การประยุกต์การตั้งปัญหาค่าเริ่มต้นสำหรับการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

นายรชฎ ถาวรศิริ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1664-4

APPLICATION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM FORMULATION FOR THE SINGLE SHAPED REFLECTOR ANTENNA SYNTHESIS

Mr. Rachot Tawronsiri

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2004
ISBN 974-53-1664-4

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การประยุกต์การตั้งปัญหาค่าเริ่มต้นสำหรับการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป
โดย	นายรชฎ ถาวรศิริ
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.ฉัตรชัย ไวยาพัฒนกร

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

……………………………………….. คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

…………………………………………… ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.มงคล เดชนครินทร์)

……………………………………….. อาจารย์ที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉัตรชัย ไวยาพัฒนกร)

…………………………………………… กรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.โมไนย ไกรฤกษ์)

…………………………………………… กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว)

รชฎ ถาวรศิริ : การประยุกต์การตั้งปัญหาค่าเริ่มต้นสำหรับการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป (APPLICATION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM FORMULATION FOR THE SINGLE SHAPED REFLECTOR ANTENNA SYNTHESIS) อ. ที่ปรึกษา : รศ. ดร.ฉัตรชัย ไวยาพัฒนกร, 198 หน้า, ISBN 974-53-1664-4.

ความต้องการในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนดัดรูปคือ ความยืดหยุ่นของกรรมวิธีที่ใช้ในการสังเคราะห์ และ สมรรถนะที่ดีของสายอากาศ งานวิจัยนี้นำเสนอการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อประยุกต์ในการใช้งานด้านต่างๆ ขั้นตอนจะเริ่มจากสังเคราะห์พื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด แล้วนำมาเข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการประมาณพื้นผิว โดยใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพเพื่อให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลที่ต้องการ

ข้อดีของการใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นในการสังเคราะห์พื้นผิวเริ่มต้นได้แก่ ใช้เวลาในการสังเคราะห์น้อย ให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ใกล้เคียงกับแบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการซึ่งช่วยให้จำนวนรอบของการวนซ้ำลดลงได้ และ ให้รูปร่างช่องเปิดของจานสะท้อนที่เหมาะสมกับลักษณะของพื้นที่ครอบคลุม ประโยชน์ของการใช้ช่องเปิดจานสะท้อนที่มีความเหมาะสมคือจะทำให้สายอากาศที่สังเคราะห์ได้มีน้ำหนักเบา และขนาดเล็กลง จึงประหยัดค่าใช้จ่ายในการผลิต รูปร่างช่องเปิดของจานสะท้อนสามารถประมาณได้โดยใช้สมการไฮเพอร์ควอดริกแบบ 2 มิติ การวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปจะใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานด้วยการหาปริพันธ์ของกระแสพื้นผิวของจานสะท้อนและใช้ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพในการรวมผลกระทบของสนามเลี้ยวเบนจากขอบจานสะท้อน

ผลการสังเคราะห์พบว่าการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบนช่วยปรับผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากทัศนศาสตร์เรขาคณิตให้จัดลำคลื่นแบบวงรีได้ดีขึ้น กรณีที่แบบรูปการแผ่พลังงานเป็นรูปร่างอย่างง่ายพื้นผิวเริ่มต้นที่สังเคราะห์จากทัศนศาสตร์เรขาคณิตจะช่วยลดจำนวนรอบการวนซ้ำได้ สำหรับแบบรูปการแผ่พลังงานรูปร่างซับซ้อน เช่น ประเทศไทย จานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้สามารถลดอัตราขยายในบริเวณที่ไม่ต้องการลงได้ เมื่อศึกษาผลของค่าปัจจัยต่างๆ พบว่า มุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังจะมีผลต่ออัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ การเพิ่มขนาดของสายอากาศ และจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ในสมการพื้นผิวช่วยให้สามารถจัดรูปลำคลื่นที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ดีขึ้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้สร้างสายอากาศต้นแบบเพื่อยืนยันผลการวิเคราะห์และพบว่าผลการวัดกับผลการคำนวณมีความสอดคล้องกัน

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่อนิสิต ....

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....

ปีการศึกษา 2547

4470654421 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: GEOMETRICAL OPTICS SYNTHESIS / DIFFRACTION SYNTHESIS / PHYSICAL OPTICS OPTIMIZATION / SHAPED REFLECTOR / SHAPED BEAM

RACHOT TAWRONSIRI : APPLICATION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM FORMULATION FOR THE SINGLE SHAPED REFLECTOR ANTENNA SYNTHESIS. THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. CHATCHAI WAIYAPATTANAKORN, Ph.D., 198 pp. ISBN 974-53-1664 -4.

The requirement of the shaped reflector antenna synthesis are the flexiblity of the synthesis method and the high performance synthesised antenna. This research presents a single shaped reflector antenna synthesis method suitable for many applications. This method uses Initial Value Problem Geometrical Optics (IVP-GO) synthesis to determine the initial surface and aperture shape through numerical solution by Finite Difference Method (FDM). Finally Physical Optics (PO) optimization is employed in order to obtain the closest to the desired radiation pattern.

The advantage of this IVP - GO synthesis are fast computation and yield initial far field pattern close to the specificied gain and suitable aperture shape for the desired coverage. This proper aperture shape reduces the antenna's weight and size and accordingly fabrication cost. The reflector aperture boundary is modeled by 2D Hyperquadric equation. In analysis of the shaped reflector, the PO current integration is employed together with PTD for accurate diffraction effects accounting.

It is found that diffraction synthesis is useful for adjusting surface obtained from GO synthesis for producing better elliptic shaped beam. In the simple coverage case, the initial surface from IVP-GO can reduce the number of iteration in the optimization procedure. For complex coverage such as Thailand, a shaped reflector can suppress gain level in nearby regions. A study of certain antenna parameters finds that the feed pointing angle affects cross polarization level. Increasing the size of the antenna and the number of Fourier series terms can enhance the ability to control beam shape for the complex coverage. A prototype shaped reflector antenna has been constructed for verifying the analysis method and it is found that the measured radiation pattern agrees well with the calculated pattern.

Department Electrical Engineering Student's signature ....

Field of study Electrical Engineering Advisor's signature ....

Academic year 2004

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ฉัตรชัย ไวยาพัฒนกร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ในเชิงวิชาการอันเป็นประโยชน์แก่งานวิจัย รวมถึงการสนับสนุนค่าใช้จ่ายในการสร้างสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปต้นแบบ จนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่สนับสนุนด้านการเงินบางส่วนในการทำงานวิจัยนี้ และขอขอบพระคุณ วิทยาลัยเทคโนโลยีอุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ซึ่งให้ความร่วมมือในส่วนของการขึ้นรูปพื้นผิวสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

ผู้วิจัยขอขอบคุณ ดร.ศุภเชษฐ์ เพิ่มพูนวัฒนาสุข ดร.ธีรศักดิ์ อนันตกุล และคุณสุรเชษฐ กอสิริขจร ที่ให้คำแนะนำด้านวิชาการ และการใช้เครื่องมือวัดสายอากาศ ที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่องานวิจัยนี้ และขอขอบคุณ คุณสุวิชาญ กาวาฮารา คุณณัฐพงศ์ คูวัฒนา คุณอัชราภรณ์ เนตรนิล คุณคทา สุวรรณวัฒน์ คุณกุลธวัช ภูมิวงศ์พิทักษ์ และคุณประเสริฐ จันวดี ที่ให้คำปรึกษาและสละเวลาให้ความช่วยเหลือการทดลอง

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณบิดา มารดาและ ญาติ ๆ ทุกคนที่สนับสนุนทุนการศึกษา รวมทั้งเป็นแรงกายแรงใจเสมอมาจวบจนสำเร็จการศึกษา

สารบัญ

หน้า

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

รูปที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

แนวเหตุผล

เทคโนโลยีด้านสื่อสาร และระบบเรดาร์ที่ใช้คลื่นไมโครเวฟนั้นต้องการสายอากาศที่ให้แบบรูปการแผ่พลังงานเป็นไปตามพื้นที่ครอบคลุมหรือบริเวณเป้าหมายที่ต้องการ โดยเฉพาะในการสื่อสารผ่านดาวเทียม พื้นที่ให้บริการของการสื่อสารผ่านดาวเทียมบ่อยครั้งมีลักษณะที่ค่อนข้างซับซ้อน ต้องออกแบบสายอากาศเพื่อจัดลำคลื่นให้ครอบคลุมพื้นที่ให้บริการดังกล่าวให้ได้ สายอากาศประเภทนี้เรียกว่าสายอากาศจานสะท้อนดัดรูป (Shaped Reflector Antenna) การใช้สายอากาศประเภทนี้แทนสายอากาศจานสะท้อนแบบปกติหรือพาราโบลอยด์มีข้อดีดังนี้

1) เพิ่มประสิทธิภาพในการใช้กำลังงานที่มีอยู่ให้เกิดประโยชน์มากที่สุดหรืออาจกล่าวได้ว่ากำลังงานที่ใช้จะอยู่ภายในบริเวณที่ต้องการมากที่สุด
2) สามารถลดการรบกวนของสัญญาณในกรณีที่บริเวณข้างเคียงใช้ความถี่เดียวกัน

การใช้สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปร่วมกับสายอากาศป้อนเดี่ยวมีจุดประสงค์เพื่อให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการ หลักการของวิธีนี้คือจะจัดรูปของพื้นผิวจานสะท้อนเพื่อจัดลำคลื่นให้มีแบบรูปการแผ่พลังงานตามที่ต้องการ ข้อดีของวิธีการนี้คือ น้ำหนักของสายอากาศค่อนข้างเบา ราคาไม่แพงนักและไม่มีการลดทอนกำลังงานในโครงข่ายสร้างลำคลื่น (Beam Forming Network) หากเทียบกับการใช้สายอากาศแถวลำดับ

นับตั้งแต่สงครามโลกครั้งที่สองเป็นต้นมา สายอากาศจานสะท้อนถูกนำมาใช้ในการสื่อสารกันอย่างแพร่หลาย จึงมีการพัฒนากรรมวิธีในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเพื่อจัดรูปลำคลื่นมาอย่างต่อเนื่อง ในยุคแรก ๆ จะนิยมใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต (Geometrical Optics, GO) ในการสังเคราะห์พื้นผิวจานสะท้อน เนื่องจากวิธีนี้ทำให้มองเห็นกลไกในการสร้างลำคลื่นอย่างเด่นชัด หลักการคือใช้กฎอนุรักษ์พลังงานและกฎการสะท้อนของสเนลล์ แล้วอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าวในเทอมของคณิตศาสตร์ด้วยสมการอนุพันธ์ จากลักษณะทางเรขาคณิตของสายอากาศจานสะท้อนทำให้แบ่งประเภทของสมการได้ 2 แบบและมีลำดับแนวทางในการพัฒนาดังนี้

1. สมการอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นสำหรับจานสะท้อนแบบสมมาตร ในปี ค.ศ.1962 Kinber [14] และ ค.ศ. 1963/1964 Galindo [15] ได้แสดงการหาผลเฉลยแม่นตรงของการสังเคราะห์จานสะท้อนดัดรูปแบบวงกลมสมมาตร ต่อมา Spencer, Hill และ Macfarlane[1] แสดงการหาผลเฉลยแม่นตรงของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปแบบทรงกระบอกสมมาตร นอกจากนี้สมการอนุพันธ์สามัญสามารถหาผลเฉลยเชิงเลขด้วยกรรมวิธีหา

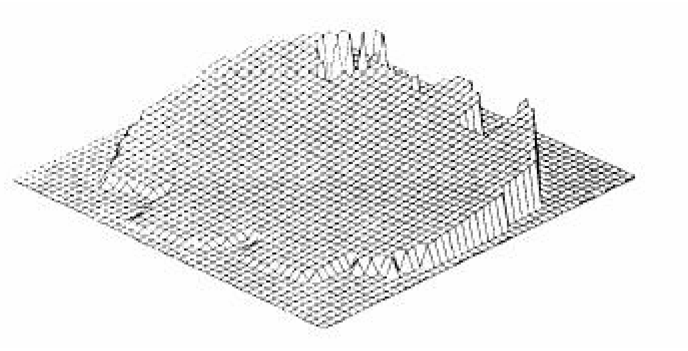
ปริพันธ์เชิงตัวเลขได้อีกด้วย เช่น ระเบียบวิธี Runge – Kutta หรือ Euler – Cauchy เป็นต้น แต่ข้อเสียคือ จานสะท้อนแบบสมมาตรมีประสิทธิภาพช่องเปิดต่ำเนื่องจากการบดบังของสายอากาศป้อน

2. สมการอนุพันธ์ย่อยไม่เป็นเชิงเส้นสองตัวแปร เมื่อต้องการออกแบบสายอากาศจานสะท้อนดัดรูปแบบไม่สมมาตร ผู้วิจัยพบว่าบทความต่างๆ ที่มีการนำเสนอนั้นจะได้พื้นผิวที่อยู่ในรูปของผลเฉลยประมาณ ทำให้เกิดคำถามเกี่ยวกับการมีอยู่ (existence) และความเป็นหนึ่งเดียว (uniqueness) ของผลเฉลย ในปี ค.ศ. 1972 Schruben ได้เสนอการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปจากสมการมองจ์-อองแปร์ (Monge Ampere) ประเภทอิลลิปติกและกำหนดเป็นปัญหาค่าขอบเขต ต่อมาปี ค.ศ. 1975 Norris กับ Westcott [2] ได้เสนอสมการแบบเดียวกันแต่ใช้ระบบพิกัดเชิงซ้อนแทนระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ซึ่งหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) ร่วมกับกรรมวิธีวนซ้ำ (Iterative Method) ในปี ค.ศ. 1976 Brickell และ Westcott[3] เสนอสมการมองจ์-อองแปร์ประเภทไฮเพอร์โบลิกและกำหนดให้เป็นปัญหาค่าเริ่มต้น ปี ค.ศ. 1979 Galindo, Imbriale และ Mittra [1] เปรียบเทียบการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนระหว่างการกำหนดให้เป็นปัญหาค่าขอบเขตกับปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งพบว่าการกำหนดให้เป็นปัญหาค่าขอบเขตใช้เวลาคำนวณนานกว่าการพิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเพราะใช้กรรมวิธีวนซ้ำ อีกทั้งยังไม่สามารถตอบคำถามการมีอยู่ของผลเฉลยได้ ส่วนปัญหาค่าเริ่มต้นสามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ในบางกรณี

แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้จากการสังเคราะห์สายอากาศด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตนั้นมีข้อเสียคือ 1. ไม่ได้รวมผลจากการเลี้ยวเบน ทำให้สนามที่พูข้างมีค่าผิดเพี้ยน 2. ไม่สามารถควบคุมค่าสนามแนวโพลาไรเซชันไขว้ได้ 3. ไม่สามารถกำหนดแบบรูปการแผ่พลังงานเป็นจุดวิยุต (discrete points) ได้

ดังนั้นจึงมีการนำกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization Method) เพื่อช่วยในการคำนวณสนามที่เกิดจากการเลี้ยวเบนที่ขอบของจานสะท้อน ควบคุมค่าสนามแนวโพลาไรเซชันไขว้และกำหนดแบบรูปการแผ่พลังงานได้ทั้งจุดต่อเนื่องและจุดวิยุต

ปี ค.ศ.1989 Cherrette, Lee และ Acosta [4] เสนอการใช้กรรมวิธีวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดมาหาค่าขนาดสูงสุด และวัฏภาคของสนามบนระนาบช่องเปิด แล้วนำมาสังเคราะห์พื้นผิวจานสะท้อนที่ให้ลำคลื่นครอบคลุมพื้นที่บริเวณประเทศสหรัฐอเมริกา แต่ข้อเสียของวิธีการนี้คือพื้นผิวและขอบของจานสะท้อนที่ได้ไม่มีความต่อเนื่องดังที่แสดงในรูปที่ 1.1 ซึ่งจะก่อให้เกิดความยุ่งยากให้นำไปสร้างจริง และไม่ได้รวมผลของสนามเลี้ยวเบนที่เกิดจากขอบของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป



รูปที่ 1.1 พื้นผิวของจานสะท้อนดัดรูปที่ได้จากงานวิจัย [4]

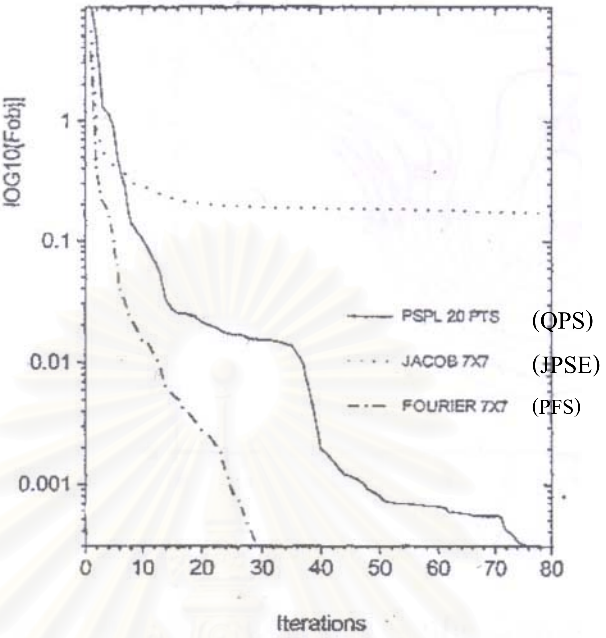
ปี ค. ศ. 1992 Kazuyoshi, Hayato และ Noboru [5] เสนอการใช้กรรมวิธีวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดมาหาค่าขนาดสูงสุด และวัฏภาคของสนามบนระนาบช่องเปิดของจานสะท้อน โดยบังคับให้รูปร่างของช่องเปิดจานสะท้อนเป็นวงกลมและบังคับให้ขนาดของวัฏภาคแต่ละตำแหน่งบนระนาบช่องเปิดต่างกันไม่เกินหนึ่งองศาในกระบวนการหาค่าเหมาะสมที่สุด ทำให้พื้นผิว และขอบของจานสะท้อนที่ได้ไม่เกิดปัญหาความไม่ต่อเนื่องและยังได้เสนอว่ากรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดอื่น ๆ น่าจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่ากรรมวิธีดิ่งลงชันสุด (steepest descent)

ปี ค.ศ. 1993 Bergmann และ Moreira [6] เสนอการใช้กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์ของสมการพื้นผิวจานสะท้อน เพื่อสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนดัดรูปที่ให้แบบรูปการแผ่พลังงานครอบคลุมพื้นที่ประเทศบราซิล สมการของพื้นผิวจานสะท้อนที่ใช้อยู่ในรูปของพหุนามอันดับสองรวมกับฮาร์มอนิกฟูริเยร์ โดยได้เปรียบเทียบแบบรูปการแผ่พลังงานจากสายอากาศที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตและกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพ พบว่าแบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพค่อนข้างใกล้เคียงกับแบบรูปการแผ่พลังงานที่เราต้องการ แต่กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตจะใช้เวลารวดเร็วกว่าในการสังเคราะห์สายอากาศ ข้อดีของวิธีการนี้คือพื้นผิวที่ได้ค่อนข้างเรียบ

ปี ค.ศ. 1995 Duan และ Samii [7] ใช้กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์ของสมการพื้นผิวจานสะท้อนเพื่อสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนดัดรูปที่ให้แบบรูปการแผ่พลังงานครอบคลุมพื้นที่ประเทศสหรัฐอเมริกา โดยเสนอสมการของพื้นผิวจานสะท้อนเป็นสมการยาโคบี- ฟูริเยร์ซึ่งสังเคราะห์พื้นผิวโดยใช้ทัศนศาสตร์กายภาพและใช้ทฤษฎีเลี้ยวเบนเชิงกายภาพเพื่อคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศที่สังเคราะห์ได้

ปี ค.ศ.1997 Bergmann และ Hasselmann [8] เสนอการใช้กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์ของสมการพื้นผิวจานสะท้อน เพื่อสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนดัดรูปที่ให้แบบรูปการแผ่พลังงานครอบคลุมพื้นที่ประเทศบราซิล โดยเปรียบเทียบสมการที่ใช้ในการประมาณพื้นผิวของจานสะท้อนได้แก่ QPS(Quintic Pseudosplines) JPSE(Jacobi Polynomial Series Expansion) และ PFS(Polynomial Fourier

Series) ผลการศึกษาพบว่าพหุนาม PFS ใช้จำนวนรอบในการลู่เข้าสู่คำตอบน้อยกว่า QPS และ JPSE ตามลำดับดังแสดงในรูปที่ 1.2 แต่ QPS จะใช้ตัวแปรของสัมประสิทธิ์ในสมการพื้นผิวเป็นจำนวนน้อยกว่า



รูปที่ 1.2 เปรียบเทียบการลู่เข้าของการหาคำตอบในกระบวนการหาค่าเหมาะสมที่สุดระหว่างพหุนาม QPS, PFS, JPSE [8]

ผลงานวิจัยในบทความต่าง ๆ ที่นำเสนอมาข้างต้นพบว่า การใช้กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์ของสมการพื้นผิวจานสะท้อนเพื่อสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปนั้น ให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่มีความแม่นยำและให้พื้นผิวของจานสะท้อนที่มีความต่อเนื่องกว่ากรรมวิธีอื่น ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้เลือกวิธีการดังกล่าวมาประยุกต์ใช้

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสนอแนวทางในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปร่วมกับสายอากาศป้อนกำลังเดี่ยวซึ่งเป็นงานวิจัยที่พัฒนาต่อจากงานวิจัยของนายวิลาส วงศ์แจ่มบุญ [13] จากการศึกษาพบว่า ในกระบวนการหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้นหากใช้ปัจจัยเริ่มต้นที่เหมาะสม ก็จะช่วยลดจำนวนรอบของการลู่เข้าสู่คำตอบและยังสามารถลดระดับของโพลาไรเซชันไขว้ลงอีกด้วย ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงเสนอการใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่อยู่รูปของสมการมองจ์-อองแปร์ประเภทไฮเพอร์โบลิก โดยตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเพื่อสังเคราะห์พื้นผิวเริ่มแรกและรูปร่างของช่องเปิดของสายอากาศ หลังจากนั้นจะใช้กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดมาหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวของจานสะท้อน โดยใช้สมการพื้นผิวแบบ PFS เป้าหมายอีกอย่างหนึ่งคือพัฒนาการกรรมวิธีสังเคราะห์สายอากาศที่มีรูปร่างช่องเปิดแบบใด ๆ ด้วยการใช้สมการประมาณขอบของจานสะท้อน ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้สมการไฮเพอร์ควอดริกแบบสองมิติ การวิเคราะห์แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปจะใช้ทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพเพื่อให้สนามบริเวณพูข้างมีความถูกต้องแม่นยำมากขึ้น

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. พัฒนากรรมวิธีในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนดัดรูปที่มีแบบรูปการแผ่พลังงานตามความต้องการโดยการประยุกต์การพิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น
2. สร้างสายอากาศต้นแบบเพื่อตรวจสอบกรรมวิธีสังเคราะห์ที่พัฒนา

เป้าหมายและขอบเขตของการวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ มีเป้าหมายในการพัฒนาการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเพื่อให้ได้แบบรูป-การแผ่พลังงานที่ต้องการ การศึกษาเบื้องต้นที่เคยนำเสนอพบว่ามีความเป็นไปได้ในการปรับปรุงการสังเคราะห์พื้นผิวแรกเริ่มของสายอากาศ โดยขอบเขตวิทยานิพนธ์เป็นดังนี้

1. ศึกษาการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนจากกรรมวิธีที่เคยมีผู้นำเสนอมาแล้ว
2. พัฒนากรรมวิธีในการสังเคราะห์พื้นผิวจานสะท้อนสำหรับพื้นที่ครอบคลุมซับซ้อนโดยใช้ทัศนศาสตร์กายภาพ ซึ่งจานสะท้อนแรกเริ่มจะสังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต โดยกำหนดให้เป็นปัญหาค่าเริ่มต้น
3. สร้างสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป
4. เปรียบเทียบผลจากการวัดและผลทางทฤษฎี

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาทฤษฎี กรรมวิธีการวิเคราะห์ และกรรมวิธีการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อน เพื่อให้ทราบข้อดี และข้อด้อยของกรรมวิธีแต่ละอย่าง
2. ศึกษาและพัฒนาวิธีการสังเคราะห์พื้นผิวแรกเริ่มของจานสะท้อน
3. สังเคราะห์พื้นผิวจานสะท้อนจากตัวอย่างแบบรูปการแผ่พลังงาน ได้แก่ ลำคลื่นวงรี, พื้นที่ครอบคลุมเรขาคณิตอย่างง่ายเช่น รูปสี่เหลี่ยม และพื้นที่ครอบคลุมที่ซับซ้อนเช่น รูปประเทศไทย
4. สร้างสายอากาศจานสะท้อนตามสมการพื้นผิวที่ได้จากการคำนวณ
5. เปรียบเทียบและวิเคราะห์ผลจากการวัดและผลจาการคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงาน
6. สรุปงานวิจัย

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. พัฒนาแนวคิดเกี่ยวกับกรรมวิธีในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนตามแบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการ ในการกำหนดผิวแรกเริ่มด้วยการพิจารณาปัญหาการสังเคราะห์พื้นผิวเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น
2. สายอากาศจานสะท้อนต้นแบบ

บทที่ 2

การสังเคราะห์พื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

ความนำ

การเลือกปัจจัยแรกเริ่มในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของพื้นผิวสายอากาศจานสะท้อนเพื่อให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานตามที่ต้องการ ซึ่งในกรณีนี้คือรูปร่างช่องเปิดและพื้นผิวเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป ถือว่ามีความสำคัญ ผลการศึกษาจากงานวิจัย [13] พบว่า หากใช้รูปร่างช่องเปิดและพื้นผิวเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวที่มีความเหมาะสม ก็จะช่วยลดจำนวนรอบในการดำเนินการวนซ้ำได้รวมทั้งได้ผลลัพธ์ที่น่าพึงพอใจมากขึ้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสนอการสังเคราะห์พื้นผิวเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต โดยได้อธิบายแนวทางในการเลือกกรรมวิธีสังเคราะห์ไว้ในหัวข้อย่อยที่ 2.2 ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนแรกในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป ซึ่งเป็นขั้นตอนที่จะหาพื้นผิวรวมทั้งรูปร่างช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนที่ให้แบบรูปการแผ่พลังงานมีแนวโน้มใกล้เคียงกับแบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการ หลังจากนั้นจึงนำเข้าสู่ขั้นตอนของกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของพื้นผิวสายอากาศจานสะท้อนเพื่อให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ตรงตามต้องการมากที่สุด

บทนี้แบ่งออกเป็นสี่หัวข้อย่อยคือ แนวทางในการสังเคราะห์รูปร่างช่องเปิดและพื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป, การประยุกต์ใช้ระบบพิกัดเชิงซ้อนในระบบพิกัดของสายอากาศ, วิธีการสังเคราะห์พื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น และตัวอย่างการสังเคราะห์สายอากาศ

2.1 แนวทางในการสังเคราะห์รูปร่างช่องเปิดและพื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

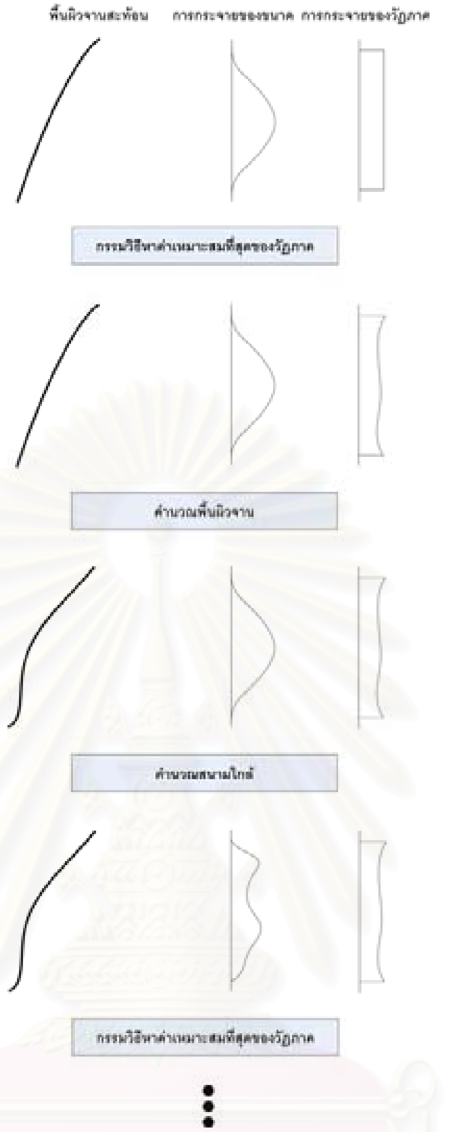
สิ่งที่ต้องการจากการประยุกต์ใช้สายอากาศจานสะท้อนคลื่นเป็นอันดับแรกคือแบบรูปการแผ่พลังงานที่สอดคล้องกับการใช้งานนั้น ๆ ตั้งแต่ช่วงสงครามโลกครั้งที่สองได้มีการนำสายอากาศจานสะท้อนมาประยุกต์ใช้กับเทคโนโลยีเรดาร์โดยจะนำสายอากาศไปติดตั้งบนเครื่องบินหรือเรือ เพื่อตรวจสอบเป้าหมายจากคลื่นที่กระเจิงกลับมา ซึ่งสายอากาศที่ใช้จะต้องมีความกว้างลำคลื่น (beam width) ทั้งในแนวมุมก้มเงย (elevation angle) และแนวมุมทิศ (azimuth angle) อยู่ในช่วงที่ต้องการโดยที่พูข้าง (side lobe) จะต้องอยู่ในระดับที่ต่ำ ในปัจจุบันมีระบบสื่อสารผ่านดาวเทียมซึ่งลำคลื่นที่แผ่กระจายออกมาสายอากาศต้องครอบคลุมพื้นที่ให้บริการ สายอากาศที่นำไปติดตั้งบนดาวเทียมจะต้องมีอัตราขยายสูงในบริเวณที่ต้องการ เนื่องจากระยะทางระหว่างสถานีภาคพื้นดินกับดาวเทียมนั้นไกลมาก และควรมีอัตราขยายต่ำนอกพื้นที่ให้บริการเพื่อลดการรบกวนของสัญญาณในกรณีที่ใช้ความถี่ซ้ำกัน ยิ่งไปกว่านั้นโลกปัจจุบันมีการส่งข้อมูลผ่านทางดาวเทียมมากขึ้นเรื่อย ๆ จึงมีการส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชัน (dual polarization) ดังนั้นอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ (cross polarization) ควรมีระดับต่ำเพื่อไม่ให้เกิดการรบกวนกับแนวโพลาไรเซชันร่วม (co polarization) ซึ่งเป็นโพลาไรเซชันที่เราต้องการ

นอกจากนี้ยังมีการนำสายอากาศจานสะท้อนไปประยุกต์ใช้งานต่าง ๆ อีกมากมาย ด้วยเหตุนี้แนวทางในการปรับปรุงวิธีสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเพื่อให้ได้คุณสมบัติในการรับและส่งคลื่นเป็นไปตามที่ต้องการจึงเป็นสิ่งที่พึงประสงค์อย่างยิ่ง

การสังเคราะห์รูปร่างช่องเปิดและพื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปสามารถทำได้ 3 วิธี ได้แก่

1. กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต วิธีนี้ใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานร่วมกับหลักการของแฟร์มาต์กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นตกกระทบกับคลื่นสะท้อนในรูปรังสี เพื่อจัดรูปลำคลื่นจากสายอากาศจานสะท้อนให้มีทิศทางเป็นไปตามต้องการ ข้อด้อยหลักของกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตคือไม่ได้คิดผลของสนามเลี้ยวเบนจากพื้นผิวและขอบของจานสะท้อนในกระบวนการสังเคราะห์พื้นผิว เมื่อนำสายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้มาวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีหรือทฤษฎีที่รวมผลกระทบของสนามเลี้ยวเบนก็จะได้แบบรูปการแผ่พลังงานที่มีความคลาดเคลื่อนโดยเฉพาะที่บริเวณพูข้างองศาไกล ๆ เพื่อลดผลกระทบที่เกิดจากสนามเลี้ยวเบนนี้ กรรมวิธีทัศน-ศาสตร์เรขาคณิตจึงมักประยุกต์ใช้กับจานสะท้อนที่มีขนาดใหญ่มากเมื่อเทียบกับความยาวคลื่นและจะช่วยให้การใช้วิธีติดตามรังสี (ray tracing) ทำได้แม่นยำมากขึ้น ข้อด้อยอีกประการหนึ่งคือจะมีความยุ่งยากหากต้องการใช้สายอากาศป้อนแบบแถวลำดับหรือสายอากาศช่องเปิด (เช่น สายอากาศแบบปากแตร) ร่วมในกระบวนการสังเคราะห์สายอากาศ [9] เพราะฉะนั้นในปัจจุบันมักนิยมใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเป็นตัวตั้งต้นของการออกแบบสายอากาศ ซึ่งอาจจะทำได้ด้วยการสังเคราะห์จากสนามบนระนาบช่องเปิดหรือแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลที่เป็นรูปแบบปิด (closed form) [10] ขึ้นมาก่อน แล้วจึงใช้การสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบน (Diffraction Synthesis) ในภายหลัง พื้นผิวของจานสะท้อนดัดรูปที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศน-ศาสตร์เรขาคณิตนี้จะได้มาเป็นจุดวิยุต (discrete points) จึงต้องใช้กรรมวิธีการประมาณพื้นผิวในกระบวนการวิเคราะห์ซึ่งอาจจะทำให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้ไม่แม่นยำนัก

2. กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของวัฏภาคบนระนาบหน้าจานสะท้อน [4] วิธีนี้จะหาค่าเหมาะสมที่สุดของการกระจายวัฏภาคบนระนาบหน้าจานของสายอากาศจานสะท้อน การดำเนินการมี 3 ขั้นตอนดังรูปที่ 2.1 ขั้นตอนที่ 1 คือกำหนดค่าปัจจัยเริ่มต้นซึ่งก็คือการกระจายทางขนาดและวัฏภาคของสนามบนระนาบหน้าจานสะท้อน โดยให้เป็นการกระจายทางขนาดและวัฏภาคของสนามของพื้นผิวพาราโบลอยด์ไม่สมมาตร เพราะฉะนั้นวัฏภาคที่ได้จะเป็นแบบเอกรูปบนระนาบช่องเปิด เมื่อได้ทั้งขนาดและวัฏภาคก็จะนำมาคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานในย่านสนามไกลแล้วเปรียบเทียบกับแบบรูปการแผ่พลังงานในย่านสนามไกลที่ต้องการ ขั้นตอนที่ 2 คำนวณพื้นผิวจานสะท้อนด้วยค่าวัฏภาคที่ได้จากกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยอาศัยหลักทางเรขาคณิต ขั้นตอนที่ 3 นำพื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนที่ได้มาคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานในย่านสนามใกล้ จะได้การกระจายทางขนาดและวัฏภาค ซึ่งจะทำวนซ้ำจนกว่าจะได้จานสะท้อนที่ให้ลำคลื่นเป็นไปตามที่ต้องการ ข้อด้อยของวิธีนี้คือพบว่าจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากวิธีนี้มีความไม่ต่อเนื่องที่ขอบซึ่งเกิดจากวัฏ-ภาคที่ไม่ต่อเนื่องจึงเกิดเป็นรูปทรงที่ประหลาด [4] ทำให้การวิเคราะห์ผลกระทบจากสนามเลี้ยวเบนมีความยุ่งยาก และไม่เหมาะที่จะนำไปสร้าง



รูปที่ 2.1 กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของวัฏภาคบนระนาบหน้าจาน

3. กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์ของสมการพื้นผิวจานสะท้อน วิธีนี้จะประมาณพื้นผิวจานสะท้อนโดยใช้สมการทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นผลรวมของฟังก์ชันพหุนามกับอนุกรมฟังก์ชันเชิงตั้งฉากที่คูณกับสัมประสิทธิ์ของพจน์แต่ละพจน์ แล้วหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์ที่จะทำให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานเป็นไปตามที่ต้องการ เนื่องจากสมการประมาณพื้นผิวที่ใช้มีความต่อเนื่อง ดังนั้นพื้นผิวของจานสะท้อนดัดรูปที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีนี้ค่อนข้างเรียบเมื่อเทียบกับกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของวัฏภาคบนระนาบหน้าจาน นอกจากนี้ยังสามารถใช้เงื่อนไขในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด เพื่อควบคุมค่าปัจจัยทางเรขาคณิตของจานสะท้อน เช่น ความลึกของจานสะท้อน เป็นต้น รวมถึงควบคุมระดับของอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ และควบคุมระดับของสนามบริเวณพูข้าง อีกด้วย โดยการเลือกพื้นผิวเริ่มต้นนั้นจะใช้พื้นผิวของจานพาราโบลอยด์ หรือ พื้นผิวที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตมาใช้เป็นค่าปัจจัยเริ่มต้นกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวจานสะท้อนก็ได้ [7]

ข้อดีและข้อด้อยของกรรมวิธีแต่ละอย่างสรุปได้ดังตาราง 2.1

ตาราง 2.1 ข้อดีและข้อด้อยของกรรมวิธีที่ใช้ในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

กรรมวิธีที่ใช้สังเคราะห์	ข้อดี	ข้อด้อย
กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต	1. เป็นวิธีที่ทำให้เข้าใจกลไกของการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนได้ง่าย 2. ใช้เวลาในการคำนวณน้อย	1. แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้ยังไม่แม่นยำเนื่องจากไม่ได้รวมสนามที่เกิดจากการเลี้ยวเบน 2. ไม่สามารถควบคุมปัจจัยทางเรขาคณิตของจานสะท้อนได้ 3. ไม่สามารถควบคุมระดับของอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชัน-ไขว้ 4. ไม่สามารถกำหนดอัตราขยายแบบจุดไม่ต่อเนื่องได้
กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของวัฏภาคบนระนาบหน้าจานสะท้อน	1. ให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่แม่นยำกว่ากรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต 2. สามารถควบคุมระดับของสนามในแนวโพลาไรเซชันไขว้ได้ด้วยการกำหนดเงื่อนไขบังคับหรืออาจใช้เป็นนิพจน์ถ่วงน้ำหนักในฟังก์ชันวัตถุ-ประสงค์ของกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด	1. ใช้เวลาในการคำนวณนานอันเนื่องจากกรรมวิธีการวนซ้ำ 2. ขอบของจานสะท้อนที่ได้ไม่เรียบอันเนื่องมาจากความไม่ต่อเนื่องของวัฏภาค
กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์ของสมการพื้นผิวจานสะท้อน	1. ให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่แม่นยำกว่ากรรมวิธีอื่น หากใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพในการวิเคราะห์หาสนาม เนื่องจากในกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพได้รวมสนามเลี้ยวเบนที่กระเจิงจากขอบแล้วระดับหนึ่ง 2. พื้นผิวของจานสะท้อนที่ได้ค่อนข้างเรียบ 3. สามารถควบคุมระดับของสนามในแนวโพลาไรเซชันไขว้ได้รวมถึงควบคุมปัจจัยทางเรขาคณิตของจานสะท้อนได้	1. ใช้เวลาในการคำนวณนานอันเนื่องจากกรรมวิธีการวนซ้ำและในการคำนวณหาค่าสนามของจุดสังเกตแต่ละจุดจะต้องหาปริพันธ์กระแสสมมูลทั่วทั้งโดเมนบนจานสะท้อน 2. หากกำหนดพื้นผิวเริ่มต้นของจานสะท้อนไม่เหมาะสมอาจทำให้กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดไม่สามารถหาพื้นผิวของจานสะท้อนที่ให้แบบรูปการแผ่พลังงานตามที่ต้องการได้

