\xi\eta^2,\eta^3] \\ & c = [1,\xi,\eta,\xi^2,\xi\eta,\eta^2,\xi^2\eta,\xi\eta^2] \\ & L_1 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)\xi^2\eta^2[1,\xi,\eta,\xi\eta] \\ & L_2 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)\xi^2\eta^2[\xi,\eta,\xi\eta] \end{array}\right\} \qquad (3.2.1.2\text{-}18)$$

บทที่ 4

ประสิทธิภาพของชิ้นส่วน

ในการตรวจสอบประสิทธิภาพของชิ้นส่วนนั้นจะทำการตรวจสอบในด้านต่างๆดังนี้คือ ความแม่นยำของการกระจัด ซึ่งแบ่งการทดสอบออกเป็นสามส่วน ส่วนแรกคือการลู่เข้าของผลเฉลยเมื่อทำการแบ่งขนาดของปัญหาด้วยขนาดของชิ้นส่วนที่ละเอียดขึ้น ส่วนที่สองจะทำการทดสอบความแม่นของการกระจัดเมื่ออัตราส่วนของความยาวต่อความหนาของแผ่นพื้นเปลี่ยนไป ส่วนสุดท้ายจะทำการทดสอบความแม่นยำของการกระจัดเมื่ออัตราส่วนของความกว้างต่อความยาวของแผ่นพื้นเปลี่ยนไป

สมบัติต่อมาที่ทำการทดสอบคือ ความแม่นของความเค้นโดยจะเปรียบเทียบกับผลเฉลย [15] ในกรณีที่เป็นการรองรับแบบธรรมดา ส่วนการรองรับแบบอื่นๆนั้นจะเปรียบเทียบกับผลจากการวิเคราะห์ด้วยชิ้นส่วนสามมิติจากโปรแกรม ANSYS 5.4 [74] สมบัติด้านต่อมาที่ทำการทดสอบคือประสิทธิภาพทางการคำนวณ โดยจะเปรียบเทียบจำนวนการดำเนินการ (operations) ที่ใช้ในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วน ถัดต่อมาจะเป็นการทดสอบความยืนยงของชิ้นส่วนซึ่งจะใช้ค่าเจาะจง (eigenvalues) ของชิ้นส่วนเป็นตัวตรวจสอบ และสมบัติสุดท้ายที่ทำการทดสอบคือ การทดสอบแบบหย่อม (patch test)

4.1 ความแม่นยำของการกระจัด

ตารางที่ 4.1-1 การใส่เงื่อนไขการกระจัดที่ขอบในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้น

ประเภทของการรองรับ	เงื่อนไขเมื่อ x = คงที่	เงื่อนไขเมื่อ y = คงที่
ธรรมดา (simple supports)	$v(y,z)=w(y,z)=0$	$u(x,z)=w(x,z)=0$
ยึดรั้ง (Clamped supports)	$u(y,z)=v(y,z)=w(y,z)=0$	$u(x,z)=v(x,z)=w(x,z)=0$
อิสระ (Free)	-	-
เส้นสมมาตร (Symmetric line)	$u(y,z)=0$	$v(x,z)=0$

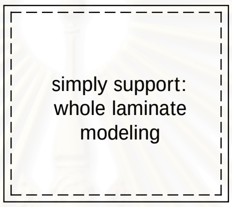
แถวล่างสุดของตารางที่ 4.1-1 เป็นเงื่อนไขที่ขอบของโครงสร้างแผ่นพื้นที่มีการวางตัวของวัสดุของแต่ละชั้นที่ตั้งฉากกัน (cross-ply) ซึ่งจะสามารถทำการวิเคราะห์โดยอาศัยหลักการสมมาตรซึ่งจะลดขนาดของปัญหาเหลือเพียง 1 ใน 4 ส่วน (quarter plate model) แต่หากว่าโครงสร้างแผ่นพื้นมีการวางตัวของวัสดุของแต่ละชั้นที่ไม่ตั้งฉากกัน (angle-ply) จะไม่สามารถทำการวิเคราะห์โดยลดอาศัยหลักการสมมาตรได้ แต่จะต้องทำการวิเคราะห์ปัญหาทั้งหมด (entire plate model) แทน รูปที่ 4.1-1(ก) และ 4.1-1(ข) ได้แสดงตัวอย่างการใส่เงื่อนไขที่ขอบของแผ่นพื้นที่มีการรองรับแบบธรรมดา (simple support) ในการวิเคราะห์แบบทั้งหมด

และแบบ 1 ใน 4 ส่วนในการศึกษาชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วนที่เสนอโดยยองและโช [38] ซึ่งมีสมการการกระจัดคือ

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + z\phi_X + z^2\kappa_X + z^3\omega_X \\ v &= v_0 + z\phi_Y + z^2\kappa_Y + z^3\omega_Y \\ w &= w_0 + z\phi_Z + z^2\kappa_Z \end{aligned}\right\} \qquad (4.1\text{-}1)$$

$$u_0 = \phi_X = \kappa_X = \omega_X = 0$$
$$w_0 = \phi_Z = \kappa_Z = 0$$

$$v_0 = \phi_Y = \kappa_Y = \varpi_Y = 0 \qquad\qquad v_0 = \phi_Y = \kappa_Y = \varpi_Y = 0$$
$$w_0 = \phi_Z = \kappa_Z = 0 \qquad\qquad w_0 = \phi_Z = \kappa_Z = 0$$

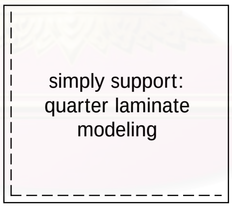


$$u_0 = \phi_X = \kappa_X = \omega_X = 0$$
$$w_0 = \phi_Z = \kappa_Z = 0$$

(ก)

$$v_0 = \phi_Y = \kappa_Y = \omega_Y = 0$$

$$v_0 = \phi_Y = \kappa_Y = \omega_Y = 0 \qquad\qquad u_0 = \phi_X = \kappa_X = \omega_X = 0$$
$$w_0 = \phi_Z = \kappa_Z = 0$$



$$u_0 = \phi_X = \kappa_X = \omega_X = 0$$
$$w_0 = \phi_Z = \kappa_Z = 0$$

(ข)

รูปที่ 4.1-1 ตัวอย่างการใส่เงื่อนไขการกระจัดที่ขอบของแผ่นพื้นที่ถูกรองรับแบบธรรมดาในการวิเคราะห์ (ก) แบบทั้งหมด (ข) แบบ 1 ใน 4 ส่วน

ในที่นี้จะทำการทดสอบปัญหาที่มีการรองรับ 3 กรณีคือ

1) การรองรับแบบธรรมดา (SS) คือ โครงสร้างมีการรองรับแบบธรรมดาทั้ง 4 ด้าน
2) การรองรับแบบยึดรั้ง (CS) คือ โครงสร้างมีการรองรับแบบยึดรั้งทั้ง 4 ด้าน
3) การรองรับแบบอิสระ (FS) คือ โครงสร้างมีการรองรับแบบอิสระ 3 ด้านและการรองรับแบบยึดรั้ง 1 ด้าน

ส่วนค่าคงที่ของวัสดุที่ใช้ในการศึกษาในที่นี้มีดังนี้ : E_{11}/E_{22}=25, G_{12}=G_{13}=0.5E_{22}, G_{23}=0.2E_{22}, ν_{12} =0.25 โดยที่ในแต่ละชั้นของแผ่นพื้นมีการวางตัวของวัสดุของที่ตั้งฉากกัน โดยที่แผ่นพื้นชั้นนอกสุดจะเป็นแผ่นพื้นที่วางตัวเป็นมุม 0 องศาเทียบกับแกนพิกัด X

รูปแบบของโครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นที่ศึกษา

กรณีที่ 1 : แผ่นพื้นทุกชั้นมีความหนาเท่ากัน คือ $h_i = \dfrac{t}{NL}$

กรณีที่ 2 : แผ่นพื้นของชั้นที่มีการวางตัวเหมือนกันจะมีความหนาที่เท่ากันและรวมแล้วเท่ากับครึ่งหนึ่งของความหนาโครงสร้างแผ่นพื้นทุกชั้น ตัวอย่างเช่น โครงสร้างแผ่น 5 ชั้นแบบวางตั้งฉากกัน (cross-ply) ในกรณีที่ 2 จะได้ว่า

$h_1 = h_1 = h_1 = \dfrac{t\ /\ 2}{3}$ และ $h_2 = h_4 = \dfrac{t\ /\ 2}{4}$

4.1.1 การลู่เข้าของชิ้นส่วน

การทดสอบการลู่เข้าของชิ้นส่วนนั้น ในส่วนของปัญหาที่มีการรองรับแบบธรรมดา (SS) และการรองรับแบบยึดรั้ง (CS) จะทำการแบ่งปัญหาด้วยจำนวนชิ้นส่วนที่เพิ่มขึ้นดังในรูปที่ 4.1.1-1 เพื่อทดสอบการลู่เข้าของชิ้นส่วนซึ่งเป็นการแบ่งปัญหาแบบ 1 ใน 4 ส่วนโดยจะดำเนินการแบ่งดังนี้

- ชิ้นส่วน 4 ขั้วจะทำการแบ่งด้วยจำนวนชิ้นส่วน 4, 16, 36, 64, 100
- ชิ้นส่วน 8 ขั้ว หรือ 9 ขั้วจะทำการแบ่งด้วยจำนวนชิ้นส่วน 1, 4, 9, 16, 25

ส่วนในปัญหาที่มีการรองรับแบบอิสระ (FS) นั้นจะอาศัยหลักการสมมาตรช่วยลดขนาดของปัญหาลงเหลือเพียง 1 ใน 2 ส่วน โดยที่การแบ่งชิ้นส่วนก็จะทำในลักษณะเดียวกันกับปัญหาที่มีการรองรับแบบธรรมดา (SS) และการรองรับแบบยึดรั้ง (CS) แต่ในปัญหาที่มีการรองรับแบบอิสระ (FS) นี้จะมีจำนวนชิ้นส่วนเป็น 2 เท่าเนื่องจากเป็นปัญหา 1 ใน 2 ส่วนนั้นเอง โดยหากกล่าวถึงจำนวนชิ้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์ต่อไปจากนี้จะหมายถึงจำนวนชิ้นส่วนของปัญหา 1 ใน 4 ส่วน

ในปัญหาที่มีการรองรับแบบอิสระ (FS) และการรองรับแบบยึดรั้ง (CS) นั้นแรงกระจะเป็นแรงกระทำคงที่ (uniform loading) ส่วนปัญหาที่มีการรองรับแบบธรรมดา (SS) แรงกระทำจะเป็นปัญหาที่มีแรงกระทำแบบไซน์ (sinusoidal loading) กระทำที่ด้านบนของโครงสร้าง คือ

$$q(x,y) = q\ \sin(\frac{\pi x}{L})\sin(\frac{\pi y}{W}) \qquad (4.1.1\text{-}1)$$

เมื่อ L,W คือความกว้างและความยาวของแผ่นพื้นที่จะวิเคราะห์ และ q คือค่าคงที่ของแรงกระทำแบบไซน์

รูปแบบของโครงสร้างที่ศึกษาจะเป็นแบบกรณีที่ 2 ซึ่งมีจำนวนแผ่นพื้นวางซ้อนกัน 3 ชั้น($NL = 3$) ด้วยค่าอัตราส่วนของความยาวต่อความหนา (S = L/t) เท่ากับ 10 และค่าอัตราส่วนของความกว้างต่อความยาว ($W\ /L$) เท่ากับ 1

จากรูปที่ 4.1.1-2 และ 4.1.1-3 พบว่าชิ้นส่วนที่ศึกษานั้นสามารถให้ค่าการกระจัดที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยและชิ้นส่วนสามมิติจากโปรแกรม ANSYS 5.4 (74) ซึ่งอยู่ในอัตรามากกว่าร้อยละ 90 เมื่อจำนวนชิ้นส่วนมากกว่า 36 ชิ้นส่วนสำหรับชิ้นส่วน 4 ขั้ว และ 9 ชิ้นส่วนสำหรับชิ้นส่วน 8 ขั้ว และ 9 ขั้ว

4.1.2 การแปรเปลี่ยนความยาวต่อความหนา (S = L/t)

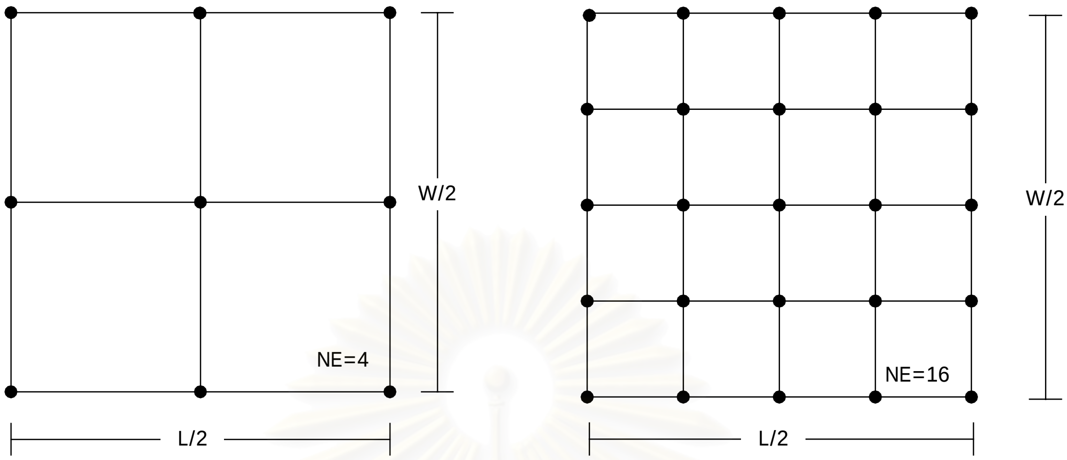
การทดสอบนี้จะเป็นการทดสอบว่าเมื่อชิ้นส่วนมีความหนาที่มาก หรือน้อยเกินไปแล้วจะทำให้ความแม่นของการกระจัดเปลี่ยนไปอย่างไร โดยเฉพาะเมื่อชิ้นส่วนมีความหนาที่น้อยเมื่อเทียบกับความยาวนั้นมักพบว่าอาจเกิดการยึดเนื่องจากแรงเฉือน

ในการศึกษานี้จะทำการแปรเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนา (S) ดังนี้คือ 4, 10, 100 และ 500 รูปแบบของโครงสร้างจะเป็นแบบกรณีที่ 2 ซึ่งมีจำนวนแผ่นวางซ้อนกัน 3 ชั้น($NL = 3$) โดยที่จำนวนชิ้นส่วนของปัญหา 1 ใน 4 ส่วนจะเป็นดังนี้

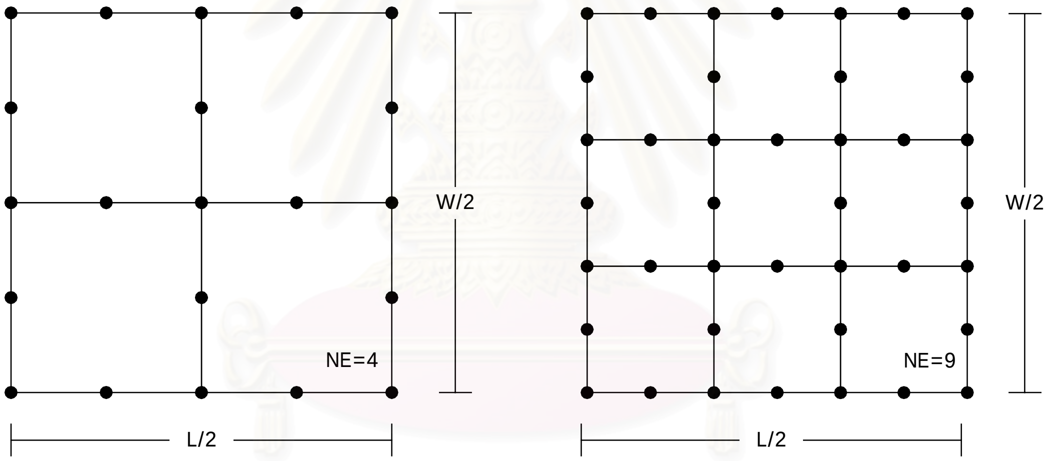
- ชิ้นส่วน 4 ขั้วจะทำการแบ่งด้วยจำนวนชิ้นส่วน 64 ชิ้นส่วน
- ชิ้นส่วน 8 ขั้ว หรือ 9 ขั้วจะทำการแบ่งด้วยจำนวนชิ้นส่วน 16 ชิ้นส่วน

ในปัญหาที่มีการรองรับแบบอิสระ (FS) และการรองรับแบบยึดรั้ง (CS) นั้นแรงกระจะเป็นแรงกระทำคงที่ ส่วนปัญหาที่มีการรองรับแบบธรรมดา (SS) แรงกระทำจะเป็นปัญหาที่มีแรงกระทำแบบไซน์กระทำที่ด้านบนของโครงสร้าง ด้วยค่าอัตราส่วนของความกว้างต่อความยาว ($W\ /L$) เท่ากับ 1

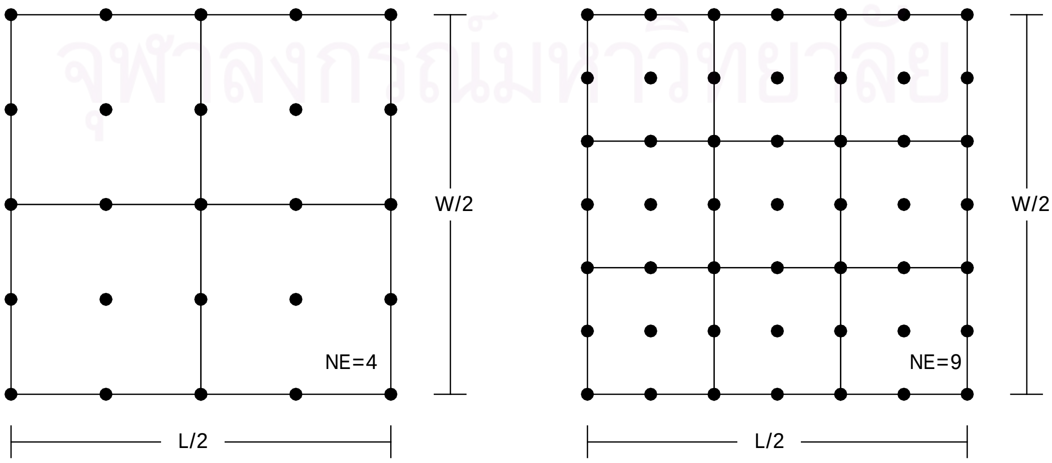
จากรูปที่ 4.1.2-1 และ 4.1.2-2 พบว่าชิ้นส่วนส่วนใหญ่ที่ศึกษานั้นสามารถให้ค่าการกระจัดที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยซึ่งอยู่ในอตรามากกว่าร้อยละ 90 ยกเว้นชิ้นส่วน 4PhHsz และ 4HpHsz เมื่อค่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนาเกินกว่า 100 ในปัญหาที่มีการรองรับแบบธรรมดา (SS) ในขณะที่ในปัญหาที่มีการรองรรับแบบยึดรั้ง (CS) และแบบอิสระ (FS) พบว่าชิ้นส่วน 4 ขั้วที่เสนอในการศึกษานี้จะแสดงการยึดเนื่องจากแรงเฉือนเมื่อค่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนาเกิน 100 แต่อย่างไรก็ดีในรูปที่ 4.1.2-3 ซึ่งได้ทำการแบ่งปัญหาด้วยจำนวนชิ้นส่วนที่เพิ่มขึ้นเป็น 225 ชิ้นส่วน (ปัญหา 1 ใน 4 ส่วน) พบว่าชิ้นส่วน 4HbHsz2, 4HbPl, 4HbMd1 และ 4HbMd2 จะให้ความแม่นของการกระจัดที่มากกว่าร้อยละ 90 เมื่อเทียบกับชิ้นส่วนสามมิติจากโปรแกรม ANSYS 5.4 (74)



ก) การแบ่งขนาดของชิ้นส่วน 4 ขั้ว



ข) การแบ่งขนาดของชิ้นส่วน 8 ขั้ว



ค) การแบ่งขนาดของชิ้นส่วน 9 ขั้ว

รูปที่ 4.1.1-1 ตัวอย่างการแบ่งขนาดที่ละเอียดขึ้น

4.1.3 การแปรเปลี่ยนความกว้างต่อความยาว ($W\ /L$)

การทดสอบความแม่นของการกระจัดเมื่อมีการเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างเป็นการทดสอบความสมบูรณ์ของการสมมติสนามความเค้นและสนามการกระจัด เนื่องจากว่าหากสนามทั้งสองสมบูรณ์การเปลี่ยนอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างจะต้องไม่มีผลต่อความแม่นของการกระจัดนั้นเอง

การทดสอบนี้จะทำเช่นเดียวกับการทดสอบอัตราส่วนความยาวต่อความหนา แต่ในที่นี้จะทำการปรับเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความกว้างต่อความยาว ($W\ /L$) ด้วยค่าดังนี้ คือ 1, 2, 3 โดยที่ค่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนา (S) เท่ากับ 10 ในปัญหาที่มีการรองรับแบบอิสระ (FS) และการรองรับแบบยึดรั้ง (CS) นั้นแรงกระจะเป็นแรงกระทำคงที่ ส่วนปัญหาที่มีการรองรับแบบธรรมดา (SS) แรงกระทำจะเป็นปัญหาที่มีแรงกระทำแบบไซน์กระทำที่ด้านบนของโครงสร้างตามสมการที่ 4.1.1-1 กระทำที่ด้านบนของแผ่นพื้น รูปแบบของโครงสร้างจะเป็นแบบกรณีที่ 2 ซึ่งมีจำนวนแผ่นพื้นวางซ้อนกัน 3 ชั้น($NL = 3$) โดยจำนวนชิ้นส่วนของปัญหา 1 ใน 4 ส่วนจะเป็นดังนี้

- ชิ้นส่วน 4 ขั้วจะทำการแบ่งด้วยจำนวนชิ้นส่วน 64 ชิ้นส่วน
- ชิ้นส่วน 8 ขั้ว หรือ 9 ขั้วจะทำการแบ่งด้วยจำนวนชิ้นส่วน 16 ชิ้นส่วน