พิจารณาจากตาราง 2.1 จะเห็นได้ว่ากรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดให้แบบรูปการแผ่พลังงานตรงตามที่ต้องการมากกว่ากรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตรวม ทั้งยังสามารถควบคุมค่าปัจจัยต่าง ๆ เพิ่มเติมได้อีกด้วย แต่จะใช้เวลาในการคำนวณนานกว่า และกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์ของสมการพื้นผิวจาน

สะท้อนมีข้อดีมากกว่ากรรมวิธีอื่น นอกจากนี้ยังสามารถนำการสังเคราะห์รูปร่างช่องเปิดและพื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตมาคำนวณต่อในขั้นตอนการกำหนดปัจจัยเริ่มต้นได้อีกด้วย

ในบรรดากรรมวิธีที่ใช้ในการสังเคราะห์รูปร่างช่องเปิดและพื้นผิวเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อนนั้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกจากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตซึ่งเป็นกรรมวิธีที่ใช้กันอย่างกว้างขวางในยุคต้นๆของการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนตามที่ได้กล่าวไว้ในบทนำ กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตจะใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานและกฎการสะท้อนของสเนลล์ซึ่งจะอยู่ภายใต้ข้อสมมติว่าขนาดของพื้นผิวการสะท้อนและรัศมีความโค้ง (radii of curvature) ต้องมีขนาดใหญ่มากเมื่อเทียบกับความยาวคลื่น

เมื่ออธิบายปรากฏการณ์การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตให้อยู่ในนิพจน์ทางคณิตศาสตร์จะพบว่าอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยซึ่งสามารถแบ่งตามการตั้งปัญหาที่เกิดขึ้นจากลักษณะทางกายภาพออกได้เป็น 2 แบบ คือ ปัญหาค่าขอบเขตและปัญหาค่าเริ่มต้น

1. กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าขอบเขต

สมการที่ใช้ในการสังเคราะห์จะอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นอันดับสองรูปแบบมองจ์-อองแปร์ ดำเนินการแบบอิลลิปติก แล้วกำหนดเงื่อนไขขอบเขต เช่น ขอบของจานสะท้อนเป็นรูปวงกลมหรือวงรี เป็นต้น หลังจากนั้นใช้ระเบียบวิธีประมาณให้เป็นเชิงเส้นของนิวตันแล้วใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (finite difference method) เพื่อหาผลเฉลยเชิงเลขและใช้กรรมวิธีวนซ้ำ (iteration method) จนผลเฉลยลู่เข้าสู่ค่าคงตัว ปัจจุบันยังไม่มีผู้หาผลเฉลยแม่นตรงของสมการแบบอิลลิปติกนี้ได้ดังนั้นจึงไม่สามารถตอบคำถามเรื่องความมีอยู่ของผลเฉลยและความเป็นหนึ่งเดียวของผลเฉลยได้ ข้อด้อยอีกอย่างของการตั้งให้เป็นปัญหาค่าขอบเขตคือใช้เวลาในการคำนวณนานเนื่องจากใช้กรรมวิธีวนซ้ำแม้ว่าจะมีการใช้กรรมวิธีต่าง ๆ ในการแปลงเมตริกซ์แล้วก็ตาม

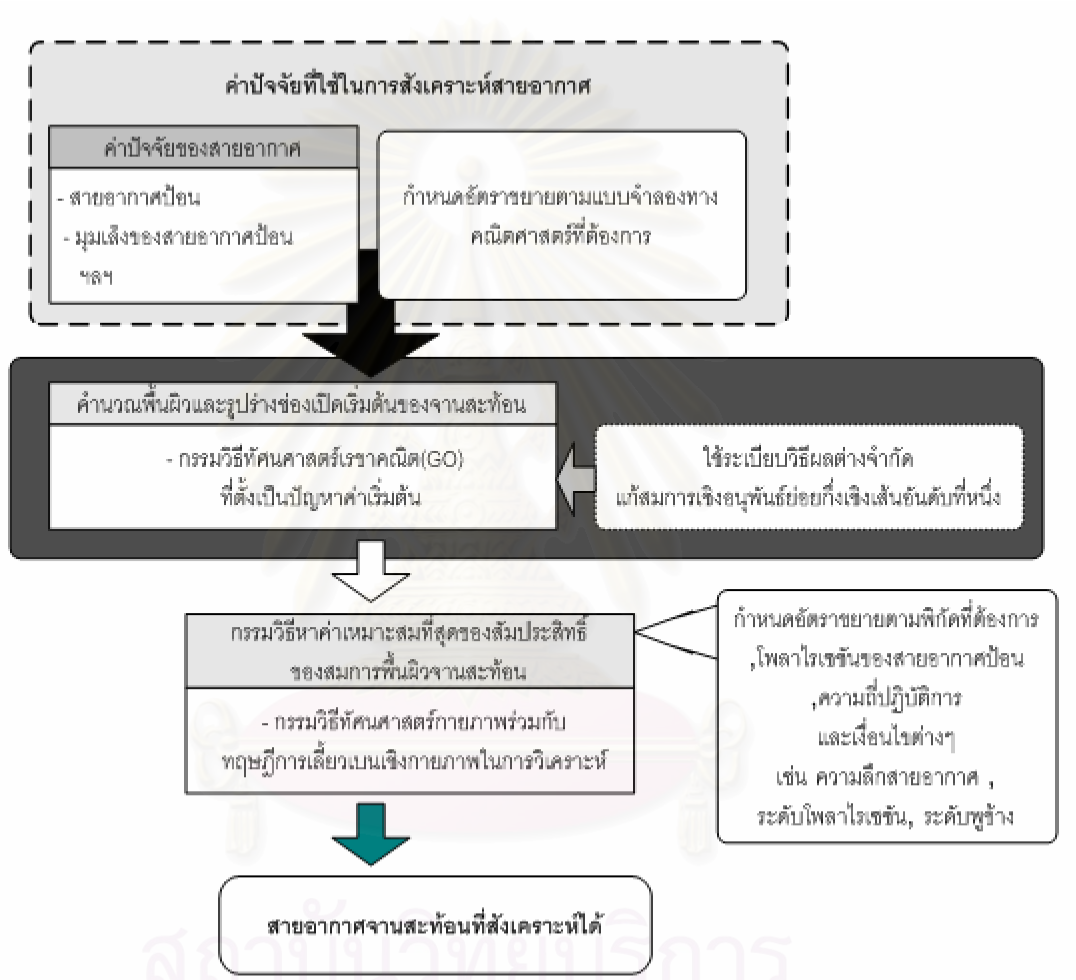
2. กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น

สมการที่ใช้ในการสังเคราะห์จะอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นอันดับสองรูปแบบมองจ์-อองแปร์ ดำเนินการแบบไฮเพอร์โบลิก แล้วกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นซึ่งในกรณีนี้คือความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางของรังสีที่ตกกระทบและสะท้อนออกจากจานสะท้อนซึ่งสามารถคำนวณหาผลเฉลยได้ทั้งผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยเชิงตัวเลข การที่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้นั้นแสดงให้เห็นถึงความมีอยู่ของผลเฉลยรวมทั้งผลเฉลยที่ได้มีความเป็นหนึ่งเดียวด้วยสมบัติของตัวดำเนินการแบบไฮเพอร์โบลิก สำหรับการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสามารถทำได้โดยลดสมการให้อยู่ในรูปสมการแบบกึ่งเชิงเส้น แล้วใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดคำนวณหาพื้นผิวจานสะท้อน ผลปรากฏว่าเวลาที่ใช้ในการคำนวณนั้นจะน้อยกว่าการตั้งเป็นปัญหาค่าขอบเขตเนื่องจากไม่มีขั้นตอนของกรรมวิธีวนซ้ำ [1]

เมื่อพิจารณาถึงข้อดีและข้อด้อยพบว่า ด้านเวลาที่ใช้ในการคำนวณ การตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นสามารถคำนวณได้รวดเร็วกว่าอีกทั้งยังสามารถตอบคำถามความเป็นหนึ่งเดียวของผลเฉลยตามสมบัติของ

ระบบไฮเพอร์โบลิก วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงเลือกใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นในการสังเคราะห์รูปร่างช่องเปิดและพื้นผิวเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปแล้วสรุปขั้นตอนในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปได้ดังรูปที่ 2.2

ขั้นตอนของกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์ของสมการพื้นผิวจานสะท้อนและระเบียบวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์มีกล่าวไว้ในบทที่ 3 บทนี้จะกล่าวเฉพาะรายละเอียดขั้นตอนการคำนวณพื้นผิวเริ่มต้นของจานสะท้อนที่ใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น



รูปที่ 2.2 ขั้นตอนการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่เสนอในวิทยานิพนธ์

2.2 การประยุกต์ใช้ระบบพิกัดเชิงซ้อนในระบบพิกัดของสายอากาศ

การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนคลื่นภายใต้การประมาณแบบทัศนศาสตร์เรขาคณิตสำหรับแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลที่ต้องการพิกัดของทิศทางแบบสองตัวแปร (θ,ϕ หรือ U,V) ที่ผ่านมาตั้งแต่ปี ค.ศ. 1962 Kinber [14] และ ปี ค.ศ. 1964 Galindo [15] เสนอการใช้แคลคูลลัสมาบรรยายความสัมพันธ์ระหว่างรังสีสะท้อนกับรังสีตกกระทบเพื่อใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิวจานสะท้อน ต่อมาปี ค.ศ. 1975 Westcott และ Norris [16] ได้เสนอแนวคิดในการแทนทิศทางของรังสีด้วยระบบพิกัดเชิงซ้อนซึ่งมีข้อดีคือการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรหากเทียบกับการใช้ทิศของรังสีในระบบคาร์ทีเซียนแล้วมีนิพจน์ทางคณิตศาสตร์น้อยกว่าเพราะแทนทิศทางของรังสีด้วยตัวแปรตัวเดียว ไม่ต้องกระจายนิพจน์ด้วยการใช้ตรีโกณมิติช่วย แต่จะใช้ทฤษฎีตัวแปรเชิงซ้อนแทน

นิยามเบื้องต้นและทฤษฎีพื้นฐานที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้ศึกษากรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตในระบบพิกัดเชิงซ้อนมีดังนี้ ฟังก์ชันเชิงซ้อน f สามารถเขียนได้เป็น $f = u+iv$ ถ้า u,v เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปร x และ y จะได้ว่า $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ โดย $i = \sqrt{-1}$ อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันเชิงซ้อนจะเป็นดังนี้

$$f_x = u_x + iv_x, \qquad f_y = u_y + iv_y \tag{2.1}$$

เมื่อพิจารณา f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนก็เหมือนกันกับฟังก์ชันของตัวแปรจริงเพียงแต่แทนตัวแปรอิสระ x ด้วยตัวแปรเชิงซ้อน η โดยที่ $\eta = x+iy$ จะได้ความสัมพันธ์ $2x = \eta+\overline{\eta},\ \ 2iy = \eta-\overline{\eta}$ และเมื่อใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวร่วมกับสมการ(2.1)จะสามารถหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ η ได้ดังนี้[1]

$$\begin{aligned} f_\eta &= u_x x_\eta + u_y y_\eta + i\left(v_x x_\eta + v_y y_\eta\right) \qquad , x_\eta = \tfrac{1}{2} \quad y_\eta = \tfrac{1}{2i} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(u_x + v_y + i\left(v_x - u_y\right)\right) \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(f_x - if_y\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} f_{\overline{\eta}} &= u_x x_{\overline{\eta}} + u_y y_{\overline{\eta}} + i\left(v_x x_{\overline{\eta}} + v_y y_{\overline{\eta}}\right) \qquad , x_{\overline{\eta}} = \tfrac{1}{2} \quad y_{\overline{\eta}} = -\tfrac{1}{2i} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(u_x - v_y + i\left(v_x + u_y\right)\right) \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(f_x + if_y\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ให้ $\overline{f}$ เป็นสังยุคของฟังก์ชันเชิงซ้อนจะเขียนได้เป็น $\overline{f} = u-iv$ และอนุพันธ์ของ $\overline{f}$ เมื่อเทียบกับ η และ $\overline{\eta}$ จะสอดคล้องกับความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\overline{f}_\eta = \overline{\left(f_{\overline{\eta}}\right)}, \qquad \overline{f}_{\overline{\eta}} = \overline{\left(f_\eta\right)} \tag{2.4}$$

---

[1] ในวิทยานิพนธ์บทที่สอง กำหนดการใช้เครื่องหมายดังนี้ $\partial f/\partial x \equiv f_x$ โดยที่ $\partial f/\partial x$ คืออนุพันธ์ย่อยของ $f\left(x,y,...\right)$

สัจพจน์ของการวิเคราะห์เชิงซ้อนที่สำคัญซึ่งใช้ในการสังเคราะห์สายอากาศภายใต้ข้อสมมติของทัศน-ศาสตร์เรขาคณิตที่จะกล่าวในหัวข้อถัดไปคือ

<u>สัจพจน์ 1</u>

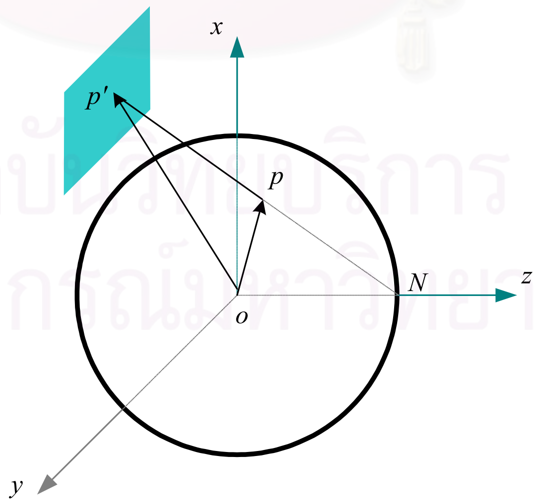
เมื่อให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งต่อเนื่อง แล้วจะมีฟังก์ชันค่าจริง g โดยที่ $g_\eta = f$ ถ้าและเพียงแต่ถ้า $f_{\bar{\eta}}$ เป็นค่าจริง

<u>พิสูจน์</u>

ถ้ามี g จะได้ว่า $f_{\bar{\eta}} = g_{\eta\bar{\eta}}$ ต่อไปใช้ความสัมพันธ์จากสมการ (2.3) และ (2.4) $u_y = -v_x$ นั่นคือ $g_{\eta\bar{\eta}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}g_{xx}\right) + i\left(-\frac{i}{2}g_{yy}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(g_{xx} + g_{yy}\right) = \frac{1}{4}\Delta g$ โดยที่ Δg เป็นลาปลาเซียนของ g และเป็นค่าจริง

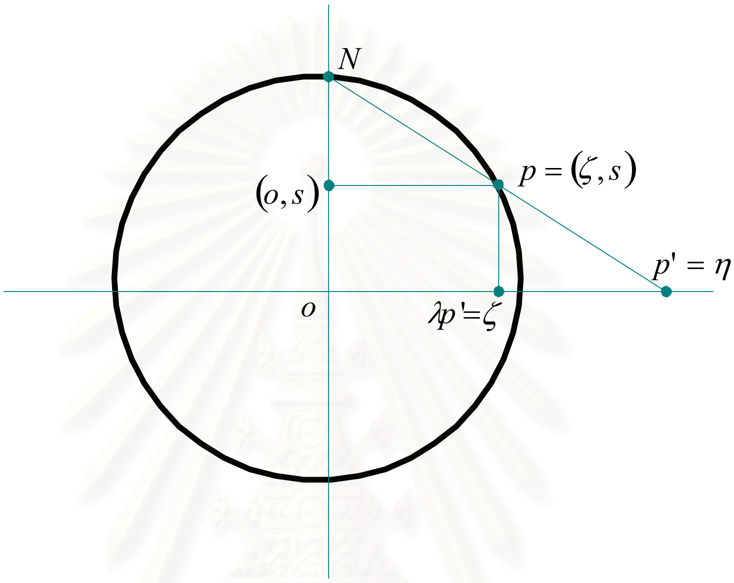
2.2.1 ระบบพิกัดเชิงซ้อนบนทรงกลมหนึ่งหน่วย

กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตตามแนวคิดของเวสคอตต์ (Westcott) จะใช้การฉายภาพสเตอริโอกราฟฟิก (stereographic projection) ในการแปลงเวกเตอร์ของรังสีในทิศทางตกกระทบและสะท้อน รวมถึงเวกเตอร์ในระบบเรขาคณิตของจานสะท้อนไปเป็นระบบพิกัดเชิงซ้อน จะเป็นการแปลงจากระบบพิกัดแบบสามมิติไปสู่พิกัดแบบสองมิติ เราสามารถแทนเวกเตอร์ต่าง ๆเหล่านี้ได้ด้วยตัวแปรเพียงตัวแปรเดียวทำให้ทำความเข้าใจได้ง่าย และลดความยุ่งยากในการสร้างสมการ เมื่อกำหนดให้ o เป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลมและให้ (x, y, z) เป็นพิกัดแบบระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ที่มี ox, oy, oz เป็นแกนหลักดังรูปที่ 2.3 ให้จุด N อยู่ที่พิกัด (0,0,1) ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน



รูปที่ 2.3 ภาพฉายสเตอริโอกราฟฟิก

วิธีการแปลงสามารถทำได้ด้วยการส่งจุดที่อยู่บนทรงกลมหนึ่งหน่วยให้มาอยู่ในระบบพิกัดเชิงซ้อนบนระนาบ $z=0$ หรือระนาบเชิงซ้อน โดยการลากเส้นตรงจากจุด N ผ่านจุด p บนทรงกลมหนึ่งหน่วยจะเกิดภาพฉายของจุด p เป็นจุด p' บนระนาบ $z=0$ ซึ่งเป็นระบบพิกัดเชิงซ้อน η ของจุด p ในรูป $x+iy$ หรือเขียนได้เป็น $(x,y,0)$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนของจุด p' $(p'=x+iy)$ ตำแหน่งจุด p บนทรงกลมหนึ่งหน่วยและทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{p}\,(=\overline{op})$ นั้นอาจเขียนได้ในระบบ (ζ,s) ที่ ζ คือจำนวนเชิงซ้อนภายในทรงกลมหนึ่งหน่วย ขนาด λ เท่าของ η ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 สามเหลี่ยมคล้ายของภาพฉายสเตอริโอกราฟฟิก

จะพบว่าเกิดสามเหลี่ยมคล้ายระหว่างสามเหลี่ยม $\Delta pp'\zeta$ กับสามเหลี่ยม $\Delta Np'o$ เพราะฉะนั้นอัตราส่วนระหว่างแนวตั้งกับแนวนอนจะมีอัตราส่วนดังนี้ $|\,p'-\zeta\,|:s=|\,p'\,|:1$ เมื่อแทน ζ ด้วย $\lambda p'$ ลงในอัตราส่วนดังกล่าวจะได้ผลดังนี้

$$(1-\lambda)|\,p'\,| = s\,|\,p'\,| \tag{2.5}$$

ผลจากสมการ (2.5) จะได้ความสัมพันธ์ $\lambda = 1-s$ และเขียนพิกัดของจุด p บนทรงกลมหนึ่งหน่วยได้ใหม่เป็น $p=(\lambda p',s)$ ที่ $p'=\eta=x+iy$ อีกทั้งสามารถเขียนสมการทรงกลมได้เป็น

$$\lambda^2|\,p'\,|^2+s^2=1$$

หรือ $$1-s^2=(1-s)^2|\,p'\,|^2$$

หรือ $$1+s=(1-s)|p'|^2 \tag{2.6}$$

จะหา s และ λ จากสมการ (2.6) ได้ดังนี้

$$s=\frac{|\eta|^2-1}{|\eta|^2+1}, \qquad \lambda=\frac{2}{|\eta|^2+1} \tag{2.7}$$

จุด p บนทรงกลมหนึ่งหน่วยในพิกัดคาร์ทีเซียนจะเขียนในพจน์ η ได้ดังนี้

$$\hat{p}=\left(\frac{\eta+\bar{\eta}}{1+|\eta|^2},\frac{i(\bar{\eta}-\eta)}{1+|\eta|^2},\frac{|\eta|^2-1}{1+|\eta|^2}\right) \tag{2.8}$$

โดยที่ $|\eta|$ เป็นขนาดหรือมอดุลัสของ η มีค่าเท่ากับ $\sqrt{x^2+y^2}$

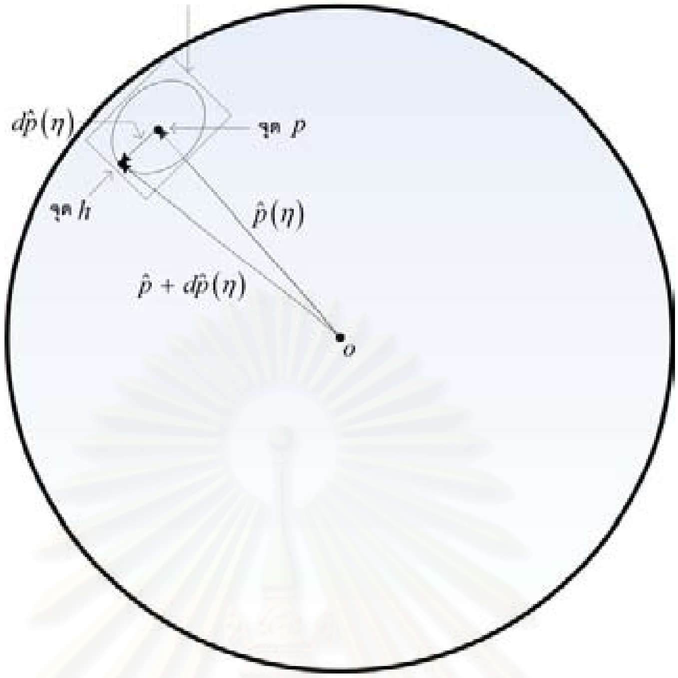
นำสมการ (2.8) มาหาอนุพันธ์เทียบ η โดยใช้สมการ (2.3) เพื่อหาเวกเตอร์ในแนวสัมผัสของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{p}$ จะได้ดังนี้

$$\hat{p}_\eta=\left(\frac{1-\bar{\eta}^2}{\left(1+|\eta|^2\right)^2},\frac{-i\left(1+\bar{\eta}^2\right)}{\left(1+|\eta|^2\right)^2},\frac{2\bar{\eta}}{\left(1+|\eta|^2\right)^2}\right) \tag{2.9}$$

โดยที่ $\hat{p}_\eta$ คือ $d\hat{p}/d\eta$ จากสมการ (2.3) และ (2.4) จะพบว่า $\hat{p}_{\bar{\eta}}=\overline{\left(\hat{p}_\eta\right)}$ ดังนั้นสามารถคำนวณผลคูณเชิงขนาดได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{p}\cdot\hat{p}_\eta &= \hat{p}\cdot\hat{p}_{\bar{\eta}} = 0\\ \hat{p}_\eta\cdot\hat{p}_\eta &= \hat{p}_{\bar{\eta}}\cdot\hat{p}_{\bar{\eta}} = 0\\ \hat{p}_\eta\cdot\hat{p}_{\bar{\eta}} &= \frac{2}{\left(1+|\eta|^2\right)^2}\end{aligned} \tag{2.10}$$

ในการคำนวณค่าปัจจัยทางเรขาคณิตของพื้นผิวทรงกลมหนึ่งหน่วย สามารถทำได้โดยใช้เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) นอกจากนี้เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ยังใช้หาจุดตัดแตะและความโค้งของจานสะท้อนด้วยการคำนวณค่าปัจจัยทางเรขาคณิตของพื้นผิวใด ๆ ด้วยเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ เช่น รัศมีความโค้งหลัก และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางหลัก จะมีความสัมพันธ์กับรูปแบบหลักมูลลำดับที่หนึ่ง (first fundamental form) และรูปแบบหลักมูลลำดับที่สอง (second fundamental form) จากระยะห่างระหว่างจุดสองจุดบนเส้นโค้งที่อยู่พื้นผิวทรงกลมดังรูปที่ 2.5 สามารถหาพื้นที่ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางหลักซึ่งมีความสัมพันธ์ในรูปแบบหลักมูลลำดับที่หนึ่ง (first fundamental form) ได้ดังนี้



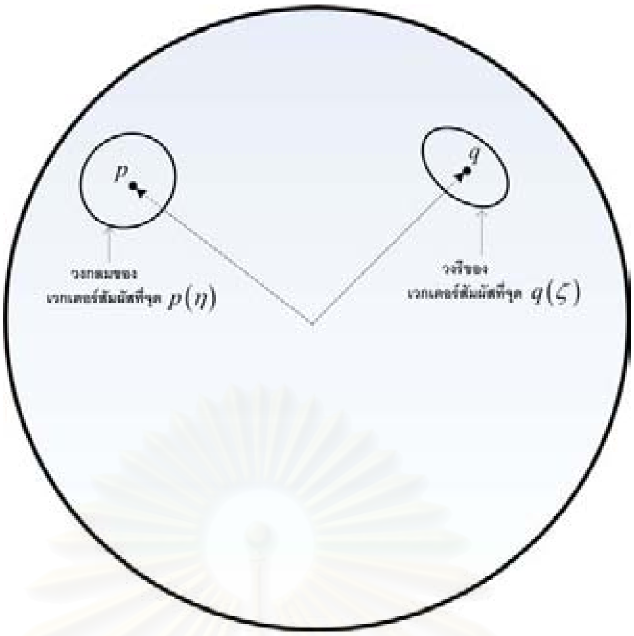
รูปที่ 2.5 เรขาคณิตของพื้นผิวทรงกลมหนึ่งหน่วย

เมื่อพิจารณาเวกเตอร์ตำแหน่งที่จุด p บนพื้นผิวทรงกลมหนึ่งหน่วยในรูปตัวแปรเสริมจะเขียนได้เป็น $\hat{p}(\eta(t))$ เมื่อ $\eta(t) = x(t) + i\,y(t)$ และ t เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่เวกเตอร์ที่สัมผัสเส้นโค้งและพื้นผิวของจุด p นี้จะมีส่วนเปลี่ยนแปลงน้อย ๆ เชิงเวกเตอร์ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{p}(\eta(t))\right) = \hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt} + \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} \tag{2.11}$$

สมการ (2.11) ทำให้สามารถหาความเปลี่ยนแปลงเชิงขนาด ซึ่งในที่นี้คือระยะระหว่างจุด p กับจุด h ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\left|d\hat{p}(\eta)\right|$ ได้จากผลคูณเชิงขนาด $d\hat{p}(\eta)\cdot d\hat{p}(\eta)$ ผลคูณเชิงขนาดนี้เรียกว่ารูปแบบหลักมูลลำดับที่หนึ่ง และเมื่อใช้ตัวแปรเสริมจะสามารถหาได้ดังสมการ (2.12)

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\hat{p}}{dt}\right|^2 &= \left(\hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt} + \hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt}\right)\cdot\left(\hat{p}_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \hat{p}_\eta \frac{d\eta}{dt}\right) \\ &= \frac{4}{\left(1+|\eta|^2\right)}\left|\frac{d\eta}{dt}\right|^2\end{aligned} \tag{2.12}$$



รูปที่ 2.6 พื้นที่ของเวกเตอร์สัมผัสบนทรงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้การส่ง τ

จะเห็นจากสมการ (2.12) ว่ารูปแบบหลักมูลลำดับที่หนึ่งมีแกนหลักและแกนรองเท่ากัน เพราะฉะนั้น พื้นที่ส่วนเปลี่ยนแปลงขนาดน้อย ๆ ของเวกเตอร์ $\hat{p}$ บนพื้นผิวทรงกลมมีลักษณะเป็นรูปวงกลม และเมื่อหาขนาดของเวกเตอร์ในแนวสัมผัส $d\hat{p}/dt$ จะได้ค่าเท่ากับ

$$\left|\frac{d\hat{p}}{dt}\right| = \frac{2}{1+|\eta|^2}\left|\frac{d\eta}{dt}\right| \tag{2.13}$$

เมื่อทำการส่งแบบท้องถิ่น (local mapping) ของทรงกลมหนึ่งหน่วย จากทิศทาง η ไปสู่ทิศทางใด ๆ ζ หรือ $\zeta(\eta)$ บนทรงกลมหนึ่งหน่วยเดียวกันดังรูปที่ 2.6 ขอเรียกการส่งนี้ว่าเป็นการส่ง τ เมื่อให้ η เป็นพิกัดเชิงซ้อนของจุด p และ ζ เป็นพิกัดเชิงซ้อนของ q จึงเขียนจุด q ได้เป็น $q = \tau(p)$ เมื่อหาความเปลี่ยนแปลงเชิงขนาดของเวกเตอร์ในแนวสัมผัสที่จุด q หรือ $\left|d\hat{q}\left(\zeta(\eta)\right)\right|$ จะสามารถหาได้เช่นเดียวกับการหาขนาดของ $d\hat{p}/dt$ ตามสมการ (2.13) ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ

$$\left|\frac{d\hat{q}}{dt}\right| = \frac{2}{\left(1+|\zeta|^2\right)}\left|\frac{d\zeta}{dt}\right| \tag{2.14}$$

ซึ่ง $\dfrac{d\zeta}{dt}$ มีค่าเท่ากับ $\dfrac{d\zeta(\eta(t))}{dt} = \left|\zeta_\eta \dfrac{d\eta}{dt} + \zeta_{\bar{\eta}} \dfrac{d\bar{\eta}}{dt}\right|$

จะหาสัดส่วนพื้นที่ของการส่ง τ ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของเวกเตอร์แนวสัมผัสที่จุด p ซึ่งถูกแปลงไปสู่พื้นที่ของเวกเตอร์แนวสัมผัสที่จุด q ได้จากสมการ (2.13) และ (2.14) ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\left|\frac{dq}{dt}\right|^2}{\left|\frac{dp}{dt}\right|^2} &= \left(\frac{1+|\eta|^2}{1+|\zeta|^2}\right)^2 \frac{\left|\zeta_\eta \frac{d\eta}{dt} + \zeta_{\bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{dt}\right|^2}{\left|\frac{d\eta}{dt}\right|^2} \\ &= \left(\frac{1+|\eta|^2}{1+|\zeta|^2}\right)^2 \left\| \zeta_\eta\right|^2 - \left|\zeta_{\bar{\eta}}\right|^2 \right| \end{aligned} \tag{2.15}$$

โดยจะเรียก $J(\tau) = \left|\zeta_\eta\right|^2 - \left|\zeta_{\bar{\eta}}\right|^2$ ว่าเป็นยาโคเบียนของการส่ง τ

ความสัมพันธ์ใน (2.15) แสดงให้เห็นว่าพื้นที่รูปวงกลมของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สัมผัสทรงกลมที่จุด p จะแปลงไปเป็นพื้นที่รูปวงรีของเวกเตอร์สัมผัสที่จุด q อัตราส่วนอันเนื่องจากการส่ง τ จะมีความยาวแกนหลักและแกนรองดังนี้

$$\frac{1+|\eta|^2}{1+|\zeta|^2}\left(\left\|\zeta_\eta\right| \pm \left|\zeta_{\bar{\eta}}\right\|\right) \tag{2.16}$$

สมการ (2.16) เป็นตัวบ่งบอกการผิดรูปของการส่ง τ และจะเรียกว่าเป็น <u>การผิดรูปแบบเอกรูป</u> (uniform distortion) ถ้าแกนหลักและแกนรองมีค่าเท่ากัน การส่งที่มีการผิดรูปแบบเอกรูปจะสอดคล้องกับค่า $\zeta_{\bar{\eta}} = 0$ หรือ $\zeta_\eta = 0$ ในกรณีแรก ตามทฤษฎีตัวแปรเชิงซ้อน ζ จะเป็นฟังก์ชันเชิงวิเคราะห์ (analytic function) ของ η และการส่ง τ ก็จะเป็นฟังก์ชันเจาะจง ในกรณีที่สอง การส่ง τ จะไม่เป็นฟังก์ชันเชิงวิเคราะห์

2.2.2 สมการพื้นฐานของทัศนศาสตร์เรขาคณิต

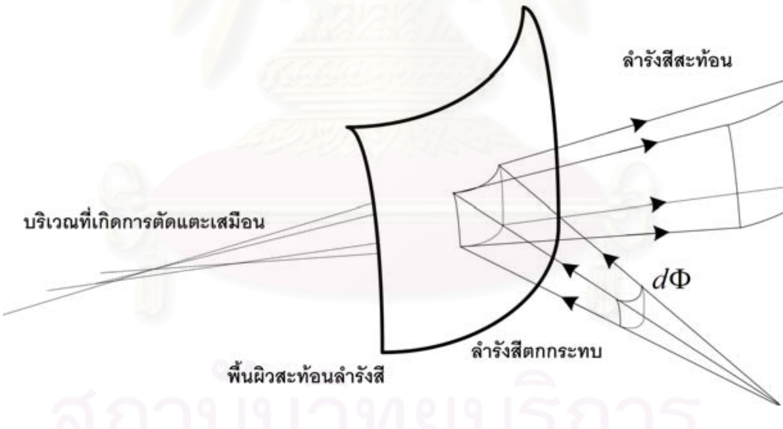
ทัศนศาสตร์เรขาคณิตเป็นกรรมวิธีเชิงประมาณที่ใช้ในการศึกษาพฤติกรรมของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ถ้าความยาวคลื่นมีค่าน้อยมากๆ เมื่อเทียบกับขนาดของพื้นผิวตกกระทบ จนปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นมีผลเฉพาะบริเวณเล็กๆ ที่คลื่นตกกระทบจนสามารถพิจารณาการส่งผ่านพลังงานและการเคลื่อนที่ของคลื่นในเชิงรังสีได้ มีหลักการพื้นฐาน 2 ประการที่ใช้ในการศึกษา คือ 1. กฎการอนุรักษ์พลังงานภายในลำรังสี และ 2. หลักการของแฟร์มาต์

1. กฎการอนุรักษ์พลังงานภายในลำรังสีเล็ก ๆ มีหลักการว่า กำลังงานภายในพื้นที่ภาคตัดขวางแต่ละพื้นที่จะคงที่ตลอดลำของรังสี เมื่อใช้หลักการดังกล่าวพิจารณารูปที่ 2.7 โดยให้ I เป็นความเข้มกำลังงานของรังสีตกกระทบ และ G เป็นความเข้มกำลังงานของรังสีสะท้อน จะพบว่ากำลังงานของลำรังสีตกกระทบ I ที่พื้นที่ภาคตัดขวาง $d\Phi$ กับกำลังงานของลำรังสีสะท้อน G ที่พื้นที่ภาคตัดขวาง $d\Omega$ มีความสัมพันธ์เป็นดังนี้

$$I\,d\Phi = G\,d\Omega \tag{2.17}$$

หรือเขียนในแบบอัตราส่วนได้ดังนี้

$$\frac{I}{G} = \frac{d\Omega}{d\Phi} \tag{2.18}$$

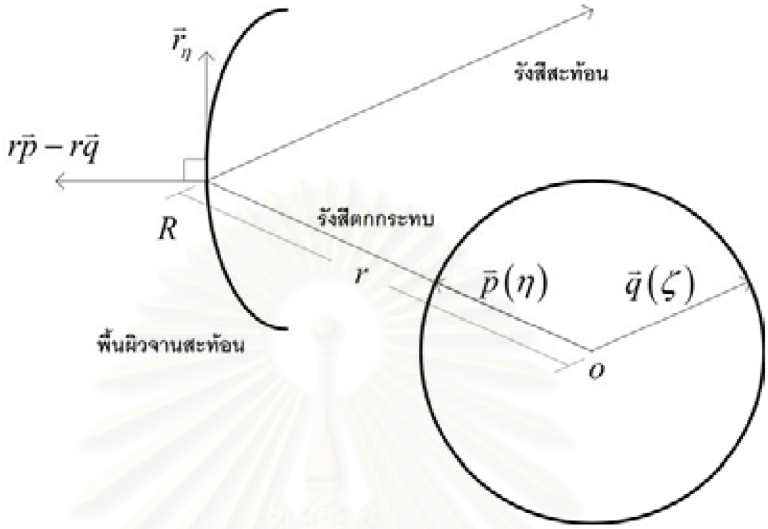


รูปที่ 2.7 การอนุรักษ์พลังงานภายในลำรังสีเล็ก ๆ

สำหรับการศึกษาสมการอนุรักษ์พลังงานที่เป็นการส่งระหว่างจุดต่อจุด เมื่อแทนเวกเตอร์ของลำรังสีด้วยพิกัดเชิงซ้อน และอาศัยสมการ (2.15) นั้นจะได้สัดส่วนระหว่างพื้นที่ของรังสีตกกระทบและรังสีสะท้อนซึ่งเกิดจากการส่ง τ เมื่อเทียบสัดส่วนดังกล่าวกับสมการ (2.18) จะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง ความเข้มของสนามไกล G และ ความเข้มของสนามแหล่งกำเนิด I ที่เป็นสมการอนุรักษ์พลังงานซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ดังนี้

$$\left|\zeta_{\eta}\right|^2 - \left|\zeta_{\bar{\eta}}\right|^2 = \pm\left(\frac{1+|\eta|^2}{1+|\zeta|^2}\right)^2 \frac{I}{G} \tag{2.19}$$

กฎการอนุรักษ์พลังงานทำให้ทราบความสัมพันธ์เชิงทิศทางระหว่างรังสีตกกระทบกับรังสีสะท้อนที่เป็นเวกเตอร์ในทรงกลมหนึ่งหน่วยแต่ยังไม่ได้ให้ตำแหน่งของจุดตกกระทบซึ่งก็คือพื้นผิวจานสะท้อนจึงต้องใช้หลักการของแฟร์มาต์เพื่อให้ได้พื้นผิวของจานสะท้อน