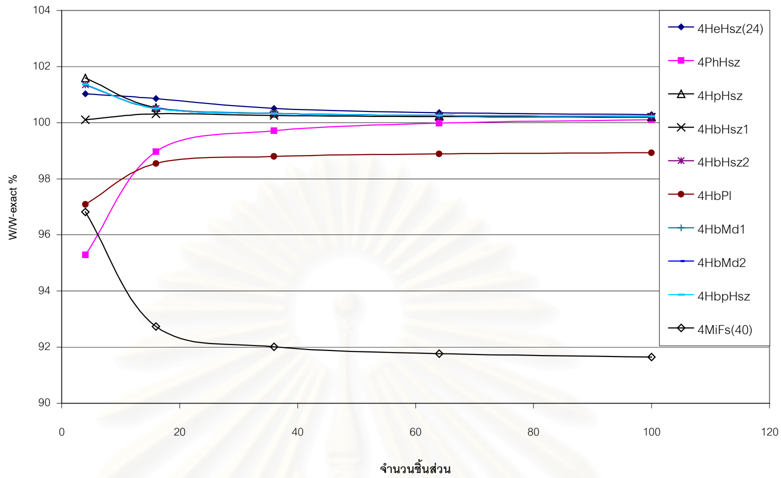
จากรูปที่ 4.1.3-1 และ 4.1.3-2 พบว่าชิ้นส่วนที่ศึกษานั้นสามารถให้ค่าการกระจัดที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยและชิ้นส่วนสามมิติจากโปรแกรม ANSYS 5.4 [74] ซึ่งอยู่ในอัตรามากกว่าร้อยละ 85 ที่ทุกค่าอัตราส่วนของความกว้างต่อความยาวที่ศึกษา ซึ่งแสดงว่าชิ้นส่วนที่ศึกษาสามารถให้การกระจัดที่แม่นยำแม้ชิ้นส่วนจะมีรูปร่างที่ไม่เป็นจัตุรัสอันแสดงถึงความสมบูรณ์ของการสมมติสนามความเค้นและสนามการกระจัดนั้นเอง

4.2 ความแม่นของความเค้น

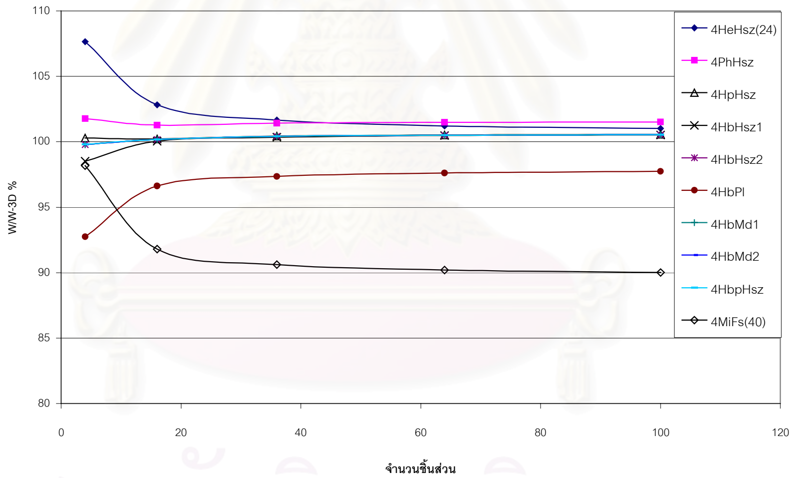
การทดสอบความแม่นของความเค้นก็จะใช้ตัวอย่างการทดสอบเดียวกันกับการทดสอบการลู่เข้าของชิ้นส่วนซึ่งจะทดสอบค่าความเค้น 5 ความเค้นคือ $\sigma_X , \sigma_Y , \tau_{XY} , \tau_{YZ} , \tau_{XZ}$ โดยจะเป็นปัญหาที่มีแรงกระทำแบบไซน์ตามสมการที่ 4.1.1-1 กระทำที่ด้านบนของแผ่นพื้น การรองรับแบบธรรมดา, รูปแบบของโครงสร้างเป็นแบบกรณีที่ 2 โดยที่

- ชิ้นส่วน 4 ขั้วจะทำการแบ่งด้วยจำนวนชิ้นส่วน 36 ชิ้นส่วน
- ชิ้นส่วน 8 ขั้ว หรือ 9 ขั้วจะทำการแบ่งด้วยจำนวนชิ้นส่วน 9 ชิ้นส่วน

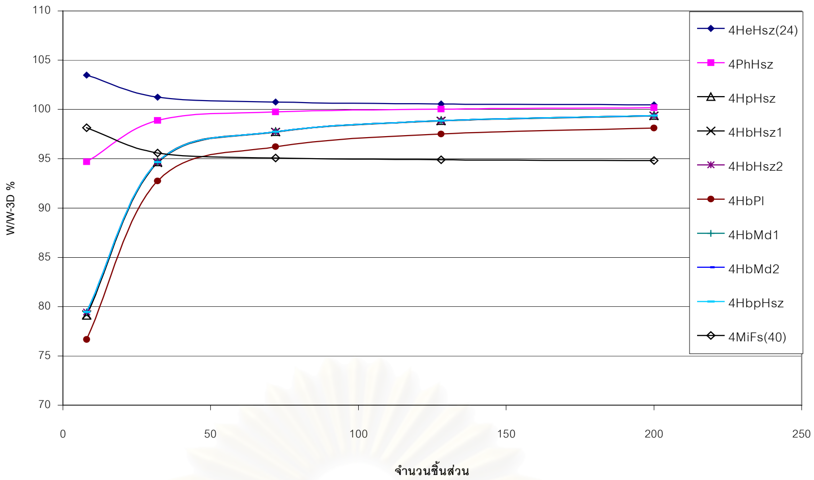
ด้วยค่าอัตราส่วนของความกว้างต่อความยาว ($W\ /L$) เท่ากับ 1



ก) กรณีการรองรับแบบธรรมดา (SS)

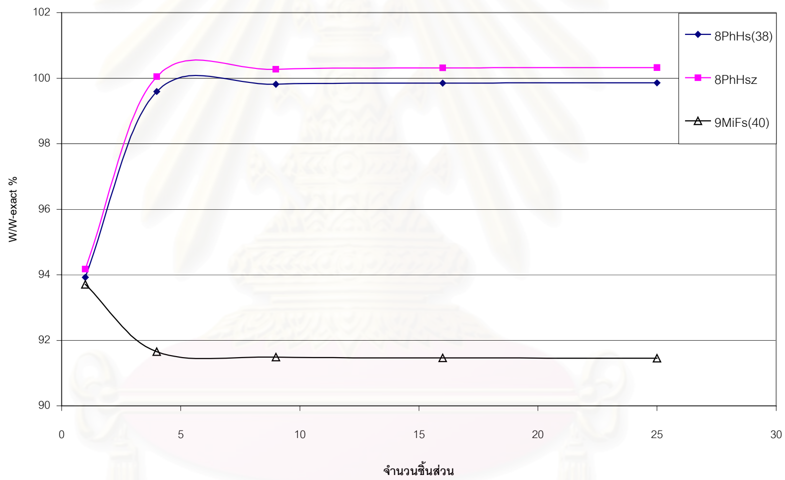


ข) กรณีการรองรับแบบยึดรั้งทั้งสี่ด้าน (CS)

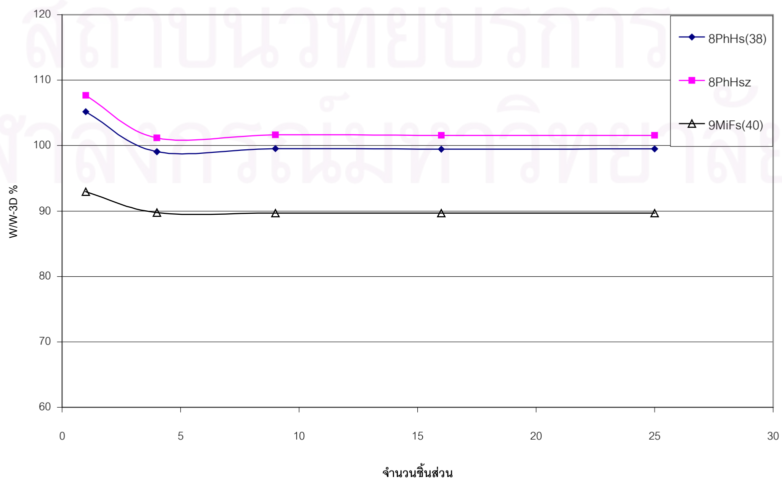


ค) กรณีการรองรับแบบอิสระสามด้าน (FS)

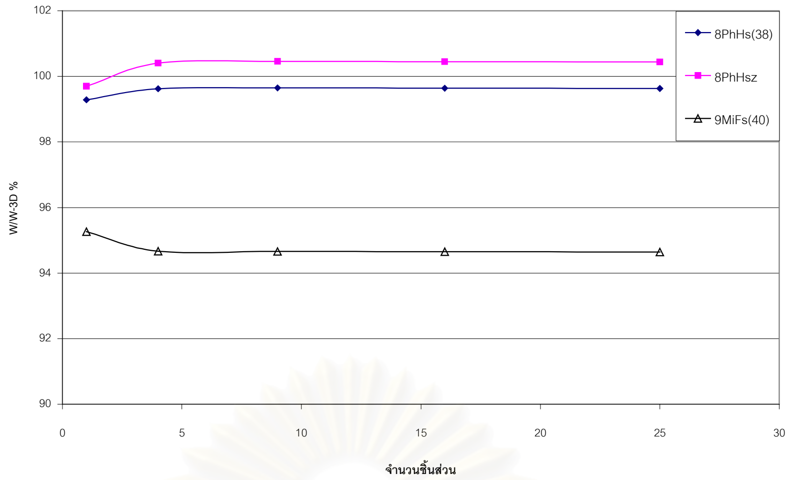
รูปที่ 4.1.1-2 การลู่เข้าของชิ้นส่วน 4 ขั้วเมื่อแบ่งขนาดละเอียดขึ้น



ก) กรณีการรองรับแบบธรรมดา (SS)

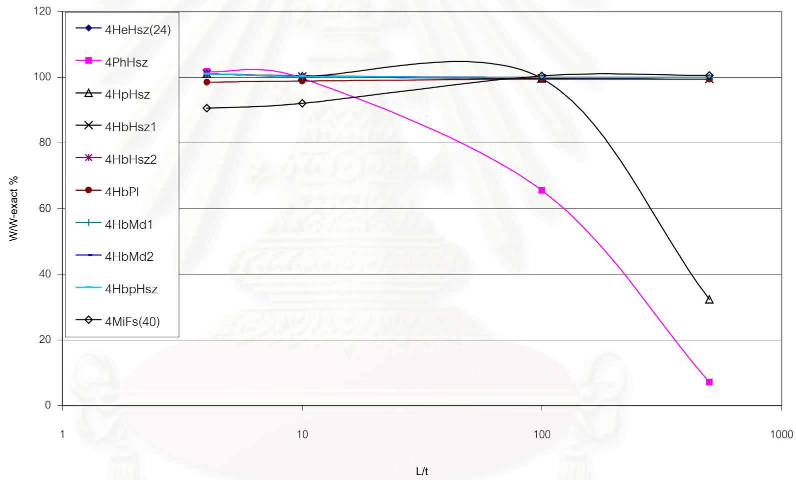


ข) กรณีการรองรับแบบยึดรั้งทั้งสี่ด้าน (CS)

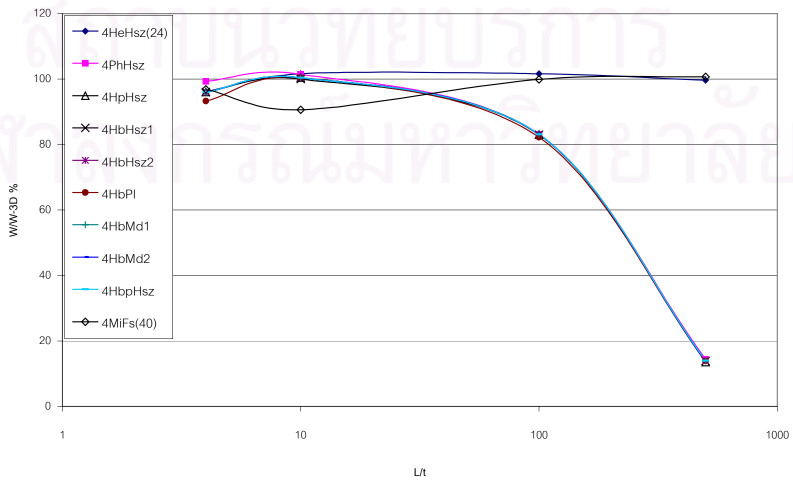


ค) กรณีการรองรับแบบอิสระสามด้าน (FS)

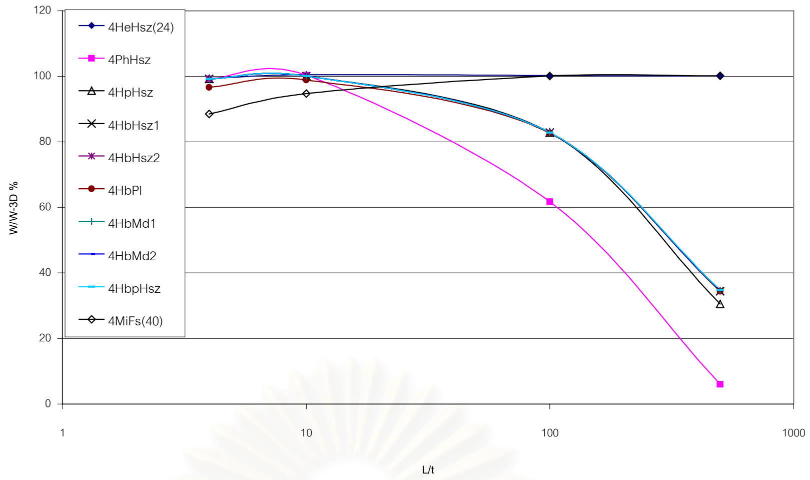
รูปที่ 4.1.1-3 การลู่เข้าของชิ้นส่วน 8 ขั้ว และ 9 ขั้วเมื่อแบ่งขนาดละเอียดขึ้น



ก) กรณีการรองรับแบบธรรมดา (SS)

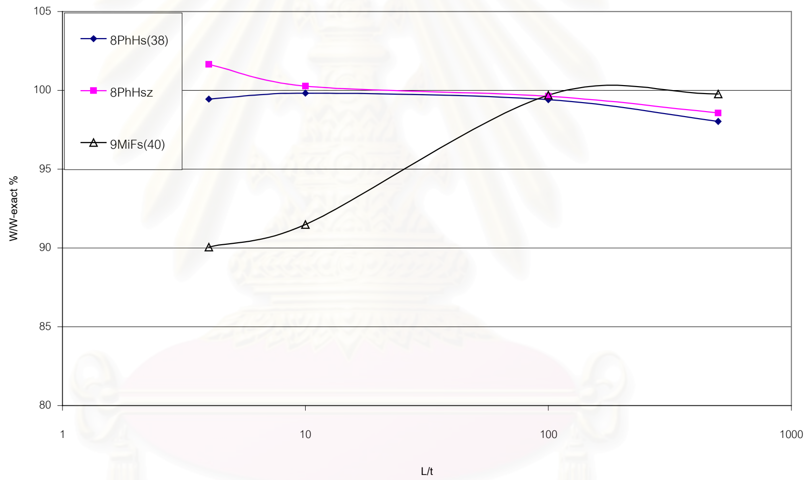


ข) กรณีการรองรับแบบยึดรั้งทั้งสี่ด้าน (CS)

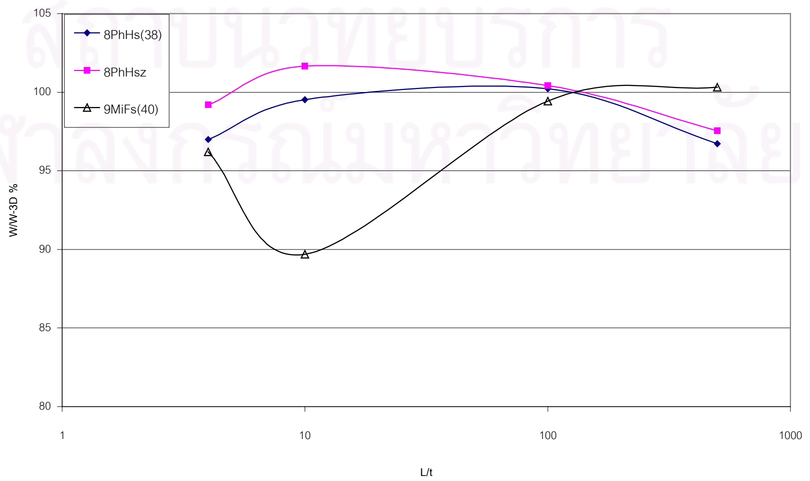


ค) กรณีการรองรับแบบอิสระสามด้าน (FS)

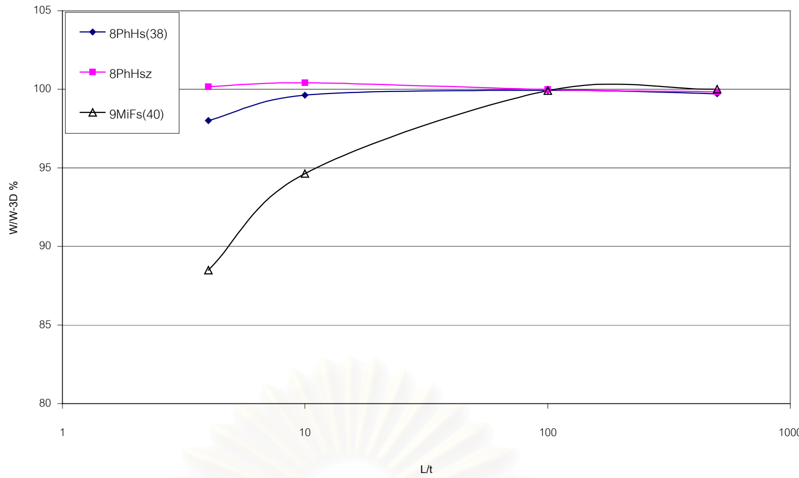
รูปที่ 4.1.2-1 การลู่เข้าของชิ้นส่วน 4 ขั้วเมื่ออัตราความยาวต่อความหนาเปลี่ยนไป



ก) กรณีการรองรับแบบธรรมดา (SS)

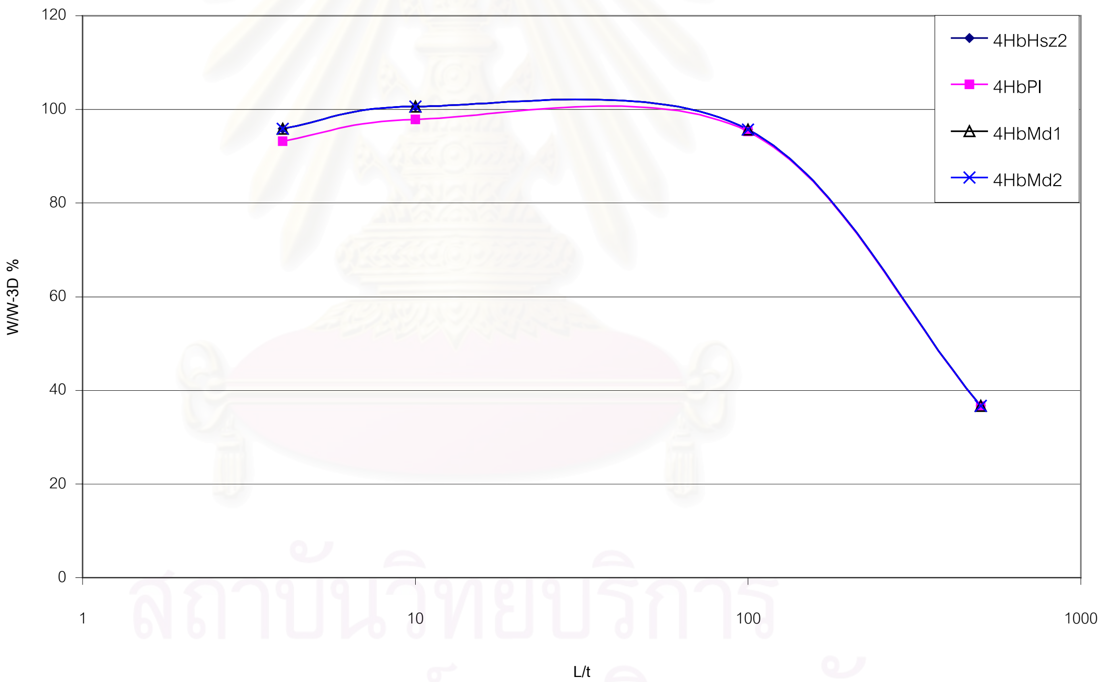


ข) กรณีการรองรับแบบยึดรั้งทั้งสี่ด้าน (CS)

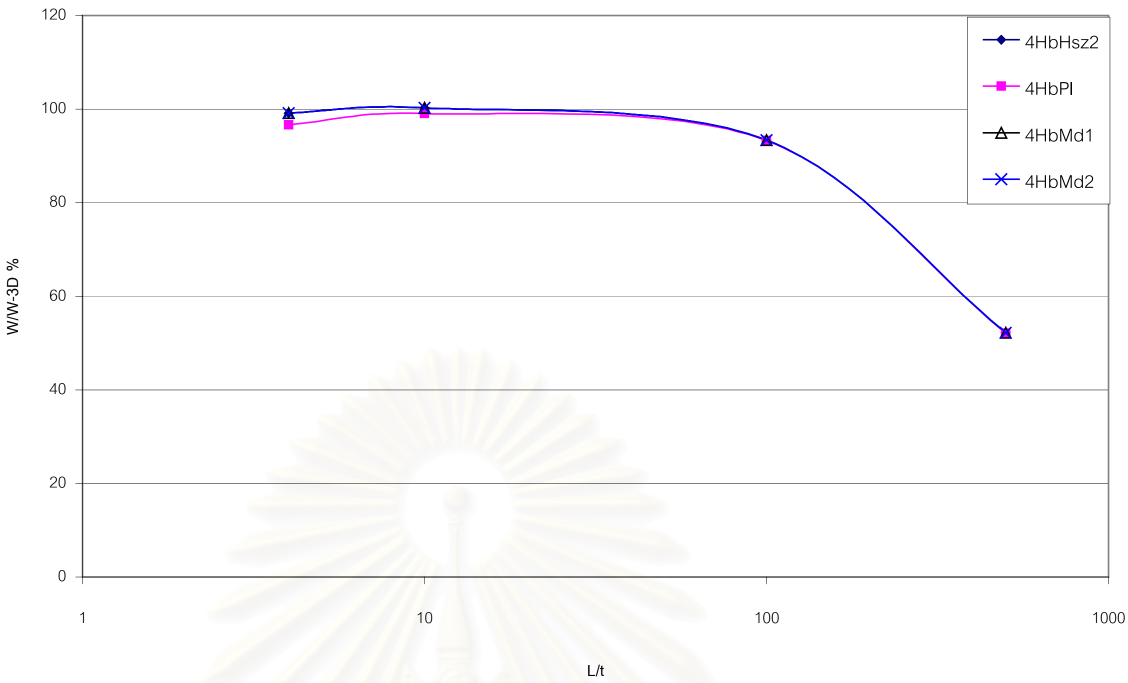


ค) กรณีการรองรับแบบอิสระสามด้าน (FS)