รูปที่ 2.8 ทิศทางของรังสีตกกระทบและรังสีสะท้อน

2. หลักการของแฟร์มาต์ เป็นหลักการที่ใช้ศึกษาเส้นทางในการเคลื่อนของรังสี โดยมีใจความว่า แนวรังสีระหว่างจุดสองจุดใด ๆ P_1 กับ P_2 นั้นเป็นไปตามเส้นทางที่ใช้เวลาในการเดินทางน้อยที่สุด ผลจากหลักการของแฟร์มาต์ คือ รังสีจะเดินทางเป็นเส้นตรงในตัวกลางเอกพันธุ์ และเมื่อประยุกต์ใช้หลักการดังกล่าวกับปัญหาการสะท้อนที่รอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \vec{t} = 0 \tag{2.20}$$

โดยที่ $\vec{a}$ แทนเวกเตอร์ของรังสีที่ตกกระทบ, $\vec{b}$ แทนเวกเตอร์ของรังสีที่สะท้อน และ $\vec{t}$ แทนเวกเตอร์ในแนวสัมผัสกับพื้นผิวตกกระทบ

เวกเตอร์ $\vec{a}$ กับเวกเตอร์ $\vec{b}$ นี้จะอยู่บนระนาบเดียวกันซึ่งระนาบนี้จะตั้งฉากกับระนาบของเวกเตอร์แนวสัมผัสพื้นผิว และเวกเตอร์ $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$ จะเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกับพื้นผิว ผลลัพธ์ดังกล่าวทำให้ได้ข้อสรุปว่ามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ เวกเตอร์ในแนวสัมผัส $\vec{t}$ เท่ากับมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{b}$ และ เวกเตอร์ในแนวสัมผัส $\vec{t}$ ซึ่งพบว่าพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของรังสีนี้สอดคล้องกับกฎการสะท้อนของสเนลล์

เมื่อกำหนดให้ทรงกลมหนึ่งหน่วยมี o เป็นจุดศูนย์กลาง และเป็นจุดกำเนิดของรังสีตกกระทบดังรูปที่ 2.8 กำหนดให้ $\hat{p}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของรังสีตกกระทบ, $\vec{r} = r\hat{p}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของ

จุดสะท้อน R ที่พื้นผิวสะท้อน และ $\hat{q}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของรังสี เมื่อใช้การส่ง τ แทนการส่งรังสีตกกระทบไปเป็นรังสีสะท้อน โดยจะให้ $\hat{p}$ แปลงไปเป็นจุด η บนระนาบเชิงซ้อนและให้ $\hat{q}$ แปลงไปเป็นจุด ζ บนระนาบเชิงซ้อน อาศัยสมการ (2.8) ทำให้เวกเตอร์ $\hat{q}$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเขียนในนิพจน์ ζ ได้ดังนี้

$$\hat{q} = \left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{1 + |\zeta|^2}, \frac{i\left(\bar{\zeta} - \zeta\right)}{1 + |\zeta|^2}, \frac{|\zeta|^2 - 1}{1 + |\zeta|^2} \right) \tag{2.21}$$

เมื่อ $\bar{r} - r\hat{q}$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกับผิวของจานสะท้อน และเวกเตอร์ในแนวสัมผัสพื้นผิวจานสะท้อน คือ $\bar{r}_\eta$ จากหลักการของแฟร์มาต์ แทนเวกเตอร์ทั้งสองลงในสมการ (2.20) ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\bar{r}_\eta \cdot \left(\bar{r} - r\hat{q} \right) = 0 \tag{2.22}$$

อาศัย $\bar{r} = r\hat{p}$ เมื่อหาเวกเตอร์ในแนวสัมผัสของผิวจานสะท้อนจะได้เป็น $\bar{r}_\eta = r\hat{p}_\eta + r_\eta \hat{p}$ เมื่อแทนค่า $\bar{r}_\eta$ ลงในสมการ (2.22) จะได้

$$\left(r\hat{p}_\eta + r_\eta \hat{p} \right) \cdot \left(r\hat{p} - r\hat{q} \right) = 0 \tag{2.23}$$

หรือ

$$r^2 \hat{p}_\eta \cdot \hat{p} + r r_\eta \hat{p} \cdot \hat{p} - r^2 \hat{p}_\eta \cdot \hat{q} - r r_\eta \hat{p} \cdot \hat{q} = 0 \tag{2.24}$$

จากผลคูณเชิงขนาดในสมการ (2.10) จะได้ $\hat{p}_\eta \cdot \hat{p} = 0$ และ $\hat{p} \cdot \hat{p} = 1$ แทนลงในสมการ (2.23) จะสามารถจัดรูปสมการใหม่เป็นดังนี้

$$r_\eta - r^2 \hat{p}_\eta \cdot \hat{q} - r_\eta \hat{p} \cdot \hat{q} = 0 \tag{2.25}$$

หรือ

$$\frac{r_\eta}{r} = \frac{\hat{p}_\eta \cdot \hat{q}}{\left(1 - \hat{p} \cdot \hat{q}\right)} \tag{2.26}$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณจะกำหนดให้ $\rho = \ln r$ เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับ η ก็จะได้เป็น $\rho_\eta = r_\eta / r$ และให้ $\Lambda(\eta, \zeta) = 1 - \hat{p} \cdot \hat{q}$ แทนลงใน (2.25) ทำให้สามารถเขียนสมการได้ใหม่เป็นดังนี้

$$\rho_\eta = \frac{\hat{p}_\eta \cdot \hat{q}}{\Lambda} \tag{2.27}$$

ใช้สมการ (2.9) และ (2.21) หาค่าผลคูณเชิงขนาด $\hat{p}_\eta \cdot \hat{q}$ ในนิพจน์ของ η และ ζ ได้ดังนี้

$$\hat{p}_\eta \cdot \hat{q} = \frac{-2\zeta\bar{\eta}^2 + 2\bar{\zeta} + 2\bar{\eta}|\zeta|^2 - 2\bar{\eta}}{\left(1+|\eta|^2\right)^2\left(1+|\zeta|^2\right)} \tag{2.28}$$

ใช้สมการ (2.8) และ (2.21) จะหาค่า Λ ในนิพจน์ของ η และ ζ ได้เป็น

$$\Lambda(\eta,\zeta) = 1 - \frac{(\eta+\bar{\eta})(\zeta+\bar{\zeta}) - (\bar{\eta}-\eta)(\bar{\zeta}-\zeta) + \left(|\eta|^2-1\right)\left(|\zeta|^2-1\right)}{\left(1+|\eta|^2\right)\left(1+|\zeta|^2\right)} \tag{2.29}$$

$$= \frac{\left(2|\eta|^2 + 2|\zeta|^2\right) - \left(2\bar{\eta}\zeta + 2\eta\bar{\zeta}\right)}{\left(1+|\eta|^2\right)\left(1+|\zeta|^2\right)} \tag{2.30}$$

$$= \frac{2|\zeta-\eta|^2}{\left(1+|\eta|^2\right)\left(1+|\zeta|^2\right)} \tag{2.31}$$

แทนสมการ (2.28) และ (2.31) ลงในสมการ (2.27) จะสามารถหา ρ_η ใหม่ในนิพจน์ของ η และ ζ ได้ดังนี้

$$\rho_\eta = \frac{1}{\zeta-\eta} + \frac{\bar{\eta}}{1+|\eta|^2} \tag{2.32}$$

เพื่อความสะดวกให้การคำนวณจะกำหนดให้พจน์แรกทางฝั่งขวามือของสมการ (2.32) เป็น L_η โดยที่เขียนได้เป็น $L_\eta = 1/(\zeta-\eta)$ เพราะฉะนั้นสมการ (2.32) จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$L_\eta = \frac{1}{\zeta-\eta} = \rho_\eta - \frac{\bar{\eta}}{1+|\eta|^2} \tag{2.33}$$

เนื่องจาก $\bar{\eta} = d\left(1+|\eta|^2\right)/d\eta$ ดังนั้น

$$L_\eta = \rho_\eta - \frac{1}{1+|\eta|^2}\frac{d\left(1+|\eta|^2\right)}{d\eta} \tag{2.34}$$

หาปริพันธ์ของสมการ (2.34) จะได้ $L = \rho - \ln\left(1+|\eta|^2\right)$ โดยที่ $\rho = \ln r$ ดังนั้นจะได้ L ที่มีความสัมพันธ์กับ r เป็น

$$L = \ln\left(\frac{r}{\left(1+|\eta|^2\right)}\right) \tag{2.35}$$

และพบว่า L เป็นฟังก์ชันค่าจริง เมื่อใช้ทฤษฎีตัวแปรเชิงซ้อนตาม สัจพจน์ 1 ฟังก์ชันค่าจริงนี้จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข (2.36)

$$\frac{\zeta_{\bar{\eta}}}{(\zeta-\eta)^2} \text{ เป็นค่าจริง หรือ } \operatorname{im}\left(\frac{\zeta_{\bar{\eta}}}{(\zeta-\eta)^2}\right) = 0 \tag{2.36}$$

เงื่อนไขนี้จำเป็นมากที่จะใช้หาพื้นผิวจานสะท้อนด้วยการหาปริพันธ์ซึ่งจะกล่าวในข้อหัวถัดไปและพื้นผิวของจานสะท้อนสามารถหาได้จากสมการ (2.37)

$$r = \left(1+|\eta|^2\right)e^{L(\eta)} \tag{2.37}$$

จะเห็นได้ว่าสามารถนำหลักการของแฟร์มาต์ที่ใช้หาพื้นผิวจานสะท้อนมาเชื่อมกับกฎการอนุรักษ์พลังงานซึ่งให้ทิศทางของรังสีตกกระทบและรังสีสะท้อน โดยจะจัดรูปสมการอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปของ $L(\eta)$ ได้ และหาอนุพันธ์สมการ (2.33) เทียบกับ η และ $\bar{\eta}$ ทำให้ได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$L_{\eta\eta} - L_\eta^2 = -L_\eta^2\zeta_\eta \tag{2.38}$$

$$L_{\eta\bar{\eta}} = -L_\eta^2\zeta_{\bar{\eta}} \tag{2.39}$$

แทนความสัมพันธ์ข้างต้นลงในสมการอนุรักษ์พลังงาน (2.19) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\left|L_{\eta\eta} - L_\eta^2\right|^2 - \left|L_{\eta\bar{\eta}}\right|^2 = \pm\left|L_\eta\right|^4\left(\frac{1+|\zeta|^2}{1+|\eta|^2}\right)^2\frac{I(\eta)}{G(\zeta)} \tag{2.40}$$

โดยที่ $\zeta = \eta + 1/L_\eta$ สมการที่ได้นี้เป็นสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เป็นเชิงเส้นและอยู่ในรูปแบบสมการมองจ์-อองแปร์ (Monge – Ampere equation) เครื่องหมายบวกเป็นตัวดำเนินการไฮเพอร์บอลิก $(+)$ และเครื่องหมายลบเป็นตัวดำเนินการอีลิปติก $(-)$

2.3.3 ทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับ

การวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนนั้นจะสามารถหาทิศทางของรังสีตกกระทบได้ด้วยการหาเวกเตอร์จากตำแหน่งของสายอากาศป้อนไปยังพื้นผิวของจานสะท้อนแล้วใช้การส่ง τ หาทิศทางของรังสีสะท้อนเพื่อ

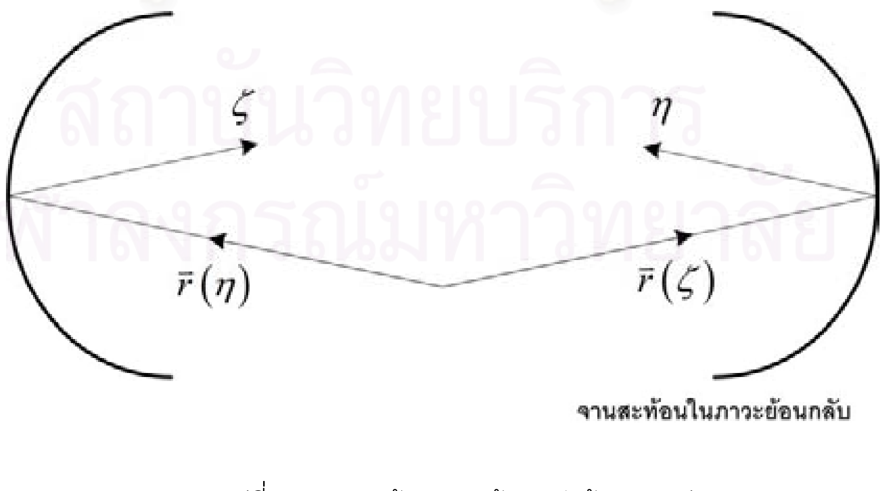
คำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงาน แต่ในวิธีการสังเคราะห์สายอากาศนั้นเป็นการหาย้อนกลับของวิธีการวิเคราะห์สายอากาศ โดยจะต้องระบุอัตราขยายในทิศทางที่ต้องการขึ้นมาก่อน ซึ่งก็คือทิศทางของรังสีสะท้อน (ทิศทางของอัตราขยายที่ต้องการ) แล้วจึงใช้การส่งแบบผกผันกับการส่ง τ ในที่นี้จะเรียกว่าเป็นการส่ง ϑ เพื่อหาทิศทางของรังสีตกกระทบ ก็จะได้จุดตกกระทบหรือพื้นผิวของจานสะท้อนนั้นเอง การส่ง ϑ นี้หาได้โดยใช้ประโยนช์จากทฤษฎีภาวะย้อนกลับ ซึ่งเป็นทฤษฎีที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ที่ผกผันได้ของสายอากาศในการใช้เป็นภาครับและภาคส่ง

เมื่อประยุกต์ทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับเข้ากับสายอากาศจานสะท้อน หรืออีกนัยหนึ่งคือใช้สายอากาศจานสะท้อนเป็นภาครับ จะเป็นการส่งแบบ ϑ ที่ $\hat{q}$ แสดงทิศทางของรังสีตกกระทบและ $\hat{p}$ แสดงทิศทางของรังสีสะท้อน การส่ง τ จะเกิดขึ้นถ้าอัตราส่วนของ I/G ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งจะทำให้ยาโคเบียน $J(\tau)$ ไม่เป็นศูนย์ด้วย เมื่อ ϑ เป็นการส่งแบบผกผันของการส่ง τ แล้วจะพบว่า $J(\vartheta) = 1/J(\tau)$ โดย $G(\zeta)$ จะกลายเป็นความเข้มของสนามตกกระทบและ $I(\eta)$ จะกลายเป็นความเข้มของสนามไกล ดังนั้นจากสมการอนุรักษ์พลังงาน (2.19) สามารถเขียนการส่งแบบผกผันใหม่ได้ดังนี้

$$\left|\eta_{\zeta}\right|^2 - \left|\eta_{\bar{\zeta}}\right|^2 = \pm\left(\frac{1+|\eta|^2}{1+|\zeta|^2}\right)^2 \frac{G(\zeta)}{I(\eta)} \qquad (2.41)$$

และตามสัจพจน์ 1 จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\frac{\eta_{\bar{\zeta}}}{(\eta-\zeta)^2} \text{ เป็นค่าจริง หรือ } \operatorname{im}\left(\frac{\eta_{\bar{\zeta}}}{(\eta-\zeta)^2}\right) = 0 \qquad (2.42)$$



รูปที่ 2.9 จานสะท้อนภาวะย้อนกลับด้วยการแปลง ϑ

พิจารณารูปที่ 2.9 จะพบว่า $\bar{r}(\zeta)$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของพื้นผิวของจานสะท้อนภาวะย้อนกลับสำหรับฟังก์ชันค่าจริงซึ่งผกผันกับฟังก์ชัน $L(\eta)$ โดยกำหนดให้เป็น $M(\zeta)$ ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้

$$M(\zeta) = \ln\left(\frac{r(\zeta)}{1+|\zeta|^2}\right) \tag{2.43}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (2.43) เทียบกับ ζ จะได้เป็น

$$M_{\zeta} = \left(\frac{1}{\eta-\zeta}\right) \tag{2.44}$$

เพราะฉะนั้นสมการอนุรักษ์พลังงานที่เป็นสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เป็นเชิงเส้นแบบมองจ์-อองแปร์อันดับที่สองในภาวะผกผันกับสมการ (2.40) จะเป็นดังสมการ (2.45)

$$\left|M_{\zeta\zeta} - M_{\zeta}^2\right|^2 - \left|M_{\zeta\bar{\zeta}}\right|^2 = \pm\left|M_{\zeta}\right|^4\left(\frac{1+|\eta|^2}{1+|\zeta|^2}\right)^2\frac{G}{I} \tag{2.45}$$

โดยจะแทนตัวแปร η ด้วย $\zeta + 1/M_{\zeta}$

อาศัยสมการ (2.44) จะสามารถหาพื้นผิวจานสะท้อนในพจน์ M ได้ เมื่อต้องการหา $r(\eta)$ จะเริ่มโดยการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $L(\eta)$ กับ $M(\zeta)$ เทียบระหว่างสมการ (2.33) กับสมการ (2.44) จะได้ว่า $L_{\eta} = -M_{\zeta}$ โดยที่ปริพันธ์ของ $L(\eta)$ สามารถหาดังนี้

$$L = \int L_{\eta}d\eta + \int L_{\bar{\eta}}d\bar{\eta} \tag{2.46}$$

หรือ

$$L = -\int M_{\zeta}d\eta - \int M_{\bar{\zeta}}d\bar{\eta} \tag{2.47}$$

จาก $\eta = \zeta + 1/M_{\zeta}$ เมื่อหาอนุพันธ์จะได้เป็น $d\eta = d\zeta - dM_{\zeta}/M_{\zeta}^2$ แล้วแทน $d\eta$ ลงในสมการ (2.47) จะได้เป็น

$$\begin{aligned} L &= -\int M_{\zeta}d\zeta - \int M_{\bar{\zeta}}d\bar{\zeta} + \int\frac{d(M_{\zeta})}{M_{\zeta}} + \int\frac{d(M_{\bar{\zeta}})}{M_{\bar{\zeta}}} \\ &= -M + \ln\left|M_{\zeta}\right|^2 + \text{const} \end{aligned} \tag{2.48}$$

ดังนั้นผิวของจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้สามารถหาจากการแทนสมการ (2.48) ลงในสมการ (2.37) ดังนี้

$$r(\eta) = \left(1+|\eta|^2\right)\left|M_{\zeta}\right|^2\exp(-M) \tag{2.49}$$

2.3 วิธีการสังเคราะห์พื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น

ดังที่ได้กล่าวไปในหัวข้อ 2.1 แล้วว่า วิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้การพิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้นในการสังเคราะห์พื้นผิวเริ่มต้นของสายอากาศ ซึ่งสมการ (2.45) จะอยู่ในรูปไฮเพอร์โบลิกดังนี้

$$\left|M_{\zeta\zeta}-M_{\zeta}^{2}\right|^{2}-\left|M_{\zeta\bar{\zeta}}\right|^{2}=\left|M_{\zeta}\right|^{4}\left(\frac{1+|\eta|^{2}}{1+|\zeta|^{2}}\right)^{2}D(\eta,\zeta) \tag{2.50}$$

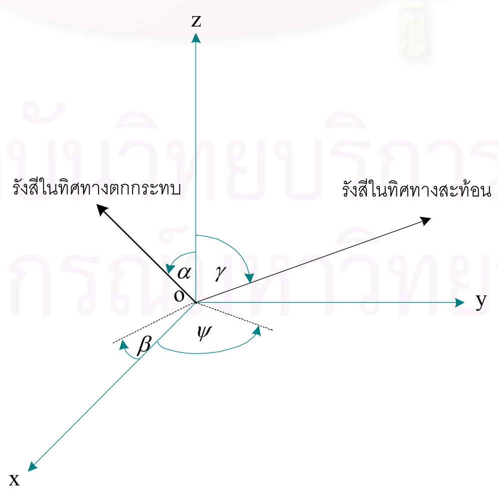
โดยที่ $D=G(\zeta)/I(\eta)$

เพื่อความสะดวกในการแก้สมการอนุพันธ์ย่อยประเภทมองจ์-อองแปร์อันดับที่สองคือจะต้องหาสมการที่สมมูลกับสมการ (2.50) โดยทั่วไปแล้วสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองจะสามารถหาสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งสองสมการที่สมมูลได้ หลังจากนั้นขั้นตอนที่สองก็คือแปลงพิกัดให้อยู่ในพิกัดทรงกลมเชิงขั้ว (spherical polar) แล้วใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหาผลเฉลย สุดท้ายจะได้รูปร่างของช่องเปิดจานสะท้อน เมื่อพิจารณาสมการ (2.50) จะพบว่าสมมูลกับสมการอนุรักษ์พลังงาน

$$\left|\eta_{\zeta}\right|^{2}-\left|\eta_{\bar{\zeta}}\right|^{2}=\left(\frac{1+|\eta|^{2}}{1+|\zeta|^{2}}\right)^{2}D(\eta,\zeta) \tag{2.51}$$

โดยต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\frac{\eta_{\bar{\zeta}}}{(\eta-\zeta)^{2}} \text{ เป็นค่าจริง หรือ } \operatorname{Im}\left(\frac{\eta_{\bar{\zeta}}}{(\eta-\zeta)^{2}}\right)=0 \tag{2.52}$$



รูป 2.10 ระบบพิกัดทรงกลมเชิงขั้ว

ให้ $\eta(\alpha,\beta),\zeta(\gamma,\psi)$ อิงระบบพิกัดทรงกลมเชิงขั้วตามรูปที่ 2.10 แล้วจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\eta = \cot\tfrac{1}{2}\alpha\exp(i\beta) \tag{2.53}$$
$$\zeta = \cot\tfrac{1}{2}\gamma\exp(i\psi) \tag{2.54}$$

ใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของ η เทียบกับ ζ และ $\bar{\zeta}$ เป็นดังนี้

$$\eta_{\zeta} = \left(\eta_{\alpha}\alpha_{\gamma} + \eta_{\beta}\beta_{\gamma}\right)\gamma_{\zeta} + \left(\eta_{\alpha}\alpha_{\psi} + \eta_{\beta}\beta_{\psi}\right)\psi_{\zeta} \tag{2.55}$$
$$\eta_{\bar{\zeta}} = \left(\eta_{\alpha}\alpha_{\gamma} + \eta_{\beta}\beta_{\gamma}\right)\gamma_{\bar{\zeta}} + \left(\eta_{\alpha}\alpha_{\psi} + \eta_{\beta}\beta_{\psi}\right)\psi_{\bar{\zeta}} \tag{2.56}$$

เมื่อ

$$\eta_{\alpha} = -\tfrac{1}{2}\csc^2\tfrac{1}{2}\alpha\exp(i\beta)$$
$$\eta_{\beta} = i\cot\tfrac{1}{2}\alpha\exp(i\beta)$$
$$\gamma_{\zeta} = -2\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\exp(-i\psi)$$
$$\psi_{\zeta} = -i\tan\tfrac{1}{2}\gamma\exp(-i\psi)$$
$$\gamma_{\bar{\zeta}} = -2\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\exp(i\psi)$$

และ

$$\psi_{\bar{\zeta}} = i\tan\tfrac{1}{2}\gamma\exp(i\psi)$$

แทนที่สมการ (2.53) ถึง (2.56) ลงในสมการ (2.51) และ (2.52) จะได้สมการอนุรักษ์พลังงานที่อยู่ในระบบพิกัดทรงกลมเชิงขั้วดังนี้ [3]

$$\alpha_{\gamma}\beta_{\psi} - \alpha_{\psi}\beta_{\gamma} = D\sin\gamma/\sin\alpha \tag{2.57}$$
$$A\alpha_{\gamma} + B\alpha_{\psi} + C\beta_{\gamma} + E\beta_{\psi} = 0 \tag{2.58}$$

เมื่อ

$$A = \sin\gamma\left(\cos\alpha - \cos\gamma\right)\sin\left(\beta - \psi\right)$$
$$B = \left(1 - \cos\alpha\cos\gamma\right)\cos\left(\beta - \psi\right) - \sin\alpha\sin\gamma$$
$$C = \sin\alpha\sin\gamma\left(\left(1 - \cos\alpha\cos\gamma\right)\cos\left(\beta - \psi\right) - \sin\alpha\sin\gamma\right)$$
$$E = \sin\alpha\left(\cos\gamma - \cos\alpha\right)\sin\left(\beta - \psi\right)$$

และ

$$D = G(\gamma,\psi)/I(\alpha,\beta)$$

ผลเฉลยของสมการ (2.57) และ (2.58) คือทิศทางของรังสีตกกระทบ α และ β จะเป็นฟังก์ชันของ γ และ ψ หรืออาจเขียนได้เป็น $\alpha(\gamma,\psi)$ และ $\beta(\gamma,\psi)$

ขั้นตอนที่สองหลังจากใช้สมการอนุรักษ์พลังงานในการคำนวณหาทิศทางจะใช้กฎการสะท้อนของสเนลล์หรือหลักการของแฟร์มาต์ เพื่อคำนวณหาจุดตกกระทบหรือพื้นผิวของจานสะท้อน $r(\alpha,\beta)$ จากสมการ (2.31) เมื่อแปลงในระบบพิกัดทรงกลมเชิงขั้วจะได้

$$\Lambda = 1 - \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma\cos\left(\beta - \psi\right) \tag{2.59}$$

เมื่อให้ $\rho = \ln r$ จากสมการ (2.32) แปลงให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกลมเชิงขั้วได้เป็น

$$d\rho = \rho_\gamma d\gamma + \rho_\psi d\psi \tag{2.60}$$

โดยที่

$$\rho_\gamma = -\left(X'\alpha_\gamma + Y'\beta_\gamma\right)/\Lambda$$

$$\rho_\psi = -\left(X'\alpha_\psi + Y'\beta_\psi\right)/\Lambda$$

$$X' = \sin\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\alpha\cos\left(\beta-\psi\right)$$

$$Y' = \sin\alpha\sin\gamma\sin\left(\beta-\psi\right)$$

พื้นผิวของจานสะท้อนจะคำนวณได้จากการหาปริพันธ์ของสมการ (2.60) เพื่อหา $\rho\left(\gamma,\psi\right)$ แล้วจึงหาพื้นผิวของจานสะท้อนโดยใช้ความสัมพันธ์ $r\left(\gamma,\psi\right) = \exp\left(\rho\left(\gamma,\psi\right)\right)$ สิ่งที่น่าสนใจคือจากสมการ (2.57) และ สมการ (2.58) ในบางกรณีสามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้และทำให้สามารถตอบคำถามเรื่องความมีอยู่และความเป็นหนึ่งเดียวของผลเฉลยได้ นอกจากนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็จะนำไปใช้ในการตรวจสอบความแม่นยำของระเบียบวิธีเชิงเลขในการหาผลเฉลยด้วย

2.3.1 ผลเฉลยแม่นตรง

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เลือกเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $\alpha = \gamma$ และ β เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ ψ ในการสังเคราะห์พื้นผิวเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อน ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ และจะนำมาใช้ตรวจสอบความแม่นยำกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขดังนี้

<u>**เงื่อนไข**</u> $\alpha = \gamma$ และ β เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ ψ

กรณีนี้จะเห็นได้ว่า $A = E = 0$ และ $\alpha_\psi = \beta_\gamma = 0$ เมื่อแทนลงในสมการ (2.57) และ (2.58) จะเห็นว่า $D = \beta_\psi > 0$ เพราะฉะนั้น D จะเป็นฟังก์ชันที่อิสระจาก γ หรือเขียนได้เป็น $D\left(\psi\right)$ เมื่อหาพื้นผิวของจานสะท้อนก็จะเริ่มพิจารณาจากสมการ (2.60) ได้เป็นดังนี้

$$\rho = -\ln\sin\gamma + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\psi} \beta_\psi \cot\tfrac{1}{2}\left(\psi-\beta\right)d\psi \quad \text{ที่ซึ่ง} \quad \rho = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \gamma = \psi = \tfrac{\pi}{2} \tag{2.61}$$

ตัวอย่างเช่น $\alpha = \gamma$ และ $\beta = k\left(\psi - \frac{1}{2}\pi\right) - \frac{1}{2}\pi$ ให้ $k > 0$ และ $k \neq 1$ สามารถคำนวณหาพื้นผิวของจานสะท้อนที่รังสีสะท้อน $\gamma = \psi = \frac{1}{2}\pi$ ซึ่งจะได้ทิศทางของรังสีตกกระทบที่ $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ และ $\beta = -\frac{1}{2}\pi$ แล้ว $D = k$, $k \neq 1$ ดังนี้

$$r = \exp\left(\rho\right) = \left(\sin\gamma\right)^{-1}\left(\sin\tfrac{1}{4}\left(2\left(1-k\right)\psi + \left(1+k\right)\pi\right)\right)^{2k/(1-k)}$$

หรือในพจน์ของ α, β

$$r = \exp\left(\rho\right) = \left(\sin\alpha\right)^{-1}\left(\sin\tfrac{1}{4}k^{-1}\left(2\left(1-k\right)\beta + \left(1+k\right)\pi\right)\right)^{2k/(1-k)}$$

2.3.2 การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนด้วยการพิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น มีวิธีการโดยสรุปดังนี้ **ขั้นตอนแรก** คือการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นซึ่งจะเป็นการกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางของรังสีตก-กระทบกับะทิศทางของรังสีสะท้อน **ขั้นตอนที่สอง** แก้สมการอนุรักษ์พลังงานกับสมการ (2.25) โดยต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดในขั้นตอนแรก ก็จะได้อัตราขยายที่เกิดขึ้นในทิศทางของรังสีตกกระทบ แล้วหาปริพันธ์ของสมการ (2.33) ก็จะได้พื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อน และ**ขั้นตอนสุดท้าย** นำอัตราขยายที่คำนวณได้จากขั้นตอนที่สองมาปรับบรรทัดฐาน (normalize) เมื่อกำหนดระดับความเรียวที่ขอบ (edge taper) ของจานสะท้อน ก็จะได้รูปร่างช่องเปิดของจานสะท้อน

เนื่องจากผลเฉลยแม่นตรงของสมการอนุรักษ์พลังงานจะหาได้เฉพาะบางกรณีเท่านั้น ตามที่ได้กล่าวในหัวข้อ 2.4.1 ดังนั้นเพื่อให้สามารถหาผลเฉลยได้ครอบคลุมทุกกรณี จึงจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาช่วยในการคำนวณ ในสมการไม่เชิงเส้นบ่อยครั้งมักจะแปลงสมการให้อยู่ในระบบสมการกึ่งเชิงเส้น ซึ่งจะทำให้ตัวดำเนินการของสมการอยู่ภายใต้หลักการทับซ้อน (superposition principle) หลังจากนั้นเมื่อจัดสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แล้ว จะสามารถนำไปใช้ได้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ดังนั้นเมื่อพิจารณาสมการ (2.57) และ (2.58) จะเห็นได้ว่าเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง ซึ่งหากต้องการที่จะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลย จำเป็นต้องแปลงให้เป็นระบบสมการกึ่งเชิงเส้นเสียก่อน โดยใช้กรรมวิธีของลักษณะสมบัติ(method of characteristics) โดยทั่วไประบบสมการกึ่งเชิงเส้นสามารถแสดงได้ดังนี้ [11]

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{A}^{ji}u_x^i + \mathrm{B}^{ji}u_y^i\right] + d^j = 0\,, \qquad j = 1, 2, ..., n \tag{2.62}$$

จะพบจากสมการ (2.11) ว่ามีสมการควบร่วม (coupled equations) จำนวน n ที่ใช้, ตัวแปรไม่ทราบค่า u^i เมื่อ $i = 1, 2, .., n$ และสัมประสิทธิ์ $\mathrm{A}^{ji}, \mathrm{B}^{ji}$ และ d^j เป็นฟังก์ชันทั่วไปของ x, y และ u^i [<u>ข้อสังเกต</u> ถ้าสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันอิสระกับ u^i จะเป็นสมการระบบเชิงเส้น]

พิจารณาสมการ (2.57) และ (2.58) จะสามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในระบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} B & E \\ -\beta_\gamma & \alpha_\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_\psi \\ \beta_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & C \\ \beta_\psi & -\alpha_\psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_\gamma \\ \beta_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2D\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

เมื่อกำหนดให้เมทริกซ์

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} B & E \\ -\beta_\gamma & \alpha_\gamma \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} A & C \\ \beta_\psi & -\alpha_\psi \end{bmatrix} \text{ และ } d = \begin{bmatrix} 0 \\ 2D\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \end{bmatrix}$$

รากของสมการกำลังสอง (quadratic equation) และเส้นโค้งลักษณะสมบัติ (characteristics curve) ของสมการ (2.63) สามารถหาได้จาก $\det(\mathrm{A}-\kappa\mathrm{B})=0$ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\begin{vmatrix} B-\kappa A & E-\kappa C \\ -\beta_\gamma-\kappa\beta_\psi & \alpha_\gamma+\kappa\alpha_\psi \end{vmatrix} = 0 \tag{2.64}$$

เส้นโค้งลักษณะสมบัติของสมการ (2.63) เป็นการหาปริพันธ์ของสมการอนุพันธ์ $d\psi/d\gamma=\kappa$ ซึ่ง κ เป็นรากของสมการกำลังสองจาก [11] พบว่ารากของสมการแบบไฮเพอร์โบลิกเป็นค่าจริงและไม่ซ้ำกัน ในที่นี่จะให้เป็น κ_1 และ κ_2 ซึ่งรากทั้งสองสามารถหาได้จากการหาปริพันธ์ของสมการอนุพันธ์ดังนี้

$$\frac{d\psi}{d\gamma}=\kappa_1 \quad , \quad \frac{d\psi}{d\gamma}=\kappa_2 \tag{2.65}$$

เมื่อกำหนดให้รากของสมการทั้งสองเป็น $\xi(\gamma,\psi)=\kappa_1$ และ $\varsigma(\gamma,\psi)=\kappa_2$ ในที่นี้ฟังก์ชัน ξ และ ς คือตัวแปรอิสระ พิจารณาสมการ (2.63) เมื่อ γ,ψ,α และ β เป็นฟังก์ชันของ ξ และ ς จะสอดคล้องกับระบบสมการกึ่งเชิงเส้นซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_\xi & \alpha_\varsigma \\ \beta_\xi & \beta_\varsigma \end{bmatrix} = \Delta\begin{bmatrix} \gamma_\xi & -\gamma_\varsigma \\ \psi_\xi & -\psi_\varsigma \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

โดยที่ Δ เป็นฟังก์ชันค่าบวก โดยหาได้จาก $\Delta^2=(BC-AE)D\sin\gamma/\sin\alpha$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ แทนตัวแปร ξ และ ς ด้วยตัวแปร g และ t โดยที่ $\xi=g-t$ และ $\varsigma=g+t$ สามารถเขียนสมการ (2.66) ได้ใหม่เป็นดังสมการ (2.67)

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_g & \alpha_t \\ \beta_g & \beta_t \end{bmatrix} = -\Delta\begin{bmatrix} \gamma_g & \gamma_t \\ \psi_g & \psi_t \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

โดยที่มียาโคบีในการแปลงนี้คือ

$$J^q = \frac{\partial(\gamma,\psi)}{\partial(g,t)} = \begin{vmatrix} \gamma_g & \gamma_t \\ \psi_g & \psi_t \end{vmatrix} = \gamma_g\psi_t-\psi_g\gamma_t \tag{2.68}$$

มีเงื่อนไขว่าสมการ (2.68) จะสามารถหาผลเฉลยได้ต่อเมื่อพจน์ยาโคบีต้องมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ $(J^q\neq 0)$ จากการแก้สมการ (2.67) ผลเฉลยที่ต้องการคือ γ,ψ,α และ β จะอยู่ในพจน์ของ g และ t ทำให้เขียนผลเฉลยได้เป็น $\alpha=\alpha(g,t)$, $\beta=\beta(g,t)$, $\gamma=\gamma(g,t)$ และ $\psi=\psi(g,t)$ สามารถ

แสดงให้เห็นว่าสมการ (2.67) สอดคล้องกับสมการ (2.57) และ (2.58) ได้ดังนี้ เมื่อให้ $\Re$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของยาโคบีเมทริกซ์ J^q คือ

$$\Re = \frac{\partial(\gamma,\psi)}{\partial(g,t)} = \begin{bmatrix} g_\gamma & g_\psi \\ t_\gamma & t_\psi \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

เมื่อคูณสมการ (2.67) ด้วยเมทริกซ์อนุพันธ์ย่อย $\Re$ ทั้งสองข้าง จะได้เป็น

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_\gamma & \alpha_\psi \\ \beta_\gamma & \beta_\psi \end{bmatrix} = -\Delta\begin{bmatrix} \gamma_t & \gamma_g \\ \psi_t & \psi_g \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_\gamma & g_\psi \\ t_\gamma & t_\psi \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

เนื่องจาก $\Re$ เป็นตัวผกผันของเมทริกซ์ J^q ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} g_\gamma & g_\psi \\ t_\gamma & t_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_g & \gamma_t \\ \psi_g & \psi_t \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{J^q}\begin{bmatrix} \psi_t & -\gamma_t \\ -\psi_g & \gamma_g \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

เพราะฉะนั้นเมื่อเขียนสมการ (2.70) จะเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_\gamma & \alpha_\psi \\ \beta_\gamma & \beta_\psi \end{bmatrix} = -\frac{\Delta}{J^q}\begin{bmatrix} \gamma_t & \gamma_g \\ \psi_t & \psi_g \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_t & -\gamma_t \\ -\psi_g & \gamma_g \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

สามารถเขียนสมการ (2.72) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} A\alpha_\gamma + C\beta_\gamma & A\alpha_\psi + C\beta_\psi \\ B\alpha_\gamma + E\beta_\gamma & B\alpha_\psi + E\beta_\psi \end{bmatrix} = -\frac{\Delta}{J^q}\begin{bmatrix} \gamma_t\psi_t - \gamma_g\psi_g & \gamma_g^2 - \gamma_t^2 \\ \psi_t^2 - \psi_g^2 & -\gamma_t\psi_t + \gamma_g\psi_g \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

ดีเทอร์มิแนนต์ในแต่ละข้างของสมการ (2.73) หาได้ดังสมการ

$$(AE - BC)(\alpha_\gamma\beta_\psi - \alpha_\psi\beta_\gamma) = \Delta^2 \tag{2.74}$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (2.74) สอดคล้องกับสมการ (2.57) และเมื่อหาสมการเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์จากสมการ (2.73) จะได้

$$A\alpha_\gamma + C\beta_\gamma = -\frac{\Delta}{J^q}(\gamma_t\psi_t - \gamma_g\psi_g) \tag{2.75}$$

$$B\alpha_{\psi} + E\beta_{\psi} = -\frac{\Delta}{J^{q}}\left(-\gamma_{t}\psi_{t} + \gamma_{g}\psi_{g}\right) \tag{2.76}$$

นำสมการ (2.75) และสมการ (2.76) มาบวกกันจะได้เป็น $A\alpha_{\gamma} + B\alpha_{\psi} + C\beta_{\gamma} + E\beta_{\psi} = 0$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (2.58)

2.3.3 เงื่อนไขเริ่มต้น

สมการอนุพันธ์ย่อยส่วนมากจะมีผลเฉลยได้มากมาย เพื่อให้มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว จึงจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขประกอบ เงื่อนไขเหล่านี้ส่วนใหญ่มาจากสถานการณ์ในเชิงกายภาพซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็นสองประเภทด้วยกัน คือ เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต เงื่อนไขที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิวเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปคือ เงื่อนไขเริ่มต้น

ในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนนั้น *เงื่อนไขเริ่มต้น* หมายถึงเงื่อนไขที่บ่งบอกสถานะหรือลักษณะทางกายภาพของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อตัวแปร t มีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นแล้วจึงจะสามารถหาผลเฉลยของสมการ (2.67) ที่ตำแหน่ง t ต่อมาได้

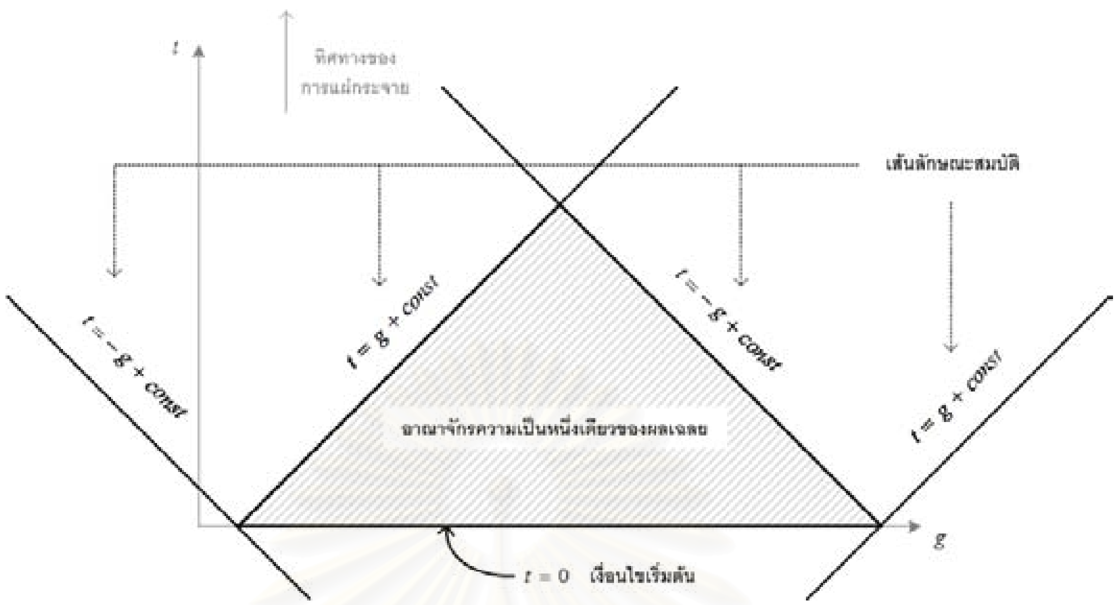
สมการ (2.67) สามารถเขียนใหม่เป็นสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งได้สี่สมการดังนี้

$$\Delta\gamma_{g} + A\alpha_{t} + C\beta_{t} = 0 \tag{2.77}$$
$$\Delta\psi_{g} + B\alpha_{t} + E\beta_{t} = 0 \tag{2.78}$$
$$\Delta\gamma_{t} + A\alpha_{g} + C\beta_{g} = 0 \tag{2.79}$$
$$\Delta\psi_{t} + B\alpha_{g} + E\beta_{g} = 0 \tag{2.80}$$

เนื่องจากสมการ (2.77) ถึง (2.80) แปลงมาจากสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นอันดับที่สองชนิดมองจ์-อองแปร์ [12] ดังนั้นจึงมีเส้นลักษณะสมบัติเป็น $t = \pm g +$ ค่าคงที่ ในบริเวณ $-\infty < g < \infty$ และ $t \geq 0$ โดยมีอาณาจักร ของความเป็นหนึ่งเดียว (Uniqueness domain) แสดงดังรูปที่ 2.11

อาณาจักรความเป็นหนึ่งเดียวของผลเฉลยในระบบไฮเพอร์โบลิกจะกำหนดให้อยู่ภายในสามเหลี่ยมแรเงาระหว่างเส้นของเงื่อนไขเริ่มต้นกับเส้นลักษณะสมบัติทั้งสอง ในกรณีที่ *เงื่อนไขเริ่มต้นตั้งอยู่บนเส้นลักษณะสมบัติ* อาจจะหาผลเฉลยไม่ได้ถ้ามีเงื่อนไขเริ่มต้นที่ไม่เหมาะสม และความเป็นหนึ่งเดียวของผลเฉลยอาจจะไม่เกิดขึ้นในบางกรณี ทิศทางของการแผ่กระจายจะไปในทิศทางเดียวกับ t ในที่นี้สมมติให้เป็นทิศขึ้นด้านบน หากทิศทางของการแผ่กระจายลงด้านล่างอาณาจักรความเป็นหนึ่งเดียวของผลเฉลยจะเกิดขึ้นในสามเหลี่ยมด้านล่าง เมื่อพิจารณาระบบสมการ (2.77) ถึง (2.80) เงื่อนไขเริ่มต้นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\gamma(g,0) = a^{1}(g),\ \psi(g,0) = a^{2}(g),\ \alpha(g,0) = b^{1}(g) \text{ และ } \beta(g,0) = b^{2}(g) \tag{2.81}$$



รูปที่ 2.11 อาณาจักรความเป็นหนึ่งเดียวของผลเฉลยในสมการไฮเพอร์โบลิก

ได้กล่าวไปแล้วว่าสมการ (2.67) จะหาผลเฉลยได้ก็ต่อเมื่อการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นสอดคล้องกับเงื่อนไข $J^q \neq 0$ ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์

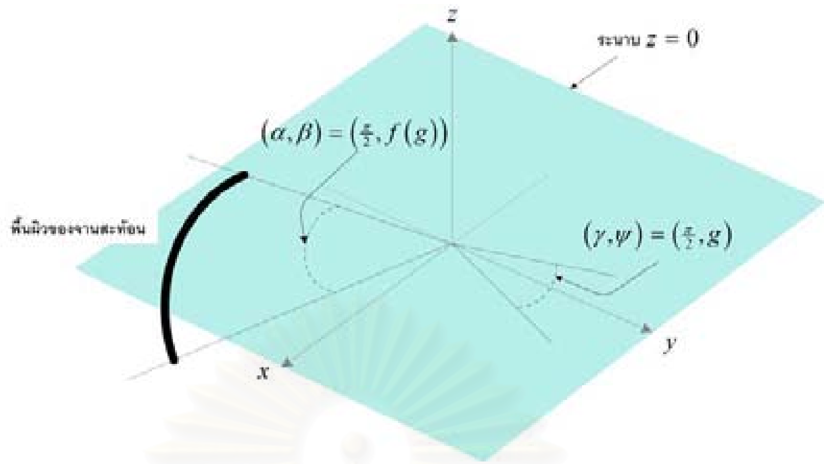
$$\gamma_t = -\frac{A\alpha_g + C\beta_g}{\Delta} \tag{2.82}$$

$$\psi_t = -\frac{B\alpha_g + E\beta_g}{\Delta} \tag{2.83}$$

เมื่อแทนค่าของ γ_t และ ψ_t ลงในสมการ (2.68) จะได้ผลเป็น

$$\left(Ab_g^1(g) + Cb_g^2(g)\right)a_g^2(g) - \left(Bb_g^1(g) + Eb_g^2(g)\right)a_g^1(g) \neq 0 \tag{2.84}$$

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการกึ่งเชิงเส้นเพื่อออกแบบสายอากาศจานสะท้อนเมื่อกำหนด D มานั้น พื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้จะขึ้นอยู่กับการเลือกเงื่อนไขเริ่มต้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกเงื่อนไขเริ่มต้นของการสังเคราะห์สายอากาศด้วยการกำหนดให้ทิศทางของรังสีสะท้อนที่พิกัด $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\psi = g$ ส่งย้อนกลับไปยังทิศทางของรังสีสะท้อนที่พิกัด $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = f(g)$ ดังรูปที่ 2.12 จากเงื่อนไขเริ่มต้นนี้จะพบว่ารังสีตกกระทบและรังสีสะท้อนอยู่ในระนาบเดียวกันคือระนาบ $z = 0$ ที่เส้นเงื่อนไขเริ่มต้น



รูปที่ 2.12 เงื่อนไขเริ่มต้น ของทิศทางของรังสีตกกระทบและรังสีสะท้อนบนระนาบ $z = 0$

เงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวจะต้องได้รับการตรวจสอบก่อนว่าสอดคล้องกับเงื่อนไข (2.84) หรือไม่ เมื่อพิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้นซึ่งอยู่ที่ $t = 0$ จะพบว่า $A = E = 0, B = C = \cos\left(f\left(g\right) - g\right) - 1$ เมื่อแทนลงในเงื่อนไข (2.84) จะเป็นดังนี้

$$\left(1 - \cos\left(f\left(g\right) - g\right)\right) f^{'}\left(g\right) \neq 0 \tag{2.85}$$

หลังจากตรวจสอบว่าเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดสอดคล้องกับสมการ (2.85) ต่อมาจะหาค่าอนุพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ในการส่ง $\left(\gamma,\psi\right) \to \left(\alpha,\beta\right)$ ที่ $t = 0$ เพื่อใช้ในการคำนวณพื้นผิวจานสะท้อน ซึ่งหาได้ดังนี้

$$\alpha_{\psi} = \beta_{\gamma} = 0,\ \beta_{\psi} = f^{'}\left(g\right) \text{ และ } \alpha_{\gamma} = D\big/ f^{'}\left(g\right) \tag{2.86}$$

การคำนวณหาพื้นผิวจานสะท้อนจะเริ่มด้วยการพิจารณาอนุพันธ์ย่อยของ ρ กับระบบสมการ (2.67) ซึ่งจะได้อนุพันธ์ย่อย ρ_g, ρ_t ที่ ρ เป็นฟังก์ชันของ g และ t อาศัยผลจากสมการ (2.60) จะได้

$$\rho_{\alpha} = -X^{'}\big/\Lambda \text{ และ } \rho_{\beta} = -Y^{'}\big/\Lambda \tag{2.87}$$

ที่ตำแหน่ง $t = 0$ จะได้

$$X^{'} = 0\ ,\ Y^{'} = \sin\left(f\left(g\right) - g\right) \text{ และ } \Lambda = 1 - \cos\left(f\left(g\right) - g\right) \tag{2.88}$$

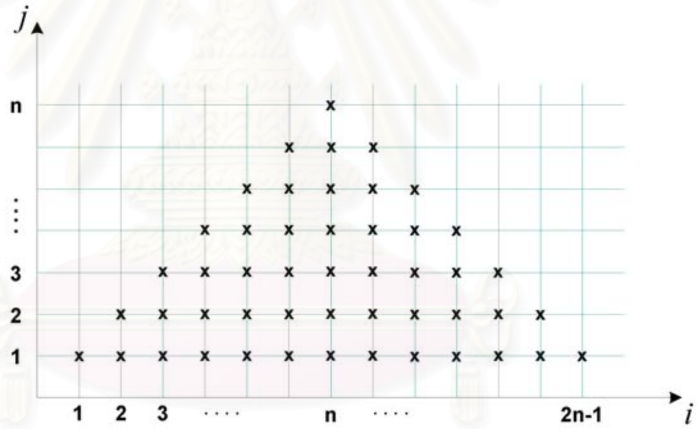
ใช้ความสัมพันธ์ (2.86) ถึง (2.88) และกฎลูกโซ่เพื่อหาอนุพันธ์ของ ρ เทียบกับ g จะได้

$$\frac{d\rho(g,0)}{dg} = \rho_\alpha \cdot 0 + \rho_\beta \cdot \beta_g = -\cot\left(\tfrac{1}{2}\left(f(g)-g\right)\right)\frac{df}{dg} \tag{2.89}$$

เราจะหาปริพันธ์ของอนุพันธ์ย่อยของ ρ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข จะสามารถหาค่า r ได้ตามความสัมพันธ์ $r = \exp(\rho)$

ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

การหาผลเฉลยของสมการ (2.67) ที่ตำแหน่ง t ถัดไปนั้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบ Lax - Wendroff [11] ซึ่งมักนิยมนำมาใช้กับระบบสมการไฮเพอร์โบลิก โดยจะแบ่งเป็นสองอันดับ คือ ผลต่างอันดับที่หนึ่ง (first – order difference) และผลต่างอันดับที่สอง (second – order difference) การแบ่งกริดของระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแสดงดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 การแบ่งกริดในระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

เส้นโค้ง l ในรูปที่ 2.12 จะแบ่งเป็นจุดกริดดังรูปที่ 2.13 และกำหนดให้อยู่ในช่วง $a \le \psi \le b$ โดยการกำหนด a และ b จะขึ้นอยู่กับช่วงมุมของแบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการ และกำหนดให้ h และ k เป็นระยะห่างของกริดในทิศทาง g และ t เพื่อให้มีเสถียรภาพในการคำนวณ k จะต้องมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ h โดยที่ค่า h หาได้จาก

$$h = \tfrac{1}{2}(b-a)/(n-1) \tag{2.90}$$

เมื่อ n คือ จำนวนเต็มบวก

เงื่อนไขเริ่มต้นตำแหน่ง $t = 0$ จะอยู่บนกริดที่ $j = 1$ โดยที่จุด $(a,0)$ และ $(b,0)$ จะเป็นจุด $(1,1)$ และ $(2n-1,1)$ ตามลำดับ ค่าเงื่อนไขเริ่มต้นทั้งหมดจึงอยู่ที่ตำแหน่ง $(i,1)$ ที่ $i = 1,...,2n-1$ ส่วนตำแหน่งของผลเฉลยทั้งหมดที่ $j = 2$ จะอยู่ที่ $i = 2,...,2n-2$ จนกระทั่งตำแหน่งของผลเฉลยที่ $j = n$ จะอยู่ที่ $i = n$ เพียงที่เดียวซึ่งเป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ในการคำนวณจะหาค่าของผลเฉลยภายในสามเหลี่ยมที่ $t \geq 0$ โดยที่เส้นลักษณะสมบัติในที่นี้คือเส้น $t = \pm(g-a)$ และ $t = \pm(g-b)$ ผลเฉลยที่อยู่ใกล้ ๆ กับเงื่อนไขเริ่มต้นจะคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบผลต่างอันดับที่หนึ่ง ในที่นี้คือจะใช้หาผลเฉลยที่ $j = 2$ ซึ่งหาจากเงื่อนไขเริ่มต้นและที่ $j > 2$ จะใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบผลต่างอันดับที่สองที่คำนวณจากผลเฉลยในระดับก่อนหน้านั้นคือ $j-1,\ j-2$ จากสมการ (2.77) ถึง (2.80) สามารถจัดสมการให้อยู่ในระบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$u_g + \mathrm{K}v_t = 0 \tag{2.91}$$

$$u_t + \mathrm{K}v_g = 0 \tag{2.92}$$

โดยที่ $u = \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ และ $\mathrm{K} = \Delta^{-1}\begin{bmatrix} A & C \\ B & E \end{bmatrix}$

<u>ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบผลต่างอันดับที่หนึ่ง</u>

ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบผลต่างอันดับที่หนึ่งจะใช้หาผลเฉลยที่ $j = 2$ โดยนำสมการ (2.91) และ (2.92) มาบวกและลบกัน ได้ผลเป็น

$$D_1 u + \mathrm{K}D_1 v = 0 \tag{2.93}$$

$$D_2 u - \mathrm{K}D_2 v = 0 \tag{2.94}$$

โดยที่ $D_1 = \frac{\partial}{\partial g} + \frac{\partial}{\partial t}$ และ $D_2 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial g}$ ซึ่งเป็นอนุพันธ์ในทิศทางของลักษณะสมบัติ (the direction of the charcateristics)

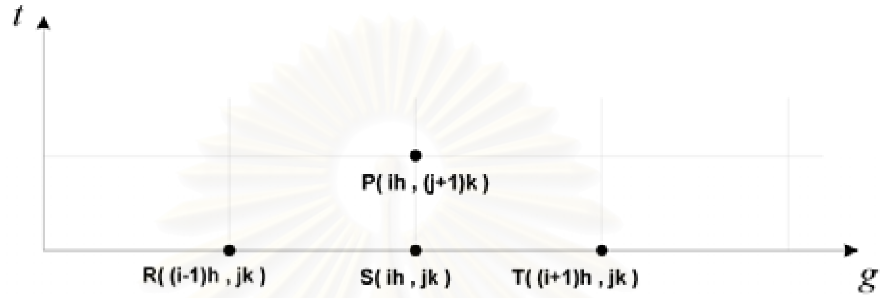
ตามระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบผลต่างอันดับที่หนึ่งสามารถหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ (2.93) และ (2.94) ด้วยจุดกริดดังในรูปที่ 2.14 และ นิยามผลต่างอันดับที่หนึ่งในทิศทาง g ไปข้างหน้า (forward) และไปข้างหลัง (backward) ที่จุด S เป็น $\Delta_g u_S = u_T - u_S$ และ $\nabla_g u_S = u_S - u_R$ ตามลำดับ สำหรับผลต่างอันดับที่หนึ่งในทิศทาง t จะมีทิศทางไปข้างหน้าเท่านั้น ดังนั้นสมการ (2.93) และ (2.94) จะหาผลเฉลยที่จุด P ได้จาก

$$u_{\mathrm{p}} = u_{\mathrm{s}} + \tfrac{1}{2}\Upsilon\Big(\big(\Delta_g - \nabla_g\big)u_{\mathrm{s}} - \mathrm{K}_{\mathrm{s}}\big(\Delta_g + \nabla_g\big)v_{\mathrm{s}}\Big) \qquad (2.95)$$

$$v_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{s}} + \tfrac{1}{2}\Upsilon\Big(\big(\Delta_g - \nabla_g\big)v_{\mathrm{s}} - \mathrm{K}_{\mathrm{s}}\big(\Delta_g + \nabla_g\big)u_{\mathrm{s}}\Big) \qquad (2.96)$$

โดยที่ $\Upsilon = k/h$ เป็นอัตราส่วนของกริดระหว่างทิศทาง g และ t

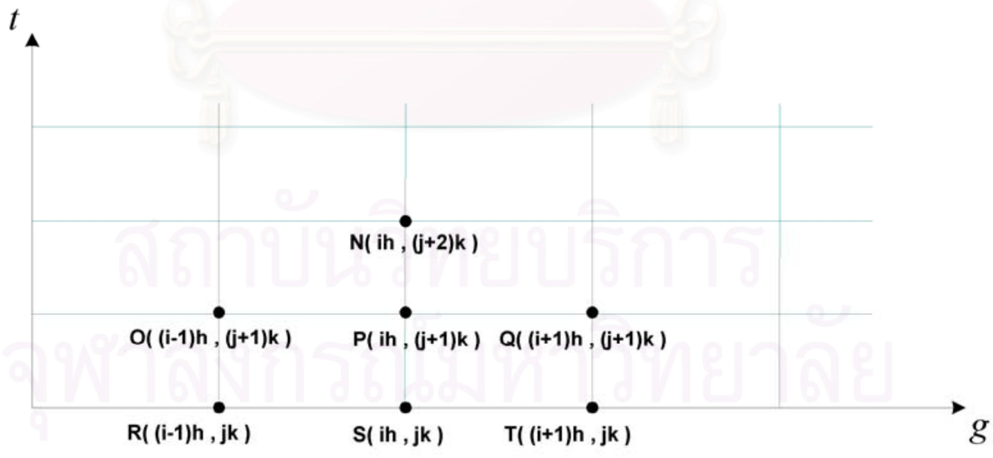
K_{s} คือ ค่าของ K ที่จุด S



รูปที่ 2.14 จุดกริดของระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบผลต่างอันดับที่หนึ่ง

<u>ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบผลต่างอันดับที่สอง</u>

ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบผลต่างอันดับที่สองจะใช้หาผลเฉลยที่ $j > 2$ โดยพิจาณาจุดกริด 7 จุด ดังในรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 จุดกริดของระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบผลต่างอันดับที่สอง

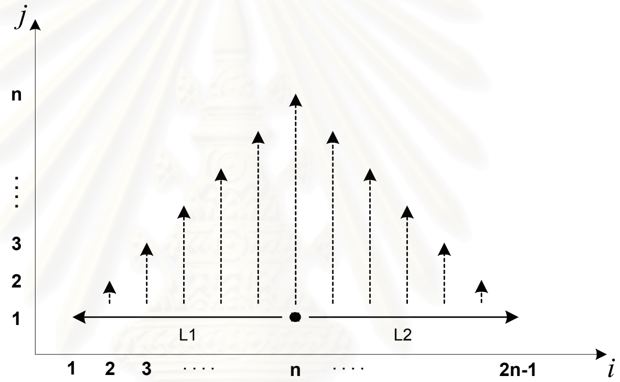
สามารถประยุกต์ระเบียบวิธีของ Lax – Wendroff หาค่าผลเฉลยที่จุด N ได้ดังนี้

$$u_{\mathrm{N}} = u_{\mathrm{S}} - \Upsilon \mathrm{K}_{\mathrm{P}}\left(\nabla_g + \Delta_g\right)v_{\mathrm{S}} + \Upsilon^2 \mathrm{K}_{\mathrm{P}}\left(\left(\mathrm{K}_{\mathrm{P}}^{-1} + \mathrm{K}_{\mathrm{Q}}^{-1}\right)\Delta_g - \left(\mathrm{K}_{\mathrm{O}}^{-1} + \mathrm{K}_{\mathrm{P}}^{-1}\right)\nabla_g\right)u_{\mathrm{S}} \qquad (2.97)$$

$$v_{\mathrm{N}} = v_{\mathrm{S}} - \Upsilon \mathrm{K}_{\mathrm{P}}\left(\nabla_g + \Delta_g\right)u_{\mathrm{S}} + \Upsilon^2 \mathrm{K}_{\mathrm{P}}\left(\left(\mathrm{K}_{\mathrm{P}}^{-1} + \mathrm{K}_{\mathrm{Q}}^{-1}\right)\Delta_g - \left(\mathrm{K}_{\mathrm{O}}^{-1} + \mathrm{K}_{\mathrm{P}}^{-1}\right)\nabla_g\right)v_{\mathrm{S}} \qquad (2.98)$$

ระเบียบวิธีของ Euler

พื้นผิวของจานสะท้อนสามารถคำนวณได้โดยการหาผลเฉลยของสมการ (2.60) ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation, ODE) ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้คำนวณหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์นั้นมีหลายแบบเช่น ระเบียบวิธีของ Euler, ระเบียบวิธีของ Heun, ระเบียบวิธีของ Runge-Kutta ฯลฯ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้ระเบียบวิธีของ Euler เนื่องจากเป็นวิธีที่ให้ผลเฉลยในเวลาอันสั้น



รูปที่ 2.16 เส้นทางปริพันธ์ของสมการอนุพันธ์

ขั้นแรกต้องกำหนดค่าเริ่มต้นของปริพันธ์ก่อน วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกกำหนดค่าเริ่มต้นที่พิกัดทิศทาง $(\gamma,\psi) = \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ หรือจุดกริด $(i,j) = (n,1)$ ดังรูปที่ 2.16 ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของจานสะท้อนให้มีค่า $\rho = 0$ หรือ $r = 1$ แล้วใช้คำนวณหาปริพันธ์ตามเส้นทึบที่ $j = 1$ ได้โดยแบ่งเป็น 2 เส้นทาง คือ L1 และ L2 ตามลำดับ

<u>เส้นทาง L1</u> $$\rho(i,1) = \rho(i+1,1) + \rho_\psi(i+1,1)\Delta\psi + \rho_\gamma(i+1,1)\Delta\gamma \qquad (2.99\text{ ก})$$

<u>เส้นทาง L2</u> $$\rho(i,1) = \rho(i-1,1) + \rho_\psi(i-1,1)\Delta\psi + \rho_\gamma(i-1,1)\Delta\gamma \qquad (2.99\text{ ข})$$

หลังจากนั้นจะใช้ ρ ที่หาจากสมการ (2.99) มาคำนวณหาปริพันธ์ตามเส้นประในรูป 2.16 ได้ดังนี้

$$\rho(i,j) = \rho(i,j-1) + \rho_\psi(i,j-1)\Delta\psi + \rho_\gamma(i,j-1)\Delta\gamma \qquad (2.100)$$

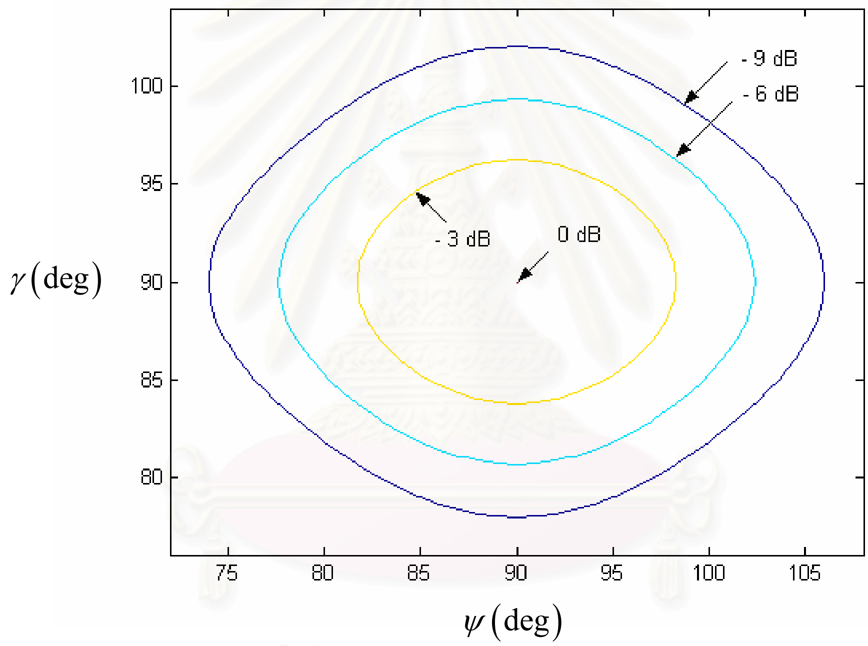
2.4 ตัวอย่างการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่พิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น

กรณีที่ 1 การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนแบบสมมาตร

แบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการในที่นี้ให้เป็น

$$G(\gamma,\psi)=\frac{K\sin^2\gamma\sin^2\psi}{\cosh^2(a\cos\gamma)\cosh^2(b\cos\psi)} \qquad (2.101)$$

กำหนดให้ $K=16, a=8$ และ $b=6$ แหล่งกำเนิดเป็นแบบไอโซทรอปิก $\left(I(\alpha,\beta)=1\right)$



รูปที่ 2.17 ลำวงรอบของ G

อาศัยสมการ (2.101) และ $I=1$ จะได้ $D(\gamma,\psi)=G(\gamma,\psi)$ โดยที่ลำวงรอบของ G เมื่อทำการปรับบรรทัดฐาน (normalization) จะเป็นดังรูปที่ 2.17 ซึ่งจะสอดคล้องกับลำวงรีที่มีความกว้างลำคลื่นที่ –3 dB เท่ากับ 13 องศา และ 17 องศาในทิศทางแกน γ และ ψ ตามลำดับ เงื่อนไขเริ่มต้นที่ $t=0$ จะให้เป็น

$$\gamma=\tfrac{\pi}{2}\ ,\ \psi=g\ ,\ \tfrac{\pi}{3}\le g\le\tfrac{2\pi}{3}\ \text{และ}\ \alpha=\tfrac{\pi}{2}\ ,\ \beta=f(g)$$

ซึ่ง $f'(g)=\left[D\left(\tfrac{\pi}{2},g\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

สำหรับฟังก์ชัน $f(g)$ สามารถหาได้ด้วยการหาปริพันธ์ของสมการ (2.102)

$$f'(g)=\frac{\sqrt{K}\sin g}{\cosh(b\cos g)} \tag{2.102}$$

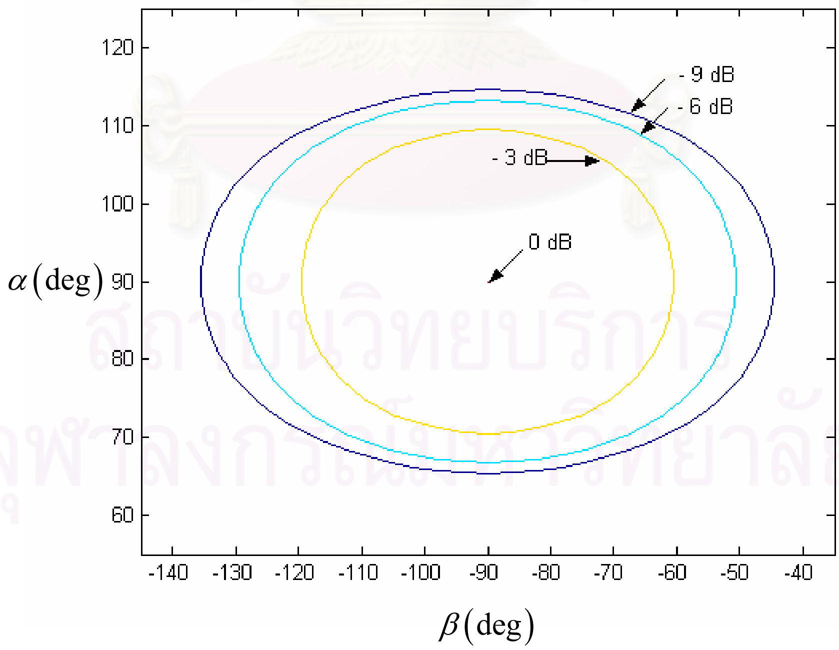
จะได้
$$\beta=f(g)=-\tfrac{2\sqrt{K}}{b}\tan^{-1}\left(\exp\left(b\cos(g)\right)\right)+\left(\tfrac{2\sqrt{K}}{b}\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{2}+\beta_o\right) \tag{2.103}$$

โดยที่ β_o คือมุมเล็งของสายอากาศ

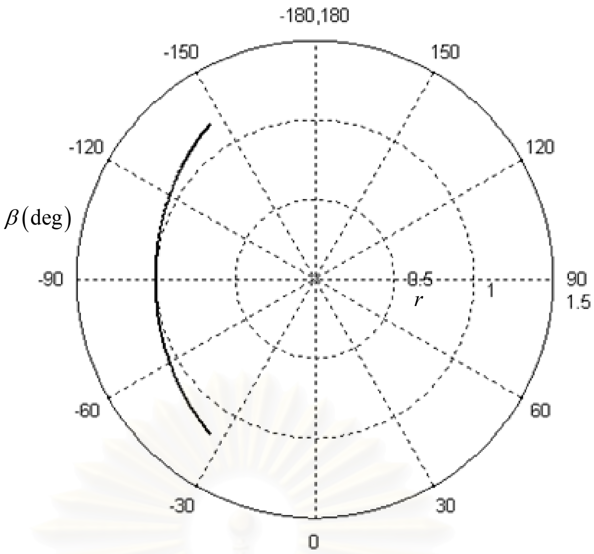
เนื่องจากเป็นจานสะท้อนแบบสมมาตร ฉะนั้นบนระนาบ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ จะเป็นการส่งจากรังสีตกกระทบในทิศทาง $\beta=-\frac{\pi}{2}$ ไปยังรังสีสะท้อนในทิศทาง $\psi=\frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$ แทนค่า $K=16, a=8, b=6$ และ $\beta_o=0$ ลงในสมการ (2.103) จะได้เป็นดังนี้

$$\beta=f(g)=-\tfrac{4}{3}\tan^{-1}\left(\exp\left(6\cos(g)\right)\right)-\tfrac{\pi}{3} \tag{2.104}$$

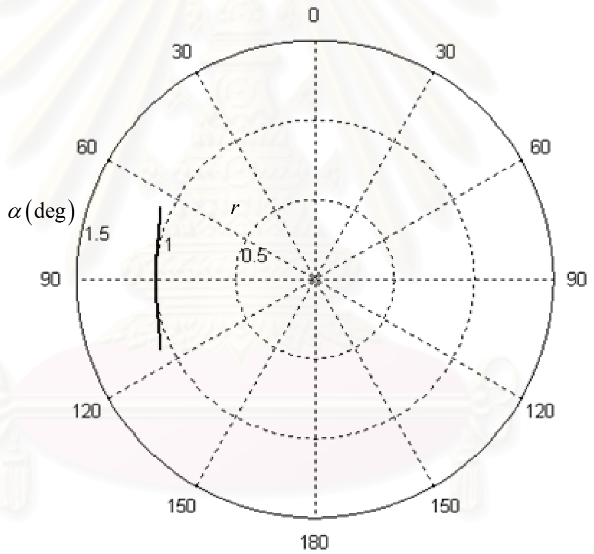
เมื่อได้ความสัมพันธ์ระหว่างรังสีในทิศทางตกกระทบกับรังสีในทิศทางสะท้อนครบหมดแล้วผิวจานสะท้อนที่ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ จึงสามารถหาได้จากสมการ (2.99) และ ผลลัพธ์ของการหาปริพันธ์สมการอนุพันธ์ย่อยด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดทำให้ได้อัตราขยาย G ในทิศทางรังสีตกกระทบ (α,β) ที่สอดคล้องกับแบบ-รูปการแผ่พลังงานที่ต้องการเป็นดังรูปที่ 2.18 ลำวงรอบของอัตราขยายระดับ -9 dB จะมีลักษณะเป็นรูปวงรีในระนาบ (α,β) โดยความกว้างประมาณ 50 องศา ในทิศทาง α และ 90 องศา ในทิศทาง β ระดับความ-เรียวนี้ถูกนำมาใช้ในการกำหนดขอบของจานสะท้อนและหน้าตัดของจานสะท้อนปรากฏดังรูปที่ 2.19 ก และ 2.19 ข



รูปที่ 2.18 ลำวงรอบของ G ในทิศทางรังสีตกกระทบ กรณีที่ 1



(ก) ในระนาบ $\alpha = \frac{\pi}{2}$



(ข) ในระนาบ $\beta = -\frac{\pi}{2}$

รูปที่ 2.19 หน้าตัดของสายอากาศจานสะท้อน กรณีที่ 1

กรณีที่ 2 การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนแบบไม่สมมาตร

กำหนดให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการเหมือนกับสมการ (2.101) แหล่งกำเนิดคลื่นเป็นแบบไอโซทรอปิก เงื่อนไขเริ่มต้นที่ $t=0$ จะให้เป็น

$$\gamma = \frac{\pi}{2}\ ,\ \psi = g\ ,\ \frac{\pi}{3} \le g \le \frac{2\pi}{3} \text{ และ } \alpha = \frac{\pi}{2}\ ,\ \beta = f(g)$$

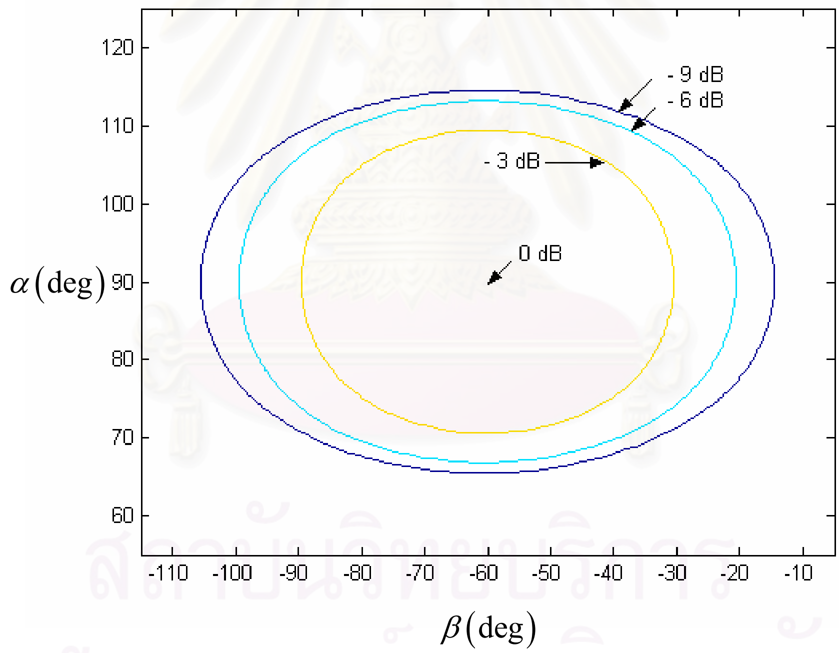
ซึ่ง $f'(g) = \left[D\left(\frac{\pi}{2}, g\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

เมื่อแทนค่าคงที่ลงในสมการ (2.103) จะได้เป็น $f'(g)=\dfrac{4\sin g}{\cosh(6\cos g)}$

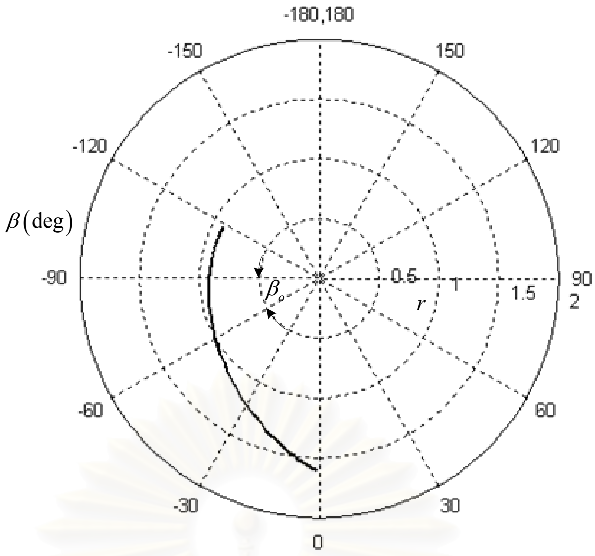
ในกรณีนี้จะออกแบบเป็นสายอากาศจานสะท้อนแบบไม่สมมาตรเพื่อหลีกเลี่ยงการบดบังของแหล่งกำเนิด เงื่อนไขที่ใช้ในการพิจารณาคือ $0<g-f(g)<\pi$ ซึ่ง g อยู่ในช่วง $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ ในที่นี้เลือกมุมเล็งเท่ากับ 30 องศา นั่นคือ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$ ดังนั้นเมื่อแทน $\beta_o=\frac{\pi}{6}$ ลงในสมการ (2.103) จะได้

$$\beta=f(g)=-\tfrac{4}{3}\tan^{-1}\left(\exp\left(6\cos(g)\right)\right) \tag{2.106}$$