รูปที่ 4.1.2-2 การลู่เข้าของชิ้นส่วน 8 ขั้วและ 9 ขั้วเมื่ออัตราความยาวต่อความหนาเปลี่ยนไป

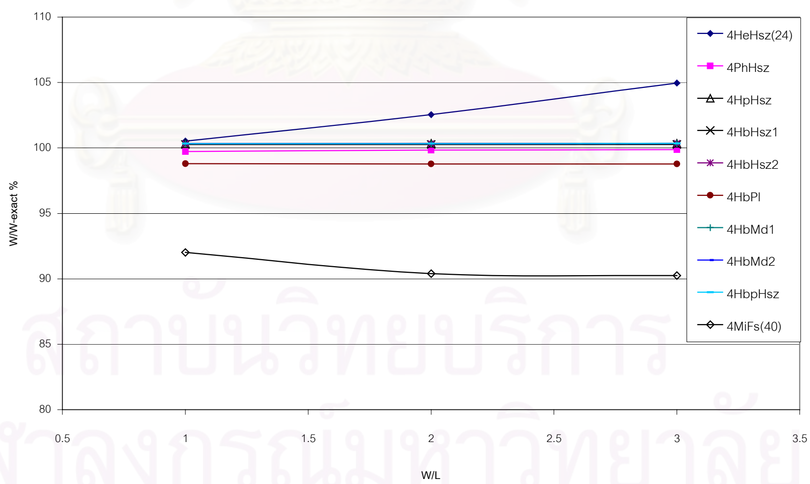


ก) กรณีการรองรับแบบยึดรั้งทั้งสี่ด้าน (CS)

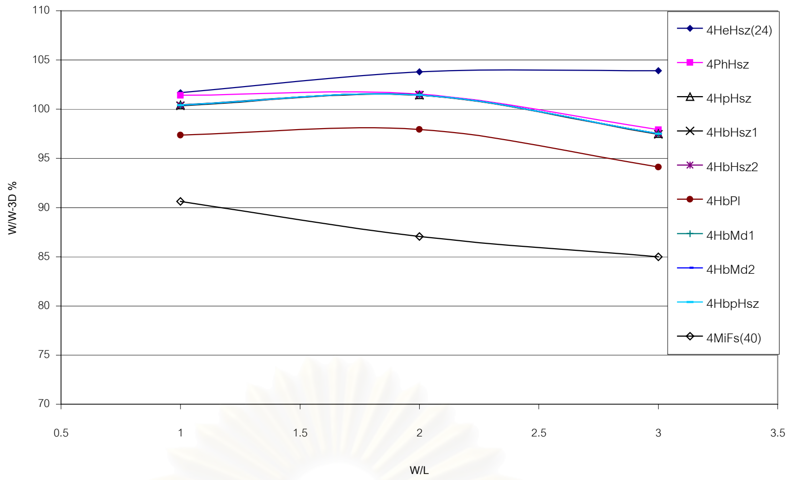


ข) กรณีการรองรับแบบอิสระสามด้าน (FS)

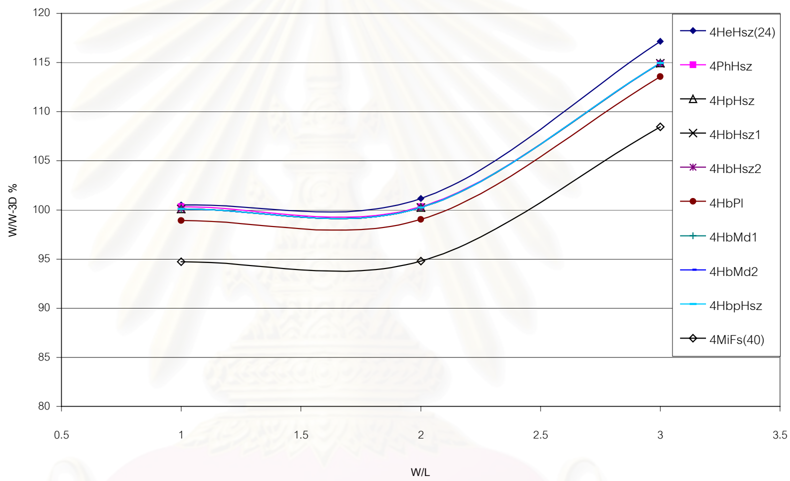
รูปที่ 4.1.2-3 การลู่เข้าของชิ้นส่วน 4 ขั้ว (225 ชิ้นส่วน) เมื่ออัตราความยาวต่อความหนาเปลี่ยนไป



ก) กรณีการรองรับแบบธรรมดา (SS)

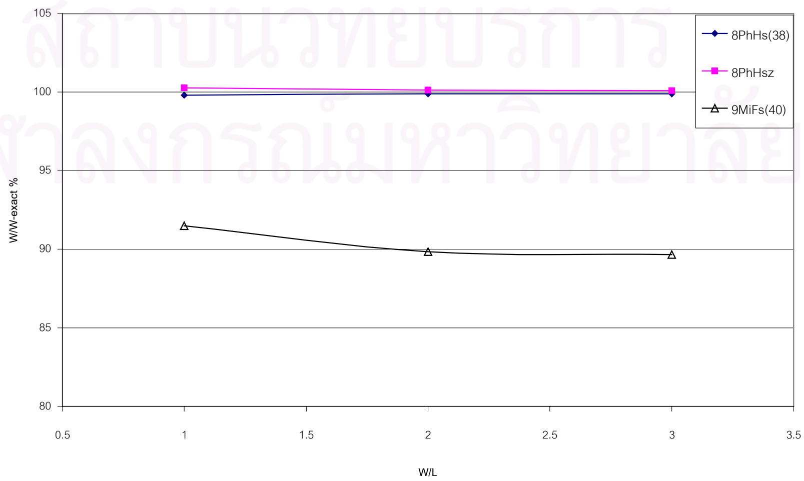


ข) กรณีการรองรับแบบยึดรั้งทั้งสี่ด้าน (CS)

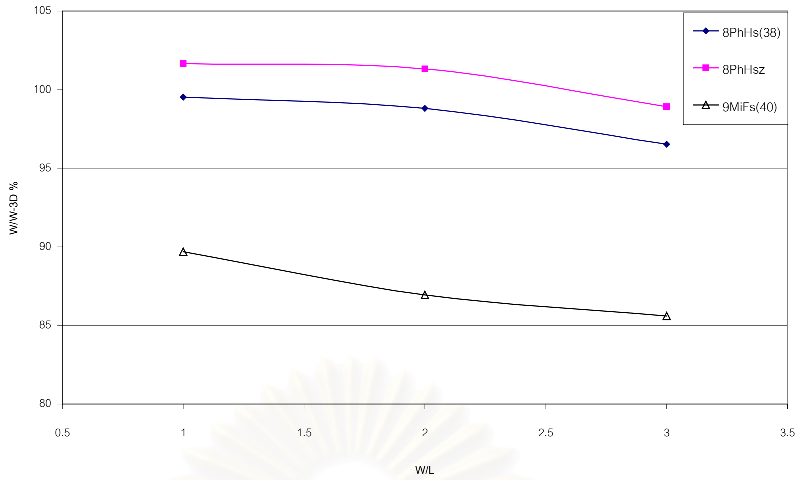


ค) กรณีการรองรับแบบอิสระสามด้าน (FS)

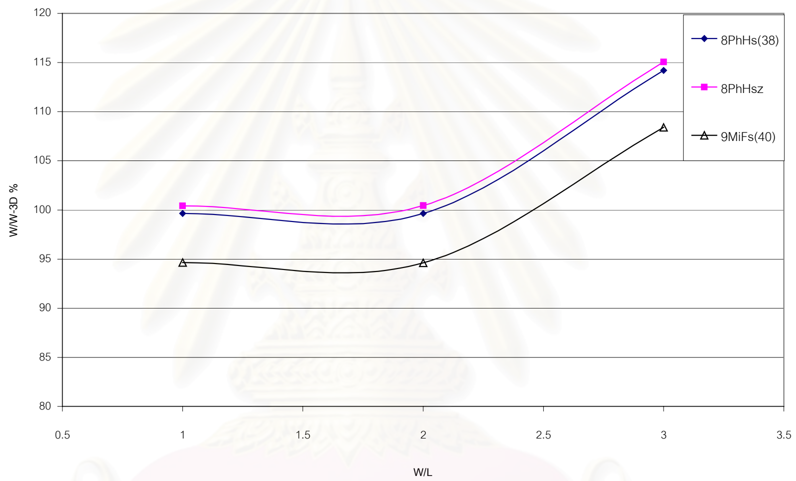
รูปที่ 4.1.3-1 การลู่เข้าของชิ้นส่วน 4 ขั้วเมื่ออัตราความกว้างต่อความยาวเปลี่ยนไป



ก) กรณีการรองรับแบบธรรมดา (SS)



ข) กรณีการรองรับแบบยึดรั้งทั้งสี่ด้าน (CS)



ค) กรณีการรองรับแบบอิสระสามด้าน (FS)

รูปที่ 4.1.3-2 การลู่เข้าของชิ้นส่วน 8 ขั้วและ 9 ขั้วเมื่ออัตราความกว้างต่อความยาวเปลี่ยนไป

ตารางที่ 4.2-1 เปรียบเทียบความแม่นของความเค้นกรณีการรองรับแบบธรรมดา $NL = 3$, S=10 กรณีที่ 2

ชิ้นส่วน	ค่าคลาดเคลื่อน (%)				
	$\overline{\sigma}_X$ (z=t/2)	$\overline{\sigma}_Y$ (z=t/4)	$\overline{\tau}_{XY}$ (z=t/2)	$\overline{\tau}_{YZ}$ (z=0)	$\overline{\tau}_{XZ}$ (z=0)
Exact [15]	0.559	0.401	-0.0275	0.196	0.301
4HeHsz [24]	-0.04	-1.24	5.61	-14.10	4.49
4PhHsz	-0.31	-4.54	-1.40	-1.39	-0.42
4HpHsz	0.75	-1.00	2.02	-12.60	1.34
4HbHsz1	0.39	-1.91	1.60	-9.92	4.24
4HbHsz2	0.75	-0.99	2.01	-12.38	1.38
4HbPl	-3.02	-2.16	-2.03	-28.09	-0.63

4HbMd1	0.75	-0.99	2.01	-12.38	1.38
4HbMd2	0.75	-0.99	2.01	-12.38	1.38
4HbpHsz	0.75	-0.99	2.00	-12.41	1.35
4MiFs (40)	-10.51	-6.34	-9.82	-25.57	-17.55
8PhHs (38)	5.69	1.56	3.40	-8.64	-1.35
8PhHsz	4.08	-0.73	1.73	1.06	2.41
9MiFs (40)	-11.50	-7.50	-9.87	-25.95	-17.53

ตารางที่ 4.2-2 เปรียบเทียบความแม่นของความเค้นกรณีการรองรับแบบธรรมดา $NL = 3$, S=100 กรณีที่ 2

ชิ้นส่วน	ค่าคลาดเคลื่อน (%)				
	$\bar{\sigma}_X$ (z=t/2)	$\bar{\sigma}_Y$ (z=t/4)	$\bar{\tau}_{XY}$ (z=t/2)	$\bar{\tau}_{YZ}$ (z=0)	$\bar{\tau}_{XZ}$ (z=0)
Exact (15)	0.539	0.271	-0.0214	0.139	0.339
4HeHsz (24)	-0.87	-0.91	0.20	0.89	48.19
4PhHsz	-34.82	-34.73	-34.94	-34.86	-34.90
4HpHsz	0.61	0.30	0.53	-5.27	-0.25
4HbHsz1	-0.38	-0.95	-0.80	9.41	42.69
4HbHsz2	0.75	0.45	0.65	-4.27	-0.02
4HbPl	-1.16	-1.12	-1.34	-28.70	-0.84
4HbMd1	0.75	0.45	0.65	-4.27	-0.02
4HbMd2	0.75	0.45	0.65	-4.27	-0.02
4HbpHsz	0.75	0.45	0.65	-4.46	-0.05
4MiFs (40)	0.99	0.97	1.14	-19.51	-21.29
8PhHs (38)	1.31	-0.61	2.79	-1.58	-2.78
8PhHsz	3.18	3.61	1.50	14.00	2.85
9MiFs (40)	-0.77	-1.28	-0.41	28.24	-13.71

ตารางที่ 4.2-3 เปรียบเทียบความแม่นของความเค้นกรณีการรองรับแบบธรรมดา $NL = 9$, S=100 กรณีที่ 2

ชิ้นส่วน	ค่าคลาดเคลื่อน (%)				
	$\bar{\sigma}_X$ (z=t/2)	$\bar{\sigma}_Y$ (z=t/4)	$\bar{\tau}_{XY}$ (z=t/2)	$\bar{\tau}_{YZ}$ (z=0)	$\bar{\tau}_{XZ}$ (z=0)
Exact (15)	0.539	0.431	-0.0213	0.219	0.259
4HeHsz (24)	-1.14	-0.95	-1.20	-12.22	8.02
4PhHsz	-40.79	-40.68	-40.75	-16.91	-5.26
4HpHsz	-2.25	-2.06	-2.19	-13.88	4.59
4HbHsz1	-1.15	-0.95	-1.09	-11.72	8.04
4HbHsz2	-1.15	-0.95	-1.09	-11.99	7.71

4HbPl	-1.16	-0.99	-1.09	-0.32	-1.62
4HbMd1	0.89	1.07	0.70	-0.30	-1.48
4HbMd2	0.89	1.07	0.70	-0.30	-1.48
4HbpHsz	-1.15	-0.95	-1.09	-11.99	7.71
4MiFs [40]	1.01	1.25	1.46	-51.12	66.02
8PhHs [38]	-0.03	-0.37	2.64	-49.12	79.41
8PhHsz	-0.02	-0.34	2.66	-14.19	12.21
9MiFs [40]	-1.03	-0.93	-0.29	-34.96	101.07

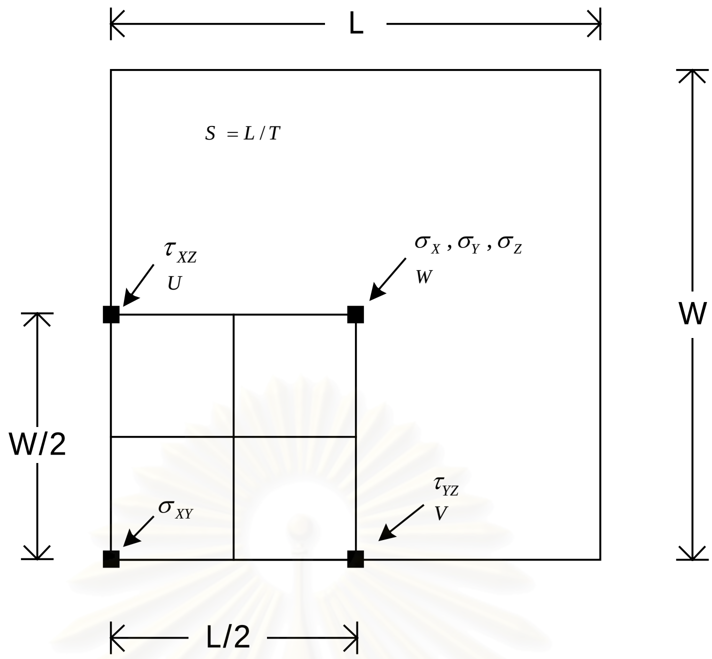
เมื่อ $$(\bar{\sigma}_X , \bar{\sigma}_Y , \bar{\tau}_{XY}) = \frac{t^2}{qL^2}(\sigma_X , \sigma_Y , \tau_{XY})$$

$$(\bar{\tau}_{YZ} , \bar{\tau}_{XZ}) = \frac{t}{qL}(\tau_{YZ} , \tau_{XZ})$$

โดยที่ตำแหน่งที่พิจารณาความเค้นในตารางที่ 4.2-1 4.2-3 และ 4.2-3 นั้นจะแสดงในรูปที่ 4.2-1

จากตารางที่ 4.2-1 4.2-2 และ 4.2-3 พบว่าทุกชิ้นส่วนยกเว้นชิ้นส่วน 4PhHsz ซึ่งเกิดการยึดเนื่องจากแรงเฉือนเมื่อ S=100 นั้นจะมีความแม่นยำของความเค้นดัดมากกว่าความเค้นเฉือนตั้งฉาก ทั้งนี้ชิ้นส่วน 4HbPl, 4MiFs และ 9MiFS นั้นมีการคลาดเคลื่อนของความเค้นเฉือนตั้งฉากมากกว่าร้อยละ 20 ในโครงสร้างที่มีจำนวนแผ่นพื้นวางซ้อนกัน 3 ชั้น($NL = 3$) ขณะที่เมื่อโครงสร้างที่มีจำนวนแผ่นพื้นวางซ้อนกัน 9 ชั้น($NL = 9$) ชิ้นส่วน 8PhHs 4MiFs และ 9MiFs ซึ่งใช้สนามการกระจัดชั้นเดียวนั้นจะมีการคลาดเคลื่อนของความเค้นเฉือนตั้งฉากมากกว่าร้อยละ 50

นอกจากนี้หากพิจารณาตารางที่ 4.2-2 จะพบว่าชิ้นส่วน 4HeHsz และ 4HbHsz1 จะมีการคลาดเคลื่อนของความเค้นเฉือนตั้งฉาก $\bar{\tau}_{XZ}$ มากกว่าร้อยละ 40 เมื่อใช้วิเคราะห์โครงสร้างที่มีจำนวนแผ่นพื้นวางซ้อนกัน 3 ชั้น($NL = 3$) และค่า S=100



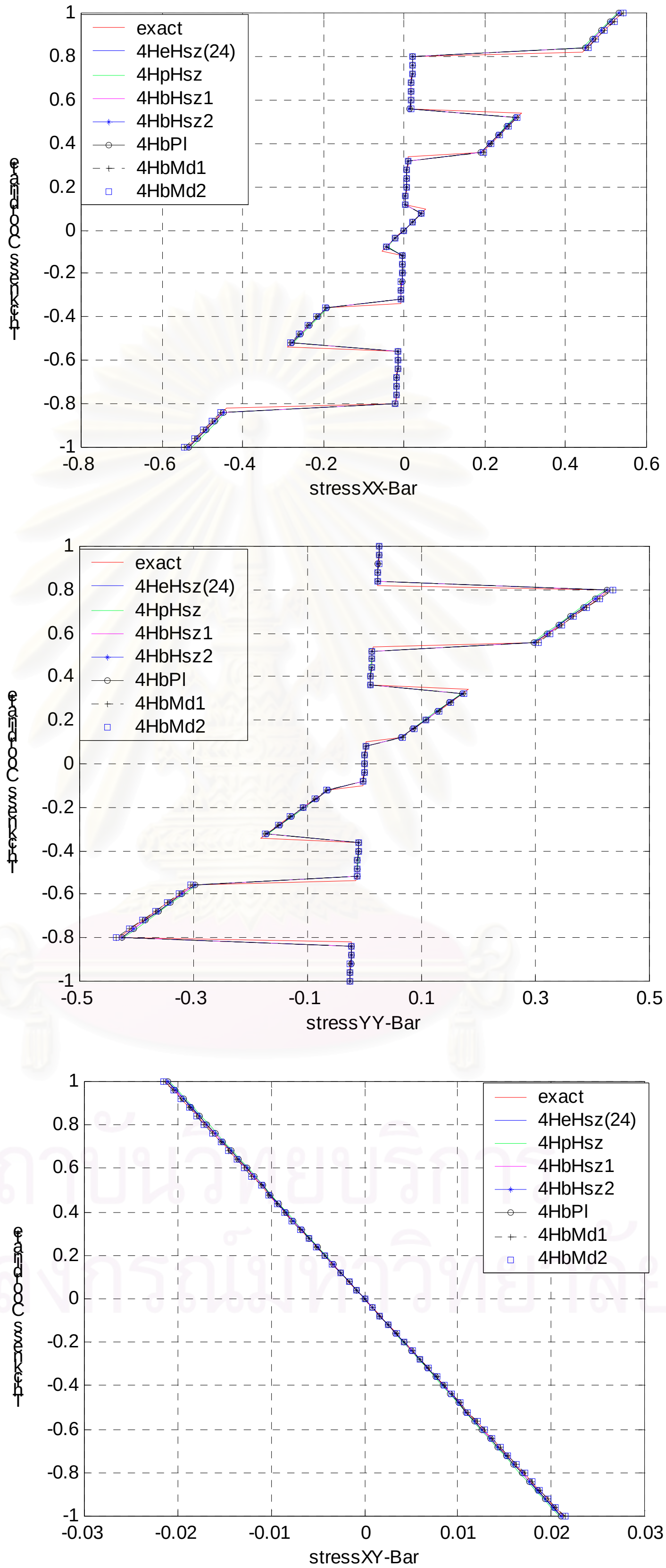
รูปที่ 4.2-1 ตำแหน่งที่พิจารณาความเค้นกรณีการรองรับแบบธรรมดา

จากปัญหาที่วิเคราะห์ในตารางที่ 4.2-3 สามารถนำชิ้นส่วนที่สนใจซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนของความเค้นไม่เกินร้อยละ 20 มาเขียนกราฟแสดงการกระจายตัวของความเค้นที่จุดที่สนใจซึ่งความเค้นจะมีค่าสูงสุดตามตำแหน่งที่แสดงในรูปที่ 4.2-1 ได้ดังรูปที่ 4.2-2 โดยจะพบว่าในส่วนของความเค้นแรงดัดนั้นทุกชิ้นส่วนจะมีการกระจายตัวของความเค้นที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยมากแทบจะไม่แตกต่างกันเลย แต่จะสามารถพบความแตกต่างในการกระจายตัวของความเค้นเฉือนตั้งฉากซึ่งพบว่าชิ้นส่วน 4HbMd1 และ 4HbMd2 นั้นจะมีการกระจายตัวของความเค้นเฉือนตั้งฉากที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยมากกว่าชิ้นส่วนอื่นๆที่ใช้สนามการกระจัดแบบชั้นเดียวสมมูลที่ใช้ฟังก์ชันวกเวียน