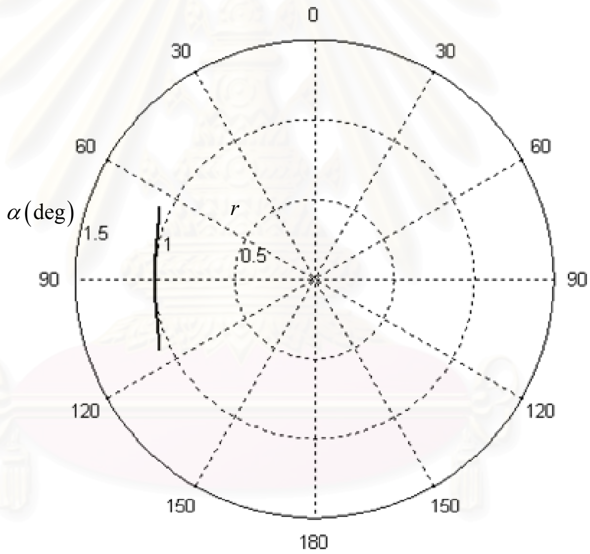
ใช้เงื่อนไขเริ่มต้นหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์จะได้อัตราขยาย G ในทิศทางรังสีตกกระทบเป็นดังรูปที่ 2.20 จะพบว่าอัตราขยายระดับ –9 dB มีขนาดของลำคลื่นเท่าเดิมแต่ทิศทางจะมีการเลื่อนตำแหน่งในทิศทางของ β โดยที่อัตราขยายมากที่สุดจะอยู่ในทิศทาง $\beta=-\frac{\pi}{3}$ เนื่องจากซึ่งตรงกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดไว้และหน้าตัดของจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้ปรากฏดังรูปที่ 2.21 ก และ 2.21 ข



รูปที่ 2.20 ล้าวงรอบของ G ในทิศทางรังสีตกกระทบ กรณีที่ 2



(ก) ในระนาบ $\alpha = \frac{\pi}{2}$



(ข) ในระนาบ $\beta = -\frac{\pi}{3}$

รูปที่ 2.19 หน้าตัดของสายอากาศจานสะท้อน กรณีที่ 2

กรณีที่ 3 การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนแบบไม่สมมาตร เมื่อกำหนดแบบรูปการแผ่พลังงานของแหล่งกำเนิด

กำหนดให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการเป็นเช่นเดียวกับกรณีที่ 1 แต่ แหล่งกำเนิดคลื่นในกรณีนี้จะกำหนดให้เป็นดังนี้

$$I(\alpha,\beta) = 31.62\left[1+6\left(\cos^{-1}\left(\sin\alpha\cos\left(\beta-\left(\beta_o-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right)\right]^{-2} \qquad (4.2)$$

ซึ่ง $0 \le \cos^{-1}\left(\sin\alpha\cos\left(\beta-\left(\beta_o-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) < \frac{\pi}{2}$ และ $m = 9/16$

จากสมการ (2.107) จะเห็นได้ว่าแหล่งกำเนิดคลื่นจะมีค่ามากที่สุดในทิศทาง $\alpha = \frac{\pi}{2}$ และ $\beta = \beta_o - \frac{\pi}{2}$ การเลือก β_o จะถูกพิจารณาในภายหลัง ส่วนฟังก์ชัน $D(\theta,\phi,\alpha,\beta)$ ในที่นี้จะพบว่าเป็นสัดส่วน $G(\theta,\phi)/I(\alpha,\beta)$ เพราะฉะนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นที่ $t=0$ จะได้เป็นดังนี้

$$\gamma = \tfrac{\pi}{2}\ ,\ \psi = g \text{ และ } \alpha = \tfrac{\pi}{2}\ ,\ \beta = f(g)$$

ซึ่ง $\frac{\pi}{3} \le g \le \frac{2\pi}{3}$ และ

$$f'(g) = \left[D\left(\tfrac{\pi}{2}, g, \tfrac{\pi}{2}, f(g)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.108}$$

เพื่อให้รังสีในทิศทางมุมเล็งสอดคล้องกับทิศทางที่เกิดอัตราขยายมากที่สุดจึงเลือก $\beta_o - \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ เพราะฉะนั้นเมื่อหาปริพันธ์ของสมการ (2.108) จะได้เป็น

$$\int_{\beta_o-\frac{\pi}{2}}^{f} \frac{df}{1+m\left(f-\left(\beta_o-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{g} \frac{\sqrt{K}\sin g\, dg}{\cosh(b\cos g)} \tag{2.109}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\tan^{-1}\left(\frac{f-\left(\beta_o-\frac{\pi}{2}\right)}{1/\sqrt{m}}\right) = -\frac{2\sqrt{K}}{b}\left[\tan^{-1}\left(\exp(b\cos g)\right)-\tfrac{\pi}{4}\right] \tag{2.110}$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{m}}\tan\left\{\sqrt{m}\left(-\frac{2\sqrt{K}}{b}\left[\tan^{-1}\left(\exp(b\cos g)\right)-\tfrac{\pi}{4}\right]\right)\right\}+\left(\beta_o-\tfrac{\pi}{2}\right) \tag{2.111}$$

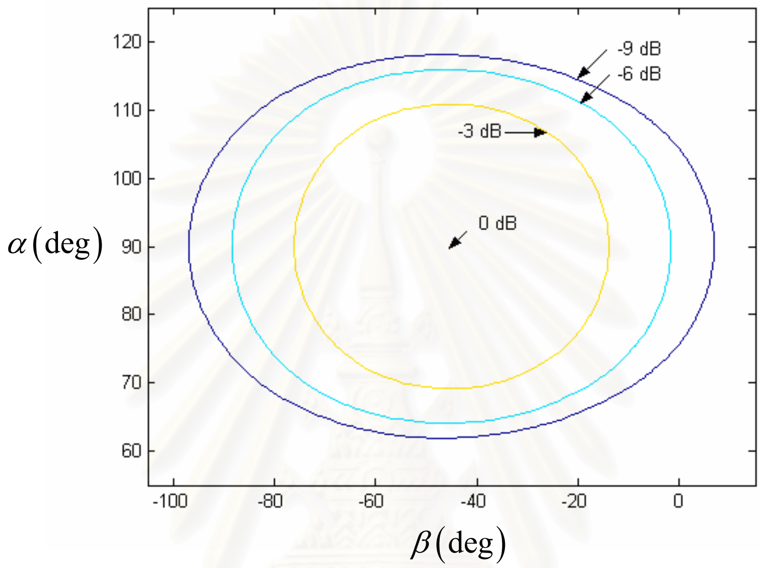
เมื่อแทนค่าต่างๆ ลงในสมการ (2.111) จะได้

$$f = -\frac{4}{3}\tan\left[\tan^{-1}\left(\exp(6\cos g)\right)-\tfrac{\pi}{4}\right]+\left(\beta_o-\tfrac{\pi}{2}\right) \tag{2.112}$$

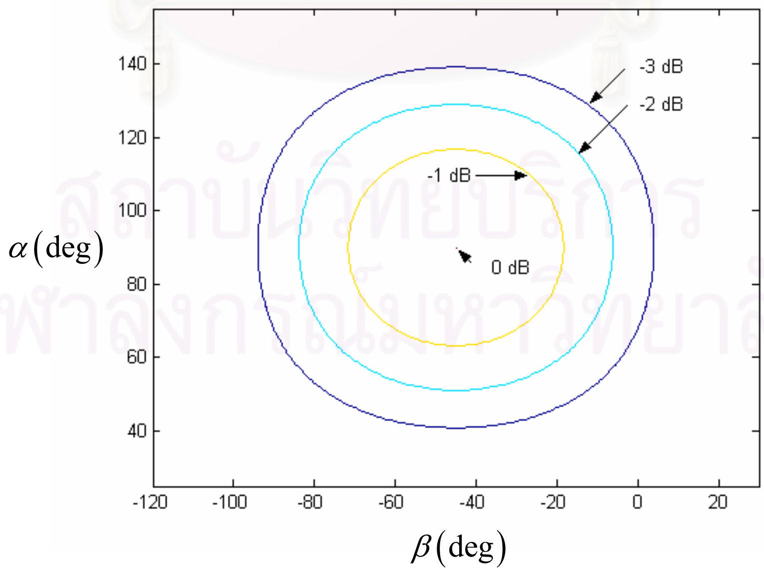
$\left(\beta_o-\frac{\pi}{2}\right)$ จะอยู่ในช่วง $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ และ เพื่อป้องกันการบดบังของสายอากาศป้อนจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข $0 < g - f(g) < \pi$ ซึ่ง g อยู่ในช่วง $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ จากเงื่อนไขนี้ทำให้ช่วงของมุมเล็งอยู่ในช่วง $0.6808 < \beta_o < 1.38$ เลือกให้ $\beta_o = \frac{\pi}{4}$ แทนลงสมการ (2.112) จะได้เป็น

$$f = -\frac{4}{3}\tan\left[\tan^{-1}\left(\exp(6\cos g)\right)-\tfrac{\pi}{4}\right]-\tfrac{\pi}{4} \tag{2.113}$$

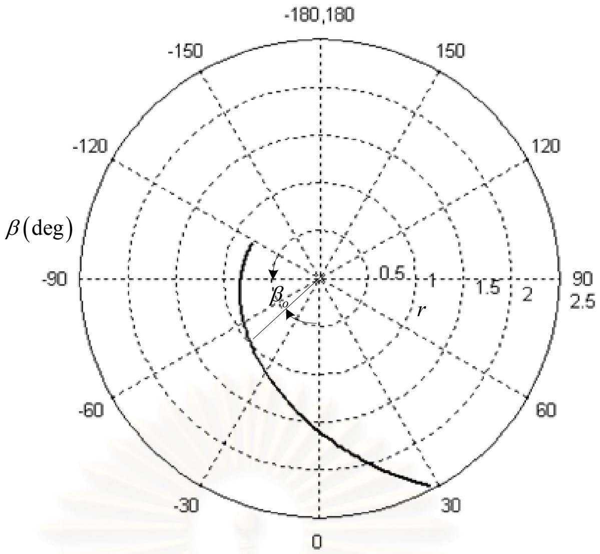
หลังจากกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นแล้วจะได้ผลการคำนวณอัตราขยายในทิศทางของรังสีตกกระทบเป็นรูปที่ 2.22 จะเห็นได้ว่าอัตราขยายที่ระดับ -9 dB นั้นมีขนาดใหญ่กว่ากรณีที่แหล่งกำเนิดเป็นแบบไอโซทรอปิก โดยความกว้างประมาณ 56 องศา ในทิศทาง α และ 105 องศา ในทิศทาง β เนื่องจาก $D=\left|d\Phi/d\Omega\right|$ ที่ซึ่ง $d\Phi$ และ $d\Omega$ คือ มุมตันของกรวยรังสีตกกระทบ และ มุมตันของกรวยรังสีสะท้อน ตามลำดับ เพราะฉะนั้น เมื่อ $d\Omega$ มีขนาดเท่าเดิม ในขณะที่ D มีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องแหล่งกำเนิดคลื่นมีทิศทางมากขึ้นดังรูปที่ 2.23 จึงทำให้ $d\Phi$ มีขนาดเพิ่มขึ้นด้วย หน้าตัดของสายอากาศจานสะท้อนแสดงดังรูปที่ 2.24 ก และ 2.24 ข



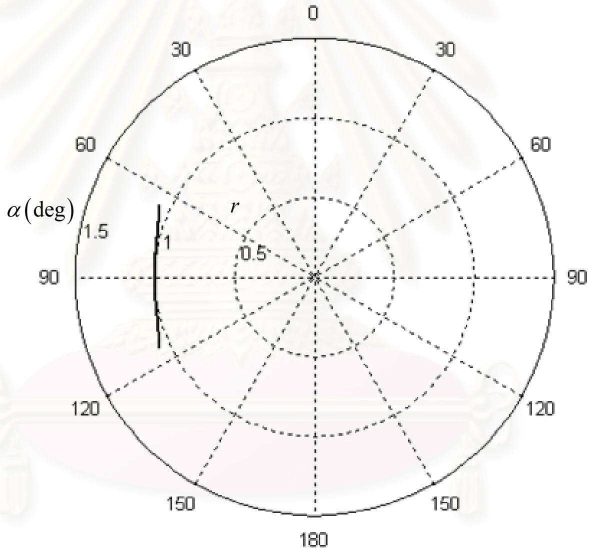
รูปที่ 2.22 ลำวงรอบของ G ในทิศทางรังสีตกกระทบ กรณีที่ 3



รูปที่ 2.23 ลำวงรอบของ I กรณีที่ 3



(ก) ในระนาบ $\alpha = \frac{\pi}{2}$



(ข) ในระนาบ $\beta = -\frac{\pi}{4}$

รูปที่ 2.24 หน้าตัดของสายอากาศจานสะท้อน กรณีที่ 2

2.4.1 ตรวจสอบผลการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรง

เนื่องจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้นั้นสามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ดังที่แสดงในหัวข้อ 2.4.1 จึงสามารถนำมาเปรียบเทียบความแม่นยำกับระเบียบวิธีที่ใช้คำนวณ และใช้การเลือกระยะห่างของกริดได้

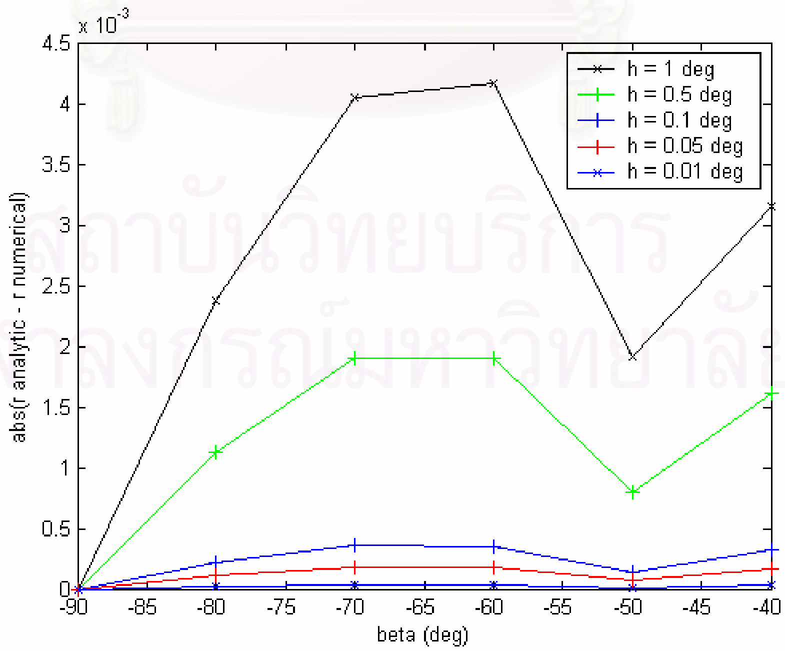
พิจารณากรณีที่ 1 ซึ่ง $\gamma = \frac{\pi}{2}$ และ $\psi = g$ โดยที่ g อยู่ในช่วง $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ เมื่อแทนสมการ (2.104) ลงในสมการ (2.61) จะได้พื้นผิวเป็นดังนี้

$$r(g) = \exp\left(4\int_{\frac{1}{2}\pi}^{g} \frac{\cot\left\{\frac{g}{2} + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\exp\left(6\cos g\right)\right) + \frac{\pi}{3}\right\}\sin g dg}{\cosh\left(6\cos g\right)}\right) \quad (2.114)$$

จากสมการ (2.114) ผู้วิจัยได้คำนวณพื้นผิวและเปรียบกับผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยแปรผันระยะห่างระหว่างกริด h ตามตารางที่ 2.1 จากตารางนี้จะเห็นว่าหากสังเคราะห์สายอากาศด้วยขนาด 30 เท่าของความยาวคลื่น การใช้ nค่าน้อยๆ อาจจะทำให้เกิดความผิดพลาดที่มีขนาดใหญ่ขึ้นได้ เช่น n = 31 จะเกิดความผิดพลาดในระดับ 0.1λ หรือ n = 61 จะเกิดความผิดพลาดในระดับ 0.05λ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงเลือกใช้ h = 0.01 องศา เพื่อให้พื้นผิวที่ได้มีความผิดพลาดไม่เกิน 10^{-4}

ตารางที่ 2.1 การเปรียบเทียบผลการคำนวณพื้นผิวระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ $\Upsilon = 0.4$

h (องศา)	n	G ที่ $\left(\beta = -\frac{\pi}{4}\right)$ (dB)	ค่าเฉลี่ยความผิดพลาดของพื้นผิว
1	31	3.3986	0.0035
0.5	61	3.3853	0.0017
0.1	301	3.3742	3.319×10^{-4}
0.05	601	3.3728	1.653×10^{-4}
0.01	3001	3.372	3.286×10^{-5}



รูปที่ 2.25 เปรียบเทียบผลคำนวณพื้นผิวระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยเชิงตัวเลข

บทที่ 3

กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของพื้นผิวสายอากาศจานสะท้อน

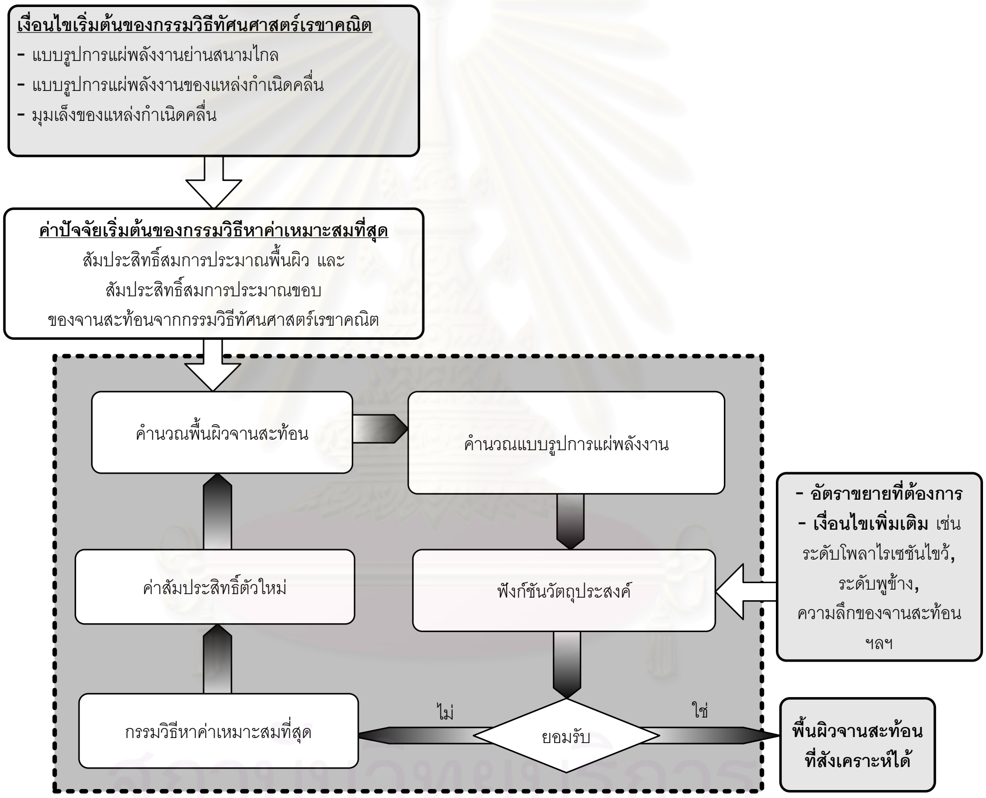
ความนำ

บทที่ 2 ได้กล่าวถึงกรรมวิธีสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนด้วยทัศนศาสตร์เรขาคณิต จากการศึกษาพบว่าสายอากาศจานสะท้อนที่ได้จากการสังเคราะห์ให้แบบรูปแบบการแผ่พลังงานที่ยังไม่ค่อยแม่นยำเท่าที่ควร เนื่องจากยังไม่ได้คำนึงถึงโพลาไรเซชันและผลกระทบเนื่องจากสนามเลี้ยวเบน ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้เสนอให้นำสายอากาศที่สังเคราะห์ด้วยทัศนศาสตร์เรขาคณิตมาเข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวสายอากาศจานสะท้อน เพื่อให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ใกล้เคียงกับแบบรูปที่ต้องการมากที่สุด

ระเบียบวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์สายอากาศชนิดจานสะท้อนนับว่าเป็นสิ่งสำคัญในการศึกษาสมรรถนะและผลกระทบต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นแก่สายอากาศจานสะท้อน อาทิเช่น อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมและโพลาไรเซชันไขว้ และประสิทธิภาพต่าง ๆ เป็นต้น จึงมีบทความมากมายที่ได้นำเสนอการประยุกต์กรรมวิธี สมมุติฐาน และทฤษฎีต่าง ๆ เพื่อให้การทำนายมีความแม่นยำหรือความรวดเร็วมากยิ่งขึ้น ตัวอย่างเช่น ทัศนศาสตร์เรขาคณิตร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตหรือเชิงเอกรูป [17] และระเบียบวิธีปริพันธ์ของสนามบนช่องเปิด (aperture field integration method, AFIM) กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ [18] การประยุกต์ใช้อนุกรมยาโคบี-เบสเซิล (jacobi-bessel series) กับผลการแปลงฟูริเยร์ (Fourier transforms) ของกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพ [19] เป็นต้น แต่ละวิธีก็มีข้อดีและข้อด้อยแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับลักษณะโครงสร้างของสายอากาศแต่ละรูป เนื่องจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ต้องการความแม่นยำของลำคลื่นในบริเวณพูหลัก จึงเลือกใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพในขั้นตอนการสังเคราะห์สายอากาศ จากบทที่ 2 จะเห็นได้ว่าช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนที่ได้รับจากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตมีได้หลายรูป ซึ่งขึ้นอยู่กับการเลือกระดับความเรียวที่ขอบดังนั้นเพื่อให้การวิเคราะห์สนามกระเจิงจากขอบของสายอากาศจานสะท้อนมีความแม่นยำมากขึ้นในขั้นตอนการวิเคราะห์สายอากาศ จึงคิดผลของสนามเลี้ยวเบนด้วยกรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบ (EEC, Edge Equivalent Current) เนื้อหาในบทนี้จะแบ่งออกเป็นหัวข้อต่าง ๆ ได้ดังนี้ คือ หัวข้อแรก กล่าวถึงรายละเอียดของการสังเคราะห์พื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพ ซึ่งเรียกว่าการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบน (diffraction synthesis) และหัวข้อที่สองจะกล่าวถึงการระเบียบวิธีวิเคราะห์สายอากาศ โดยกล่าวถึงการวิเคราะห์พื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปด้วยสมการพื้นผิว ซึ่งวิเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับกรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบ

3.1 การสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบน

เนื่องจากการกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพเป็นกรรมวิธีที่ได้รวมสนามเลี้ยวเบนไว้ส่วนหนึ่ง ดังนั้นการสังเคราะห์พื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพจึงสามารถเรียกได้ว่าเป็นการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบน ซึ่งสามารถเลือกวิธีการเพื่อใช้ในการหาค่าเหมาะสมที่สุดของค่าสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวได้ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นี้เลือกใช้ชุดคำสั่งกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด ฟังก์ชัน fminu โปรแกรม MATLAB รุ่น 6.1 กระบวนการสังเคราะห์สายอากาศด้วยกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของค่าสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวจานสะท้อนหรือการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบนมีขั้นตอนดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ขั้นตอนของกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของค่าสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวจานสะท้อน

เพื่อให้สามารถดำเนินการวนซ้ำได้จำเป็นจะต้องกำหนดค่าปัจจัยเริ่มต้นโดยถือเป็นขั้นตอนแรกในการสังเคราะห์พื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อน ค่าปัจจัยของระบบสายอากาศมีดังนี้

1.ความถี่ปฏิบัติการ ขึ้นอยู่กับการใช้งาน เช่น ดาวเทียมไทยคมที่ใช้ในระบบสื่อสารสำหรับประเทศไทย ความถี่ปฏิบัติการจะอยู่ที่ย่าน Ku (12-14 GHz.) เป็นต้น

2.แบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการ $\left(G_d\right)$ มีสองรูปแบบได้แก่ แบบลำคลื่นดินสอ (pencil beam) ซึ่งเป็นการกำหนดอัตราขยายด้วยตัวแปรหนึ่งตัว เช่น $G_d\left(\theta\right)$ เป็นต้น และแบบลำคลื่นวงรอบ (contoured beam) ซึ่งเป็นการกำหนดอัตราขยายเป็นตัวแปรสองมิติ เช่น $G_d\left(\theta,\phi\right)$ หรือ $G_d\left(U,V\right)$ เป็นต้น

3.สายอากาศป้อนกำลัง สายอากาศป้อนกำลังคลื่นเป็นแหล่งกำเนิดขั้นปฐมภูมิ (primary source) ของสายอากาศจานสะท้อน ข้อมูลของสายอากาศป้อนกำลังที่ต้องใช้ในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้นประกอบด้วย

ชนิดของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น มีหลายชนิดอาทิเช่น

- สายอากาศแบบไอโซทรอปิก
- สายอากาศโคไซน์ยกกำลังต่างๆ
- สายอากาศฮอยเกน
- สายอากาศปากแตร
- สายอากาศไดโพลขนาดสั้นมาก
- แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ง่าย ๆ ของสายอากาศป้อน เช่น ลำคลื่นแบบเกาส์ (Gaussian beam)

โพลาไรเซชัน อาจจะเป็นแบบเชิงเส้น วงกลม หรือ วงรี ก็ได้

มุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น การกำหนดมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นก็จะมีผลต่อประสิทธิภาพช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อน

4.ข้อมูลเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อน การกำหนดข้อมูลเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อนที่ใช้ในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้นจะแบ่งได้เป็นดังนี้

การกำหนดขนาดของสายอากาศจานสะท้อน การกำหนดขนาดของสายอากาศสามารถทำได้โดยการคูณขนาดของสายอากาศจานสะท้อนด้วยตัวประกอบปรับขนาด (scale factor) $\left(Sc\right)$ ซึ่งจะอยู่ในหน่วยความยาวคลื่น เนื่องจากสายอากาศที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตแบบดั้งเดิมมิได้กำหนดด้วยความถี่ปฏิบัติการแต่แรก ดังนั้นเพื่อให้การวิเคราะห์หรือสังเคราะห์มีความแม่นยำ ควรใช้ตัวประกอบปรับขนาดที่ทำให้ขนาดของสายอากาศมีขนาดใหญ่เป็น 10 เท่าของความยาวคลื่นขึ้นไป ตัวอย่างเช่น หากเส้นผ่าศูนย์กลางของสายอากาศมีความยาวเท่ากับ 3 เมื่อคูณด้วยตัวประกอบปรับขนาด $Sc = 10\lambda$ ดังนั้นในการวิเคราะห์หรือสังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพ เส้นผ่าศูนย์กลางของสายอากาศจานสะท้อนจะมีค่าเป็น $30\ \lambda$ เป็นต้น

พื้นผิวเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อน พื้นผิวเริ่มต้นของจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้จากกรรมวิธีทัศน-ศาสตร์เรขาคณิตนั้นจะเป็นจุดไม่ต่อเนื่อง ฉะนั้นจึงต้องมีการประมาณพื้นผิวด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ การประมาณพื้นผิวของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปจะใช้สมการที่อยู่ในรูปผลรวมของฟังก์ชันพหุนามกับฟังก์ชันเชิงตั้งฉากคูณด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์แต่ละพจน์นั้น โดยที่ค่าปัจจัยเริ่มต้นของพื้นผิวจานสะท้อนก็คือค่าสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวนั้นเอง รูปแบบสมการสำหรับการประมาณรูปร่างพื้นผิวจานสะท้อน ได้แก่ Quintic Psuedo Spline (QPS), Jacobi Polynomial Sinusodal Expansion (JPSE) และ Polynomial Fourier Series (PFS) จากบทความของ Bergman และ Hasselmann (1994) [8] พบว่า สมการพหุนาม PFS ใช้จำนวนรอบในการลู่เข้าหาคำตอบของกระบวนการหาค่าเหมาะสมที่สุดน้อยกว่าทั้ง QPS และ JPSE วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงเลือกใช้สมการประมาณพื้นผิวแบบอนุกรมฟูริเยร์แบบพหุนาม (PFS) ซึ่งอยู่ในรูปสมการพหุนามอันดับสามรวมกับอนุกรมฮาร์มอนิกฟูริเยร์ดังนี้

$$z_r(x_r, y_r) = a_1 x_r + a_2 x_r^2 + a_3 x_r^3 + a_4 y_r + a_5 y_r^2 + a_6 y_r^3 + a_7 x_r y_r + a_8 x_r y_r^2 + a_9 y_r x_r^2 + \sum_{m=1}^{Nx}\sum_{n=1}^{Ny} C_{mn} f_m(x) f_n(y) \quad (3.1)$$

โดยที่ $f_m(x) = 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos Nxx, \sin Nxx$ สำหรับ $m = 1,2,...,Nx$

$f_n(y) = 1, \cos y, \sin y, \cos 2y, \sin 2y, ..., \cos Nyy, \sin Nyy$ สำหรับ $n = 1,2,...,Ny$

$a_i, i = 1,...,9$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการพหุนาม และ C_{mn} คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูริเยร์

x_r, y_r, z_r คือ ระบบพิกัดของสายอากาศจานสะท้อน

รูปร่างพื้นผิวของจานสะท้อนจะขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์ของสมการ 3.1 และจำนวนพจน์ของอนุกรมฟูริเยร์ก็มีผลต่อแบบรูปการแผ่พลังงานด้วยเช่นกัน Bergman และ Hasselmann[8] พบว่า ถ้าหากจำนวนพจน์ของอนุกรมฟูริเยร์มีจำนวนมากเกินไปจะทำให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้มีการแกว่งตัวในบริเวณพูข้างค่อนข้างมาก ดังนั้นเพื่อลดการสั่นไหวของแบบรูปสนามในบริเวณพูข้าง จะต้องกำหนดจุดสังเกตให้มากกว่าจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ (Nx*Ny) [9] จึงจะช่วยให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้มีความผิดเพี้ยนน้อยลง

รูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อน เนื่องจากจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้จากกรรมวิธีทัศน-ศาสตร์เรขาคณิตแบบดั้งเดิมซึ่งพิจารณาเป็น ปัญหาค่าเริ่มต้นนั้นขอบของจานสะท้อนไม่ได้เป็นรูปวงกลม วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงประมาณขอบของจานสะท้อนนี้โดยใช้สมการพาราเมตริกชนิดไฮเพอร์ควอดริกแบบ 2 มิติ สมการนี้อยู่ในรูปผลรวมจำนวนใด ๆ ของสมการเชิงเส้นที่ถูกยกกำลัง ซึ่งจะสามารถประมาณรูปร่างขอบของจานสะท้อนเป็นรูปร่างใด ๆ ได้ตามการเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์ของสมการไฮเพอร์ควอดริกแบบ 2 มิติ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

[20]

$$H(x_e, y_e) = \sum_{i=1}^{M} \left| H_i(x_e, y_e) \right|^{\upsilon_i} = 1 \quad (3.2)$$

โดยที่ x_e และ y_e เป็นจุดที่อยู่บนขอบของจานสะท้อน

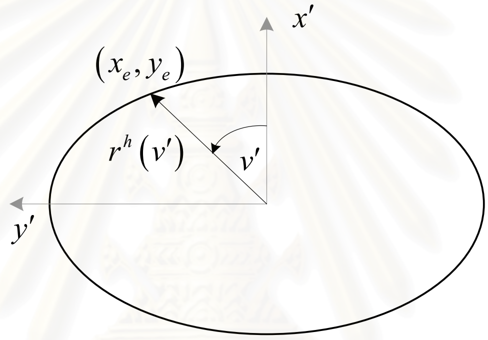
$H_i\left(x_e, y_e\right) = b_i x_e + c_i y_e + d_i$ ที่ซึ่ง b_i, c_i, d_i และ υ_i เป็นค่าคงที่ใดๆ $\left(\gamma_i > 0\right)$

เพื่อความสะดวกในการนำมาคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเราจะแทนตำแหน่งขอบจานสะท้อนให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วดังรูปที่ 3.2

$$x_e\left(r^h, v'\right) = r^h\left(v'\right)\cos v' \tag{3.3 ก}$$

$$y_e\left(r^h, v'\right) = r^h\left(v'\right)\sin v' \tag{3.3 ข}$$

ที่ซึ่ง $r^h\left(v'\right) \geq 0,\ v' \in \left[0, 2\pi\right]$



รูปที่ 3.2 ขอบของจานสะท้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

การหาค่า $r^h\left(v'\right)$ ในแต่ละค่าของ v' ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้ฟังก์ชัน fsolve ในโปรแกรม MATLAB รุ่น 6.1 โดยจะต้องเป็นค่าเชิงขนาดที่น้อยที่สุด ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ใช้คือ

$$OF = \sum_{j=1}^{N_e}\left(\sum_{i=1}^{M}\left|H_i\left(x_e^j, y_e^j\right)\right|^{\upsilon_i} - 1\right)^2 \tag{3.4}$$

ที่ซึ่ง N_e คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมดที่อยู่บนขอบจานสะท้อน

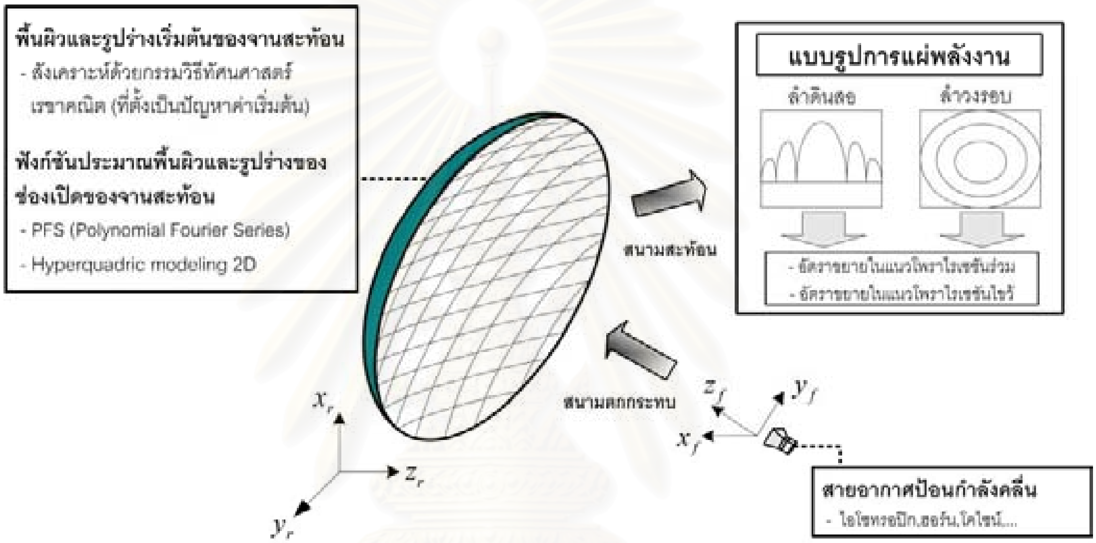
เมื่อกำหนดค่าปัจจัยเริ่มต้นทั้งหมดของระบบสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปแล้ว ขั้นตอนต่อมาจะเป็นการคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวเริ่มต้นของจานสะท้อนด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพ ซึ่งมีได้สองรูปแบบ ได้แก่ ลำคลื่นวงรอบ และ ลำคลื่นดินสอ ดังรูปที่ 3.3 แล้วนำไปเปรียบเทียบกับแบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการ ฟังก์ชันที่แสดงความความคลาดเคลื่อนหรือผลต่างในที่นี้จะเรียกว่า ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (objective function) ซึ่งเป็นผลรวมของค่าผลต่างระหว่างอัตราขยายที่คำนวณได้กับอัตราขยายที่ต้องการ ที่จุดสังเกตตำแหน่งต่าง ๆ ซึ่งเขียนได้เป็นดังนี้

$$F_{ob} = \sum_{i=1}^{N_{total}} \frac{\left|G^{i}_{desired} - G^{i}_{co}\right|}{N_{total}} \tag{3.5}$$

เมื่อ $G^{i}_{desired}$ คือ อัตราขยายที่ต้องการที่จุดสังเกตตำแหน่งที่ i

G^{i}_{co} คือ อัตราขยายที่คำนวณได้ที่จุดสังเกตตำแหน่งที่ i

N_{total} คือจำนวนของจุดสังเกตทั้งหมด



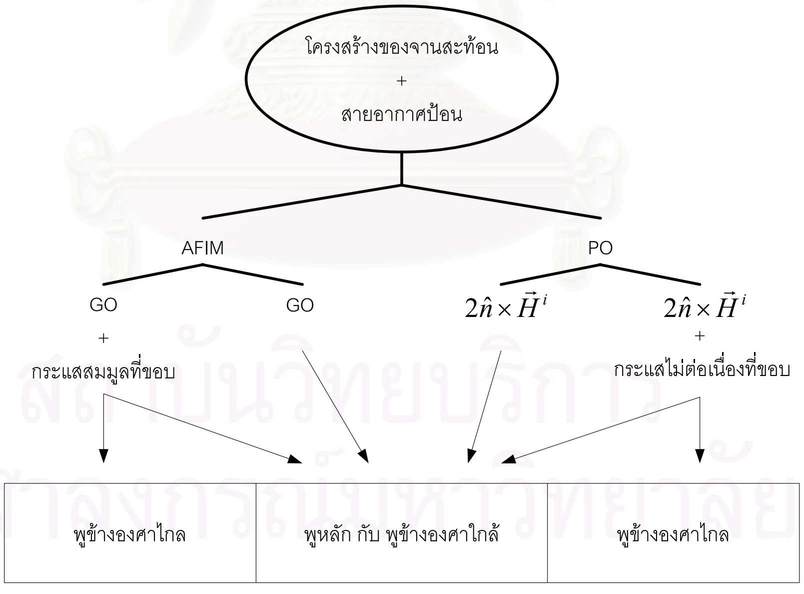
รูปที่ 3.3 ระบบสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

ตามขั้นตอนในรูปที่ 3.1 หลังจากคำนวณค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์แล้ว ก็จะนำไปเปรียบเทียบกับค่าที่ยอมรับได้ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้กำหนดให้ค่าที่ยอมรับได้เป็น 0.01 dB ถ้าฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าน้อยกว่าค่าที่ยอมรับได้ ก็จะออกจากกรรมวิธีวนซ้ำ และค่าสัมประสิทธิ์นั้นจะถือเป็นค่าที่นำมาใช้คำนวณหาพื้นผิวของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปตามสมการ 3.2 ถ้าหากฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่ามากกว่าค่าที่ยอมรับได้ ก็จะเข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของสมการพื้นผิวใหม่ จนกว่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะมีค่าน้อยกว่าค่าที่ยอมรับได้ เพื่อให้ได้จานสะท้อนที่สามารถให้แบบรูปการแผ่พลังงานเข้าใกล้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการมากที่สุด สำหรับในกรณีที่กรรมวิธีวนซ้ำมีการปรับพื้นผิวของจานสะท้อนอย่างไรก็ไม่สามารถหาสัมประสิทธิ์ที่ทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าน้อยกว่าค่าที่ยอมรับได้นั้น ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะตรวจสอบค่าความแตกต่างระหว่างฟังก์ชันวัตถุประสงค์ครั้งใหม่กับครั้งก่อนหน้า หากน้อยกว่า 10^{-10} ก็จะถือว่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าน้อยสุดและลู่เข้าสู่ค่านั้น แล้วออกจากกรรมวิธีวนซ้ำ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้ชุดคำสั่งหาค่าเหมาะสมที่สุดของโปรแกรม MATLABรุ่น 6.1

3.2 ระเบียบวิธีวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

การวิเคราะห์ลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปจะใช้กรรมวิธีและทฤษฎีในย่านความถี่สูงซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็นสองแนวทาง แนวทางแรกจะใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตและทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตตามแนวคิดกระแสสมมูล ร่วมกับกรรมวิธีการแปลงฟูริเยร์ของสเปกตรัมคลื่นระนาบ และแนวทางที่สองจะใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพตามแนวคิดกระแสสมมูล

ประสิทธิภาพและความแม่นยำของระเบียบวิธีวิเคราะห์ที่ใช้คำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลสรุปได้ดังรูปที่ 3.4 บทความ [21] ได้เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์จานสะท้อนคู่ดัดรูปแบบไม่สมมาตรสำหรับลำคลื่นแบบวงรีระหว่างกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพกับกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต พบว่าอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมมีความไม่สอดคล้องกันตั้งแต่บริเวณพูหลัก และแตกต่างกันค่อนข้างมากตั้งแต่บริเวณพูข้างองศาใกล้ ๆ ไปจนถึงองศาไกล โดยสรุปว่ากรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพมีความแม่นยำกว่าเนื่องจากใกล้เคียงกับผลที่ได้จากการวัด ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงเลือกใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพในการวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป และเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณสนามที่บริเวณพูข้างองศาไกลด้วยกรรมวิธีกระแสไม่สม่ำเสมอที่ขอบที่หาจากทฤษฎีเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ



รูปที่ 3.4 สรุประเบียบวิธีที่ใช้วิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

AFIM - ระเบียบวิธีปริพันธ์สนามบนช่องเปิด PO คือ กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพ ,

GO คือ กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต และ GTD คือ ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต

3.2.1 สายอากาศป้อนกำลังคลื่น

สายอากาศป้อนกำลังคลื่นเป็นแหล่งกำเนิดขั้นปฐมภูมิของระบบสายอากาศจานสะท้อน คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ออกจากสายอากาศป้อนจะตกกระทบบนผิวจานสะท้อนแล้วแผ่พลังงานย่านสนามไกลออกมา ดังนั้นการวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปจะต้องพิจารณาสนามที่แผ่พลังงานออกมาจากสายอากาศป้อนนี้ก่อนเป็นอันดับแรก

โดยปกติจะถือว่าตำแหน่งของสายอากาศป้อนจะวางอยู่ในบริเวณย่านสนามไกล เพราะฉะนั้นการพิจารณาสนามที่แผ่พลังงานออกมาจากสายอากาศป้อนสามารถพิจาณาได้จากแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศชนิดนั้น ในบริเวณย่านสนามไกลของสายอากาศใดๆ สามารถเขียนนิพจน์สนามอยู่ในรูปแบบทั่วไปเป็น

$$\bar{E}^{f}(r,\theta,\phi) = \left[E_{\theta}(\theta,\phi)\bar{a}_{\theta} + E_{\phi}(\theta,\phi)\bar{a}_{\phi}\right]\frac{e^{-jkr}}{r} \tag{3.6}$$

เมื่อพิจาณาในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนจะได้

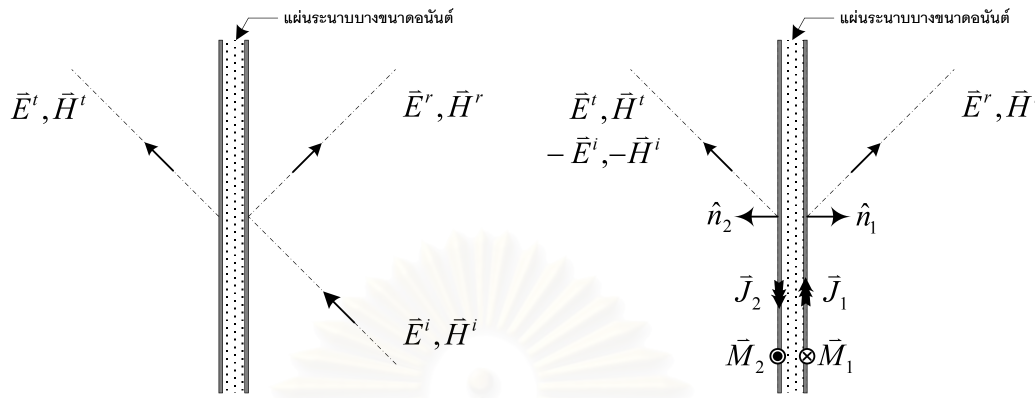
$$\begin{aligned} E_x(\theta,\phi) &= E_{\theta}(\theta,\phi)\cos\theta\cos\phi - E_{\phi}(\theta,\phi)\sin\phi \\ E_y(\theta,\phi) &= E_{\theta}(\theta,\phi)\cos\theta\sin\phi + E_{\phi}(\theta,\phi)\cos\phi \\ E_z(\theta,\phi) &= -E_{\theta}(\theta,\phi)\sin\phi \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.3.3 การวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพ และทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ

<u>สนามกระเจิงจากกระแสเหนี่ยวนำบนพื้นผิว</u>

กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพเป็นกรรมวิธีวิเคราะห์สายอากาศย่านความถี่สูง ที่ใช้ประมาณค่าของกระแสสมมูลบนผิวตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ที่มีขนาดใหญ่เมื่อเทียบกับความยาวคลื่น โดยสามารถใช้หาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กย่านสนามไกลจากการหาปริพันธ์ของกระแสสมมูลบนผิวตัวนำด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

แนวคิดของกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพจะตั้งข้อสมมติว่ากระแสสมมูลจะเกิดเป็นจุดบนพื้นผิวโค้งใด ๆ โดยพิจารณาเสมือนว่ากระแสสมมูลอยู่บนระนาบพื้นผิวขนาดอนันต์ การหากระแสเหนี่ยวนำจะเริ่มจากการพิจารณาสนามตกกระทบและสนามสะท้อนบนระนาบบางขนาดอนันต์ดังรูปที่ 3.5 ซึ่งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตกกระทบ สะท้อน และส่งผ่าน แทนด้วยดัชนี i,r และ t ตามลำดับ



(ก) ความสัมพันธ์ของสนามบนระนาบบางขนาดอนันต์ (ข) กระแสสมมูลบนระนาบบางขนาดอนันต์

รูปที่ 3.5 กระแสสมมูลบนระนาบขนาดอนันต์

เมื่อสนามตกกระทบ $\left(\vec{E}^i,\vec{H}^i\right)$ ตกกระทบบนพื้นผิว สนามตกกระทบนี้จะทำให้เกิดสนามทั้งสองฝั่งของพื้นผิว เมื่อใช้หลักการกระแสสมมูลบนพื้นผิวจะพบว่าสนามที่แผ่กระจายออกมานี้เกิดจากกระแสสมมูลดังที่แสดงในรูปที่ 3.5 ข เมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตจะพบว่า

$$\vec{j}_1 = \hat{n}_1 \times \vec{H}^r, \vec{M}_1 = -\hat{n}_1 \times \vec{E}^r \tag{3.8}$$

$$\vec{j}_2 = \hat{n}_2 \times \left(\vec{H}^t - \vec{H}^i\right), \vec{M}_2 = -\hat{n}_2 \times \left(\vec{E}^t - \vec{E}^i\right) \tag{3.9}$$

โดยที่ $\vec{j}_1$ และ $\vec{j}_2$ คือ กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำบนพื้นผิว 1 และ 2 ตามลำดับ

$\vec{M}_1$ และ $\vec{M}_2$ คือ กระแสแม่เหล็กเหนี่ยวนำบนพื้นผิว 1 และ 2 ตามลำดับ

$\hat{n}_1$ และ $\hat{n}_2$ คือ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว 1 และ 2 ตามลำดับ

พิจารณาสนามส่งผ่านกับพื้นผิว 1 พบว่า $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$ ดังนั้นจะได้

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \hat{n}_1 \times \left(\vec{H}^i + \vec{H}^r - \vec{H}^t\right) \tag{3.10}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = -\hat{n}_1 \times \left(\vec{E}^i + \vec{E}^r - \vec{E}^t\right) \tag{3.11}$$

โดยที่ $\vec{J}$ คือ กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำรวม

$\vec{M}$ คือ กระแสแม่เหล็กเหนี่ยวนำรวม

เมื่อพื้นผิวสะท้อนเป็นผิวโค้งและเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ เราจะพบว่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กส่งผ่านจะมีค่าเป็นศูนย์ และสนามไฟฟ้าองค์ประกอบแนวสัมผัสกับพื้นผิวในบริเวณสาดส่องเป็นศูนย์ทำให้กระแสแม่เหล็กเหนี่ยวนำ $\left(\bar{M}^{PO}\right)$ มีค่าเป็นศูนย์ สำหรับกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจะหาได้ดังนี้

$$\bar{J} \approx \bar{J}^{PO} = \begin{cases} 2\hat{n} \times \bar{H}^{i}, \text{บนบริเวณสาดส่อง} \\ 0 \qquad\quad, \text{ในบริเวณเงา} \end{cases} \tag{3.12}$$

ในบริเวณที่ไม่มีการสาดส่องโดยตรงจากสนามตกกระทบจะประมาณให้กระแสไฟฟ้าสมมูลนี้มีค่าเป็นศูนย์

กระแสไฟฟ้าสมมูลในสมการ (3.12) หาได้จากการตั้งข้อสมมติว่า พื้นผิวตกกระทบเป็นระนาบ ดังนั้นถ้าต้องการให้การวิเคราะห์มีความแม่นยำ ในกรณีที่พื้นผิวตกกระทบเป็นพื้นผิวโค้งแบบพื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนนั้นขนาดของพื้นผิวตกกระทบรวมถึงรัศมีความโค้งจะต้องมีขนาดใหญ่เมื่อเทียบกับความยาวคลื่น สนามที่แผ่กระจายออกมาจากกระแสทัศนศาสตร์กายภาพหรือกระแสเหนี่ยวนำจะสามารถหาจาก

$$\vec{A}^{e} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{\Omega} \bar{J}^{PO}(\bar{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} d\Omega \tag{3.13 ก}$$

$$\vec{F}^{m} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint_{\Omega} \bar{M}^{PO}(\bar{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} d\Omega \tag{3.13 ข}$$

$$\bar{E} = -j\omega\left(\vec{A}^{e} + \tfrac{1}{k^{2}} \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}^{e}\right)\right) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{F}^{m} \tag{3.14 ก}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}^{e} - j\omega\left(\vec{F}^{m} + \tfrac{1}{k^{2}} \nabla\left(\nabla \cdot \vec{F}^{m}\right)\right) \tag{3.14 ข}$$

โดยที่ $\vec{A}^{e}$ คือศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า , $\vec{F}^{m}$ คือศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก

ε คือสภาพยอม , μ คือความซาบซึมได้ , ω คือความถี่เชิงมุม

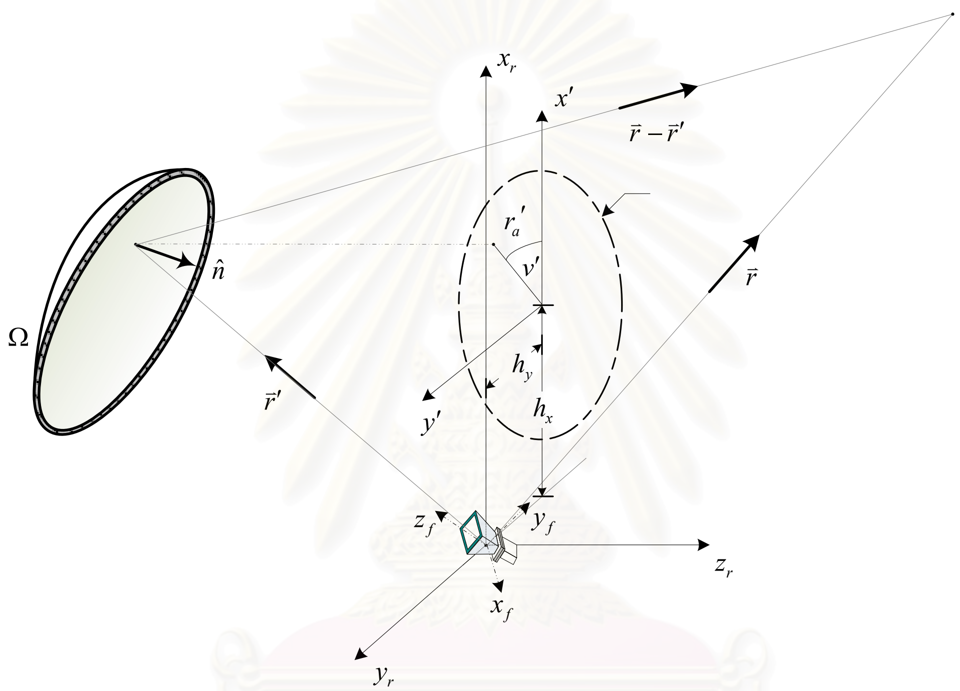
k คือเลขคลื่น ซึ่งมีความสัมพันธ์กับความยาวคลื่น (λ) ดังนี้ $k = 2\pi/\lambda$

ระยะ R หาได้จาก $R = |\bar{r} - \bar{r}'|$ ซึ่ง $\bar{r}$ เป็นตำแหน่งของจุดสังเกต และ $\bar{r}'$ เป็นตัวแปรของจุดที่อยู่บนพื้นผิวของจานสะท้อนในการหาปริพันธ์ แสดงดังรูปที่ 3.6 Ω ในสมการ (3.13 ก) และ (3.13 ข) ให้เป็นบริเวณพื้นผิวในการหาปริพันธ์ ผลจากสมการ (3.14 ก) และ (3.14 ข) ทำให้สามารถหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่แผ่กระจายออกมาด้วยการประยุกต์ใช้ตัวดำเนินการอนุพันธ์กับ $\vec{A}^{e}$ และ $\vec{F}^{m}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{E}(\bar{r}) = {} & \frac{Z}{4\pi} \iint_{\Omega} \left(\bar{J}^{PO}\left(-\frac{j}{kR} - \frac{1}{k^{2}R^{2}} + \frac{j}{k^{3}R^{3}}\right) + \left(\bar{J}^{PO} \cdot \hat{R}\right)\hat{R}\left(\frac{j}{kR} + \frac{3}{k^{2}R^{2}} - \frac{3j}{k^{3}R^{3}}\right)\right) e^{-jkR} k^{2} d\Omega \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \bar{M}^{PO} \times \hat{R} \frac{1}{k^{2}R^{2}} (1 + jkR) e^{-jkR} k^{2} d\Omega \end{aligned} \tag{3.15 ก}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega} \vec{J}^{PO} \times \hat{R}\frac{1}{k^2R^2}(1+jkR)e^{-jkR}k^2 d\Omega + \frac{1}{4\pi Z}\iint_{\Omega}\left(\vec{M}^{PO}\left(-\frac{j}{kR}-\frac{1}{k^2R^2}+\frac{j}{k^3R^3}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\vec{M}^{PO}\cdot\hat{R}\right)\hat{R}\left(\frac{j}{kR}+\frac{3}{k^2R^2}-\frac{3j}{k^3R^3}\right)\right)e^{-jkR}k^2 d\Omega \qquad (3.15\ ข)$$

ซึ่ง $\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ และ Z คืออิมพีแดนซ์ในปริภูมิเสรี , $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$



รูปที่ 3.6 เรขาคณิตของจานสะท้อนที่ใช้ในกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพ

ในกรณีที่ต้องการหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลสามารถหาได้จากการประมาณค่า r เข้าใกล้อนันต์ซึ่งนิยามดังนี้

$$\vec{E}^{PO}(\vec{r}) = \vec{E}^{far}(\vec{r}) = \lim_{r\to\infty}\left(\vec{E}(\vec{r})e^{jkr}kr\right) \qquad (3.16\ ก)$$

$$\vec{H}^{PO}(\vec{r}) = \vec{H}^{far}(\vec{r}) = \lim_{r\to\infty}\left(\vec{H}(\vec{r})e^{jkr}kr\right) \qquad (3.16\ ข)$$

ซึ่ง $r = |\vec{r}|$

แทนสมการ (3.15 ก) และ (3.15 ข) ลงในนิยาม (3.16 ก) และ (3.16 ข) จะหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลที่จุดสังเกตใด ๆ ได้ดังนี้

$$\vec{E}^{PO}(\vec{r}) = -\frac{jZ}{4\pi}\iint_{\Omega}\left(\vec{J}^{PO} - \left(\vec{J}^{PO}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right)e^{jk\vec{r}'\cdot\hat{r}}k^2 d\Omega + \frac{j}{4\pi}\hat{r}\times\iint_{\Omega}\vec{M}^{PO}e^{jk\vec{r}'\cdot\hat{r}}k^2 d\Omega \qquad (3.17\text{ ก})$$

$$\vec{H}^{PO}(\vec{r}) = -\frac{j}{4\pi}\hat{r}\times\iint_{\Omega}\vec{J}^{PO}e^{jk\vec{r}'\cdot\hat{r}}k^2 d\Omega - \frac{j}{4\pi Z}\iint_{\Omega}\left(\vec{M}^{PO} - \left(\vec{M}^{PO}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right)e^{jk\vec{r}'\cdot\hat{r}}k^2 d\Omega \qquad (3.17\text{ ข})$$

โดยที่ $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$

สนามแม่เหล็กย่านสนามไกลของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเมื่อตกกระทบจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปจะก่อให้เกิดกระแสทัศนศาสตร์กายภาพบนจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่ประมาณพื้นผิวด้วยสมการพหุนามอันดับสามรวมกับอนุกรมของฟูริเยร์ดังแสดงในสมการ (3.1) กระแสไฟฟ้าทัศนศาสตร์กายภาพสามารถคำนวณได้จากสมการ (3.12) ดังนี้

$$\vec{J}^{PO} = \begin{cases} 2\hat{n}\times\vec{H}^{feed} & ,\text{ในบริเวณสาดส่อง} \\ 0 & ,\text{ในบริเวณเงา} \end{cases}$$

โดยที่ $\hat{n}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวจานสะท้อนซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\hat{n} = \frac{\nabla_x\vec{a}_x + \nabla_y\vec{a}_y + \nabla_z\vec{a}_z}{\sqrt{\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2}} \qquad (3.18)$$

โดยที่

$$\nabla_x = -\left(a_1 + 2a_2x_r + 3a_3x_r^2 + a_7y_r + a_8y_r^2 + 2a_9x_ry_r + \sum_{r=1}^{Nx}\sum_{s=1}^{Ny}C_{rs}f_s(y_r)\frac{df_r(x_r)}{dx_r}\right)$$

$$\nabla_y = -\left(a_4 + 2a_5y_r + 3a_6y_r^2 + a_7x_r + a_9x_r^2 + 2a_8x_ry_r + \sum_{r=1}^{Nx}\sum_{s=1}^{Ny}C_{rs}f_s(x_r)\frac{df_s(y_r)}{dy_r}\right)$$

$$\nabla_z = 1$$

และ $\vec{H}^{feed}$ คือสนามแม่เหล็กของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ตกกระทบบนผิวจานสะท้อนซึ่งคำนวณได้จาก

$$\vec{H}^{feed} = \frac{\vec{s}^{\,i}\times\vec{E}^{feed}}{Z} \qquad (3.19)$$

โดยที่ $\vec{s}^{\,i}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตกกระทบและ $\vec{E}^{feed}$ คือสนามไฟฟ้าจากสายอากาศป้อนกำลังคลื่น

เมื่อกำหนดให้ศูนย์กลางของวัฏภาคอยู่ที่จุด $\left(x_f, y_f, z_f\right)$ แล้วเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของทิศทางตกกระทบจะเป็น

$$\bar{s}^{i} = \frac{(x_r - x_f)\bar{a}_x + (y_r - y_f)\bar{a}_y + (z_r - z_f)\bar{a}_z}{\sqrt{(x_r - x_f)^2 + (y_r - y_f)^2 + (z_r - z_f)^2}} \quad (3.20)$$

สนามไฟฟ้าจะคำนวณได้จากการหาปริพันธ์ของกระแสทัศนศาสตร์กายภาพเทียบกับพื้นผิวย่อย $d\Omega$ บนพื้นผิวโค้ง Ω การหาปริพันธ์เทียบกับพื้นผิวโค้ง Ω สามารถหาได้สะดวกขึ้นโดยเปลี่ยนเป็นการหาปริพันธ์เทียบกับพื้นที่ภาพฉายของจานสะท้อน พื้นที่ย่อย $d\Omega$ มีความสัมพันธ์กับพื้นที่ย่อยภาพฉายของจานสะท้อนดังนี้คือ $d\Omega = \mathbf{J_A}\, dx'dy'$ กำหนดให้ $\mathbf{J_A}$ คือยาโคเบียนของการแปลง และกระแสแม่เหล็กเหนี่ยวนำ $\left(\vec{M}^{PO}\right)$ มีค่าเป็นศูนย์ สมการ (3.17 ก) และ (3.17 ข) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\vec{E}^{PO}(\bar{r}) = -\frac{jZ}{4\pi}\iint_A \left(\vec{J}^{PO} - \left(\vec{J}^{PO}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right)e^{jk\bar{r}'\cdot\hat{r}}k^2\mathbf{J_A}\,dx'dy' \quad (3.21\ ก)$$

$$\vec{H}^{PO}(\bar{r}) = -\frac{j}{4\pi}\hat{r}\times\iint_A \vec{J}^{PO}e^{jk\bar{r}'\cdot\hat{r}}k^2\mathbf{J_A}\,dx'dy' \quad (3.21\ ข)$$

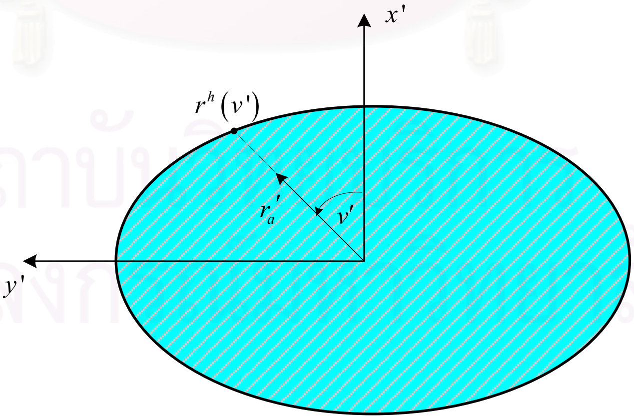
โดยที่ $x' = x_r - h_x$ และ $y' = y_r - h_y$

h_x คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางเฟสของสายอากาศป้อนไปยังจุดศูนย์กลางของภาพฉายจานสะท้อนบนระนาบช่องเปิด มีค่าเป็นบวกในทิศทางแกน $+x$ มีค่าเป็นลบในทิศทางแกน $-x$

h_y คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางเฟสของสายอากาศป้อนไปยังจุดศูนย์กลางของภาพฉายจานสะท้อนบนระนาบช่องเปิด มีค่าเป็นบวกในทิศทางแกน $+y$ มีค่าเป็นลบในทิศทางแกน $-y$

$\mathbf{J_A} = \sqrt{\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + 1}$

$\mathbf{A}$ คือพื้นที่ภาพฉายของจานสะท้อนบนระนาบ x', y'



รูปที่ 3.7 การหาปริพันธ์ของพื้นที่ $\mathbf{A}$ ในระนาบ $x'y'$

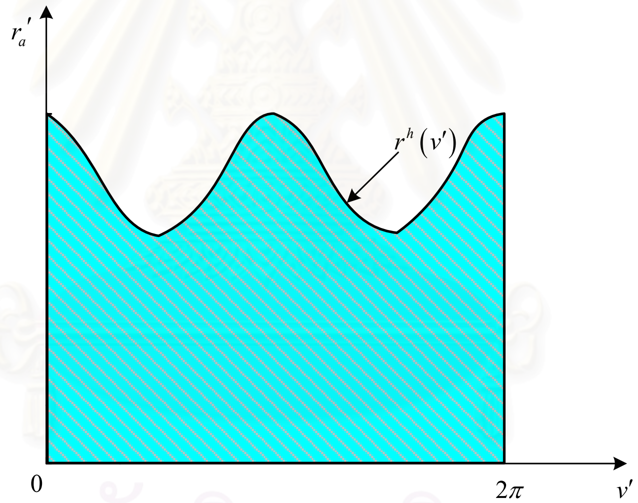
การหาปริพันธ์ของกระแสทัศนศาสตร์ที่ขอบของจานสะท้อนเป็นเส้นโค้งสามารถแปลงจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วดังรูปที่ 3.7 พื้นที่การหาปริพันธ์จะกำหนดโดยช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนซึ่งรัศมีของขอบเส้นโค้งเป็นฟังก์ชัน $r^h\left(v'\right)$ เมื่อแปลงสมการ (3.21 ก) และสมการ (3.21 ข) ไปเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว $\left(r_a',v'\right)$ ดังนี้

ให้ $x'\left(r_a',v'\right)=r_a'\cos v'$ และ $y'\left(r_a',v'\right)=r_a'\sin v'$

$$\bar{E}^{PO}\left(\bar{r}\right)=-\frac{jZ}{4\pi}\iint_{\mathbf{E}}\left(\bar{J}^{PO}-\left(\bar{J}^{PO}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right)e^{jk\bar{r}'\cdot\hat{r}}k^2\mathbf{J}_{\mathbf{A}}r_a'dr_a'dv' \tag{3.22 ก}$$

$$\bar{H}^{PO}\left(\bar{r}\right)=-\frac{j}{4\pi}\hat{r}\times\iint_{\mathbf{E}}\bar{J}^{PO}e^{jk\bar{r}'\cdot\hat{r}}k^2\mathbf{J}_{\mathbf{A}}r_a'dr_a'dv' \tag{3.22 ข}$$

การหาปริพันธ์ของพื้นที่ $\mathbf{E}$ แสดงดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 การหาปริพันธ์ของพื้นที่ $\mathbf{E}$ ในระนาบ $r_a'v'$

จากนั้นแปลงขอบของจานสะท้อน $r^h\left(v'\right)$ ใด ๆ ให้เป็นขนาด ρ' หรือ เป็นการแปลง $\left(r_a',v'\right)\to\left(\rho',\phi'\right)$ โดยมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$r_a'\left(\rho',\phi'\right)=\rho' r^h\left(\phi'\right) \tag{3.23 ก}$$

$$v'\left(\rho',\phi'\right)=\phi' \tag{3.23 ข}$$

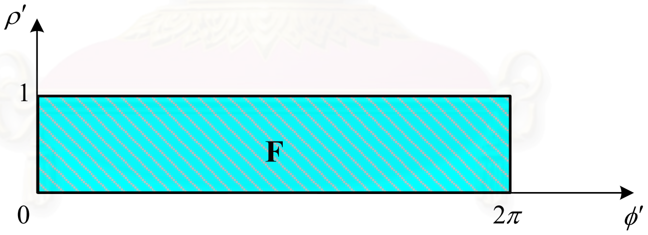
เมื่อกำหนดค่า v' หรือ ϕ' ค่าใดค่าหนึ่ง การหาปริพันธ์จะเริ่มตั้งแต่ $\rho' = 0$ หรือ $r_a'(\rho',\phi') = 0$ ไปถึง $\rho' = 1$ หรือ $r_a'(\rho',\phi') = r^h(\phi')$ ดังนั้นการหาปริพันธ์ของพื้นที่ $\mathbf{E}$ จะแปลงไปเป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ยาวเท่ากับ 2π และกว้างเท่ากับ 1 ในระนาบ $\rho'\phi'$ ดังรูปที่ 3.9 เพราะฉะนั้นสามารถหาปริพันธ์ของสมการ (3.22 ก) และ (3.22 ข) ได้เป็น

$$\vec{E}^{PO}(\bar{r}) = -\frac{jZ}{4\pi}\iint_F \left(\vec{J}^{PO} - \left(\vec{J}^{PO}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right)e^{jk\bar{r}'\cdot\hat{r}}k^2\mathbf{J}_\mathbf{A}r_a'(\rho',\phi')\left|\partial\left(r_a',v'\right)\big/\partial(\rho',\phi')\right|d\rho'\,d\phi' \quad (3.24\text{ ก})$$

$$\vec{H}^{PO}(\bar{r}) = -\frac{j}{4\pi}\hat{r}\times\iint_F \vec{J}^{PO}e^{jk\bar{r}'\cdot\hat{r}}k^2\mathbf{J}_\mathbf{A}r_a'(\rho',\phi')\left|\partial\left(r_a',v'\right)\big/\partial(\rho',\phi')\right|d\rho'\,d\phi' \quad (3.24\text{ ข})$$

โดยที่ จาโคบีของการแปลงสามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\left|\partial\left(r_a',v'\right)\big/\partial(\rho',\phi')\right| &= \begin{vmatrix}\partial r_a'/\partial\rho' & \partial r_a'/\partial\phi' \\ \partial v/\partial\rho' & \partial v/\partial\phi'\end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix}r^h(\phi') & \rho'\,dr^h/d\phi' \\ 0 & 1\end{vmatrix} \\ &= \left|r^h(\phi')\right|\end{aligned} \quad (3.25)$$



รูปที่ 3.9 การหาปริพันธ์ของพื้นที่ F ในระนาบ $\rho'\phi'$

ในที่สุดสามารถหาสนามจากกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพซึ่งคำนวณจากการหาปริพันธ์แหล่งกระแสสมมูลกับพื้นที่ F ได้ดังนี้

$$\vec{E}^{PO}(\bar{r}) = -\frac{jZ}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\vec{J}^{PO} - \left(\vec{J}^{PO}\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right)e^{jk\bar{r}'\cdot\hat{r}}k^2\mathbf{J}_\mathbf{A}r_a'(\rho',\phi')\left|r^h(\phi')\right|d\rho'\,d\phi' \quad (3.26\text{ ก})$$

$$\vec{H}^{PO}(\bar{r}) = -\frac{j}{4\pi}\hat{r}\times\int_0^{2\pi}\int_0^1 \vec{J}^{PO}e^{jk\bar{r}'\cdot\hat{r}}k^2\mathbf{J}_\mathbf{A}r_a'(\rho',\phi')\left|r^h(\phi')\right|d\rho'\,d\phi' \quad (3.26\text{ ข})$$

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามสมการ (3.26 ก) และสมการ (3.26 ข) ใช้คำนวณค่าคุณลักษณะของการแผ่กระจายคลื่นของสายอากาศ เช่น อัตราขยายของสายอากาศแนวโพลาไรเซชันร่วม และแนวโพลาไรเซชันไขว้ ซึ่งค่าคุณลักษณะ เหล่านี้จะนำไปใช้คำนวณในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด

<u>สนามกระเจิงจากกระแสไม่สม่ำเสมอที่ขอบของจานสะท้อน</u>

เนื่องจากกระแสทัศนศาสตร์กายภาพนั้นเป็นการประมาณกระแสที่มีความถูกต้องเฉพาะบริเวณโครงสร้างของสายอากาศจานสะท้อนที่มีพื้นผิวต่อเนื่องและมีขนาดทางไฟฟ้าที่ใหญ่มาก แต่สำหรับบริเวณขอบและมุมของสายอากาศนั้น กระแสจะเกิดความไม่ต่อเนื่อง ทำให้การประมาณด้วยกระแสทัศนศาสตร์กายภาพไม่แม่นยำนัก เพราะฉะนั้นการคำนวณด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพเพียงอย่างเดียวจะมีความเหมาะสมเฉพาะกับการวิเคราะห์อัตราขยายบริเวณพูข้างใกล้ ๆ เท่านั้น เพื่อให้การทำนายแบบรูปการแผ่พลังงานในบริเวณพูข้างไกลและอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้มีความถูกต้องมากขึ้น จึงจำเป็นต้องรวมสนามเลี้ยวเบนที่เกิดจากกระแสที่ขอบ (fringe current) ปรากฏการณ์เลี้ยวเบนที่ขอบนี้สามารถทำนายได้ด้วยทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ ทำให้สนามกระเจิงอยู่ในรูปของผลรวมของสนามกระเจิงจากกระแสทัศนศาสตร์กายภาพบนพื้นผิวต่อเนื่อง และสนามเลี้ยวเบนจากกระแสไม่ต่อเนื่องที่ขอบดังสมการ (3.27)

$$\vec{E}^{PTD}\left(\vec{r}\right) = \vec{E}^{PO}\left(\vec{r}\right) + \vec{E}^{F}\left(\vec{r}\right) \tag{3.27}$$

โดยที่ $\vec{E}^{PTD}$ คือสนามกระเจิงตามทฤษฎีเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ , $\vec{E}^{PO}$ คือสนามกระเจิงจากกระแสทัศนศาสตร์-กายภาพ และ $\vec{E}^{F}$ คือสนามกระเจิงจากกระแสไม่สม่ำเสมอที่ขอบ

งานวิจัยนี้ได้ใช้ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพตามแนวคิดกระแสสมมูลของมิคาเอลลิ [22,23] เพื่อคำนวณสนามกระเจิงที่ขอบของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป เนื่องจากอยู่ในรูปของปริพันธ์เชิงเส้น ทำให้สะดวกแก่การคำนวณและใช้เวลาไม่นานเมื่อเทียบกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพตามแนวคิดของอูฟิมเซฟ (Ufimtsev) [24] มิคาเอลลิได้แสดงสนามเลี้ยวเบนที่เกิดจากแหล่งกำเนิดกระแสไม่ต่อเนื่องที่ขอบ จากผลเฉลยแม่นตรงของสมการแมกซ์เวลล์ในกรณีที่มีคลื่นระนาบตกกระทบบนระนาบรูปลิ่มยาวอนันต์ ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ให้สนามเลี้ยวเบนจากขอบของโครงสร้างตัวนำไฟฟ้ารูปร่างใด ๆ ก็ได้ โดยรายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก ก สนามอันไม่สม่ำเสมอที่ขอบของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปสามารถคำนวณได้จาก

$$\vec{E}^{F}\left(\vec{r}\right) = \frac{jk}{4\pi}\oint\left[Z\hat{s}_d \times \left(\hat{s}_d \times I^F\hat{e}\right) + \hat{s}_d \times M^F\hat{e}\right]\frac{e^{-jks_d}}{s_d}\left|\frac{\partial \vec{r}_{rim}\left(\varphi^h\right)}{\partial \varphi^h}\right| d\varphi^h \tag{3.28}$$

โดยที่ เวกเตอร์ตำแหน่งบนเส้นโค้งของขอบที่จุดขอบสามารถหาได้ดังนี้

$$\vec{r}_{rim} = r^h(v')\cos v'\vec{a}_x + r^h(v')\sin v'\vec{a}_y + z_d\left(r^h(v')\cos v', r^h(v')\sin v'\right)\vec{a}_z \tag{3.29}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวสัมผัสกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน $Q_D(x_d, y_d, z_d)$ หาได้จาก

$$\hat{e} = -\frac{\vec{r}'_{rim}}{\left|\vec{r}'_{rim}\right|} = \frac{r'_x\vec{a}_x + r'_y\vec{a}_y + r'_z\vec{a}_z}{\sqrt{r'^2_x + r'^2_y + r'^2_z}} \tag{3.30}$$

$\hat{s}_d$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของการเลี้ยวเบนซึ่งมีทิศพุ่งออกจากจุดเลี้ยวเบน (x_d, y_d, z_d) ไปยังจุดสังเกต (x, y, z) ใดๆ หาได้ดังนี้

$$\hat{s}_d = \frac{(x - x_d)\vec{a}_x + (y - y_d)\vec{a}_y + (z - z_d)\vec{a}_z}{\sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 + (z - z_d)^2}} \tag{3.31}$$

I^F และ M^F คือกระแสไฟฟ้าสมมูลและกระแสแม่เหล็กสมมูลไม่สม่ำเสมอบริเวณขอบรายละเอียดแสดงดังภาคผนวก ก มีค่าเป็นดังสมการ (3.57 ก) และ (3.57 ข)

$$\begin{aligned} I^F &= \left(\vec{E}^i \cdot \hat{e}\right)\frac{2j}{Zk\sin^2\beta'}\,\frac{\sqrt{2}\sin(\phi'/2)}{\cos\phi' + \mu}\left[\sqrt{1-\mu} - \sqrt{2}\cos(\phi'/2)\right] \\ &\quad + \left(\vec{H}^i \cdot \hat{e}\right)\frac{2j}{k\sin\beta'}\,\frac{1}{\cos\phi' + \mu}\left[\cot\beta'\cos\phi' + \cot\beta\cos\phi\right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2}\cos(\phi'/2)\left(\mu\cot\beta' - \cot\beta\cos\phi\sqrt{1-\mu}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.32 ก}$$

$$M^F = \left(H^i \cdot \hat{e}\right)\frac{2jZ\sin\phi}{k\sin\beta\sin\beta'}\frac{1}{\cos\phi' + \mu}\left[1 - \frac{\sqrt{2}\cos(\phi'/2)}{\sqrt{1-\mu}}\right] \tag{3.32 ข}$$

ที่ซึ่ง $\mu = \dfrac{\cos\gamma - \cos^2\beta'}{\sin^2\beta'}$ และ $\cos\gamma = \sin\beta'\sin\beta\cos\phi + \cos\beta\cos\beta$

กำหนดให้ (β', ϕ') เป็นระบบพิกัดที่จุดขอบของรังสีตกกระทบ และ (β, ϕ) เป็นระบบพิกัดที่จุดขอบของรังสีเลี้ยวเบน

3.3 ค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานของสายอากาศ

เมื่อสายอากาศถูกนำมาใช้ในระบบใด ๆ เช่น ระบบการสื่อสาร สิ่งที่จะต้องให้ความสนใจในขั้นต้นคือประสิทธิภาพในการเปลี่ยนพลังงานจากพลังงานที่ป้อนเข้า (input power) ไปเป็นพลังงานที่ถูกแผ่กระจายออกไปจากสายอากาศ **อัตราขยายของสายอากาศ** จะเป็นค่าเชิงปริมาณในการใช้อธิบายว่า สายอากาศมีความสามารถในการรวมพลังงานแต่ละทิศทางใด ๆ ได้มากน้อยเพียงใดเมื่อเทียบกับพลังงานที่ป้อนเข้า ดังสมการ (3.33)

$$G(\theta,\phi) = 4\pi \frac{U_{rad}(\theta,\phi)}{P_{in}} \tag{3.33}$$

โดยที่ P_{in} คือ พลังงานที่ป้อนให้สายอากาศมีหน่วยเป็น วัตต์ (Watt)