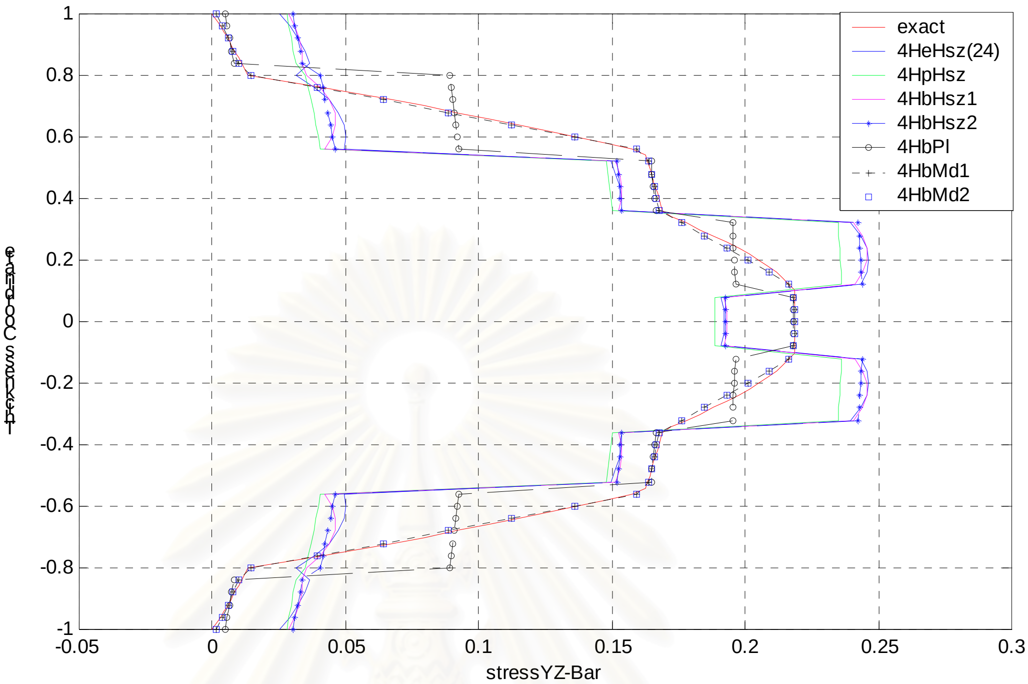
นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้ทำการศึกษาการกระจายตัวของความเค้นในโครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่โครงสร้างไม่มีสมมาตรกับระนาบ xy คือจะมีรูปแบบของโครงสร้างตามกรณีที่ 1 (ทุกชั้นมีความหนาเท่ากัน) ซึ่งมีจำนวนแผ่นพื้นวางซ้อนกัน 4 ชั้น($NL = 4$) โดยที่ $\theta^1 = \theta^2 = 0^\circ \theta^3 = \theta^4 = 90^\circ$ เมื่อ θ^i คือมุมที่วัสดุของแผ่นพื้นชั้นที่ i เทียบกับแกนพิกัดฉาก x

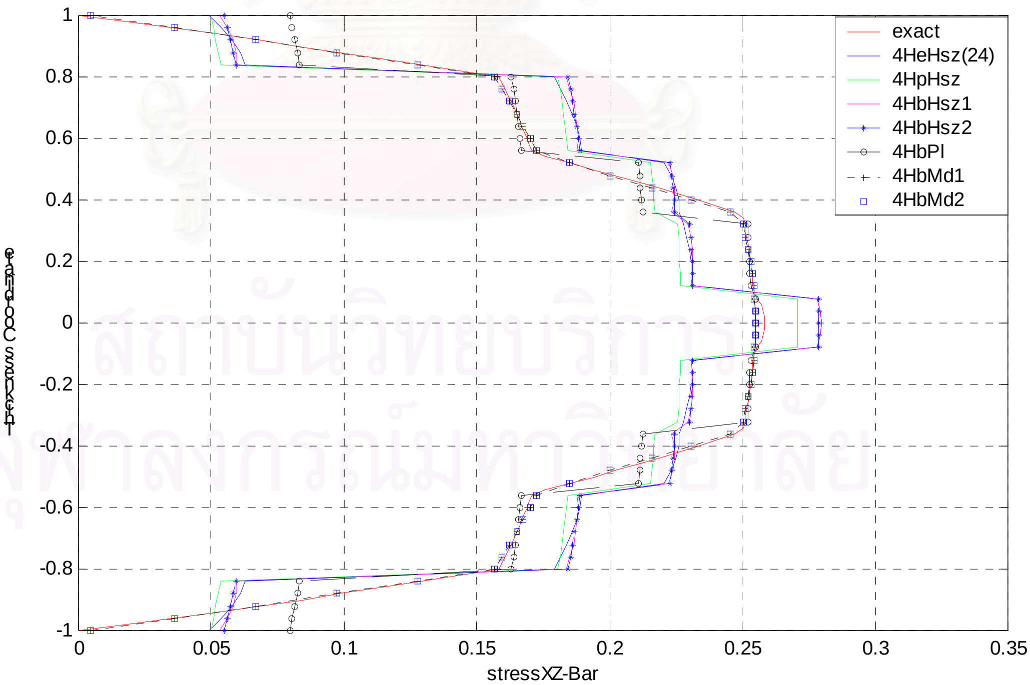
- ชิ้นส่วน 4 ขั้วจะทำการแบ่งด้วยจำนวนชิ้นส่วน 36 ชิ้นส่วน
- ชิ้นส่วน 8 ขั้ว หรือ 9 ขั้วจะทำการแบ่งด้วยจำนวนชิ้นส่วน 9 ชิ้นส่วน

มีค่า $W / L = 1.0$, $S = L/t = 100$ มีแรงกระทำแบบไซน์ตามสมการที่ 4.1.1-1 กระทำที่ด้านบนของโครงสร้าง มีการรองรับแบบธรรมดา การกระจายตัวของความเค้นได้แสดงในรูปที่ 4.2-3 ซึ่งพบว่าความเค้นแรงดัดนั้นทุกชิ้นส่วนจะมีการกระจายตัวของความเค้นที่ใกล้เคียงกับผลเฉลย แต่ความเค้นเฉือนตั้งฉากจะพบว่าชิ้นส่วน 4HbMd2 ซึ่งสนามการกระจัดในระนาบมีพจน์ของ $z^2\kappa_X$ และ $z^2\kappa_Y$ จะสามารถให้การกระจายตัวของความเค้นเฉือนตั้งฉากที่ดีกว่า

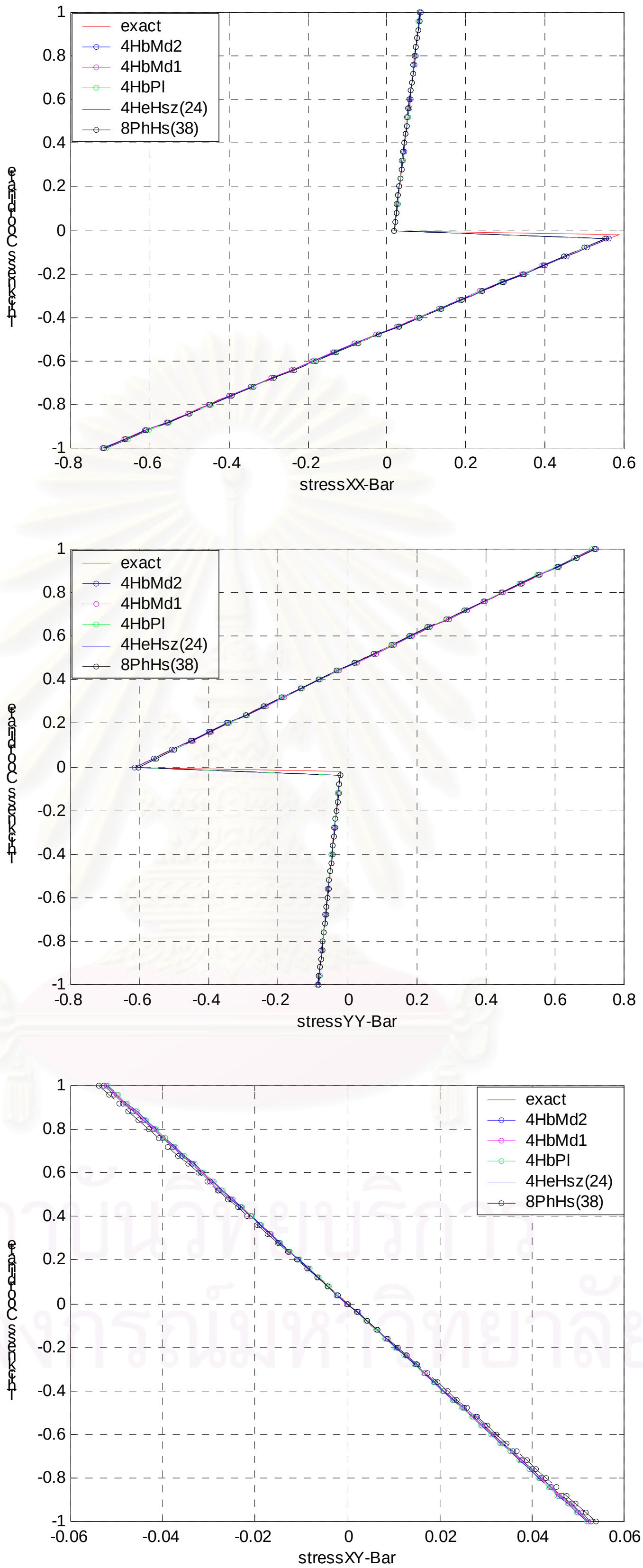


รูปที่ 4.2-2 การกระจายตัวของความเค้นในโครงสร้างแบบกรณีที่ 2 ($NL = 9$, S=100)

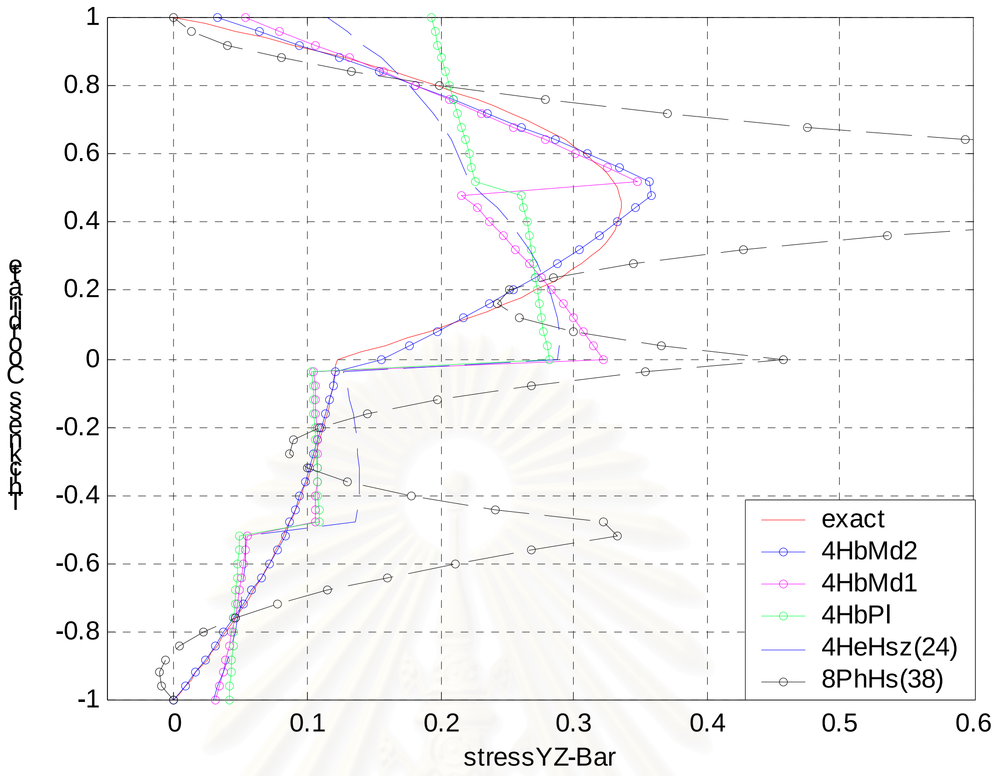


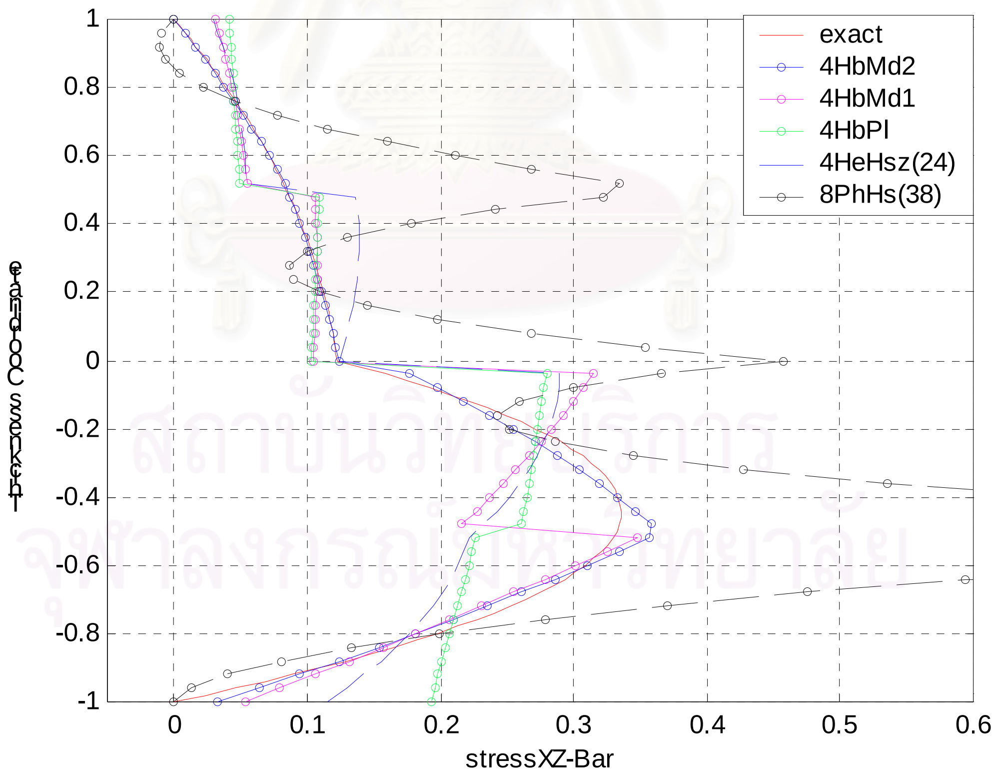


รูปที่ 4.2-2 (ต่อ) การกระจายตัวของความเค้นในโครงสร้างแบบกรณีที่ 2 ($NL = 9$, S=100)



รูปที่ 4.2-3 การกระจายตัวของความเค้นในโครงสร้างแบบกรณีที่ 1 ($NL = 4$, S=100)





รูปที่ 4.2-3 (ต่อ) การกระจายตัวของความเค้นในโครงสร้างแบบกรณีที่ 1 ($NL = 4$, S=100)

4.3 ประสิทธิภาพทางคอมพิวเตอร์

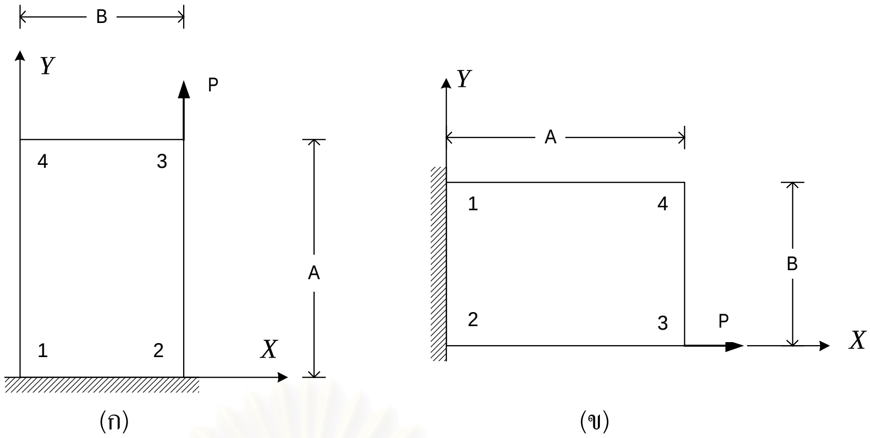
ประสิทธิภาพทางคอมพิวเตอร์คือตรวจสอบจำนวนการดำเนินการ (operations) ที่ใช้ในขั้นตอนการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนซึ่งสามารถทำได้โดยการนับจำนวนครั้งของการบวก ลบ คูณ และหารของเมตริกซ์ต่างๆ ในที่นี้กำหนดเมตริกซ์ตัวอย่าง A และ B ทั้งสองเมตริกซ์มีขนาด $n \times n$ สามารถนับจำนวนการดำเนินการได้ดังนี้

$A+B$	มีการดำเนินการ	n^2
$A \times B$	มีการดำเนินการ	$2n^3$
A^m	มีการดำเนินการ	$(m-1) \times 2n^3$
$LU(A)$	มีการดำเนินการ	$\frac{2}{3}n^3$

แต่อย่างไรก็ตามจำนวนการดำเนินการในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของทุกชิ้นส่วนรวมกันนั้นจะมีความสำคัญลดน้อยลงเมื่อปัญหาที่วิเคราะห์มีขนาดใหญ่ขึ้น โดยจะตรงกันข้ามในปัญหาขนาดเล็กซึ่งจำนวนการดำเนินการในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของทุกชิ้นส่วนจะเป็นสัดส่วนที่สำคัญของจำนวนการดำเนินการทั้งหมดในการวิเคราะห์ สิ่งที่ทำให้เป็นเช่นนี้คือจำนวนระดับขั้นความเสรีของปัญหาที่ต้องคำนวณหาในท้ายที่สุดนั้นเอง

4.4 **ความยืนยง**

จากผลการวิเคราะห์ปัญหาต่างๆข้างต้นนั้นผลลัพธ์ที่ได้ควรที่จะไม่ขึ้นกับการวางตัวบนแกนพิกัดของปัญหาตัวอย่างเช่น การกระจัด หรือ ความเค้นที่เกิดจากแรงกระทำ P ในรูปที่ 4.4-1 นั้นจะต้องได้เท่ากันไม่ว่าชิ้นส่วนที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาจะมีการวางตัวแบบในรูปที่ 4.4-1(ก) หรือรูปที่ 4.4-1(ข) หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า เมตริกซ์สติฟเนสที่ได้จากการวางตัวของชิ้นส่วนแต่ละแบบนั้นต้องเท่ากันนั่นเอง ทั้งนี้อาจสามารถตรวจสอบได้จากค่าเจาะจงจากสองกรณีต้องเท่ากัน ชิ้นส่วนที่ให้ค่าเจาะจงของชิ้นส่วนของการวางตัวทั้งสองแบบเท่ากันแสดงว่าชิ้นส่วนนั้นมี*ความยืนยง (invariance)* ถึงแม้ว่าความยืนยงของชิ้นส่วนนั้นไม่สามารถบ่งบอกว่าชิ้นส่วนจะมีการลู่เข้าของผลเฉลยหรือไม่ แต่ความยืนยงก็มีความสำคัญคือทำให้ไม่ต้องกังวลในการใช้ชิ้นส่วนในการวิเคราะห์เพราะไม่มีข้อจำกัดของการวางตัวของปัญหานั้นเอง



รูปที่ 4.4-1 การวางตัวของปัญหาแต่ละแบบเพื่อทดสอบความยืนยง

ทั้งนี้ความยืนยงของชิ้นส่วนการกระจัดที่ฟังก์ชันสัณฐานเขียนอยู่ในรูปพิกัดฉากนั้นจำเป็นที่จะต้องมีพจน์ครบตามสามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal triangle) แต่ในการศึกษานี้ได้ทำการศึกษาเฉพาะชิ้นส่วนที่ฟังก์ชันการประมาณต่างๆเขียนอยู่ในรูปพิกัดธรรมชาติซึ่งจากผลการทดสอบในตารางที่ 4.5-1 และ 4.5-2 พบว่าชิ้นส่วนทุกชิ้นส่วนมีความยืนยง

การกำหนดเพื่อทดสอบความยืนยงของชิ้นส่วนที่ใช้วิเคราะห์แผ่นที่ซ้อนเป็นชั้นในที่นี้จะกำหนดดังนี้
- กรณี (ก) : $W\ /L = 2.0$, $S\ = L/t\ = 5$, $t\ = 5$, $NL = 3$ และ $h_i = t\ / NL$ โดยที่ $\theta^1\ = \theta^3\ = 90^\circ\ \theta^2\ = 0^\circ$

- กรณี (ข) : $W\ /L = 0.5$, $S\ = L/t\ = 10$, $t\ = 5$, $NL = 3$ และ $h_i = t\ / NL$ โดยที่ $\theta^1\ = \theta^3\ = 0^\circ\ \theta^2\ = 90^\circ$

4.5 การทดสอบค่าเจาะจง

การทดสอบค่าเจาะจงเป็นการทดสอบที่สำคัญซึ่งใช้ตรวจสอบรูปแบบไร้พลังงานของการกระจัดของชิ้นส่วน โดยหากแรงกระทำ $\underline{F}^e$ ที่กระทำกับชิ้นส่วนนั้นเป็นสัดส่วนกับการกระจัดที่ขั้วของชิ้นส่วน $\underline{q}$ ด้วยค่าตัวคูณ μ ดังนี้

$$k\ \underline{q}\ = \underline{F}^e\ = \mu \underline{q} \qquad (4.7\text{-}1)$$

หรือสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$(k - \mu I)\underline{q}\ = \underline{0} \qquad (4.7\text{-}2)$$

รูปแบบข้างต้นเรียกว่าสมการค่าเจาะจง (eigenvalue equation) โดยที่ μ_i คือค่าเจาะจง (eigenvalue) ของเมตริกซ์สติฟเนส k ของชิ้นส่วนที่พิจารณาซึ่งจะมีทั้งหมดเท่ากับจำนวนระดับขั้นความเสรีใน $\underline{q}$ ทั้งนี้ค่า

เจาะจง μ_i ค่าหนึ่งจะคู่กับเวกเตอร์เจาะจง $\underline{q}_i$ และหากทำการปรับแก้ให้ $\underline{q}_i^T \underline{q}_i = 1$ แล้วนำไปคูณกับสมการที่ 4.7-2 จะได้ว่า

$$\underline{q}_i^T k \underline{q}_i = \mu_i \text{ หรือ } 2U_i = \mu_i \qquad (4.7\text{-}3)$$

เมื่อ U_i คือพลังงานความเครียดภายในชิ้นส่วนจากการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}_i$ นั่นเองซึ่งจะพบว่าเมตริกซ์สติฟเนส k อาจให้ค่าเจาะจง $\mu_i = 0$ เมื่อการกระจัดที่ขั้ว $\underline{q}_i$ เป็นการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง โดยที่ชิ้นส่วนในระนาบ (plane element) จะมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง 3 รูปแบบ ส่วนในชิ้นส่วนสามมิติ หรือชิ้นส่วนแผ่นเปลือก (shell element) นั้นจะมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง 6 รูปแบบซึ่งในการทดสอบค่าเจาะจงนี้จะต้องตรวจสอบว่าเมตริกซ์สติฟเนส k ของชิ้นส่วนที่สนใจนั้นมีค่าเจาะจงที่เป็นศูนย์ครบตามจำนวนการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็งของชิ้นส่วนนั้นๆหรือไม่ หากชิ้นส่วนที่ศึกษามีค่าเจาะจงที่เป็นศูนย์ครบตามจำนวนการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็งจะสามารถสรุปได้ว่าชิ้นส่วนดังกล่าวมีความเสถียรนั้นเอง นอกจากนี้ค่าเจาะจงยังสามารถใช้ตรวจสอบความยืนยงของชิ้นส่วนได้ดังกล่าวแล้วในหัวข้อ 4.4 ด้วยเช่นกัน

ตารางที่ 4.5-1 ผลการทดสอบความยืนยง และจำนวนการดำเนินการของชิ้นส่วน 4 ขั้ว

ชิ้นส่วน	จำนวนการดำเนินการ		ความยืนยง
	ครั้ง	เทียบเท่า	
4HeHsz	186399	1.48	ยืนยง
4PhHsz	154912	1.23	ยืนยง
4HpHsz	198993	1.58	ยืนยง
4HbHsz1	178841	1.42	ยืนยง
4HbHsz2	183881	1.46	ยืนยง
4HbPl	168767	1.34	ยืนยง
4HbMd1	190177	1.51	ยืนยง
4HbMd2	192696	1.53	ยืนยง
4HbpHsz	198993	1.58	ยืนยง
4MiFs	125945	1.00	ยืนยง

ตารางที่ 4.5-2 ผลการทดสอบความยืนยง และจำนวนการดำเนินการของชิ้นส่วน 8 ขั้วและ 9 ขั้ว

ชิ้นส่วน	จำนวนการดำเนินการ		ความยืนยง
	ครั้ง	เทียบเท่า	
8PhHs	699885	1.52	ยืนยง
8PhHsz	699887	1.52	ยืนยง
9MiFs	460452	1.00	ยืนยง

4.6 การทดสอบแบบหย่อม (Patch Test)

การทดสอบแบบหย่อมนั้นเป็นการตรวจสอบคุณสมบัติของชิ้นส่วนว่ามีการลู่เข้าของผลเฉลยหรือไม่ ทั้งนี้ชิ้นส่วนที่ผ่านการทดสอบแบบหย่อมนั้นเมื่อทำการแบ่งปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนเล็กๆในการวิเคราะห์ก็จะได้ผลลัพธ์โดยประมาณที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่จำเป็นอย่างยิ่งในการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์

การทดสอบแบบหย่อมสามารถทำได้โดยนำชิ้นส่วนจำนวนน้อยๆมารวมกัน ทั้งนี้ต้องมีขั้วอย่างน้อยหนึ่งขั้วที่อยู่ภายในแบบหย่อม (patch) เพื่อที่ขั้วดังกล่าวจะถูกใช้ร่วมกันโดยชิ้นส่วนสองชิ้นส่วน หรือมากกว่าซึ่งส่งผลให้มีขอบของชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกันอย่างน้อยหนึ่งรอยต่อ รูปที่ 4.5-1 แสดงตัวอย่างแบบหย่อมที่ใช้ในการทดสอบซึ่งขั้วที่ขอบของแบบหย่อมจะถูกกระทำด้วยแรงกระทำที่ทำให้เกิดสภาพความเค้นคงที่ (state of constant stress) ในขณะที่ขั้วภายในจะไม่มีแรงกระทำ และการจำกัดของการกระจัดแต่อย่างใด แบบหย่อมจะต้องมีการจำกัดการกระจัดที่เพียงพอเพื่อป้องกันการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็งแต่สามารถแสดงสภาพความเค้นคงที่ดังกล่าวข้างต้นได้ โดยหากผลลัพธ์ที่ได้เท่า หรือมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของปัญหาอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้จึงสามารถสรุปได้ว่าชิ้นส่วนดังกล่าวผ่านการทดสอบแบบหย่อม

ชิ้นส่วนที่จะนำมาทดสอบนั้นต้องเป็นชิ้นส่วนที่มีความเสถียร (stability) คือต้องไม่มีรูปแบบไร้พลังงานของการการกระจัด หรือ รูปแบบปลอมของการการกระจัดเมื่อมีการจำกัดการกระจัดที่เพียงพอที่จะไม่เกิดการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง โดยที่สามารถตรวจสอบความเสถียรของชิ้นส่วนได้จากการทดสอบค่าเจาะจง (eigenvalue test) ของชิ้นส่วนดังจะกล่าวในหัวข้อ 4.5 ต่อไป

การทดสอบแบบหย่อมนั้นต้องทำการทดสอบทุกๆแบบของสภาพความเค้นคงที่คือต้องทำทุกๆความเค้นที่ใช้ในการสร้างชิ้นส่วน เช่น ในชิ้นส่วนสามมิติจะทำการทดสอบสภาพคงที่ของความเค้น σ_X , σ_Y , σ_Z , τ_{XY} , τ_{YZ} และ τ_{XZ} ในขณะที่ชิ้นส่วนแผ่นพื้นรับแรงดัด (plate bending elements) ต้องสามารถแสดงสภาพการคงที่ของแรงดัด M_X , M_Y และแรงบิด M_{XY} ได้ ในที่นี้ได้ทำการทดสอบแบบหย่อมโดยใช้แผ่นที่มีสมบุติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic material)

จากผลการทดสอบแบบหย่อมในตารางที่ 4.6-1 และ 4.6-2 พบว่าชิ้นส่วนทุกชิ้นส่วนที่ศึกษาจะสามารถผ่านการทดสอบแบบหย่อมในส่วนของการรับแรงดึง และแรงเฉือนระนาบ แต่จะไม่สามารถผ่านในส่วนของการดัด และการบิด ทั้งนี้การทดสอบแบบหย่อมในส่วนของแรงเฉือนตั้งฉากนั้นจะมีชิ้นส่วน 4PhHsz 4MiFs 9MiFs 8PhHs และ 8PhHsz ซึ่งส่วนทั้ง 5 ชิ้นส่วนนี้ได้สมมติให้ความเค้นเฉือนตั้งฉากเป็นศูนย์ที่ขอบบน และขอบล่างของโครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น แม้ว่าชิ้นส่วนจะไม่สามารถผ่านการทดสอบแบบหย่อมในทุกแบบแต่ชิ้นส่วนที่ศึกษาก็ยังมีการลู่เข้าสู่คำตอบอยู่ดังได้แสดงในหัวข้อ 4.1

ตารางที่ 4.6-1 ผลการทดสอบแบบหย่อมของชิ้นส่วน 4 ขั้ว

ชิ้นส่วน	การบิด	แรงเฉือนตั้งฉาก	การดัด	แรงดึง	แรงเฉือนระนาบ
4HeHsz	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
4PhHsz	ไม่ผ่าน	ไม่ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
4HpHsz	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
4HbHsz1	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
4HbHsz2	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
4HbPl	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
4HbMd1	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
4HbMd2	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
4HbpHsz	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
4MiFs	ไม่ผ่าน	ไม่ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน

ตารางที่ 4.6-2 ผลการทดสอบแบบหย่อมของชิ้นส่วน 8 ขั้วและ 9 ขั้ว

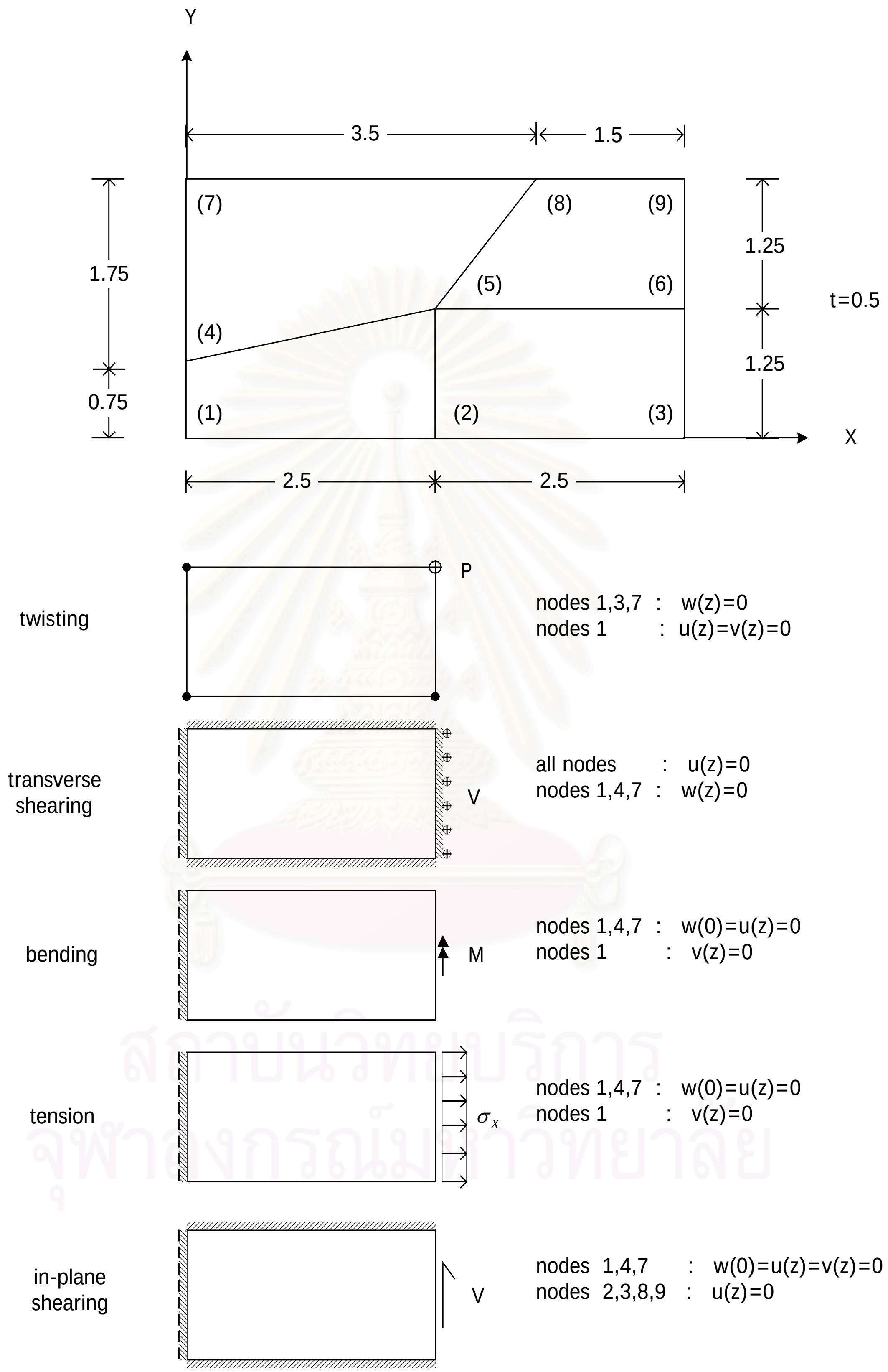
ชิ้นส่วน	การบิด	แรงเฉือนตั้งฉาก	การดัด	แรงดึง	แรงเฉือนระนาบ
8PhHs	ไม่ผ่าน	ไม่ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
8PhHsz	ไม่ผ่าน	ไม่ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน
9MiFs	ไม่ผ่าน	ไม่ผ่าน	ไม่ผ่าน	ผ่าน	ผ่าน

4.7 ชิ้นส่วนในโปรแกรมสำเร็จรูป

ในที่นี้ผู้วิจัยได้ศึกษาชิ้นส่วนในโปรแกรม ANSYS 5.4 [74] ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่วางซ้อนเป็นชั้นนั้นพบว่าชิ้นส่วนที่มีในโปรแกรมนี้จะไม่ใช่ชิ้นส่วนพันทางหรือชิ้นส่วนผสมแต่อย่างใดแต่จะเป็นชิ้นส่วนการกระจัดที่เป็นชิ้นส่วนเปลือกบาง 2 ชิ้นส่วน และชิ้นส่วนสามมิติ 1 ชิ้นส่วนดังแสดงในตารางที่ 4.7-1

ตารางที่ 4.7-1 ชิ้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่วางซ้อนเป็นชั้นใน ANSYS 5.4

ชื่อ	จำนวนขั้ว	DOF ต่อขั้ว
SHELL91	8	6
SHELL99	8	6
SOLID46	8	3



รูปที่ 4.5-1 การทดสอบแบบหย่อม

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย

จากงานวิจัยพบว่าการกระจัดตามทฤษฎี ESLT ที่ใช้ในชิ้นส่วน 4MiFs และ 9MiFs มีความง่าย และไม่สิ้นเปลืองในการคำนวณ โดยให้ผลการวิเคราะห์ในระดับโดยรวม เช่น การโก่งตัว แรงในแนวแกน แรงดัด ฯลฯ สำหรับโครงสร้างทั่วไปได้ดี แต่ทั้งนี้ก็ยังไม่สามารถที่จะให้ผลการวิเคราะห์ของความเค้นเฉือนตั้งฉากในระดับแต่ละชั้นได้ดีเพียงพอ เนื่องจากทฤษฎี ESLT นั้นสมมุติให้ความเครียดเฉือนตั้งฉากมีความต่อเนื่องตลอดความหนาของแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้นซึ่งทำให้ความเค้นเฉือนตั้งฉากจะไม่ต่อเนื่องกันตรงรอยต่อแต่ละชั้นของโครงสร้างอันมีสาเหตุจากการที่แต่ละชั้นมีคุณสมบัติของวัสดุที่แตกต่างกันนั้นเอง

ทฤษฎีการกระจัดหลายชั้น (LWT) ไม่เหมือนกับทฤษฎี ESLT คือจะทำการสมมุติสนามการกระจัดตลอดความหนาของโครงสร้างโดยที่จะสมมุติสนามการกระจัดตามแต่ละชั้นของโครงสร้างแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น ส่งผลให้ความเครียดเฉือนตั้งฉากไม่จำเป็นต้องต่อเนื่องกันในแต่ละชั้นอันนำไปสู่ความเค้นเฉือนตั้งฉากที่สามารถมีความต่อเนื่องได้

เมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีการกระจัดแบบ ESLT แล้วพบว่าทฤษฎีการกระจัดแบบ PLWT ที่ใช้ในชิ้นส่วน 4HbPL นั้นจะสามารถให้ค่าการกระจัดและความเค้น โดยเฉพาะค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากของโครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นที่มีจำนวนชั้นมาก (แผ่นพื้นซ้อนกัน 9 ชั้น) ได้ดีกว่าทฤษฎีการกระจัดแบบ ESLT แม้ว่าการใช้ฟังก์ชันวกเวียนในทฤษฎีการกระจัดแบบ ESLT จะสามารถให้ความเค้นเฉือนตั้งฉากที่ดีเมื่อโครงสร้างมีจำนวนชั้นน้อยๆ (แผ่นพื้นซ้อนกัน 3 ชั้น) แต่ในโครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่มีจำนวนชั้นมากขึ้นนั้นค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากจะคลาดเคลื่อนมากขึ้นตามไปด้วย และพบว่าทฤษฎีการกระจัดแบบ ESLT จะมีการกระจายตัวของความเค้นเฉือนตั้งฉากที่ไม่ต่อเนื่องบริเวณรอยต่อระหว่างชั้นของแผ่นพื้นต่างวัสดุ

โดยการที่จะใช้แบบจำลองการกระจัดตามทฤษฎีใดทฤษฎีหนึ่งเพียงทฤษฎีเดียวอาจไม่ใช่วิธีที่เหมาะสมที่สุดในการวิเคราะห์โครงสร้างต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้นทั่วๆไป การใช้สนามการกระจัดแบบรวมในชิ้นส่วน 4HbMD1 และ 4HbMD2 โดยที่การวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นที่มีจำนวนชั้นน้อย (แผ่นพื้นซ้อนกัน 3 ชั้น) นั้นสามารถแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้นเพื่อให้ได้ความเค้นเฉือนตั้งฉากที่แม่นยำขึ้น ชิ้นส่วนทั้งสองนี้จึงเป็นอีกทางเลือกหนึ่งแทนการใช้ชิ้นส่วนสามมิติ เพราะสามารถให้ทั้งความแม่นยำและ ความประหยัดในการคำนวณ

ชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้ว และชิ้นส่วนผสมจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ซึ่งเป็นชิ้นส่วนที่มีการสมมุติการกระจัดส่วนเพิ่มนั้นพบว่า ควรที่จะสมมุติจำนวนพารามิเตอร์ต่างๆโดยให้ค่า $R_C \left(= \dfrac{n_\beta}{n_q + n_\lambda}\right)$ ไม่เกิน 3 เพราะจากการที่ชิ้นส่วน 4HbHsz1 ซึ่งมีค่า $R_C = 3.33$ จะ

ให้ค่าความเค้นเฉือนตั้งฉากคลาดเคลื่อนร้อยละ 43 เมื่อใช้วิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนกัน 3 ชั้นที่มีค่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนามากๆ (S=100)

ชิ้นส่วนอันดับต่ำ (ชิ้นส่วน 4 ขั้ว) ซึ่งไม่มีการสมมุติการกระจัดส่วนเพิ่มเช่น ชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วนจากหลักการจิง-เลียว (ชิ้นส่วน 4PhHsz) และชิ้นส่วนพันทางจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรด้วยวิธีทัณฑกรรม (ชิ้นส่วน 4HpHsz) จะพบว่าเกิดการยึดเนื่องจากแรงเฉือนเมื่อค่าอัตราส่วนความยาวต่อความหนามากๆ (S>100) ดังนั้นการสร้างชิ้นส่วนจากหลักการแปรผันทั้งสองข้างต้นจึงควรใช้ชิ้นส่วนอันดับสูง เช่น ชิ้นส่วน 8 ขั้ว 8PhHs และ 8PhHsz เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาการยึดตัวเนื่องจากแรงเฉือน

จากชิ้นส่วน 4HbpHsz ที่มีการใช้วิธีทัณฑกรรมกับชิ้นส่วน 4HbHsz2 ที่สร้างจากหลักการเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ที่ดัดแปรแล้วพบว่าไม่ได้ทำให้ชิ้นส่วน 4HbpHsz ให้ค่าการกระจัดและความเค้นต่างจากชิ้นส่วน 4HbHsz2 อย่างมีนัยสำคัญ

นอกจากนี้ชิ้นส่วนพันทางแบบบางส่วนนั้นจะมีข้อเสียจากการที่สมมุติความเค้นเฉือนต่อเนื่องกันในแต่ละชั้นของแผ่นพื้นทำให้ในโครงสร้างที่ประกอบด้วยแผ่นจำนวนมากขึ้นจะมีจำนวนการดำเนินการเพิ่มมากขึ้นจากการหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ H ที่มีขนาดใหญ่ โดยจะไม่เหมือนกับชิ้นส่วนพันทาง และชิ้นส่วนผสมที่มีการสมมุติสนามความเค้นในแต่ละชั้นที่ไม่ขึ้นแก่กัน ทำให้ขนาดของเมตริกซ์ H จะไม่ขึ้นกับจำนวนของแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ประกอบกันเป็นโครงสร้าง

จากการทดสอบหากพิจารณาด้านความแม่นของการกระจัดนั้น ชิ้นส่วนที่ศึกษาในงานวิจัยนี้จะให้ค่าการกระจัดที่แม่นยำใกล้เคียงกัน แต่หากจะพิจารณาจากแง่ของความแม่นของความเค้นแล้วพบว่าชิ้นส่วน 4HbHsz2 4HbMd1 และ 4HbMd2 ซึ่งเสนอโดยผู้วิจัย และชิ้นส่วน 4HeHsz ซึ่งเสนอโดยชวงและได [24] นั้นสามารถให้ค่าความเค้นโดยเฉพาะความเค้นเฉือนตั้งฉากที่ดีในการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นที่มีสมมาตรกับระนาบ xy แต่หากต้องการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นที่ไม่มีสมมาตรกับระนาบ xy พบว่าชิ้นส่วน 4HbMd2 จะให้การกระจายตัวของความเค้นตลอดความหนาของโครงสร้างที่ดีกว่า

รายการอ้างอิง

1) Mau S. T. ; Tong, P. ; and Pian, T. H. H. Finite Element Solutions for Laminated Thick Plates. **J.**
Composite Materials 6 (1972): 304-311.

2) Reissner, E. On Transverse Bending of Plates, Including the Effect of Transverse Shear Deformation.
Int. J. Solids Struct 11 (1975): 569-573.

3) Noor, A. K. ; and Mathers, M. D. Finite Element Analysis of Anisotropic Plates. **Int. J. Num. Meth.**
Eng. 11 (1977): 289-307.

4) Pugh, E. D. L. ; Hinton, E. ; and Zienkiewicz, O. C. A Study of Quadrilateral Plate Bending Element
With Reduced Integration. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 12 (1978): 1059-1079.

5) Panda, S. C. ; and Natarajan, R. Finite Element Analysis of Laminated Composite Plates. **Int. J. Num.**
Meth. Eng. 14 (1979): 69-79.

6) Spilker, R. L. A Hybrid Stress Finite Element for Thick Multilayer Laminates. **Comput. Struct.** 11
(1980): 507-514.

7) Reddy, J. N. A Penalty Plate-Bending Element for the Analysis of Laminated Anisotropic Composite
Plates. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 15 (1980): 1187-1206.

8) Spilker, R. L. ; and Munir, N. I. A Serendipity Cubic-Displacement Hybrid-Stress Element for Thin and
Moderately Thick Plates. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 15 (1980): 1261-1278.