$U_{rad}(\theta,\phi)$ คือความเข้มของการแผ่กระจายพลังงานในแต่ละทิศทาง (θ,ϕ) ซึ่งหาได้จาก

$$U_{rad}(\theta,\phi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E \times H^*\right)\cdot r^2\hat{r} = \frac{\left|E(\theta,\phi)\right|^2 r^2}{2Z} \tag{3.34}$$

ความเข้มของการแผ่พลังงานเป็นพลังงาน ที่แผ่กระจายออกจากสายอากาศในแต่ละทิศทางต่อหน่วยมุมตัน จึงมีหน่วยเป็น วัตต์ต่อเรเดียนยกกำลังสอง (หรือ สเตอเรเดียน, sr) ข้อดีของการใช้ความเข้มของการแผ่กระจายพลังงาน คือสามารถเขียนนิพจน์แยกเป็นอิสระจากระยะทาง r ได้ไม่เหมือนกับกำลังงานที่ระยะทาง r จะรวมอยู่ในปริพันธ์ด้วย

สำหรับการประยุกต์ใช้งานสายอากาศกับการสื่อสารผ่านดาวเทียมนั้น จะใช้การส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชัน (dual polarization) เพื่อเพิ่มความจุของช่องสื่อสาร โดยใช้ความถี่เดียวกัน (frequency reuse) ดังนั้นระดับสัญญาณระหว่างโพลาไรเซชันร่วมของช่องสัญญาณช่องหนึ่งกับโพลาไรเซชันไขว้ของช่องสัญญาณอีกช่องหนึ่งควรมีค่าที่แตกต่างกันยิ่งต่างกันมากก็ยิ่งรบกวนกันได้น้อยลง ตามมาตรฐานของ (International Telecommunication Union ,ITU) กำหนดให้มีความแตกต่าง 30 dB เป็นอย่างน้อย วิทยานิพนธ์ฉบับนี้กำหนดให้สายอากาศป้อนกำลังคลื่นมีโพลาไรเซชันในแนวแกน x สนามไฟฟ้าย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วม และสนามไฟฟ้าย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันไขว้หาได้จากนิยามที่ 3 ของ Ludwig [27] ดังนี้

$$\bar{E}_{co}(\theta,\phi) = \bar{E}_\theta \cos(\phi) - \bar{E}_\phi \sin(\phi) \tag{3.35 ก}$$

$$\bar{E}_{cross}(\theta,\phi) = \bar{E}_\theta \sin(\phi) + \bar{E}_\phi \cos(\phi) \tag{3.35 ข}$$

เมื่อ $\bar{E}_\theta$ และ $\bar{E}_\phi$ คือ สนามไฟฟ้าย่านไกลในแนวองค์ประกอบ $\hat{\theta}$ และ $\hat{\phi}$ ของพิกัดทรงกลม อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมและในแนวโพลาไรเซชันไขว้หาได้ดังนี้

$$G_{co}(\theta,\phi) = 4\pi \frac{r^2 \left|E_{co}(\theta,\phi)\right|^2}{2} \tag{3.36 ก}$$

$$G_{cross}(\theta,\phi) = 4\pi \frac{r^2 \left|E_{cross}(\theta,\phi)\right|^2}{2} \tag{3.36 ข}$$

เพื่อตรวจสอบว่าสายอากาศจานสะท้อนสังเคราะห์ได้ให้คุณสมบัติการแผ่กระจายคลื่นตรงตามที่ต้องการหรือไม่ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้นิยามดัชนีชี้วัดในเชิงปริมาณดังนี้

ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วมที่จุดสังเกต $(\bar{G})$ หาได้จากอัตราส่วนของผลรวมของอัตราขยายที่จุดสังเกตที่กำหนดต่อจำนวนจุดสังเกตทั้งหมด

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^{N_{total}} \frac{G_{co}^{i}}{N_{total}} \tag{3.37}$$

โดยที่ N_{total} คือจำนวนจุดสังเกตทั้งหมดที่พิจารณา

ประสิทธิภาพการใช้ส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชัน (η_{dual}) หาได้จากอัตราส่วนของจุดสังเกตที่มีผลต่างของระดับอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม และแนวโพลาไรเซชันไขว้เกิน 30 dB ต่อจำนวนจุดสังเกตทั้งหมด

$$\eta_{dual} = \frac{N_{du}}{N_{total}} \tag{3.38}$$

โดยที่ N_{du} คือจุดสังเกตทั้งหมดที่มีผลต่างของระดับอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม และแนวโพลาไรเซชันไขว้เกิน 30 dB

บทที่ 4

ผลการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

ความนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการสังเคราะห์พื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป ที่สังเคราะห์ตามกรรมวิธีที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ในกรณีศึกษาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำเสนอตัวอย่างการประยุกต์การสังเคราะห์สายอากาศเพื่อใช้ในงาน 3 ลักษณะ คือ 1. การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อใช้ในการปรับขนาดของลำคลื่น 2. การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ครอบคลุมพื้นที่รูปทรงอย่างง่าย และ 3. การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่ติดตั้งบนดาวเทียมเพื่อใช้ในการจัดรูปลำคลื่นให้เหมาะสมกับพื้นที่ครอบคลุมที่เป็นรูปประเทศไทย

ในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อใช้ในการปรับขนาดของลำคลื่น จะมีการเปรียบเทียบผลการสังเคราะห์ระหว่างกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่พิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นกับกรรมวิธีหลังจากผ่านการวีธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิว ส่วนในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่ติดตั้งบนดาวเทียมเพื่อใช้ในการจัดรูปลำคลื่นให้เหมาะสมกับพื้นที่ครอบคลุมที่เป็นรูปประเทศไทยนั้น จะใช้ระบบพิกัดตำแหน่งแบบ ละติจูด กับ ลองจิจูด และเปรียบเทียบผลการของการปรับค่าปัจจัยต่าง ๆ เช่น มุมเล็งของสายอากาศป้อน จำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ รูปร่างช่องเปิด เป็นต้น รายละเอียดการคำนวณระบบพิกัด UV และ ระบบพิกัดแบบ ละติจูด กับ ลองจิจูด แสดงใน [13] ที่ภาคผนวก ค

4.1 ผลการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อใช้ในการปรับขนาดของลำคลื่น

ในระบบเรดาร์ (radar) นั้นเพื่อให้การตรวจจับวัตถุมีความแม่นยำและมีประสิทธิภาพมากที่สุด สายอากาศที่ใช้จะต้องให้พูหลักที่มีขนาดเหมาะสมกับวัตถุที่ต้องการค้นหา และในกรณีที่มีการแบ่งเซกเตอร์ระดับของพูข้างจะต้องมีค่าต่ำเพื่อไม่ให้เกิดการรบกวนกับเซกเตอร์ใกล้เคียง จึงมีการนำสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปมาใช้ในการจัดรูปลำคลื่นเพื่อให้ได้พูหลัก และพูข้างมีอัตราขยายเป็นไปตามที่ต้องการ โดยทั่วไปการสังเคราะห์พื้นผิวสายอากาศจานสะท้อนเพื่อจัดรูปลำคลื่นนั้น จะใช้เพียงกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตในการสังเคราะห์ แต่หลังจากที่มีผู้เสนอกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด ก็เริ่มมีผู้นำวิธีการดังกล่าวมาใช้ร่วมกับกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่น่าพึงพอใจมากขึ้น ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำพื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อน ที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่พิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น มาเข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสมการประมาณพื้นผิว เพื่อให้ได้พื้นผิวสายอากาศที่มีแบบรูปการแผ่พลังงานตรงตามที่ต้องการมากที่สุด

ในที่นี้จะนำเสนอการสังเคราะห์สายอากาศเพื่อใช้ในการจัดรูปลำคลื่นแบบวงรี (elliptic beam) ที่แตกต่างกันสามขนาด โดยกำหนดให้ความหนาแน่นพลังงานของแหล่งกำเนิด $I(\alpha,\beta)$ เป็นแบบไอโซทรอปิก และฟังก์ชันที่เป็นอัตราขยายที่ต้องการหรือ $G(\gamma,\psi)$ ในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตจะให้เป็นดังนี้

$$G(\gamma,\psi) = \frac{K\sin^2\gamma\sin^2\psi}{\cosh^2(a\cos\gamma)\cosh^2(b\cos\psi)} \tag{4.1}$$

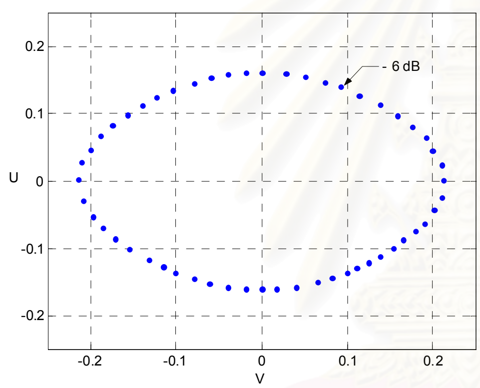
โดยที่ ค่าสัมประสิทธิ์ a และ b จะใช้เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง γ และ ψ ตามลำดับ

ค่าสัมประสิทธิ์ K เป็นอัตราขยายมากที่สุดในทิศทาง $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

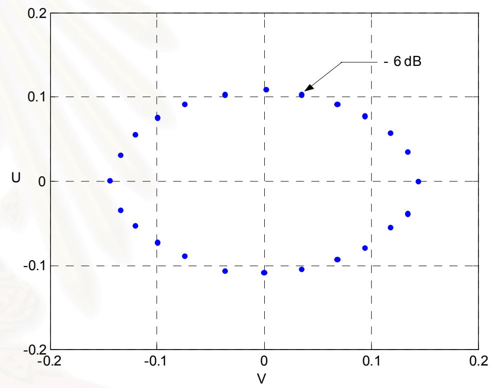
<u>เงื่อนไขเริ่มต้น</u> ที่ใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิวสายอากาศในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตคือ

$$\gamma = \tfrac{\pi}{2}, \psi = g \text{ และ } \alpha = \tfrac{\pi}{2}, \beta = f(g) \text{ ซึ่ง } f'(g) = \left[D\left(\tfrac{\pi}{2},g\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

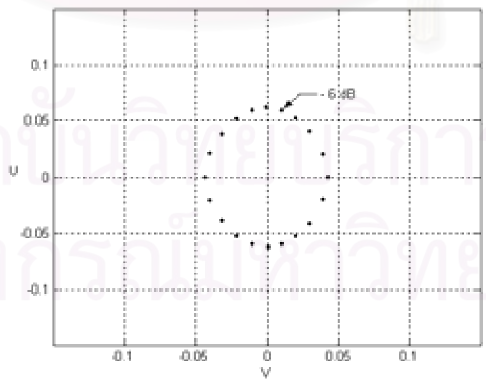
ในที่นี้จะสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเป็นแบบสมมาตร ซึ่งทำได้โดยการกำหนดให้เป็นการส่งจากทิศ $\beta = -\frac{\pi}{2}$ ที่ระนาบ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ไปยังทิศ $\psi = \frac{\pi}{2}$ ที่ระนาบ $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้นจะได้ว่า $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ สำหรับค่าเริ่มต้นในการหาปริพันธ์ของพื้นผิวจานสะท้อนที่ทิศทาง $\gamma = \frac{\pi}{2}$ และ $\psi = \frac{\pi}{2}$ ซึ่งเป็นตำแหน่งจุดศูนย์กลางของจานสะท้อนให้มีค่าเป็น 1



ก) กรณี ellip1



ข) กรณี ellip2



ค) กรณี ellip3

รูปที่ 4.1 พิกัดตำแหน่งของอัตราขยายระดับ -6 dB ของลำวงรีทั้งสามขนาด

การศึกษาการสังเคราะห์พื้นผิวสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อใช้จัดลำคลื่นแบบวงรีของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีทั้งหมด 3 กรณี หรือ 3 ขนาด โดยควบคุมอัตราขยายในบริเวณพูหลักที่ระดับ -6 dB ของทั้ง

สามกรณีในระบบพิกัดแบบ UV ให้เป็นดังรูปที่ 4.1 ก. ถึงรูปที่ 4.1 ค. เมื่อพิจารณาที่ขนาดของลำคลื่นจะเป็นดังนี้

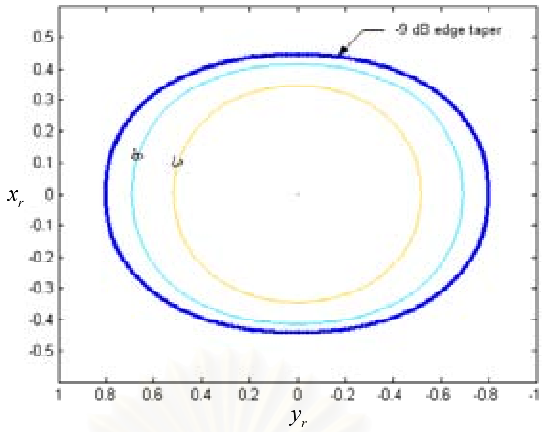
กรณี ellip1 เมื่อพิจารณาที่ระดับอัตราขยาย – 6 dB ความกว้างของลำคลื่นวงรีในแนวแกนหลัก (V) เท่ากับ -0.2144 ถึง 0.2144 หรือ 24.76 องศา และ ความกว้างของลำคลื่นวงรีในแนวแกนรอง (U) มีค่าเท่ากับ -0.1623 ถึง 0.1623 หรือ 18.68 องศา ซึ่งถือว่ามีขนาดใหญ่ที่สุดในสามกรณี มีจุดสังเกตทั้งหมดเป็นจำนวน 53 จุด **กรณี** ellip2 เมื่อพิจารณาที่ระดับอัตราขยาย – 6 dB ความกว้างของลำคลื่นวงรีในแนวแกนหลัก (V) เท่ากับ -0.1420 ถึง 0.1420 หรือ 16.324 องศา และ ความกว้างของลำคลื่นวงรีในแนวแกนรอง (U) มีค่าเท่ากับ -0.1090 ถึง 0.1090 หรือ 12.52 องศา ซึ่งจะมีลักษณะเป็นลำวงรีในแนวนอนเหมือนกับกรณี ellip1 แต่มีขนาดเล็กลง มีจุดสังเกตทั้งหมดเป็นจำนวน 24 จุด และ **กรณี** เมื่อพิจารณาที่ระดับอัตราขยาย – 6 dB **ellip3** ความกว้างของลำคลื่นวงรีในแนวแกนหลัก (U) เท่ากับ -0.0617 ถึง 0.0617 หรือ 7.0748 องศา และ ความกว้างของลำคลื่นวงรีในแนวแกนรอง (V) มีค่าเท่ากับ -0.043 ถึง 0.043 หรือ 4.93 องศา ในกรณีนี้ลักษณะลำคลื่นจะเป็นรูปวงรีแนวตั้งมีจำนวนจุดสังเกตทั้งหมดเป็นจำนวน 24 จุด

การกำหนดค่าปัจจัยต่าง ๆ ที่ใช้ในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่คำนวณด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตซึ่งพิจารณาเป็นปัญหาค่า แสดงดังตารางที่ 4.1

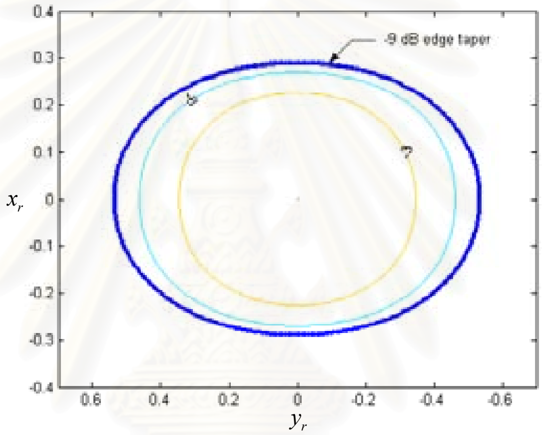
ตารางที่ 4.1 ค่าปัจจัยต่าง ๆ ที่ใช้ในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต เพื่อจัดลำคลื่นแบบวงรี

ค่าปัจจัยต่าง ๆ	**กรณี** ellip1	**กรณี** ellip2	**กรณี** ellip3
ค่าสัมประสิทธิ์ K	16	16	16
ค่าสัมประสิทธิ์ a เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง γ	8	12	21
ค่าสัมประสิทธิ์ b เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง ψ	6	9	30
ระดับความเรียว	-9 dB	-9 dB	-9 dB
ชนิดของสายอากาศป้อนกำลัง	ไอโซทรอปิก	ไอโซทรอปิก	ไอโซทรอปิก
มุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น (β)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

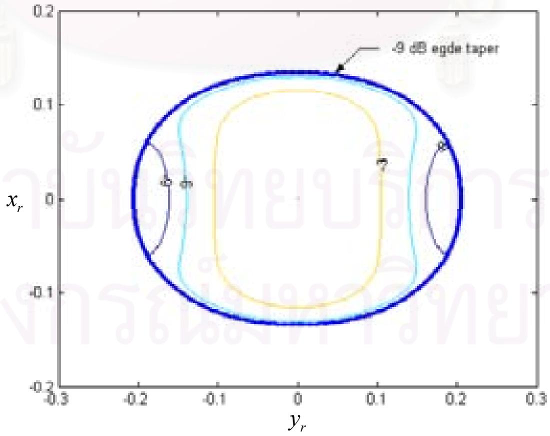
พิจารณาตารางที่ 4.1 จะเห็นว่าอัตราขยายในทิศทาง $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ หรือค่า K กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 16 วัตต์ หรือ มีค่าเท่ากับ 12.0412 dBi เท่ากันทั้งสามกรณี แต่ลำคลื่นวงรีในกรณีที่หนึ่งจะมีขนาดใหญ่ที่สุดรองลงมาคือกรณีที่สอง และกรณีที่สามจะมีขนาดเล็กที่สุด เมื่อแทนค่าปัจจัยลงในสมการ (4.1) แล้วคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางของรังสีตกกระทบและทิศทางของรังสีสะท้อน จะได้สนามตกกระทบในระนาบช่องเปิดเป็นดังรูปที่ 4.2 ก. ถึงรูปที่ 4.2 ค. โดยที่รูปร่างช่องเปิดของจานสะท้อนนั้นจะกำหนดที่ระดับความเรียวเท่ากับ -9 dB



(ก) สนามตกกระทบในช่องเปิดกรณีที่ 1



(ข) สนามตกกระทบในช่องเปิดกรณีที่ 2



(ค) สนามตกกระทบบนจานสะท้อนในกรณีที่ 3

รูปที่ 4.2 สนามตกกระทบบนจานสะท้อนทั้งสามกรณี

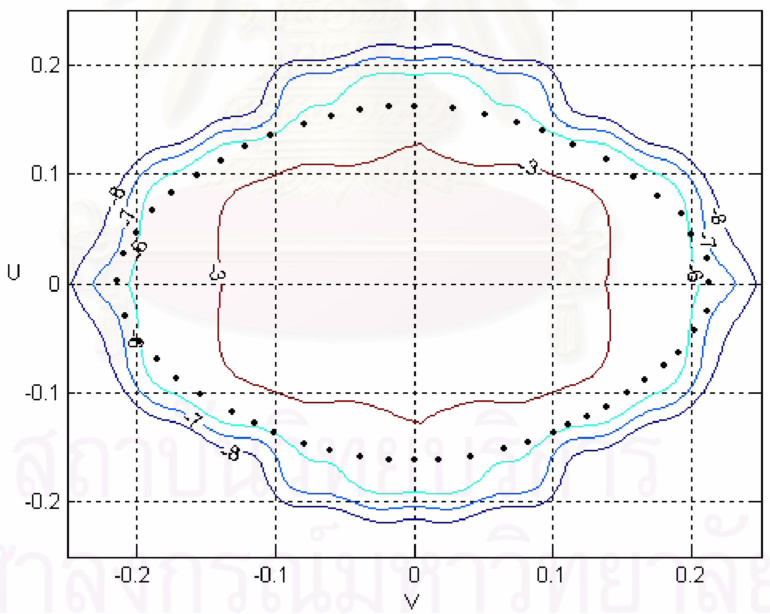
ขั้นตอนการวิเคราะห์จานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตนั้น จำเป็นต้องกำหนดขนาดของจานสะท้อนก่อน เนื่องจากขนาดของจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้จากกรรมวิธีทัศน-

ศาสตร์เรขาคณิตนั้นไม่มีหน่วย ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงกำหนดขนาดของจานสะท้อนทั้งสามกรณีเป็นดังตารางที่ 4.2 และ ใช้ฟังก์ชันไฮเพอร์ควอดริกแบบ 2 มิติ จำนวน 3 พจน์ในการประมาณขอบของจานสะท้อน ส่วนพื้นผิวของจานสะท้อนจะใช้สัมประสิทธิ์ของพจน์ฮาร์มอนิกในสมการประมาณพื้นผิว PFS เท่ากับ 9 พจน์ $\left(Nx \times Ny = 3 \times 3\right)$ เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ที่ใช้ทั้งหมดในการประมาณพื้นผิวจึงมีจำนวนเท่ากับ 18 จำนวน

ตารางที่ 4.2 ขนาดของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อใช้ในการปรับขนาดของลำคลื่น

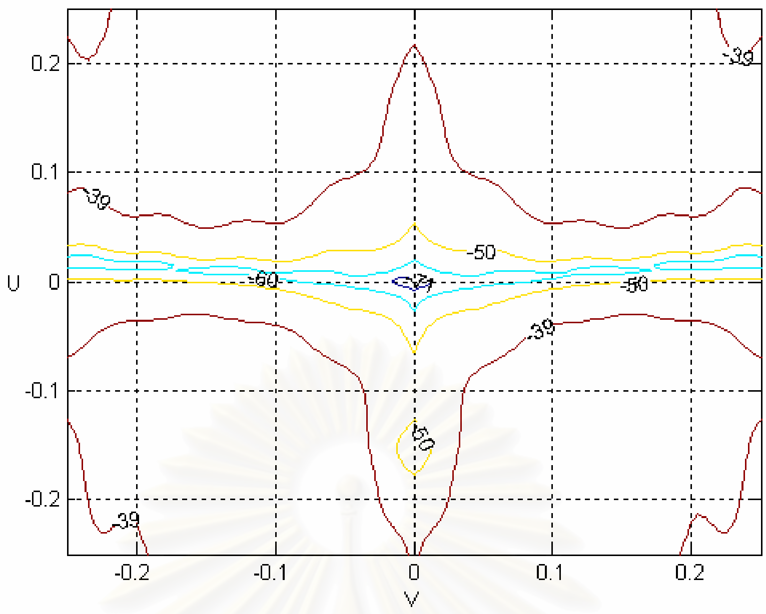
กรณี	$Dx(\lambda)$	$Dy(\lambda)$
Ellip1	12.27	21.33
Ellip2	11	18.33
Ellip3	10.8	16.4

เมื่อกำหนดค่าปัจจัยต่าง ๆ เรียบร้อยแล้วจึงใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพในการวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปทั้ง 3 กรณี ซึ่งได้อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมและแนวโพลาไรเซชันไขว้ เป็นดังรูปที่ 4.3 ก. ถึงรูปที่ 4.3 ฉ.

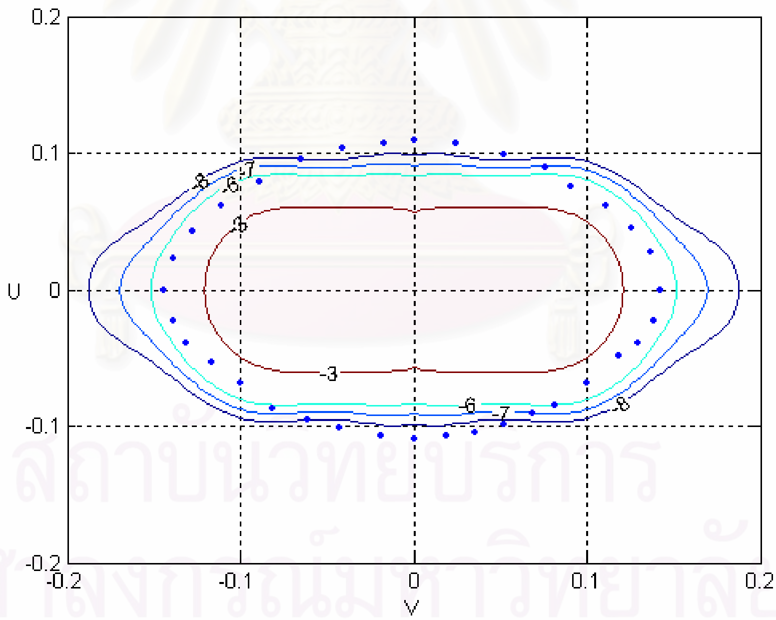


(ก) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี ellip1

รูปที่ 4.3 แบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต

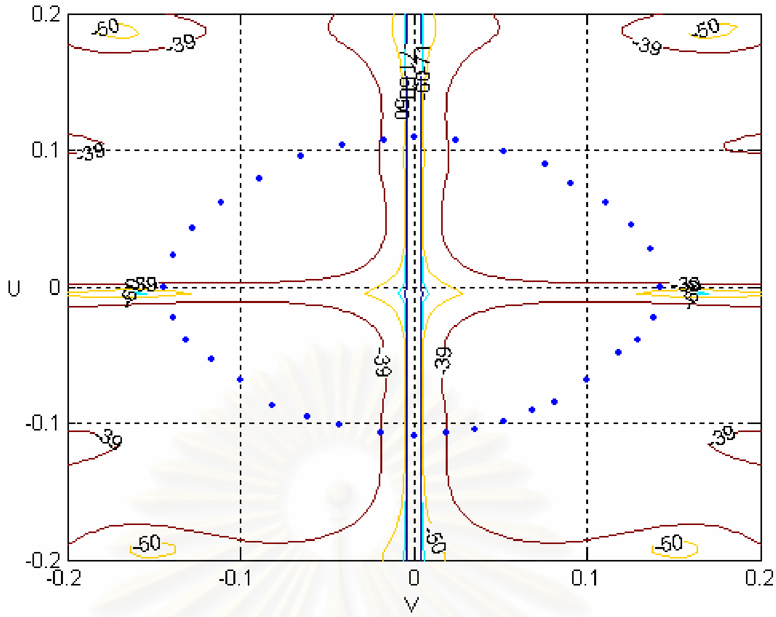


(ข) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี ellip1

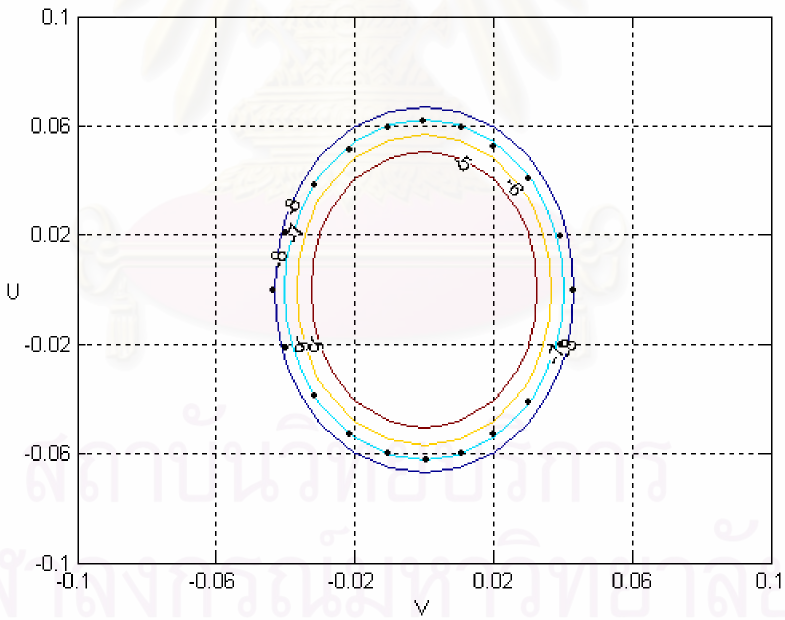


(ค) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี ellip2

รูปที่ 4.3 แบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต (ต่อ)

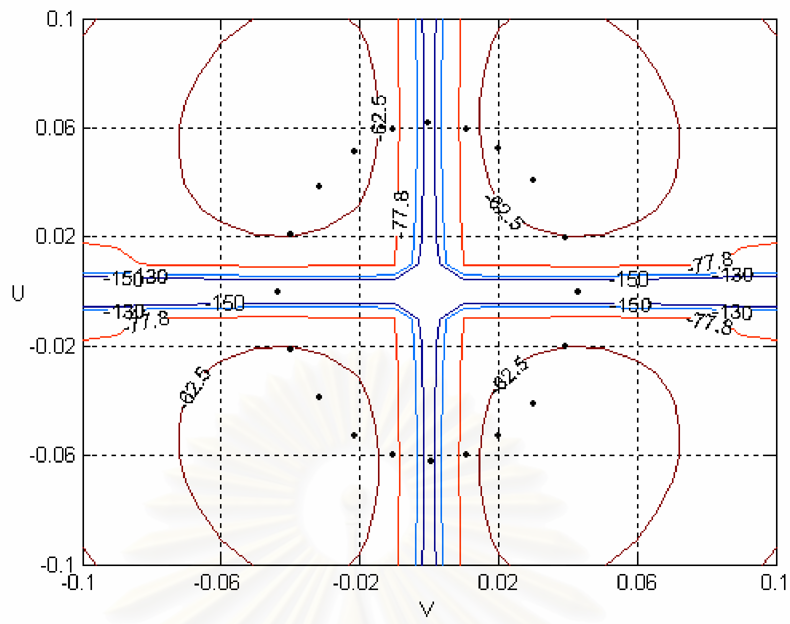


(ง) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี ellip2



(จ) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี ellip3

รูปที่ 4.3 แบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต (ต่อ)



(ฉ) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี ellip3

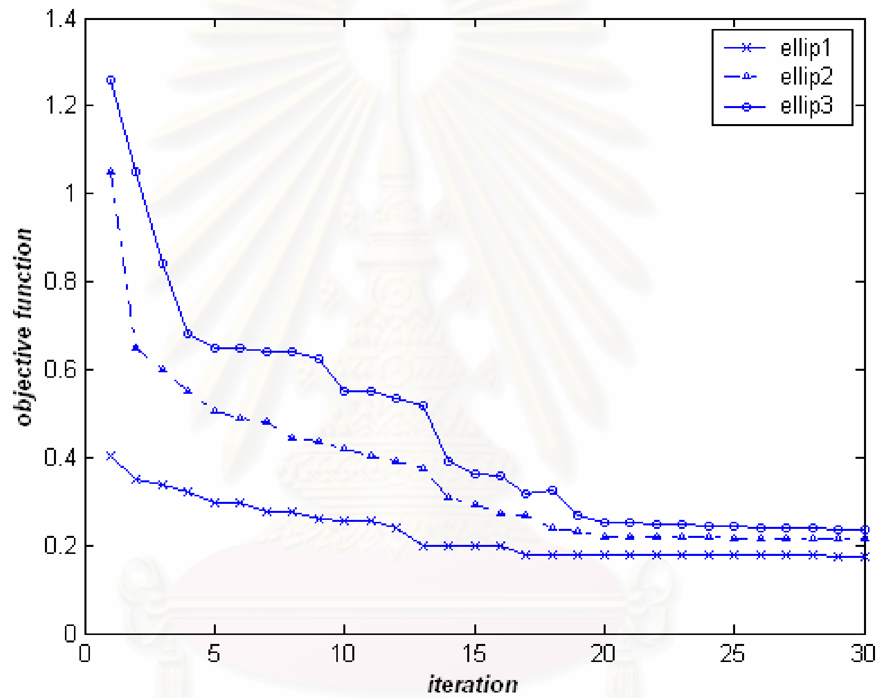
รูปที่ 4.3 แบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต (ต่อ)

เมื่อใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพในการวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต จะได้ผลการคำนวณค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานปรากฏดังตารางที่ 4.3 ทั้งสามกรณีพบว่าค่าเฉลี่ยของอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมที่จุดสังเกตมีค่าที่ค่อนข้างใกล้เคียงกับอัตราขยายที่ต้องการ (แตกต่างไม่เกิน 2 dB ที่ระดับ -6dB) สำหรับอัตราขยายมากที่สุดในแนวโพลาไรเซชันไขว้ที่จุดสังเกต ใน**กรณี** ellip1 มีค่าเท่ากับ -31.46 dB ซึ่งต่ำกว่าอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม 25.46 dB ใน**กรณี** ellip2 มีค่าเท่ากับ -35.82 dB ซึ่งต่ำกว่าอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม 29.82 dB และ **กรณี** ellip3 มีค่าเท่ากับ -58.42 dB ซึ่งต่ำกว่าอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม 52.42 dB

<u>ตารางที่ 4.3</u> ค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเพื่อใช้ในการปรับขนาดของลำคลื่น

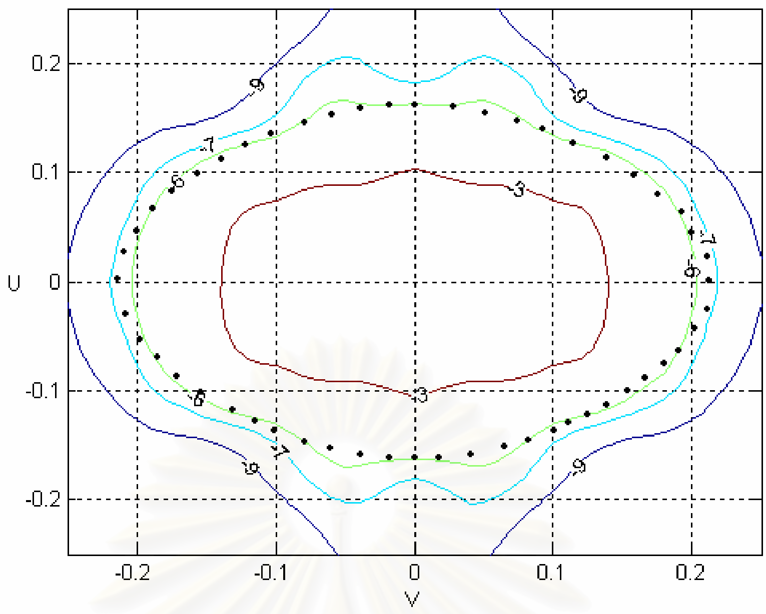
กรณี	ค่าเฉลี่ยอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม	ค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากที่สุด
ellip1	-5.5 dB	0.4378	-31.4587 dB
ellip2	-7.0058 dB	1.05	-35.8176 dB
ellip3	-7.12 dB	1.26	-58.42 dB

จากนั้นใช้พื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเป็นค่าเริ่มต้นในกระบวนการหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวเพื่อปรับพื้นผิวของจานสะท้อนให้ได้อัตราขยายใกล้กับอัตราขยายที่ต้องการมากที่สุด จำนวนรอบในกระบวนการวนซ้ำของทั้งสามกรณีนี้ปรากฏดังรูปที่ 4.4 จะเห็นได้ว่า โดยจำนวนรอบของทั้งสามกรณีที่ใช้จะอยู่ช่วง 20 – 30 รอบ จึงจะลู่เข้าสู่ค่าคงที่ซึ่งถือว่าสิ้นสุดกระบวนการวนซ้ำ จะเห็นได้ว่ากรณี ellip1 จะลู่เข้าสู่คำตอบเร็วที่สุดเพราะค่าเฉลี่ยของอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมต่างจากอัตราขยายที่ต้องการน้อยกว่ากรณีอื่น ในขณะที่ กรณี ellip2 และ กรณี ellip3 มีลำคลื่นค่อนข้างแคบความชันของพูหลักจึงมีมากทำให้ระดับของอัตราขยายในแต่ละพิกัดมีค่าแตกต่างกันมาก ขนาดของการแกว่งจึงมีค่าสูงกว่ากรณี ellip1

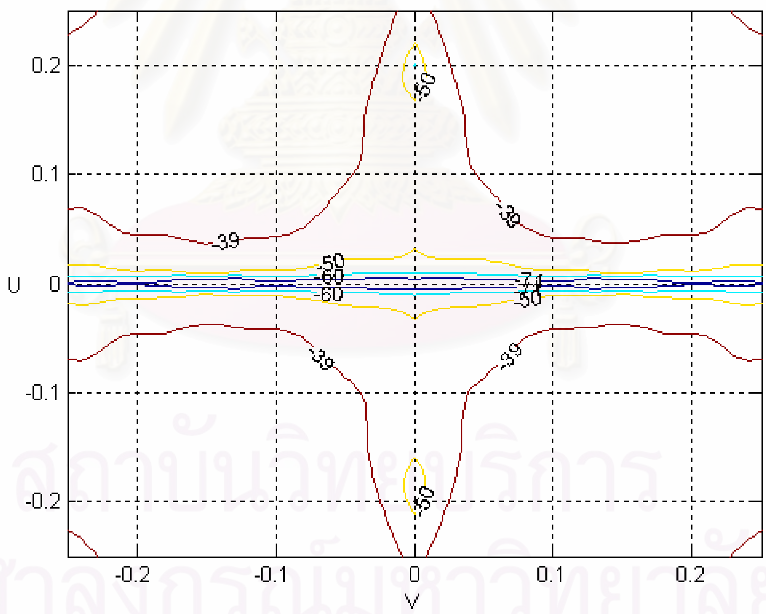


รูปที่ 4.4 จำนวนรอบของการลู่เข้าในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด

อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม และแนวโพลาไรเซชันไขว้ที่ได้หลังจากผ่านกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิว โดยใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพในการวิเคราะห์ ผลที่ได้ปรากฏดังรูปที่ 4.5 ก ถึงรูปที่ 4.5 ฉ