9) Spilker, R. L. ; and Munir, N. I. The Hybrid-Stress Model for Thin Plates. **Int. J. Num. Meth. Eng.**
15 (1980): 1239-1260.

10) Pian, T. H. H. ; and Sumihara, K. Rational Approach for Assumed Stress Finite Element. **J. Num.**
Meth. Eng. 20 (1984): 1685-1695.

11) Reddy, J. N. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. **J. Appl. Mech.** 51
(1984): 745-752.

12) Sciuva, M. D. An improved Shear-Deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic
Shells and Plates. **J. Appl. Mech.** 54 (1987): 589-596.

13) Pian, T. H. H. ; and Wu, C. C. A Rational Approach for Choosing Stress Terms for Hybrid Finite
Element Formulations. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 26 (1988): 2331-2343.

14) Simo, J. C. ; and Rifai, M. S. A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of
Incompatible Modes. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 29 (1990): 1595-1638.

15) Pagano, N. J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. **J.
Composite Materials** 4 (1970): 20-34.

16) Whitney, J. M. The Effect of Boundary Conditions on the Response of Laminated Composites. **J.
Composite Materials** 4 (1970): 192-203.

17) Pagano, N. J. Influence of Shear Coupling in Cylindrical Bending of Anisotropic Laminates. **J.
Composite Materials** 4 (1970): 330-343.

18) Spilker, R. L. Invariant 8-node Hybrid-Stress Elements for Thin and Moderately Thick Plates. **Int. J.
Num. Meth. Eng.** 18 (1982): 1153-1178.

19) Rao, R. S. ; and Storaski, H. K. Finite Element Analysis of Composite Plates Using a Weak Form of the
Kirchhoff Constraints. **Finite Elements Anal. Design** 13 (1993): 191-208.

20) Abdalla Filho, J. E. ; and Dow, J. O. An Error Analysis Approach for Laminated Composite Plate Finite
Element Models. **Comput. Strut.** 52 (1994): 611-616.

21) Dow, J. O. ; and Abdalla, J. E. Qualitative Errors in Laminated Composite Plate models. **Int. J. Num.
Meth. Eng.** 37 (1994): 1215-1230.

22) Cho, M. ; and Kim, J. S. Four-noded Finite Element Post-Process Method Using a Displacement Field
of Higher-Order Laminated Composite Plate Theory. **Comput. Struct.** 61 (1996): 283-290.

23) Spilker, R. L. Hybrid-Stress 8-node Elements for Thin and Thick Multilayer Laminated Plates. **Int. J.
Num. Meth. Eng.** 18 (1982): 801-828.

24) Cheung, Y. K. ; and Di, S. Analysis of Laminated Composite Plates by Hybrid Stress Isoparametric

Element. **Int. J. Solids Struct.** 30 (1993): 2843-2857.

25) Subramanian, P. Finite Element Analysis of Thick Homogeneous Plates. **Comput. Struct.** 71 (1999): 469-480.

26) Auricchio, F. ; and Sacco, E. A Mixed-Enhanced Finite-Element for the Analysis of Laminated Composite Plates. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 44 (1999): 1481-1504.

27) Mukherjee, N. ; and Sinha, P. K. A Comparative Finite Element Heat Conduction Analysis of Laminated Plates. **Comput. Struct.** 52 (1994): 505-512.

28) Gendy, A. S. ; Saleeb, A. F. ; and Mikhail, S. N. Free Vibration and Stability Analysis of Laminated Composite Plates and Shells With Hybrid/Mixed Formulation. **Comput. Struct.** 63 (1997): 1149-1163.

29) Liu, S. A Finite Element Analysis Procedure Using Simple Quadrilateral Plate/Shell Elements. **Comput. Struct.** 32 (1989): 937-944.

30) Rao, K. M. ; and Maheswara Rao, Y. U. Computer Program for the Stiffness Matrix of Laminated Plates Using the Hybrid-Stress Finite Element. **Comput. Struct.** 43 (1992): 351-363.

31) Ghosh, A. K. ; and Dey, S. S. A Simple Finite Element for the Analysis of Laminated Plates. **Comput. Struct.** 44 (1992): 585-596.

32) Liangxin, S. ; and Zhiyu, S. The Analysis of Laminated Composite Plates Based on the Simple Higher-Order Theory. **Comput. Struct.** 43 (1992): 831-837.

33) Owens, M. E. ; PalaZotto, A. N. ; and Dennis, S. T. Transverse Shear Flexibility in Laminated Plates Undergoing Large Deflections. **Comput. Struct.** 45 (1992): 69-78.

34) Chandrashekhara, K. Thermal Buckling of Laminated Plates Using a Shear Flexible Finite Element. **Finite Elements Anal. Design** 12 (1992): 51-61.

35) Paul, T. K. ; and Rao, H. M. Finite Element Evaluation of Stress Concentration Factor of Thick Laminated Plates Under Transverse Loading. **Comput. Struct.** 48 (1993): 311-317.

36) Biswal, K. C. ; and Ghosh, A. K. Finite Element Analysis for Stiffened Laminated Plates Using Higher-Order Shear Deformation Theory. **Comput. Struct.** 53 (1994): 161-171.

37) Ghosh, A. K.; and Dey, S. S. Buckling of Laminated Plates-a Finite Element Based on Higher-Order

Theory. **Finite Elements Anal. design** 15 (1992): 289-602.

38) Yong, Y. K. ; and Cho, Y. Higher-Order, Partial Hybrid Stress, Finite Element formulation for Laminated Plates and Shell Analyses. **Comput. Struct.** 57 (1995): 817-827.

39) Xiao, Q. Z. ; Li, B. L. ; and Williams, F. W. An Improved Hybrid-Stress Element Approach to Torsion

of Shafts. **Comput. Struct.** 71 (1999): 535-563.

40) Pinsky, P. M. ; and Jasti, R. V. A Mixed Finite Element for Laminated Composite Plates Based on the

Use of Bubble Functions. **Eng. Comput.** 6 (1989): 316-330.

41) Pinsky, P. M. ; and Jasti, R. V. A Mixed Finite Element formulation for Reissner-Mindlind Plates Based on the Use of Bubble Functions. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 28 (1989): 1677-1702.

42) Pian, T. H. H. ; and Chen, D. P. Alternative Ways for Formulation of Hybrid Stress Elements. **Int. J.**

Num. Meth. Engng. 18 (1982): 1679-1684.

43) Pian, T. H. H. ; and Sumihara, K. Hybrid Semiloof Elements for Plates and Shells Based on a Modified

Hu-Washizu Primciple. **Comput. Struct.** 19 (1984): 165-173.

44) Pian, T. H. H. ; Chen, D. ; and Kang, D. A New Formulation of Hybrid/Mixed Finite Element. **Comput. Struct.** 16 (1983): 81-87.

45) Jing, H. S. ; and Lioa, M. L. Partial Hybrid Stress Element for Transient Analysis of Thick Laminated

Composite Plates. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 29 (1990): 1787-1796.

46) Jing, H. S.; and Lioa, M. L. Partial Hybrid Stress Element for the Analysis of Thick Laminated Composite Plates. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 28 (1989): 2813-2827.

47) Jing, H. S. On the limitation principles for Partial Hybrid Stress Model. **Comput. Struct.** 38 (1991):

113-117.

48) Wu, C. C. ; and Cheung, Y. K. On Optimization Approaches of Hybrid Stress Elements. **Finite Elements Anal. Design** 31 (1995): 111-128.

49) Pian, T. H. H. ; and Chen, D. On the Suppression of Zero Energy Deformation Modes. **Int. J. Num.**

Meth. Eng. 19 (1983): 1741-1752.

50) Pian, T. H. H. ; and Tong, P. Basis of Finite Element Methods for Solid Continua. **Int. J. Num.**

Meth. Eng. 1 (1969): 3-28.

51) Pian, T. H. H. State-of-the-art Development of Hybrid/Mixed Finite Element Method. **Finite Elements**
Anal. Design 21 (1995): 5-20.

52) Pian, T. H. H. ; and Tong, P. Relations Between Incompatible Displacement Model and Hybrid Stress
Model. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 22 (1986): 173-181.

53) Weissman, S. L. ; and Taylor, R. L. Treatment of Internal Constraints by Mixed Finite Element
Methods: Unification of Concepts. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 33 (1992): 131-141.

54) Zienkiewicz, O. C. ; Qu, S. ; Taylor, R. L. ; and Nakasawa, S. The Patch Test for Mixed
Formulations. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 23 (1986): 1873-1883.

55) Pian, T. H. H. A Historical Note about Hybrid Elements. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 12 (1978):
891-892.

56) Liao, M. L. ; Jing, H. S. ; and Hwang, M. Improvements on the Higher Order Plate Element With
Partial Hybrid Stress Model. **Comput. Struct.** 42 (1992): 45-51.

57) Tseng, Y. P. ; and Wu, T. C. Partial Hybrid Stress Method Applied to the Higher-Order Laminated
Plates Theory. **Comput. Struct.** 41 (1991): 313-323.

58) Chen, W. ; and Cheung, Y. K. A New Approach for the Hybrid Element Method. **Int. J. Num. Meth.**
Eng. 24 (1987): 1697-1709.

59) Pian, T. H. H. Finite Elements Based on Consistency Assumed Stresses and Displacement. **Finite**
Elements Anal. Design 1 (1985): 131-140.

60) Lo, K. H. ; Christensen, R. M. ; and Wu, E. M. A Higher-Order Theory of Plate Deformation , Part 2 –
Laminated Plates. **J. Appl. Mech.** (1977): 669-676.

61) Carrera, E. C^0 Reissner-Mindlin Multilayered Plate Elements Including Zig-zag and Interlaminar Stress
Continuity. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 39 (1996): 1797-1820.

62) Aitharaju, V. R. ; and Averill, R. C. C^0 Zig-zag Finite Element for Analysis of Laminated Composite
Beams. **J. Eng. Mech.** 125 (1999): 323-330.

63) Reddy, J. N. On Refined Computational Models of Composite Laminates. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 27 (1989): 361-382.

64) Robbins, D. H. ; and Reddy, J. N. Modelling of Thick Composites Using a Layerwise Laminate Theory. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 36 (1993): 655-677.

65) Robbins, D. H. ; and Reddy, J. N. Variable Kinematic Modelling of Laminated Composite Plates. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 39 (1993): 2283-2317.

66) Wu, C. P. ; and Hsu, C. S. Free vibration Analysis of Thick Laminated Plates Using a Mixed Finite Element. **J. Chinese Ins. Eng.** 17 (1994): 753-759.

67) Wu C. P. ; and Yen C. B. Interlaminar Stress Mixed Finite Element Analysis of Unsymmetrically Laminated Composite Plates. **Comput. Struct.** 49 (1993): 411-419.

68) Wu, C. C. ; Huang, M. G. ; and Pian, T. H. H. Consistency Condition and Convergence Criteria of Incompatible Elements : General Formulation of Incompatible Functions and Its Application. **Comput. Struct.** 27 (1987): 639-644.

69) Kabir, H. R. H. Static Response of Anti-Symmetric Angle-Ply Laminated Shear-Flexible Clamped Plates. **Comput. Struct.** 53 (1994): 201-208.

70) Kabir, H. R. H. A double Fourier Series Approach to the Solution of a Moderately Thick Simply Supported Plate With Anti-Symmetric Angle-Ply Lamination. **Comput. Struct.** 43 (1992): 769-774.

71) บุญธรรม เหมหีม. **การเปรียบเทียบชิ้นส่วนแผ่นพื้นพันทางรับแรงดัด**. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.

72) Bathe, K. J. **Finite Element Procedures.** New Jersey : Prince-Hall, 1996.

73) Cook, R. D. ; Malkus, D. S. ; and Plesha, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis.** 3rd ed. New York : John willey & son, 1989.

74) Saeed Moaveni **Finte Element Analysis Theoretical and Application with ANSYS** Minesota State University, Mankato.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายละเอียดชิ้นส่วนที่ศึกษา

ก1. ชิ้นส่วน 4HeHsz

จากหลักการหาความเค้นที่เหมาะสมดังแสดงในสมการที่ 3.1.1.1-8 ซึ่งจะต้องมีการคำนวณค่า M_1^I และ M_2^I ทั้งนี้อาศัยหลักการจากสมการที่ 2.1.1-16 จะสามารถเขียนสมการที่ 3.1.1.1-8ก ได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} M_1^I &= \int_{\partial V^{eI}} N_\lambda^T n P_1^I dS = \int_{V^{eI}} [(DN_\lambda)^T P_1^I + N_\lambda^T (D^T P_1^I)] dV \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [(DN_\lambda)^T P_1^I + N_\lambda^T (D^T P_1^I)] \left|J\right| d\xi\, d\eta\, d\zeta \end{aligned} \qquad \text{(ก1-1ก)}$$

และ

$$\begin{aligned} M_2^I &= \int_{\partial V^{eI}} N_\lambda^T n P_2^I dS = \int_{V^{eI}} [(DN_\lambda)^T P_2^I + N_\lambda^T (D^T P_2^I)] dV \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [(DN_\lambda)^T P_2^I + N_\lambda^T (D^T P_2^I)] \left|J\right| d\xi\, d\eta\, d\zeta \end{aligned} \qquad \text{(ก1-1ข)}$$

โดยที่

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad \text{(ก1-2)}$$

โดยที่การหาค่าอนุพันธ์เหล่านี้จะอาศัยหลักการไอโซพาราเมตริกกับเมตริกซ์จาโคบีซึ่งจะได้ว่า

$$DN_\lambda = \begin{bmatrix} R_{11}(2\xi) & R_{12}(2\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{21}(2\xi) & R_{22}(2\eta) & 0 & 0 \\ R_{21}(2\xi) & R_{22}(2\eta) & R_{11}(2\xi) & R_{12}(2\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{21}(2\xi) & R_{22}(2\eta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{11}(2\xi) & R_{12}(2\eta) \end{bmatrix} \qquad \text{(ก1-3)}$$

$$D^T P_1^I = \left[\begin{matrix} R_{12} & 0 & R_{11}(\zeta) & R_{12}(\zeta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{21}(\eta)+R_{22}(\xi) & 0 & R_{21}(\zeta) & R_{22}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{21} & 0 & R_{21}(\zeta) & R_{22}(\zeta) & 0 & R_{11}(\eta)+R_{12}(\xi) & 0 & R_{11}(\zeta) & R_{12}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{33} & R_{33}(\xi) & R_{33}(\eta) & R_{33}(2\zeta) \\ 0 & R_{33} & R_{33}(\xi) & R_{33}(\eta) & R_{33}(2\zeta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{21}(\zeta) & R_{22}(\zeta) & 0 & R_{12} & 0 & R_{11}(\zeta) & R_{12}(\zeta) & 0 \end{matrix}\right]$$

(ก1-4)

$$D^T P_2^I = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & R_{11} & R_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{22} & R_{11} \end{bmatrix} \qquad \text{(ก1-5)}$$

ทั้งนี้เมื่อนำสมการที่ ก1-3 ถึง ก1-5 แทนลงในสมการที่ ก1-1 และ ก1-2 ซึ่งจะได้เมตริกซ์ M_1^I และ M_2^I สามารถคำนวณเมตริกซ์ $\breve{P}^I$ ในสมการที่ 3.1.1.1-11 สุดท้ายก็สามารถได้เมตริกซ์สติฟเนสจากสมการที่ 3.1.1.1-14 และ 3.1.1.1-15

ก2. ชิ้นส่วน 8PhHs

จากสมการข้างต้นการกระจัดในสมการที่ 3.1.2.2-1 จะสามารถเขียนได้ว่า

$$\underline{u} = N\underline{q} \qquad \text{(ก2-1)}$$

เมื่อ $\quad \underline{q} = [\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \ ....\ \underline{q}_8]^T$

โดยที่ $\quad \underline{q}_j = \{u_{0j}\ v_{0j}\ w_{0j}\ \phi_{Xj}\ \phi_{Yj}\ \phi_{Zj}\ \kappa_{Xj}\ \kappa_{Yj}\ \kappa_{Zj}\ \varphi_{Xj}\ \varphi_{Yj}\}^T$

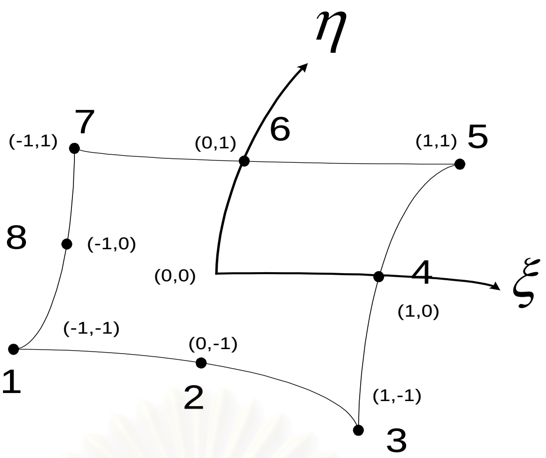
จากสมการที่ ก2-1 ฟังก์ชันสัณฐานที่แสดงไว้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$N = [\breve{N}_1\ \breve{N}_2\ \breve{N}_3 ..... \breve{N}_8] \qquad \text{(ก2-2)}$$

โดยที่

$$\breve{N}_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 & zN_j & 0 & 0 & z^2N_j & 0 & 0 & z^3N_j & 0 \\ 0 & N_j & 0 & 0 & zN_j & 0 & 0 & z^2N_j & 0 & 0 & z^3N_j \\ 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & zN_j & 0 & 0 & z^2N_j & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(ก2-2ก)}$$

เมื่อฟังก์ชันสัณฐานที่แต่ละขั้วของชิ้นส่วน 8 ขั้วตามรูปที่ ก2-1 คือ



<u>รูปที่ ก2-1 การเรียงขั้วของชิ้นส่วน 8 ขั้ว</u>

$$\left.\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)\\
N_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)\\
N_4 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\\
N_5 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)\\
N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\\
N_7 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)\\
N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(ก2-3)}$$

โดยที่อนุพันธ์ของฟังก์ชันสัณฐานเทียบกับพิกัดฉาก X และ Y สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ในสมการที่ 3.1.1.1-23 คือ $N_{j,X} = R_{11}N_j,_{\xi} + R_{12}N_j,_{\eta}$ และ $N_{j,Y} = R_{21}N_j,_{\xi} + R_{22}N_j,_{\eta}$ เป็นต้น โดยที่อนุพันธ์ของฟังก์ชันสัณฐานเทียบกับพิกัดธรรมชาติในแนวระนาบคือ

$$\left.\begin{aligned}
N_1,_{\xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta) & N_2,_{\xi} &= \frac{1}{2}(-2\xi)(1-\eta)\\
N_3,_{\xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta) & N_4,_{\xi} &= \frac{1}{2}(+1)(1-\eta^2)\\
N_5,_{\xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta) & N_6,_{\xi} &= \frac{1}{2}(-2\xi)(1+\eta)\\
N_7,_{\xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta) & N_8,_{\xi} &= \frac{1}{2}(-1)(1-\eta^2)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(ก2-4ก)}$$

$$\left.\begin{aligned}
N_{1,\eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(\xi+2\eta) & N_{2,\eta} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(-1) \\
N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(-\xi+2\eta) & N_{4,\eta} &= \frac{1}{2}(1+\xi)(-2\eta) \\
N_{5,\eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta) & N_{6} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(+1) \\
N_{7,\eta} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(-\xi+2\eta) & N_{8} &= \frac{1}{2}(1-\xi)(-2\eta)
\end{aligned}\right\} \qquad (ก2\text{-}4ข)$$

หากกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}_f &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_{XY} \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = [B_{f1}\, B_{f2} \ldots\, B_{f8}] \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \vdots \\ \underline{q}_8 \end{Bmatrix} = B_f\, \underline{q} \\
\underline{\gamma}_t &= \begin{Bmatrix} \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \end{Bmatrix} = [B_{t1}\, B_{t2} \ldots\, B_{t8}] \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \vdots \\ \underline{q}_8 \end{Bmatrix} = B_t\, \underline{q}
\end{aligned}\right\} \qquad (ก2\text{-}5)$$

จากการกระจัดในสมการที่ 3.1.2.2-1, ก2-2 และ ก2-3 จะได้ว่า

$$B_t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} N = [B_{t1}\, B_{t2} \ldots B_{t8}] \qquad (ก2\text{-}6)$$

เมื่อ

$$B_{tj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{j,Y} & 0 & N_j & zN_{j,Y} & 0 & 2zN_j & z^2N_{j,Y} & 0 & 3z^2N_j \\ 0 & 0 & N_{j,X} & N_j & 0 & zN_{j,X} & 2zN_j & 0 & z^2N_{j,X} & 3z^2N_j & 0 \end{bmatrix} \qquad (ก2\text{-}6ก)$$

$$B_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} N = [B_{f1}\, B_{f2} \ldots B_{f8}] \qquad (ก2\text{-}7)$$

เมื่อ

$$B_{fj} = \begin{bmatrix} N_{j,X} & 0 & 0 & zN_{j,X} & 0 & 0 & z^2N_{j,X} & 0 & 0 & z^3N_{j,X} & 0 \\ 0 & N_{j,Y} & 0 & 0 & zN_{j,Y} & 0 & 0 & z^2N_{j,Y} & 0 & 0 & z^3N_{j,Y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & 2zN_j & 0 & 0 \\ N_{j,Y} & N_{j,X} & 0 & zN_{j,Y} & zN_{j,X} & 0 & z^2N_{j,Y} & z^2N_{j,X} & 0 & z^3N_{j,Y} & z^3N_{j,X} \end{bmatrix} \quad \text{(ก2-7ก)}$$

ก3. ชิ้นส่วน 8PhHsz

ความเค้นเฉือนตั้งฉากของชั้นที่ I หรือ $\underline{\sigma}_t^I$ นั้นจะใช้สนามความเค้นเฉือนตั้งฉากเหมือนกับชิ้นส่วน 8PhHs ได้เป็นดังแสดงในสมการที่ 3.1.2.2-3 แต่จากการที่ใช้สนามการกระจัดตามสมการที่ 3.1.1.1-16 จะได้

$$\underline{u}_q^I = N_q^I \underline{q} = [\hat{N}_{q1}^I \; \hat{N}_{q2}^I \; ..... \; \hat{N}_{q8}^I] \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_8 \end{Bmatrix} \quad \text{(ก3-1)}$$

จำนวนการกระจัดที่ขั้วทั้งหมดของชิ้นส่วน 8 ขั้วแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น 1 ชิ้นส่วนซึ่งประกอบด้วยแผ่นพื้น NL ชั้นมี 72 ค่าซึ่งไม่ขึ้นกับจำนวนชั้นของแผ่นพื้นเมื่อ $\underline{q}_i$ คือการกระจัดสามัญที่ขั้ว j เขียนได้ว่า

$$\underline{q}_i = [u_{0i} \; v_{0i} \; w_{0i} \; \phi_{Xj} \; \phi_{Yj} \; \omega_{Xj} \; \omega_{Yj} \; \varphi_{Xj} \; \varphi_{Yi}]^T \quad \text{(ก3-2)}$$

โดยที่เมตริกซ์ $\hat{N}_{qj}^I$ คือ

$$\hat{N}_{qj}^I = \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 & zN_j & 0 & z^3N_j & 0 & \hat{z}N_j & 0 \\ 0 & N_j & 0 & 0 & zN_j & 0 & z^3N_j & 0 & \hat{z}N_j \\ 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ก3-4)}$$

หากกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_f^I &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}^I = [B_{f1} \, B_{f2} .... B_{f8}]^I \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \vdots \\ \underline{q}_8 \end{Bmatrix} = B_f^I \underline{q} \\ \underline{\gamma}_t^I &= \begin{Bmatrix} \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \end{Bmatrix}^I = [B_{t1} \, B_{t2} .... B_{t8}]^I \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \vdots \\ \underline{q}_8 \end{Bmatrix} = B_t^I \underline{q} \end{aligned}\right\} \quad \text{(ก3-5)}$$

จากสมการที่ ก3-4 และ ก3-5 จะได้ว่า

$$B_{tj}^{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{j,Y} & 0 & N_{j} & 0 & 3z^{2}N_{j} & 0 & (-1)^{I}N_{j} \\ 0 & 0 & N_{j,X} & N_{j} & 0 & 3z^{2}N_{j} & 0 & (-1)^{I}N_{j} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ก3-6)}$$

และ

$$B_{fj}^{I} = \begin{bmatrix} N_{j,X} & 0 & 0 & zN_{j,X} & 0 & z^{3}N_{j,X} & 0 & \hat{z}N_{j,X} & 0 \\ 0 & N_{j,Y} & 0 & 0 & zN_{j,Y} & 0 & z^{3}N_{j,Y} & 0 & \hat{z}N_{j,Y} \\ N_{j,Y} & N_{j,X} & 0 & zN_{j,Y} & zN_{j,X} & z^{3}N_{j,Y} & z^{3}N_{j,X} & \hat{z}N_{j,Y} & \hat{z}N_{j,X} \end{bmatrix} \quad \text{(ก3-7)}$$

ก4. ชิ้นส่วน 4PhHsz

จากการที่ใช้สนามการกระจัดตามสมการที่ 3.1.1.1-16 จะได้

$$\underline{u}_{q}^{I} = N_{q}^{I}\underline{q} = [\breve{N}_{q1}^{I}\ \breve{N}_{q2}^{I}\ .....\ \breve{N}_{q4}^{I}] \begin{Bmatrix} \underline{q}_{1} \\ \vdots \\ \underline{q}_{4} \end{Bmatrix} \quad \text{(ก4-1)}$$

จำนวนการกระจัดที่ขั้วทั้งหมดของชิ้นส่วน 4 ขั้วแผ่นพื้นที่ซ้อนเป็นชั้น 1 ชิ้นส่วนซึ่งประกอบด้วยแผ่นพื้น NL ชั้นมี 36 ค่าซึ่งไม่ขึ้นกับจำนวนชั้นของแผ่นพื้นเมื่อ $\underline{q}_{j}$ คือการกระจัดสามัญที่ขั้ว j เขียนได้ว่า

$$\underline{q}_{j} = [u_{0i}\, v_{0i}\, w_{0i}\, \phi_{Xj}\, \phi_{Yj}\, \omega_{Xj}\, \omega_{Yj}\, \varphi_{Xj}\, \varphi_{Yi}]^{T} \quad \text{(ก4-2)}$$

โดยที่เมตริกซ์ $\breve{N}_{qj}^{I}$ คือ

$$\breve{N}_{qj}^{I} = \begin{bmatrix} N_{j} & 0 & 0 & zN_{j} & 0 & z^{3}N_{j} & 0 & \breve{z}N_{j} & 0 \\ 0 & N_{j} & 0 & 0 & zN_{j} & 0 & z^{3}N_{j} & 0 & \breve{z}N_{j} \\ 0 & 0 & N_{j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ก4-3)}$$

$$\left.\underline{\varepsilon}_{f}^{I} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{X} \\ \varepsilon_{Y} \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}^{I} = [B_{f1}\, B_{f2} ....\, B_{f4}]^{I} \begin{Bmatrix} \underline{q}_{1} \\ \underline{q}_{2} \\ \vdots \\ \underline{q}_{4} \end{Bmatrix} = B_{f}^{I}\underline{q} \quad \right\} \quad \text{(ก4-4)}$$

$$\underline{\gamma}_t^I = \begin{Bmatrix} \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \end{Bmatrix}^I = [B_{t1}\; B_{t2} \ldots.\; B_{t4}]^I \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \vdots \\ \underline{q}_4 \end{Bmatrix} = B_t^I\, \underline{q}$$

โดยที่เมตริกซ์ B_{fj}^I และ B_{tj}^I นั้นจะเหมือนกับสมการที่ ก3-6 และ ก3-7 ตามลำดับ ในส่วนของการสมมติสนามความเค้นเฉือนตั้งฉากนั้นก็จะมีลักษณะที่คล้ายกับชิ้นส่วน 8PhHs ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

(1) จากความเค้นในสมการที่ 3.1.2.2-3 ซึ่งถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนดังนี้

$$\tau_{YZ}^I = P_{ty}{}^I\, \underline{\beta}_{YZ}^I \text{ และ } \tau_{XZ}^I = P_{tX}{}^I\, \underline{\beta}_{XZ}^I$$

โดยที่ $P_t{}^I$, $\underline{\beta}_{YZ}^I$ และ $\underline{\beta}_{XZ}^I$ ถูกกำหนดไว้ดังต่อไปนี้

<u>สำหรับชั้นล่างสุด :</u>

$$\left.\begin{aligned} P_{tY}^1 &= [(1-\zeta^2)(1,\xi),\, \zeta(1+\zeta)(1,\xi,\eta)] \\ P_{tX}^1 &= [(1-\zeta^2)(1,\eta),\, \zeta(1+\zeta)(1,\xi,\eta)] \end{aligned}\right\} \quad \text{(ก4-5ก)}$$

$\underline{\beta}_{YZ}^1 = \underline{\beta}_i{}^T$ เมื่อ i=1,2,...5

$\underline{\beta}_{XZ}^1 = \underline{\beta}_j{}^T$ j=5(NL -1)+2+ i เมื่อ $NL \geq 2$ และ i=1,2,...5

สำหรับชั้นบนสุด :

$$\left.\begin{aligned} P_{tY}^{NL} &= [-\zeta(1-\zeta)(1,\xi,\eta),\, (1-\zeta^2)(1,\xi)] \\ P_{tX}^{NL} &= [-\zeta(1-\zeta)(1,\xi,\eta),\, (1-\zeta^2)(1,\eta)] \end{aligned}\right\} \quad \text{(ก4-5ข)}$$

$\underline{\beta}_{YZ}^{NL} = \underline{\beta}_k{}^T$ k=5(NL -2)+2+ i เมื่อ $NL \geq 2$ และ i=1,2,...5

$\underline{\beta}_{XZ}^{NL} = \underline{\beta}_l{}^T$ l=5(2NL -3)+4+ i เมื่อ $NL \geq 2$ และ i=1,2,...5

สำหรับชั้นใดๆที่อยู่ระหว่างชั้นล่างสุด และชั้นบนสุด :

$$\left.\begin{aligned} P_{tY}^I &= [-\zeta(1-\zeta)(1,\xi,\eta),\, (1-\zeta^2)(1,\xi),\, \zeta(1+\zeta)(1,\xi,\eta)] \\ P_{tX}^I &= [-\zeta(1-\zeta)(1,\xi,\eta),\, (1-\zeta^2)(1,\eta),\, \zeta(1+\zeta)(1,\xi,\eta)] \end{aligned}\right\} \quad \text{(ก4-5ค)}$$

$\underline{\beta}_{YZ}^I = \underline{\beta}_f{}^T$ f=5(I -2)+2+ i เมื่อ $I \geq 2$ และ i=1,2,3,…..8

$\underline{\beta}_{XZ}^I = \underline{\beta}_g{}^T$ g=5(NL -1)+5(I -2)+4+ i เมื่อ $NL \geq 2$, $I \geq 2$ และ i=1,2,3,…..8

(2) กระบวนการรวมจะทำเช่นเดียวกับกระบวนการรวมของชิ้นส่วน ทั้งนี้จากการใช้ความเค้นที่สมมติข้างต้นจะทำให้มีพารามิเตอร์ความเค้นที่ใช้ในการสร้างชิ้นส่วนเพียง (10NL - 6)

ก5. ชิ้นส่วน 4HpHsz

ชิ้นส่วนนี้จะใช้สนามการกระจัดเหมือนกับชิ้นส่วน 4HeHsz, 8PhHsz และ 4PhHsz จึงทำให้เมตริกซ์ N_q^I และ B_q^I นั้นเหมือนในชิ้นส่วน 4HeHsz โดยที่สนามความเค้นที่ใช้คือ

$$\underline{\sigma} = P\,\underline{\beta} = \begin{bmatrix} A & & & & \\ & A & & & \\ & & A & & \\ & & & A & \\ & & & & A \end{bmatrix} \underline{\beta} \qquad \text{(ก5-1)}$$

เมื่อ

$$A = [(1,\xi,\eta), \zeta(1,\xi,\eta), \zeta^2(1,\xi,\eta)] \qquad \text{(ก5-2)}$$

โดยที่เมตริกซ์ P จะเป็นเมตริกซ์ที่มีเมตริกซ์ A เรียงอยู่ในแนวทแยงมุมซึ่งทำให้ความเค้นในแต่ละส่วนนั้นไม่ขึ้นแก่กัน นอกจากนี้จะใช้ค่า $\chi = 10^5 / E_{22}$ ทั้งนี้แม้ว่าสนามความเค้นที่สมมตินี้จะไม่ขึ้นแก่กันแต่เนื่องวิธีถ่วงน้ำหนักทำให้การหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ $(H^I + \chi H_p^I)$ ไม่สามารถทำได้โดยง่ายเหมือนที่กล่าวในภาคผนวก ข.

ก6. ชิ้นส่วน 4HbHsz1

ชิ้นส่วนนี้จะใช้สนามการกระจัดเหมือนกับชิ้นส่วน 4HeHsz, 8PhHsz ฯ จึงทำให้เมตริกซ์ N_q^I และ B_q^I นั้นเหมือนกับของชิ้นส่วน 4HeHsz โดยที่สนามความเค้นที่ใช้คือ

$$\underline{\sigma} = P\,\underline{\beta} = \begin{bmatrix} A & & & & \\ & A & & & \\ & & A & & \\ & & & A & \\ & & & & A \end{bmatrix} \underline{\beta} \qquad \text{(ก6-1)}$$

เมื่อ

$$A = [(1,\xi,\eta,\xi\eta), \zeta(1,\xi,\eta,\ \xi\eta), \zeta^2(1,\xi,\eta,\ \xi\eta)] \qquad \text{(ก6-2)}$$

โดยที่เมตริกซ์ P จะเป็นเมตริกซ์ที่มีเมตริกซ์ A เรียงอยู่ในแนวทแยงมุมซึ่งทำให้ความเค้นในแต่ละส่วนนั้นไม่ขึ้นแก่กันซึ่งทำให้เกิดรูปแบบพิเศษของเมตริกซ์ H^I ที่สามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้โดยง่ายดังแสดงในภาคผนวก ข.

การกระจัดส่วนเพิ่มที่ใช้ในชิ้นส่วนนี้คือ

$$\underline{u}_{\lambda}^{I} = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \underline{\lambda}^{I} \qquad (ก6\text{-}3)$$

เมื่อ

$$L = [\xi\eta(\xi, \eta, \xi\eta)] \qquad (ก6\text{-}4)$$

จากจำนวนพารามิเตอร์ความเค้น การกระจัดส่วนเพิ่ม และการกระจัดที่สอดคล้องพบว่าค่า $R_C = \dfrac{n_\beta}{n_q + n_\lambda} = \dfrac{60}{9+9} = 3.33$ เมื่อ n_σ คือจำนวนของพารามิเตอร์ความเค้นของชิ้นส่วน n_q คือจำนวนของการกระจัดที่เข้ากันได้ต่อขั้วของชิ้นส่วน และ n_λ จำนวนพารามิเตอร์การกระจัดส่วนเพิ่มของชิ้นส่วน

ก7. ชิ้นส่วน 4HbHsz2

ชิ้นส่วน 4HbHsz2 จะใช้สนามการกระจัดที่สอดคล้อง และสนามความเค้นที่เหมือนกับชิ้นส่วน 4HbHsz1 จึงทำให้เมตริกซ์ N_q^I และ B_q^I นั้นเหมือนในชิ้นส่วน 4HeHsz ในขณะที่สนามการกระจัดส่วนเพิ่มซึ่งจะเป็นตามสมการที่ ก6-3 แต่จะสมมติเมตริกซ์ L ดังนี้

$$L = [\,\xi\eta(\xi, \eta, \xi\eta),\ \zeta\,\xi\eta(\xi, \eta, \xi\eta)] \qquad (ก7\text{-}1)$$

ส่งผลให้ค่า $R_C = \dfrac{n_\beta}{n_q + n_\lambda} = \dfrac{60}{9+18} = 2.22$

ก8. ชิ้นส่วน 4HbPl

การกระจัดที่สอดคล้องจะถูกสมมติเป็นการกระจัดหลายชั้นแบบบางส่วนคือ

$$u_q^I = \sum_{j=1}^{4} N_j(\xi, \eta)\{[\frac{1}{2}(1-\zeta)u_j^I + \frac{1}{2}(1+\zeta)u_j^{I+1}]\}$$

$$v_q^I = \sum_{j=1}^{4} N_j(\xi,\eta)\{[\frac{1}{2}(1-\zeta)v_j^I + \frac{1}{2}(1+\zeta)v_j^{I+1}]\} \quad \text{(ก8-1)}$$

$$w_q^I = \sum_{j=1}^{4} N_j(\xi,\eta)W_j$$

โดยการกระจัดที่ขั้วสามารถเขียนได้ว่า

$$\underline{q}^I = [\underline{q}_1, \underline{q}_2, ..., \underline{q}_4]^T \quad \text{(ก8-2)}$$

เมื่อ $\underline{q}_j = [u_j^1, u_j^2, ..., u_j^{N+1}, v_j^1, v_j^2, ..., v_j^{N+1}, w_j]^T$ ตามสนามการกระจัดที่สมมติในสมการที่ ก8-1 หรือ $\underline{u}_q^I = N_q^I \underline{q}^I$ โดย N_q^I คือเมตริกซ์ประมาณการกระจัดซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$N_q^I = [\hat{N}_{q1}^I, \hat{N}_{q2}^I, ..., \hat{N}_{q4}^I] \quad \text{(ก8-3)}$$

โดยที่

$$\hat{N}_{qj}^I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\zeta)N_j & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\zeta)N_j & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \quad \text{(ก8-4)}$$

$\underline{\varepsilon}^I = [\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_{XY}, \gamma_{YZ}, \gamma_{XZ}]^T = B_q^I \underline{q}^I = (D\hat{N}_q^I)\underline{q}^I$ เมื่อ D คือเมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์(สมการที่ ก1-2) จาก $B_q^I = [B_{q1}^I, B_{q2}^I, ..., B_{q4}^I]$

$$B_{qj}^I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,X} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,Y} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,Y} & 0 \\ \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,Y} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,Y} & \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,X} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,X} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_I}N_j & \frac{1}{h_I}N_j & N_{j,Y} \\ -\frac{1}{h_I}N_j & \frac{1}{h_I}N_j & 0 & 0 & N_{j,X} \end{bmatrix} \quad \text{(ก8-5)}$$

โดยที่สนามความเค้นที่ใช้คือ

$$\underline{\sigma} = P\,\underline{\beta} = \begin{bmatrix} A & & & & \\ & A & & & \\ & & A & & \\ & & & A & \\ & & & & A \end{bmatrix} \underline{\beta} \qquad (ก8\text{-}1)$$

เมื่อ

$$A = [(1, \xi, \eta, \xi\eta), \zeta(1, \xi, \eta, \xi\eta)] \qquad (ก8\text{-}2)$$

โดยที่เมตริกซ์ P จะเป็นเมตริกซ์ที่มีเมตริกซ์ A เรียงอยู่ในแนวทแยงมุมซึ่งทำให้ความเค้นในแต่ละส่วนนั้นไม่ขึ้นแก่กันซึ่งทำให้เกิดรูปแบบพิเศษของเมตริกซ์ H^I ที่สามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้โดยง่ายดังแสดงในภาคผนวก ข. ส่วนสนามการกระจัดส่วนเพิ่มซึ่งจะเป็นตามสมการที่ ก6-3 และ ก6-4 ซึ่งชิ้นส่วน 4HbPl ในแต่ละชั้นจะมีค่า $R_C = \dfrac{n_\beta}{n_q + n_\lambda} = \dfrac{40}{5+9} = 2.85$

ก9. ชิ้นส่วน 4HbMd1

ชิ้นส่วน 4HbMd1 จะใช้การกระจัดแบบรวมซึ่งเป็นการรวมการกระจัดหลายชั้นแบบบางส่วนกับการกระจัดชั้นเดียวที่เป็นพจน์ของ z^3 คือ

$$\left.\begin{aligned} u_q^I &= \sum_{j=1}^{4} N_j(\xi,\eta)\{[\tfrac{1}{2}(1-\zeta)u_j^I + \tfrac{1}{2}(1+\zeta)u_j^{I+1}] + z^3\,\omega_{Xj}\} \\ v_q^I &= \sum_{j=1}^{4} N_j(\xi,\eta)\{[\tfrac{1}{2}(1-\zeta)v_j^I + \tfrac{1}{2}(1+\zeta)v_j^{I+1}] + z^3\omega_{Yj}\} \\ w_q^I &= \sum_{j=1}^{4} N_j(\xi,\eta)W_j \end{aligned}\right\} \qquad (ก9\text{-}1)$$

โดยการกระจัดที่ขั้วสามารถเขียนได้ว่า

$$\underline{q}^I = [\underline{q}_1, \underline{q}_2, \ldots, \underline{q}_4]^T \qquad (ก9\text{-}2)$$

เมื่อ $\underline{q}_j = [u_j^1, u_j^2, \ldots, u_j^{N+1}, v_j^1, v_j^2, \ldots, v_j^{N+1}, w_j]^T$ ตามสนามการกระจัดที่สมมติในสมการที่ ก9-1 หรือ $\underline{u}_q^I = N_q^I \underline{q}^I$ โดย N_q^I คือเมตริกซ์ประมาณการกระจัดซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$N_q^I = [\breve{N}_{q1}^I, \breve{N}_{q2}^I, \ldots, \breve{N}_{q4}^I] \qquad (ก9\text{-}3)$$

โดยที่

$$\hat{N}_{qj}^{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\zeta)N_j & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_j & 0 & 0 & z^3 N_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\zeta)N_j & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_j & 0 & z^3 N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \quad \text{(ก9-4)}$$

$\underline{\varepsilon}^{I} = [\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_{XY}, \gamma_{YZ}, \gamma_{XZ}]^T = B_q^I \underline{q}^I = (D\hat{N}_q^I)\underline{q}^I$ เมื่อ D คือเมตริกซ์ของตัวปฏิบัติการการหาอนุพันธ์(สมการที่ ก1-2) จาก $B_q^I = [B_{q1}^I, B_{q2}^I, ..., B_{q4}^I]$

$$B_{qj}^{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,X} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,X} & 0 & 0 & z^3 N_{j,X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,Y} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,Y} & 0 & z^3 N_{j,Y} & 0 \\ \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,y} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,Y} & \frac{1}{2}(1-\zeta)N_{j,X} & \frac{1}{2}(1+\zeta)N_{j,X} & z^3 N_{j,Y} & z^3 N_{j,X} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_I}N_j & \frac{1}{h_I}N_j & 0 & 3z^2 N_j & N_{j,Y} \\ -\frac{1}{h_I}N_j & \frac{1}{h_I}N_j & 0 & 0 & 3z^2 N_j & 0 & N_{j,X} \end{bmatrix}$$

(ก9-5)

สนามความเค้นที่ใช้ก็เป็นตามสมการที่ ก8-1 โดยกำหนดให้

$$A = [(1, \xi, \eta, \xi\eta),\ \zeta(1, \xi, \eta, \xi\eta),\ \zeta^2(1, \xi, \eta, \xi\eta)] \quad \text{(ก9-6)}$$

การที่มีเมตริกซ์ A เรียงอยู่ในแนวทแยงมุมซึ่งทำให้ความเค้นในแต่ละส่วนนั้นไม่ขึ้นแก่กันซึ่งทำให้เกิดรูปแบบพิเศษของเมตริกซ์ H^I ที่สามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้โดยง่ายดังแสดงในภาคผนวก ข. ส่วนสนามการกระจัดส่วนเพิ่มซึ่งจะเป็นตามสมการที่ ก6-3 และ ก7-1 ซึ่งชิ้นส่วน 4HbPI ในแต่ละชั้นจะมีค่า

$$R_C = \frac{n_\beta}{n_q + n_\lambda} = \frac{60}{7+18} = 2.40$$

ก10. ชิ้นส่วน 4HbMd2

ชิ้นส่วน 4HbMd2 จะใช้การกระจัดแบบรวมซึ่งเป็นการรวมการกระจัดหลายชั้นแบบบางส่วนกับการกระจัดชั้นเดียวที่เป็นพจน์ของ z^2 และ z^3 ดังแสดงในสมการที่ 3.1.4.1-8 เมตริกซ์ประมาณการกระจัด N_{qj}^I ในสมการที่ 3.1.4.1-11 และเมตริกซ์ B_{qj}^I ในสมการที่ 3.1.4.1-12 สนามความเค้น และการกระจัดส่วนเพิ่มจะสมมติเหมือนกับในชิ้นส่วน 4HbMd1 ทำให้ในแต่ละชั้นจะมีค่า

$$R_C = \frac{n_\beta}{n_q + n_\lambda} = \frac{60}{9+18} = 2.22$$

ก11. ชิ้นส่วน 4HbpHsz

จะสมมติสนามการกระจัดที่สอดคล้อง การกระจัดส่วนเพิ่ม และความเค้นที่เหมือนกับชิ้นส่วน 4HbHsz2 นอกจากนี้จะใช้ค่า $\chi = 10^5 / E_{22}$

ก12. ชิ้นส่วน 4MiFs

จากสมการที่ 3.2.1.1-1 และ 3.2.1.2-11 จะได้ว่า

$$B_q = [B_{q1}\, B_{q2} \ldots B_{q4}] \qquad \text{(ก12-1)}$$

โดยที่

$$B_{qi} = \begin{bmatrix} N_{i,X} & 0 & -zN_{i,X} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & -zN_{i,Y} & 0 \\ N_{i,Y} & N_{i,X} & -zN_{i,Y} & -zN_{i,X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i & N_{i,Y} \\ 0 & 0 & -N_i & 0 & N_{i,X} \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } z = \frac{t}{2}\varsigma \qquad \text{(ก12-2)}$$

และจากสมการที่ 3.2.1.1-2 และ 3.2.1.2-12 จะได้ว่า

$$B_\lambda = \begin{bmatrix} -zL_{1,X} & 0 & 0 \\ 0 & -zL_{1,Y} & 0 \\ -zL_{1,Y} & -zL_{1,X} & 0 \\ 0 & -L_1 & L_{2,Y} \\ -L_1 & 0 & L_{2,X} \end{bmatrix} \qquad \text{(ก12-3)}$$

อาศัยเมตริกซ์จาโคบีจะได้

$$L,_X = \frac{\partial L}{\partial X} = R_{11}L,_\xi + R_{12}L,_\eta \text{ และ } L,_Y = \frac{\partial L}{\partial Y} = R_{21}L,_\xi + R_{22}L,_\eta \qquad \text{(ก12-3ก)}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} L_{1,\xi} &= L_{2,\xi} = [-2\xi(1-\eta^2), (1-3\xi^2)(1-\eta^2), -2\xi(\eta-\eta^3)] \\ L_{1,\eta} &= L_{2,\eta} = [(1-\xi^2)(-2\eta), (\xi-\xi^3)(-2\eta), (1-\xi^2)(1-3\eta^2)] \end{aligned} \qquad \text{(ก12-3ข)}$$

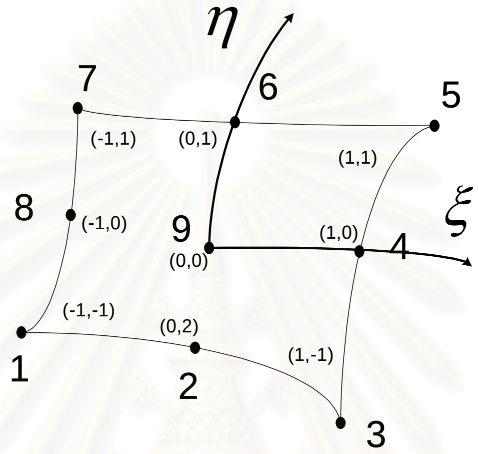
ก13. ชิ้นส่วน 9MiFs

จากสมการที่ 3.2.1.1-1 และ 3.2.1.2-11 จะได้ว่า

$$B_q = [B_{q1}\, B_{q2} \ldots B_{q9}] \qquad \text{(ก13-1)}$$

โดยที่

$$B_{qi} = \begin{bmatrix} N_{i},_{X} & 0 & -zN_{i},_{X} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i},_{y} & 0 & -zN_{i},_{Y} & 0 \\ N_{i},_{Y} & N_{i},_{X} & -zN_{i},_{Y} & -zN_{i},_{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i} & N_{i},_{Y} \\ 0 & 0 & -N_{i} & 0 & N_{i},_{X} \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } z = \frac{t}{2}\varsigma \qquad \text{(ก13-2)}$$



รูปที่ ก13-1 การเรียงขั้วของชิ้นส่วน 9 ขั้ว

เมื่อกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(\xi^2-\xi)(\eta^2-\eta) & N_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(\eta^2-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(\xi^2+\xi)(\eta^2-\eta) & N_4 &= \frac{1}{2}(\xi^2+\xi)(1-\eta^2) \\ N_5 &= \frac{1}{4}(\xi^2+\xi)(\eta^2+\eta) & N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(\eta^2+\eta) \\ N_7 &= \frac{1}{4}(\xi^2-\xi)(\eta^2+\eta) & N_8 &= \frac{1}{2}(\xi^2-\xi)(1-\eta^2) \\ N_9 &= (1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(ก13-3)}$$

โดยที่อนุพันธ์ของฟังก์ชันสัณฐานเทียบกับพิกัดฉาก X และ Y สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ในสมการที่ 3.1.1.1-23 คือ $N_{j,X} = R_{11}N_{j},_{\xi} + R_{12}N_{j},_{\eta}$ และ $N_{j,Y} = R_{21}N_{j},_{\xi} + R_{22}N_{j},_{\eta}$ เป็นต้น โดยที่อนุพันธ์ของฟังก์ชันสัณฐานเทียบกับพิกัดธรรมชาติในแนวระนาบคือ

$$\begin{aligned} N_1,_{\xi} &= \frac{1}{4}(2\xi-1)(\eta^2-\eta) & N_2,_{\xi} &= \frac{1}{2}(-2\xi)(\eta^2-\eta) \\ N_3,_{\xi} &= \frac{1}{4}(2\xi+1)(\eta^2-\eta) & N_4,_{\xi} &= \frac{1}{2}(2\xi+1)(1-\eta^2) \end{aligned}$$

$$N_{5,\xi} = \frac{1}{4}(2\xi+1)(\eta^2+\eta) \qquad N_{6,\xi} = \frac{1}{2}(-2\xi)(\eta^2+\eta) \tag{ก13-4ก}$$

$$N_{7,\xi} = \frac{1}{4}(2\xi-1)(\eta^2+\eta) \qquad N_{8,\xi} = \frac{1}{2}(2\xi-1)(1-\eta^2)$$

$$N_{9,\xi} = (-2\xi)(1-\eta^2)$$

$$\left.\begin{aligned}
N_{1,\eta} &= \frac{1}{4}(\xi^2-\xi)(2\eta-1) & N_{2,\eta} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(2\eta-1)\\
N_{3,\eta} &= \frac{1}{4}(\xi^2+\xi)(2\eta-1) & N_{4,\eta} &= \frac{1}{2}(\xi^2+\xi)(-2\eta)\\
N_{5,\eta} &= \frac{1}{4}(\xi^2+\xi)(2\eta+1) & N_{6,\eta} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(2\eta+1)\\
N_{7,\eta} &= \frac{1}{4}(\xi^2-\xi)(2\eta+1) & N_{8,\eta} &= \frac{1}{2}(\xi^2-\xi)(-2\eta)\\
N_{9,\eta} &= (1-\xi^2)(-2\eta) & &
\end{aligned}\right\} \tag{ก13-4ข}$$

และจากสมการที่ 3.2.1.1-2 และ 3.2.1.2-12 จะได้ว่าเมตริกซ์ B_λ เช่นเดียวกับสมการที่ ก12-3 และการหาอนุพันธ์เหมือนในสมการที่ ก12-3ก แต่ในที่นี้ค่าอนุพันธ์เทียบกับพิกัดธรรมชาติคือ

$$\left.\begin{aligned}
L_{1,\xi} &= [(2\xi-4\xi^3)(\eta^2-\eta^4), (3\xi^2-5\xi^4)(\eta^2-\eta^4)\\
&\quad ,(2\xi-4\xi^3)(\eta^3-\eta^5), (3\xi^2-5\xi^4)(\eta^3-\eta^5,)]\\
L_{1,\eta} &= [(\xi^2-\xi^4)(2\eta-4\eta^3), (\xi^3-\xi^5)(2\eta-4\eta^3)\\
&\quad ,(\xi^2-\xi^4)(3\eta^2-5\eta^4), (\xi^3-\xi^5)(3\eta^2-5\eta^4,)]\\
\\
L_{2,\xi} &= [(\xi^3-\xi^5)(\eta^2-\eta^4), (\xi^2-\xi^4)(\eta^3-\eta^5)\\
&\quad ,(\xi^3-\xi^5)(\eta^3-\eta^5)]\\
L_{2,\eta} &= [(\xi^3-\xi^5)(2\eta-4\eta^3), (\xi^2-\xi^4)(3\eta^2-5\eta^4)\\
&\quad ,(\xi^3-\xi^5)(3\eta^2-5\eta^4)]
\end{aligned}\right\} \tag{ก13-5}$$

ภาคผนวก ข

รูปแบบพิเศษของเมตริกซ์ H

หากทำการสมมุติสนามความเค้นในรูปของพิกัดธรรมชาติโดยไม่ขึ้นแก่กันซึ่งไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล โดยในปัญหาส่วนใหญ่ที่ละผลของความเค้นตั้งฉาก (σ_Z) อาจเขียนได้เช่น

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} \end{Bmatrix} = P\,\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} P_f & 0 \\ 0 & P_t \end{bmatrix} \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} P_{f1} & & & & \\ & P_{f2} & & & \\ & & P_{f3} & & \\ & & & P_{t1} & \\ & & & & P_{t2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \end{Bmatrix} \qquad (ข\text{-}1)$$

ทำให้สามารถเขียนเมตริก H ได้ดังนี้

$$H = \begin{bmatrix} H_f & 0 \\ 0 & H_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int P_f{}^T S_f P_f\, dV & 0 \\ 0 & \int P_t{}^T S_t P_t\, dV \end{bmatrix} \qquad (ข\text{-}2)$$

ทั้งนี้หากสมมุติให้ความเค้นแรงดัด และความเค้นเฉือนนั้นประมาณด้วยฟังก์ชันที่เหมือนกันในความเค้นนั้นๆคือ $P_{f\,i} = P_{f\,0}$ และ $P_{t\,i} = P_{t\,0}$ ตามลำดับจะได้ว่า

$$H_f = \begin{bmatrix} A_f S_{11} & A_f S_{12} & A_f S_{13} \\ & A_f S_{22} & A_f S_{23} \\ sym. & & A_f S_{33} \end{bmatrix} \qquad (ข\text{-}3)$$

$$H_t = \begin{bmatrix} A_t S_{44} & A_t S_{45} \\ sym. & A_t S_{55} \end{bmatrix} \qquad (ข\text{-}4)$$

เมื่อ $A_f = \int P_{f0}^T P_{f0}\, dV$ และ $A_t = \int P_{t0}^T P_{t0}\, dV$

$$H_f{}^{-1} = \begin{bmatrix} A_f^{-1} C_{11} & A_f^{-1} C_{12} & A_f^{-1} C_{13} \\ & A_f^{-1} C_{22} & A_f^{-1} C_{23} \\ sym. & & A_f^{-1} C_{33} \end{bmatrix} \qquad (ข\text{-}5)$$

$$H_t^{-1} = \begin{bmatrix} A_t^{-1}C_{44} & A_t^{-1}C_{45} \\ sym. & A_t^{-1}C_{55} \end{bmatrix} \quad \text{(ข-6)}$$

เมื่อ $C = S^{-1}$ ซึ่งทำให้ในการหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ H นั้นเพียงแค่หาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ A_f และ A_t เท่านั้นซึ่งใช้เวลาน้อยกว่าการหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ H ที่มีสมมุติสนามความเค้นให้ขึ้นแก่กันเพื่อให้สอดคล้องกับสมการสมดุล และมีรูปแบบที่ไม่เหมือนดังแสดงข้างต้น

ทั้งนี้การหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ A_f และ A_t สามารถทำได้โดยง่าย ตัวอย่างเช่นในชิ้นส่วนพันทาง 4 ขั้วที่มีการสมมุติการกระจัดส่วนเพิ่มซึ่งจะช่วยบังคับการสมดุลของความเค้นด้วยนั้นอาจใช้สนามความเค้นแรงดัดคือ

$$P_{f0} = [a, \zeta a, \zeta^2 a] \qquad \text{เมื่อ } a = [1, \xi, \eta, \xi\eta] \quad \text{(ข-7)}$$

เมื่อ ζ คือพิกัดธรรมชาติในแนวตั้งฉากของแผ่นพื้นแต่ละชั้น ดังนั้นสามารถเขียนเมตริกซ์ A_f ได้ใหม่เป็น

$$A_f = \int \begin{bmatrix} a^T a & a^T a\zeta & a^T a\zeta^2 \\ & a^T a\zeta^2 & a^T a\zeta^3 \\ sym. & & a^T a\zeta^4 \end{bmatrix} dV \quad \text{(ข-8)}$$

จากความสัมพันธ์ในกรณีของแผ่นพื้นซึ่งจะมีพิกัดฉากในแนวตั้งฉาก Z อยู่ในแนวเดียวกับพิกัดธรรมชาติในแนวตั้งฉากของแผ่นพื้นแต่ละชั้น ζ ซึ่งทำให้เมตริกซ์จาโคเบียนไม่ได้เป็นฟังก์ชันของ ζ ดังแสดงในสมการที่ 3.1.1.1-22, 3.1.1.1-23 และ 3.1.1.1-27 โดยหากกำหนดให้

$$T = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1 & \zeta & \zeta^2 \\ & \zeta^2 & \zeta^3 \\ sym., & & \zeta^4 \end{bmatrix} d\zeta \quad \text{และ} \quad A = \iint a^T a \, |J| \, d\xi d\eta \quad \text{(ข-9)}$$

จะได้ว่า

$$A_f^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}\tilde{T}_{11} & \tilde{A}\tilde{T}_{12} & \tilde{A}\tilde{T}_{13} \\ & \tilde{A}\tilde{T}_{22} & \tilde{A}\tilde{T}_{23} \\ sym. & & \tilde{A}\tilde{T}_{33} \end{bmatrix} \quad \text{(ข-10)}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\tilde{T} = T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2/2 & 2/3 \\ & 2/3 & 2/4 \\ sym. & & 2/5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4.5 & -18 & 15 \\ & 96 & -90 \\ sym. & & 90 \end{bmatrix} \quad \text{(ข-11)}$$

และ $\widetilde{A} = A^{-1} = (a^T a)^{-1}$ (ข-12)

จากสมการข้างต้นพบว่าการหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ A_f สามารถทำได้โดยง่ายเพียงแค่หาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ A และ T เท่านั้น ส่วนการหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ A_t ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน นอกจากนี้ยังพบว่าหากสมมุติให้ $P_{f0} = P_{t0} = P_0$ ซึ่งเขียนด้วยเมตริกซ์การประมาณที่เหมือนกัน ตัวอย่างเช่น

$$P_{f0} = P_{t0} = [a_0, \zeta a_0, \zeta^2 a_0] \tag{ข-13}$$

ทำให้ในการหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ H นั้นจำเป็นต้องหาแต่เมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ $A_0 = \int a_0^T a_0 dA$ และเมตริกซ์ T เท่านั้น

ภาคผนวก ค

เมตริกซ์สมบัติของวัสดุ

ค1 วัสดุที่มีสมบัติเท่ากันทุกทิศทาง (isotropic material)

ในวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic material) หากพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียดของแผ่นพื้นจะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \end{Bmatrix} \qquad \text{(ค1-1)}$$

$$C = \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & 1 & \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} \end{bmatrix} \qquad \text{(ค1-2)}$$

โดยที่ E คือโมดูลัสยืดหยุ่น (elastic modulus) G คือ โมดูลัสเฉือน (shear modulus) และ υ คืออัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson's ratio) นอกจากนี้สำหรับสมมุติฐานที่มักใช้ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นคือ ความเค้นตั้งฉาก σ_Z นั้นมีค่าน้อยจนสามารถที่จะละทิ้งได้ซึ่งทำให้ความเครียดตั้งฉาก ε_Z นั้นสามารถขจัดออกไปได้โดยกำหนดค่า $\sigma_Z = 0$ ดังสามารถเขียนความสัมพันธ์ในส่วนของการรับแรงดัดได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_X \\ \tau_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} \end{Bmatrix} = C' \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_X \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \end{Bmatrix} \qquad \text{(ค1-3)}$$

$$C' = \frac{E}{(1-\upsilon^2)} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\upsilon}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-\upsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(ค1-4)}$$

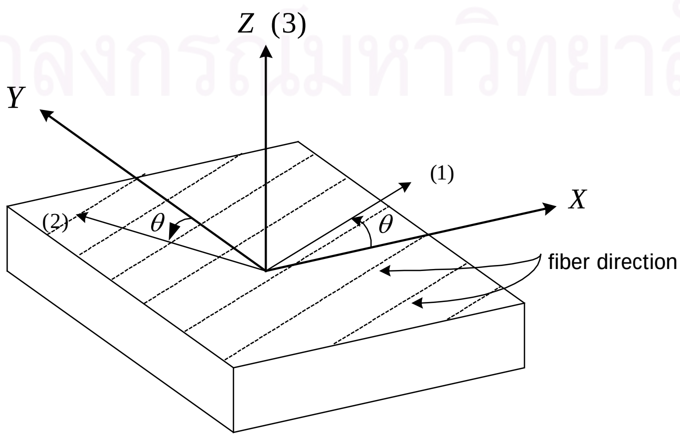
ค2 วัสดุที่เป็นวัสดุผสม (composite material)

หากพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียดของแผ่นพื้นชั้นที่ I จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \end{Bmatrix}^I = S^I \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} \end{Bmatrix}^I \qquad \text{(ค2-1)}$$

$$S^I = \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ 0 & S_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & 0 & 0 \\ S_{14} & S_{14} & S_{34} & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & S_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{(ค2-2)}$$

เมื่อ $c = \cos\theta$ และ $s = \sin\theta$ ซึ่ง θ คือมุมที่แนวการวางตัวของวัสดุผสม (แกนพิกัดที่ 1) ถูกวัดเทียบกับแกนพิกัดฉาก X โดยมีค่าบวกเมื่อมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาดังรูปที่ ค2-1



รูปที่ ค2-1 มุมแนวการวางตัวของวัสดุผสมของแผ่นพื้นชั้นที่ I

จากความสัมพันธ์ $\dfrac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \dfrac{\nu_{ji}}{E_{jj}}$ เมื่อ i และ j คือ 1, 2, 3 จะพบว่ามีค่าคงที่ 9 ค่าที่จำเป็นในการกำหนดคุณสมบัติของวัสดุของแผ่นพื้นแต่ละชั้นคือ E_{11} , E_{22} , E_{33} , G_{12} , G_{23} , G_{13} , ν_{12} , ν_{23} และ ν_{13} เป็นค่าคงที่ของวัสดุของแผ่นพื้นชั้นที่ I แต่ในที่นี้กำหนดให้ $E_{33} = E_{22}$, $G_{13} = G_{12}$ และ $\nu_{13} = \nu_{12}$ ดังนั้นจะเหลือเพียงค่าคงที่ 6 ค่าที่จะใช้ในการกำหนดคุณสมบัติของวัสดุของแผ่นพื้นแต่ละชั้น

โดยที่

$$S_{11} = \frac{c^4}{E_{11}} + \frac{s^4}{E_{22}} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\right)$$

$$S_{12} = c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{G_{21}}\right) - (c^4 + s^4)\frac{\nu_{12}}{E_{11}}$$

$$S_{13} = -\left(c^2 \frac{\nu_{12}}{E_{11}} + s^2 \frac{\nu_{23}}{E_{22}}\right)$$

$$S_{14} = 2cs\left(\frac{c^2}{E_{11}} - \frac{s^2}{E_{22}}\right) - cs\,(c^2 - s^2)\left(\frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\right)$$

$$S_{22} = \frac{s^4}{E_{11}} + \frac{c^4}{E_{22}} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\right)$$

$$S_{23} = -\left(s^2 \frac{\nu_{12}}{E_{11}} + c^2 \frac{\nu_{23}}{E_{22}}\right)$$

$$S_{24} = 2cs\left(\frac{s^4}{E_{11}} - \frac{c^4}{E_{22}}\right) + cs\,(c^2 - s^2)\left(\frac{1}{G_{12}} - 2\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\right)$$

$$S_{33} = \frac{1}{E_{33}}$$

$$S_{34} = 2cs\left(\frac{\nu_{23}}{E_{22}} - \frac{\nu_{12}}{E_{11}}\right)$$

$$S_{44} = 4c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} + 2\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\right) + (c^2 - s^2)^2 \frac{1}{G_{12}}$$

$$S_{55} = \frac{c^4}{G_{23}} - \frac{s^4}{G_{12}}$$

$$S_{56} = cs\left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{1}{G_{23}}\right)$$

$$S_{66} = \frac{s^4}{G_{23}} + \frac{c^4}{G_{12}}$$

นอกจากนี้สำหรับสมมุติฐานที่มักใช้ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นคือ ความเค้นตั้งฉาก σ_Z นั้นมีค่าน้อยจนสามารถที่จะละทิ้งได้ซึ่งทำให้ความเครียดตั้งฉาก ε_Z นั้นสามารถขจัดออกไปได้โดยกำหนดค่า $\sigma_Z = 0$ ดังสามารถเขียนความสัมพันธ์ในส่วนของการรับแรงดัดได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_X \\ \tau_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} \end{Bmatrix}^I = \begin{bmatrix} C_f & 0 \\ 0 & C_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_X \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \end{Bmatrix}^I \qquad \text{(ค2-3)}$$

เมื่อ $C_f = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ sym. & & D_{33} \end{bmatrix}$ และ $C_t = S_t^{-1} = \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{45} & D_{55} \end{bmatrix}$ (ค2-3)

โดยที่หากให้

$$C_f = S_f^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ & sym. & C_{33} & C_{34} \\ & & & C_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{(ค2-4)}$$

จะได้ว่า

$$D_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3} \cdot C_{3j}}{C_{33}} \quad \text{เมื่อ } i, j = 1, 2$$

$$= C_{(i-1)(j-1)} \quad \text{เมื่อ } i, j = 4, 5, 6$$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายปิยวิทย์ ศรีชุมพวง เกิดเมื่อวันที่ 16 เดือนกันยายน พุทธศักราช 2519 ที่อำเภอเมือง จังหวัดพัทลุง เป็นบุตรคนที่สองในจำนวนพี่น้องสองคน ในวัยเด็กต้องย้ายตามบิดามารดาซึ่งมีอาชีพรับราชการไปยังจังหวัดต่างๆ จนกระทั่งได้เข้ามาศึกษาชั้นมัธยมต้นที่โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาน้อมเกล้าในกรุงเทพมหานคร ชั้นมัธยมปลายเป็นนักเรียนของโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา และได้เข้าเรียนที่คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในปีพุทธศักราช 2537 ในสาขาวิศวกรรมโยธา เมื่อสำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตในปีพุทธศักราช 2541 ก็ได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยต่อทันทีซึ่งได้เสนองานวิจัยฉบับนี้แก่คณะกรรมการเพื่อขอจบการศึกษา