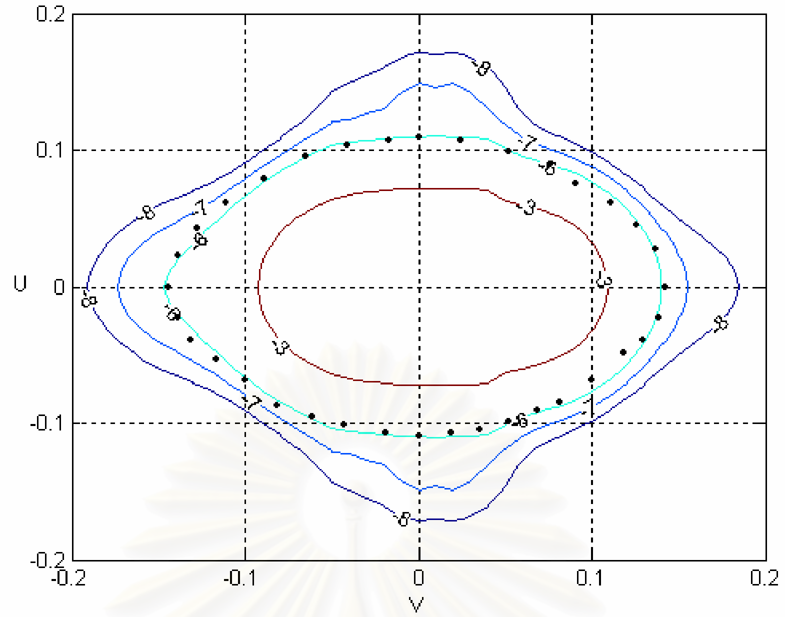


(ก) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี ellip1

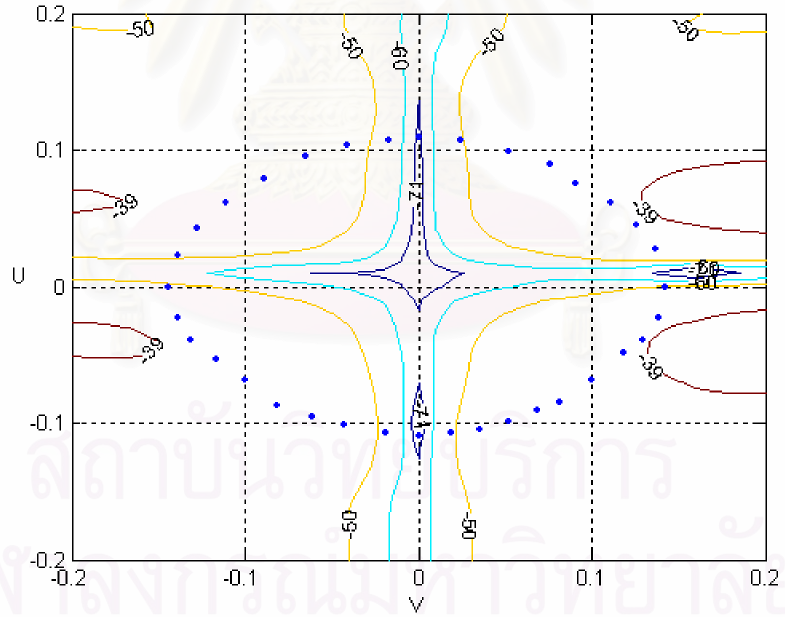


(ข) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี ellip1

รูปที่ 4.5 แบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์พื้นผิว

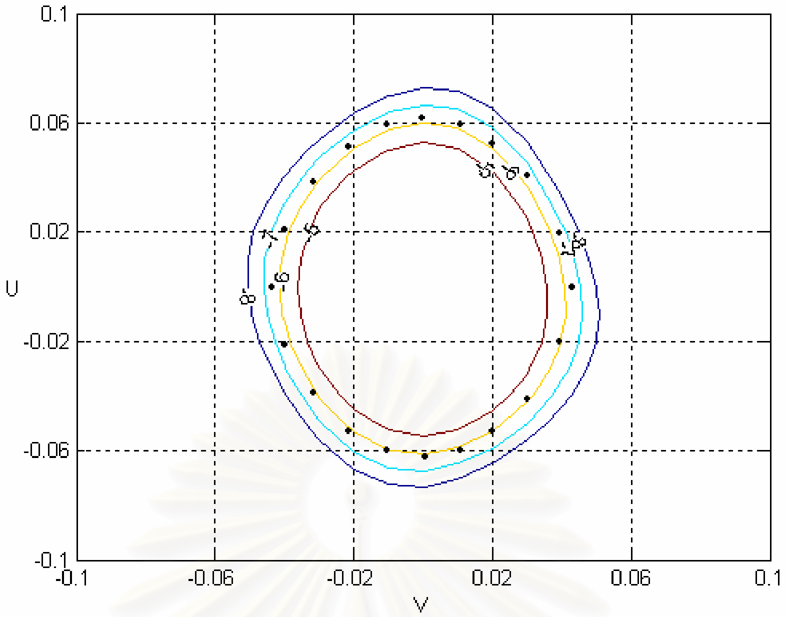


(ค) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี ellip2

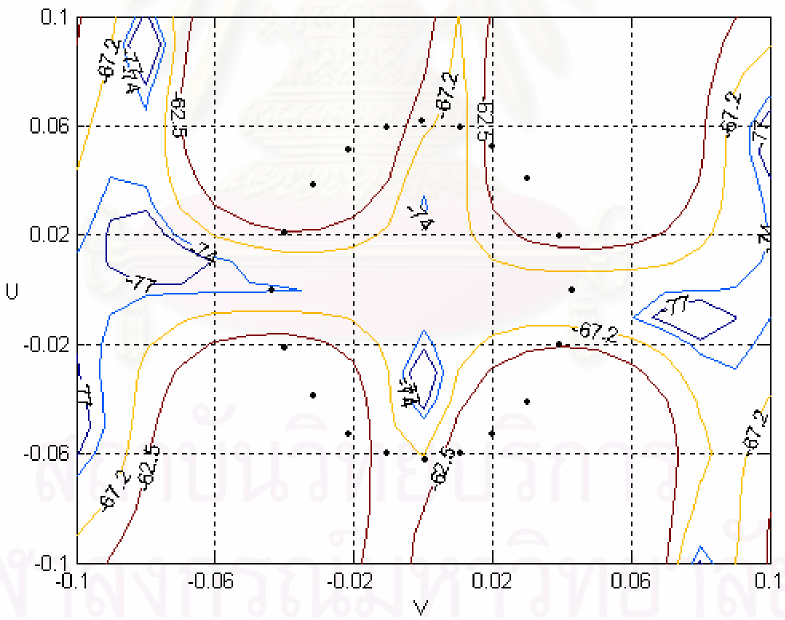


(ง) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี ellip2

รูปที่ 4.5 แบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์พื้นผิว (ต่อ)



(จ) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี ellip3



(ฉ) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี ellip3

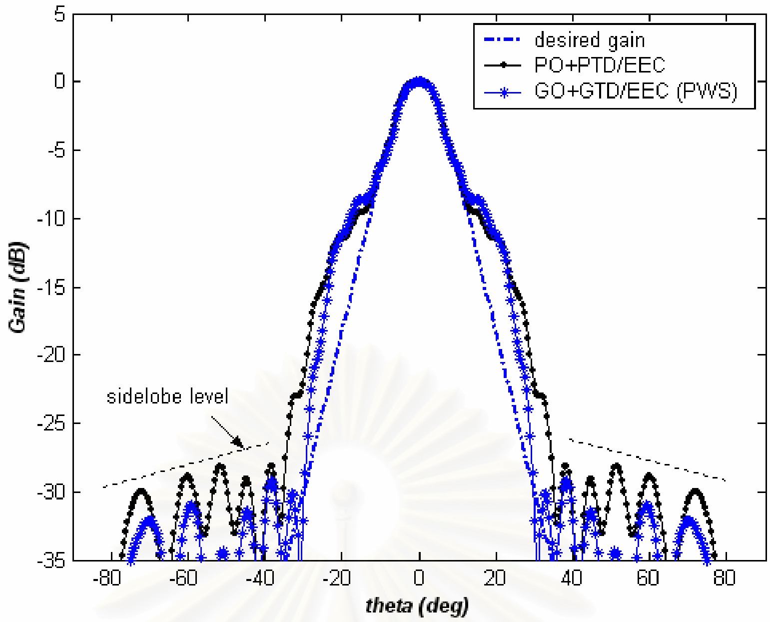
รูปที่ 4.5 แบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์พื้นผิว (ต่อ)

เมื่อเปรียบเทียบค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานระหว่าง จานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่พิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น กับจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้หลังผ่านกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวดังตารางที่ 4.2 จะพบว่า ค่าเฉลี่ยของอัตราขยายในแนวโพลาเซชันร่วมที่ได้จากจานสะท้อนหลังจากผ่านกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด มีค่าใกล้เคียงกับอัตราขยายที่ต้องการมากขึ้น (แตกต่างไม่เกิน 0.25 dB) และค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยก็ลดลง จึงสรุปได้ว่ากรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดสามารถช่วยให้จานสะท้อนดัดรูปแบบที่สังเคราะห์ได้จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตมีอัตราขยายใกล้เคียงกับอัตราขยายที่ต้องการมากขึ้น และขณะเดียวกันจานสะท้อนที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตก็เหมาะสมที่ใช้เป็นค่าเริ่มต้นในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสมการประมาณพื้นผิวในการการปรับขนาดของลำคลื่น

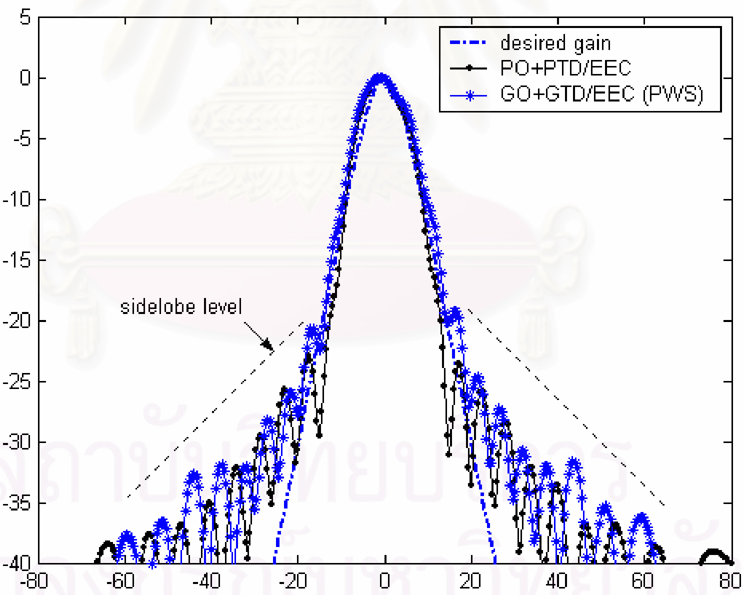
ตารางที่ 4.4 เปรียบเทียบค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานของจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธี ทัศนศาสตร์เรขาคณิตกับ หลังจากผ่านกรรมวีธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิว

ค่าลักษณะสมบัติการแผ่กระจายคลื่น	**กรณี** ellip1		**กรณี** ellip2		**กรณี** ellip3	
	กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต	กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด	กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต	กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด	กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต	กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด
ค่าเฉลี่ยอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม	-5.5 dB	-5.9 dB	-7.01 dB	-5.73 dB	-7.12 dB	-6.24 dB
ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	0.405	0.176	1.05	0.216	1.26	0.23
อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากที่สุด	-31.46 dB	-31.67 dB	-35.81 dB	-39.23 dB	-58.42 dB	-56.41 dB

เนื่องจากระดับอัตราขยายของพูข้างนั้นเป็นสิ่งที่ต้องคำนึงถึงในระบบเรดาร์ เพื่อความสะดวกในการพิจารณาระดับพูข้างมากที่สุดของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปทั้งสามกรณี จึงต้องใช้แบบรูปการแผ่พลังงานแบบลำดินสอซึ่งวิเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพเปรียบเทียบกับกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต (รายละเอียดการคำนวณแสดงในภาคผนวก ค) โดยแสดงดังรูปที่ 4.6 ก ถึงรูปที่ 4.6 ค จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณค่อนข้างสอดคล้องกันในบริเวณพูหลัก แต่จะมีความคลาดเคลื่อนเพิ่มโดยเฉพาะในบริเวณพูข้างองศาไกล ๆ เมื่อพิจารณาที่ระดับของพูข้างจะพบว่าจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้ทั้งสามกรณี มีค่าระดับพูข้างมากที่สุดไม่เกิน 20 dB

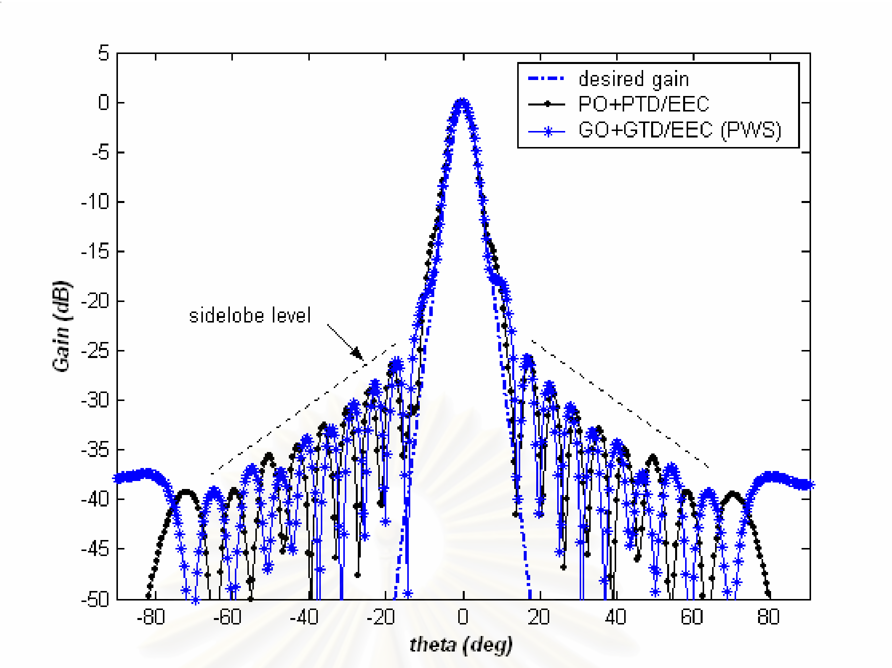


(ก) กรณี ellip1



(ข) กรณี ellip2

รูปที่ 4.6 แบบรูปการแผ่พลังงานแบบลำคลื่นดินสอในแนวโพลาไรเซชันร่วมที่ระนาบสนามแม่เหล็ก



(ค) กรณี ellip3

รูปที่ 4.6 แบบรูปการแผ่พลังงานแบบลำคลื่นดินสอในแนวโพลาไรเซชันร่วมที่ระนาบสนามแม่เหล็ก (ต่อ)

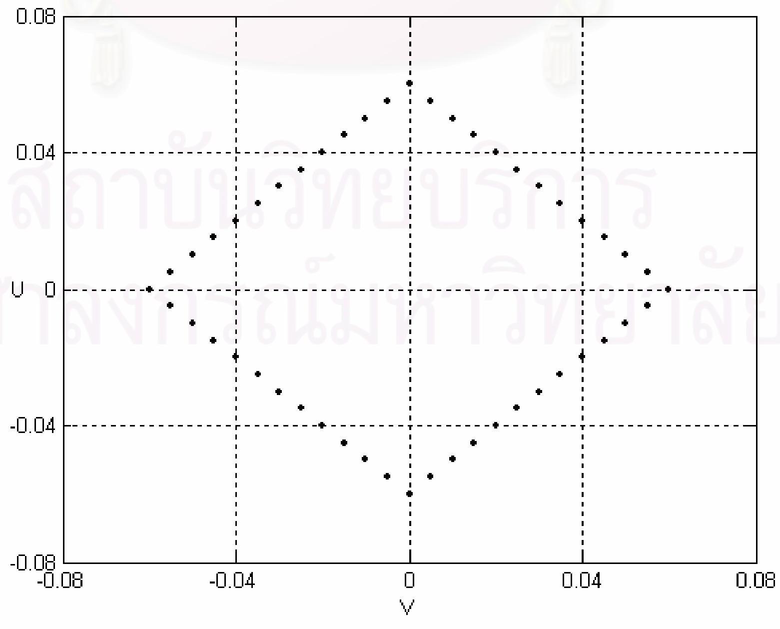
จากผลการวิเคราะห์สรุปได้ว่า กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่พิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นนั้นสามารถใช้ให้การจัดลำคลื่นวงรีขนาดต่าง ๆ ได้เป็นอย่างดี และกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดก็ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการจัดรูปลำคลื่นมากขึ้น

4.2 ผลการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปสำหรับพื้นที่ครอบคลุมรูปเรขาคณิตอย่างง่าย

ในหัวข้อนี้นำเสนอตัวอย่างการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปสำหรับพื้นที่ครอบคลุมเรขาคณิตอย่างง่ายอาทิเช่น รูปสี่เหลี่ยม และ รูปสามเหลี่ยม โดยใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่พิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นในการสังเคราะห์พื้นผิว และรูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นที่ให้แบบรูปการแผ่พลังงานแบบลำวงรีที่มีขนาดใกล้เคียงกับแบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการก่อนด้วยการเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ (4.1) เป็นขั้นตอนแรก หลังจากนั้นจึงใช้กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของพื้นที่ผิวเพื่อปรับพื้นผิวให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ตรงกับพื้นที่ครอบคลุมที่ต้องการมากที่สุดแล้วนำมาเปรียบเทียบกับการสังเคราะห์สายอากาศที่ใช้พื้นผิวจานสะท้อนเริ่มต้นที่เป็นแบบพาราโบลอยด์

กรณี RECT1 พื้นที่ครอบคลุมรูปร่างสี่เหลี่ยม ดังรูปที่ 4.7 กำหนดให้มีตำแหน่งของจุดสังเกตจำนวน 52 จุด อัตราขยายที่ต้องการมีค่าเท่ากับ 8 dBi และค่าปัจจัยที่ใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิวเริ่มต้นด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเป็นดังนี้

ค่าอัตราขยายมากสุดในทิศทางเล็ง (K)	16 (12.0412 dBi)
ค่าสัมประสิทธิ์ a เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง γ	21
ค่าสัมประสิทธิ์ b เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง ψ	20
ระดับความเรียว	-8 dB
ชนิดของสายอากาศป้อนกำลัง	ไอโซทรอปิก
มุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น (β)	$-\frac{\pi}{2}$



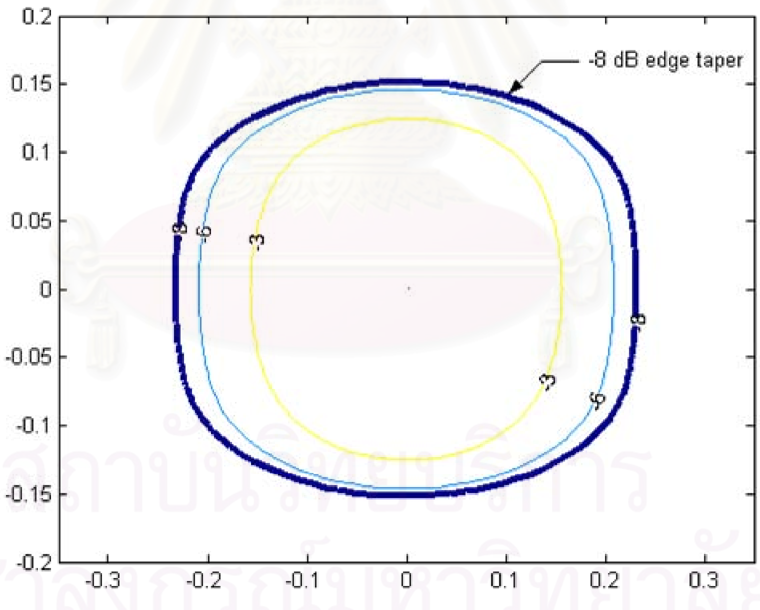
รูปที่ 4.7 รูปร่างพื้นที่ครอบคลุมกรณี RECT1

เมื่อคำนวณพื้นผิวของสายอากาศตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตด้วยค่าปัจจัยข้างต้น และเงื่อนไขเริ่มต้น ที่ใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิวสายอากาศในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตคือ

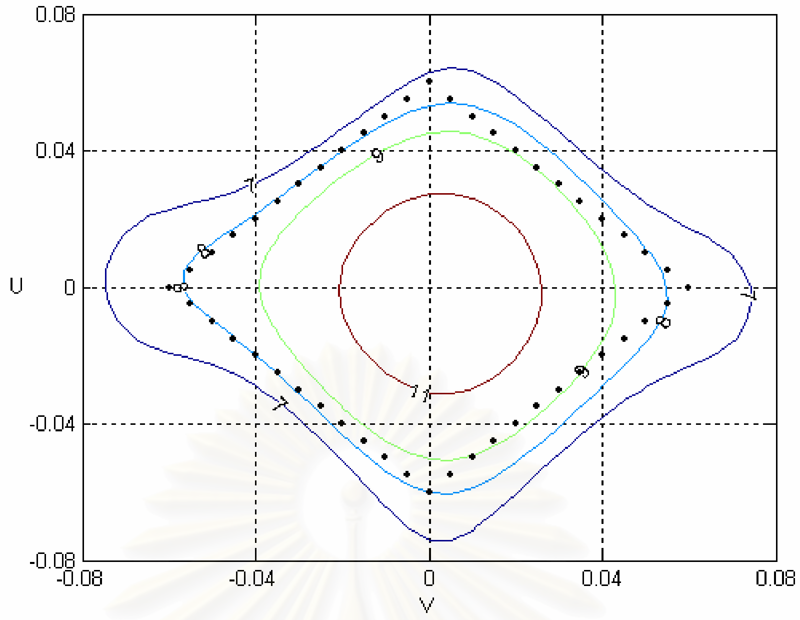
$$\gamma = \tfrac{\pi}{2}, \psi = g \text{ และ } \alpha = \tfrac{\pi}{2}, \beta = f(g)$$

โดยที่ $$f'(g) = \left[D\left(\tfrac{\pi}{2}, g\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{4\sin g}{\cosh(20\cos g)}$$

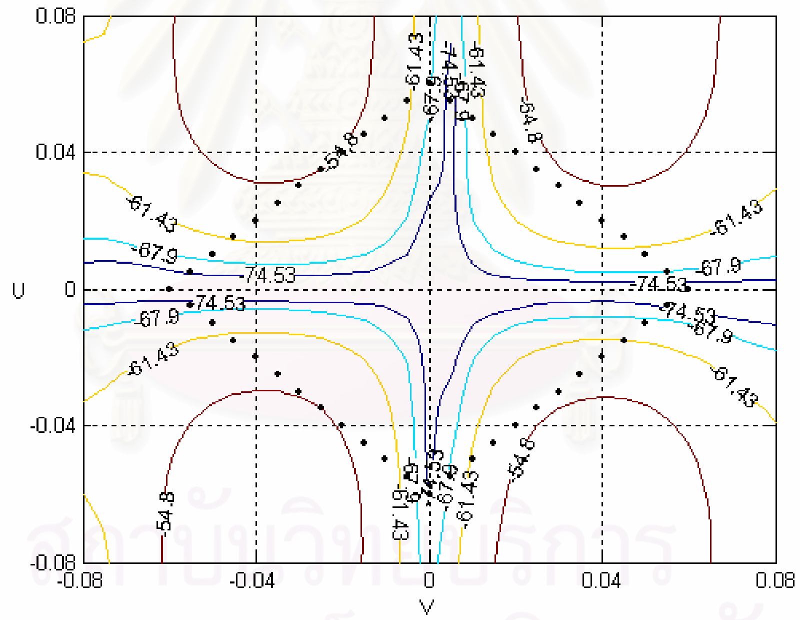
จะได้ช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนเป็นดังรูปที่ 4.8 และเมื่อเลือกระดับความเรียวที่ -8 dB เป็นขอบของจานสะท้อนโดยกำหนดให้ขนาดของจานสะท้อนมีความยาวเป็น $Dx = 12.8\lambda$ และ $Dy = 17.6\lambda$ และ ใช้ฟังก์ชันไฮเพอร์ควอดริกแบบ 2 มิติ จำนวน 3 พจน์ เพื่อประมาณขอบของจานสะท้อน สำหรับพื้นผิวของจาน-สะท้อนจะใช้สัมประสิทธิ์ในสมการประมาณพื้นผิว PFS เท่ากับ 18 พจน์ $\left(Nx \times Ny = 3\times 3\right)$ แล้วนำพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้ไปคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานในแนวโพลาไรเซชันร่วมและแนวโพลาไรเซชันไขว้ตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ ผลที่ได้แสดงดังรูปที่ 4.9 ก และรูปที่ 4.9 ข



รูปที่ 4.8 รังสีตกกระทบในระนาบช่องเปิด กรณี RECT1



(ก) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี RECT1

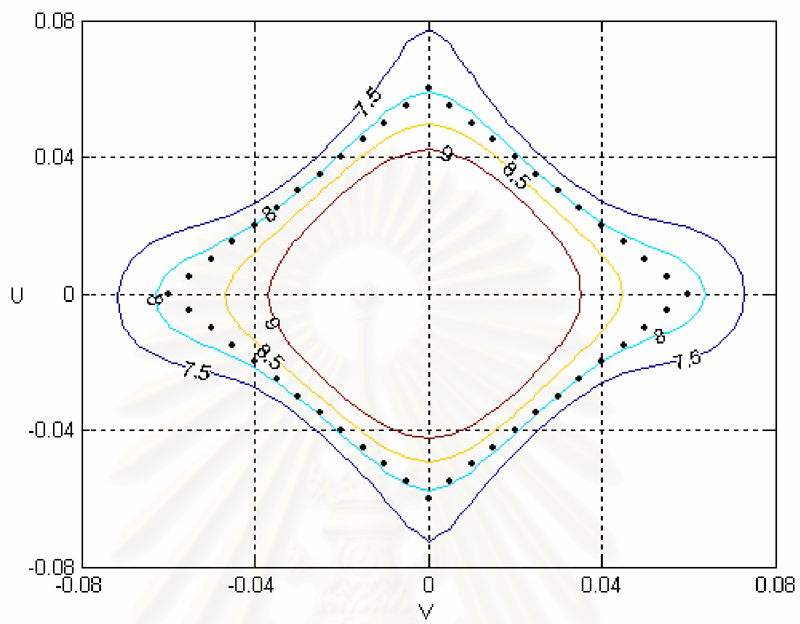


(ข) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี RECT1

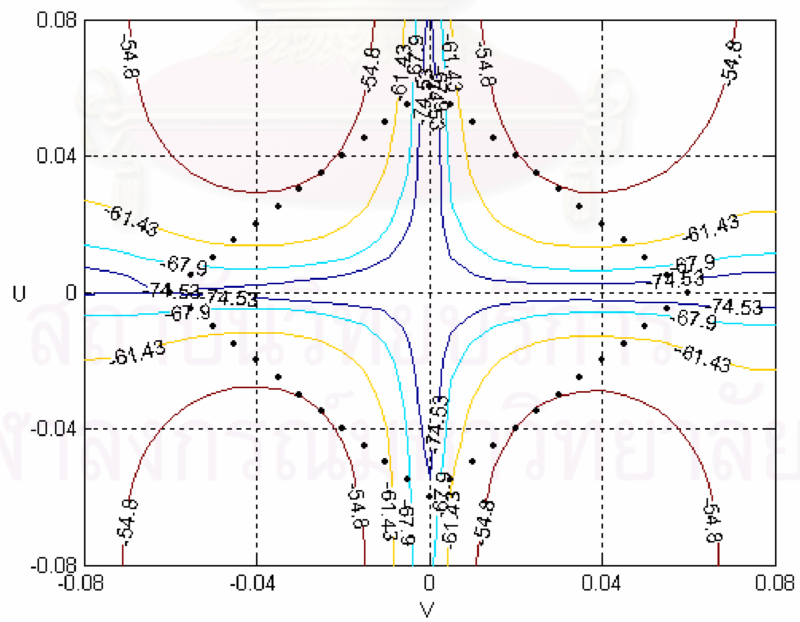
รูปที่ 4.9 แบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต

จะเห็นได้จากรูปที่ 4.9 ก ว่าจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่มีลักษณะใกล้เคียงกับรูปร่างของสี่เหลี่ยมที่ต้องการ จึงถือว่าเหมาะสมที่จะนำไปใช้เป็นพื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของประสิทธิ์สมการพื้นผิว สำหรับอัตราขยายมากที่สุดในแนวโพลาไรเซชันไขว้ที่จุดสังเกตมีค่าเท่ากับ -54.74 dBi ซึ่งต่ำกว่าอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม 62.74 dB

หลังจากนั้นนำพื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตสู่กระบวนการหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิว เพื่อปรับพื้นผิวของจานสะท้อนให้ได้อัตราขยายใกล้กับอัตราขยายที่ต้องการมากที่สุด ผลการคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ ปรากฏดังรูปที่ 4.10 ก และรูปที่ 4.10 ข

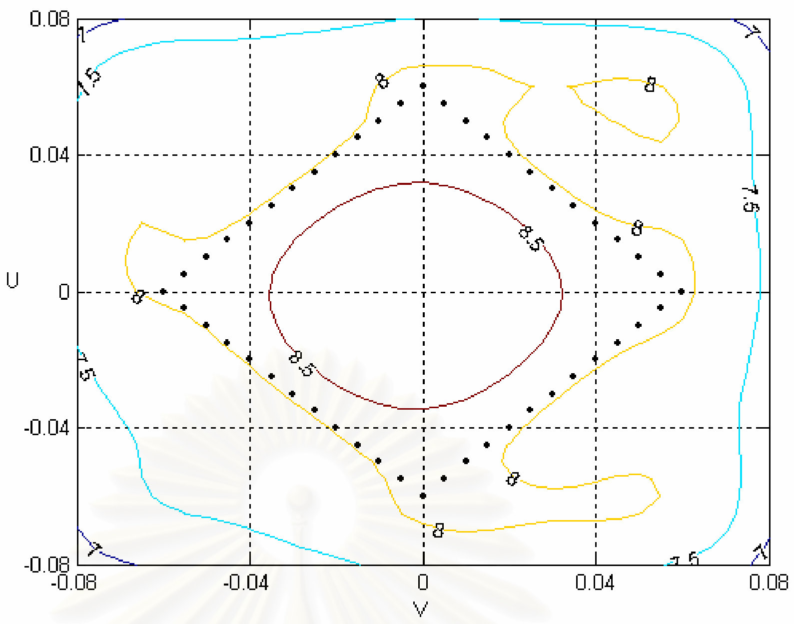


(ก) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี RECT1

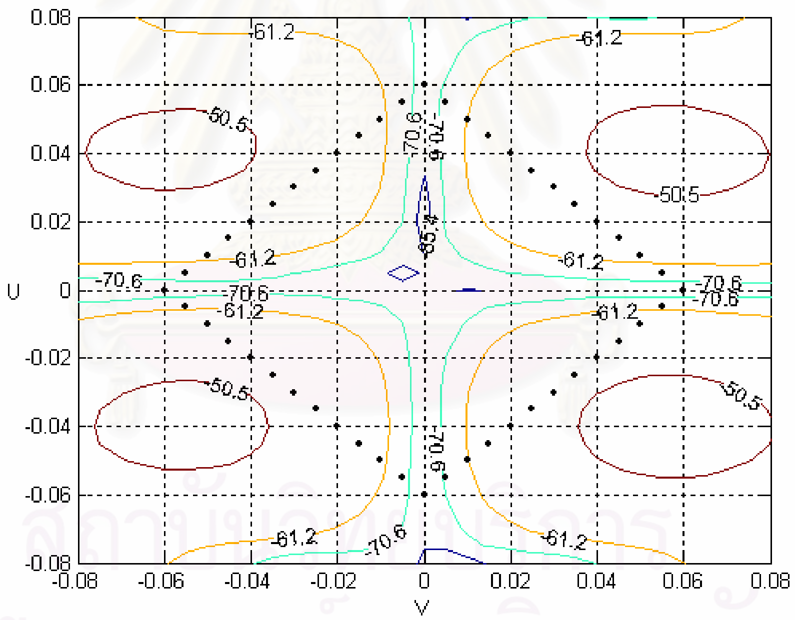


(ข) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี RECT1

รูปที่ 4.10 แบบรูปการแผ่พลังงานจากการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบนที่ใช้พื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นจาก IVP



(ก) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี RECT1



(ข) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี RECT1

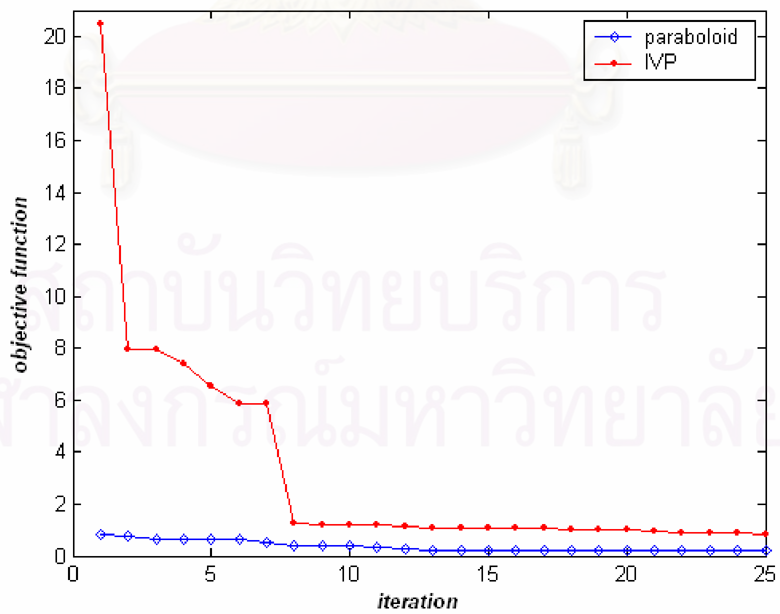
รูปที่ 4.11 แบบรูปการแผ่พลังงานจากการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบนที่ใช้พื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นแบบพาราโบลอยด์

สายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบนหลังจากผ่านกระบวนการวนซ้ำจนเป็นที่พอใจแล้ว ได้ค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานดังปรากฏในตารางที่ 4.5 พบว่าแบบ

รูปการแผ่พลังงานที่ได้มีอัตราขยายเฉลี่ยที่จุดสังเกตใกล้เคียงกับอัตราขยายที่ต้องการมากขึ้น (ความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.051 dB) อัตราขยายมากที่สุดในแนวโพลาไรเซชันไขว้ที่จุดสังเกตมีค่าเท่ากับ -54.49 dBi ซึ่งต่ำกว่าอัตราขยายในแนว โพลาไรเซชันร่วมเป็น 62.49 dB ถือว่ายอมรับได้ เมื่อเปรียบเทียบกับสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่สังเคราะห์โดยใช้พื้นผิวเริ่มต้นเป็นจานพาราโบลอยด์แบบสมมาตรขนาด 15 เท่าของความยาวคลื่น จะพบว่าค่าเฉลี่ยอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วมและความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยมีค่าค่อนข้างใกล้เคียงกัน แต่จานสะท้อนที่ใช้พื้นผิวเริ่มต้นพาราโบลอยด์แบบสมมาตรจะมีค่าอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากที่สุดสูงกว่า – 3 dB เมื่อพิจารณาด้านการใช้จำนวนรอบในการลู่เข้าสู่คำตอบจากรูปที่ 4.12 จะเห็นได้ว่า การใช้พื้นผิวและช่องเปิดที่สังเคราะห์ด้วยทัศนศาสตร์เรขาคณิตเป็นค่าปัจจัยเริ่มต้นในกรรมวิธีการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบนจะลู่เข้าสู่คำตอบที่ต้องการได้รวดเร็วกว่าเนื่องจากลำคลื่นที่ได้นั้นมีรูปร่างใกล้เคียงกับรูปสี่เหลี่ยมค่อนข้างมากโดยใช้จำนวน 15 รอบก็สามารถลู่เข้าสู่คำตอบที่ต้องการได้

<u>ตารางที่ 4.5</u> ค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานของจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบน กรณี RECT1

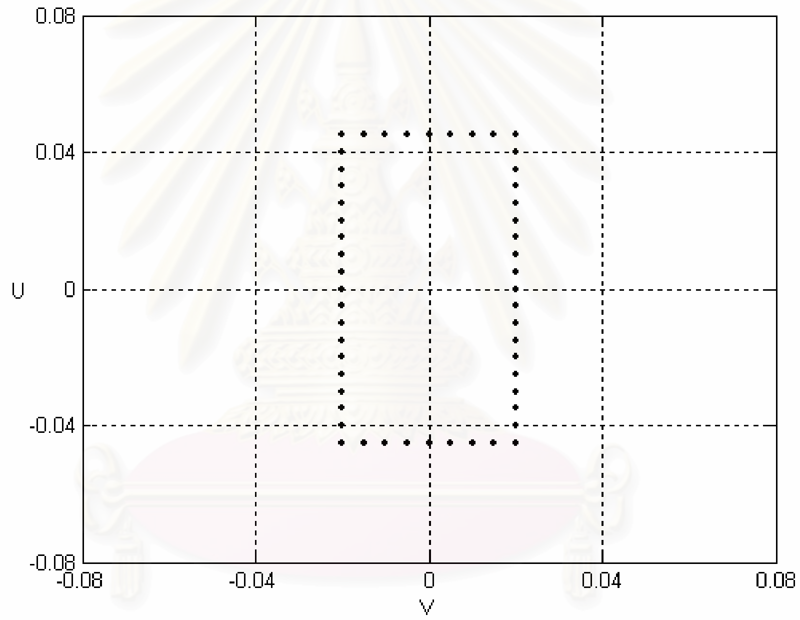
พื้นผิวเริ่มต้น	ค่าเฉลี่ยอัตราขยาย แนวโพลาไรเซชันร่วม	ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	อัตราขยายแนว โพลาไรเซชันไขว้มากที่สุด
IVP	8.052 dBi	0.051	-54.488 dBi
พาราโบลอยด์	8.05 dBi	0.049	-51.8 dBi



รูปที่ 4.12 เปรียบเทียบจำนวนรอบการวนซ้ำในกรณี RECT1

<u>**กรณี** RECT2</u> พื้นที่ครอบคลุมรูปร่างสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนวตั้ง ดังรูปที่ 4.13 กำหนดให้ตำแหน่งของจุดสังเกตจำนวน 56 จุด อัตราขยายที่ต้องการมีค่าเท่ากับ 8 dBi และค่าปัจจัยที่ใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิวเริ่มต้นด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเป็นดังนี้

ค่าอัตราขยายมากสุดในทิศทางเล็ง (K)	16 (12.0412 dBi)
ค่าสัมประสิทธิ์ a เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง γ	20
ค่าสัมประสิทธิ์ b เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง ψ	35
ระดับความเรียว	อยู่ในช่วง -12 dB ถึง -16 dB
ชนิดของสายอากาศป้อนกำลัง	ไอโซทรอปิก
มุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น (β)	$-\frac{\pi}{2}$



รูปที่ 4.13 รูปร่างพื้นที่ครอบคลุมกรณี RECT2

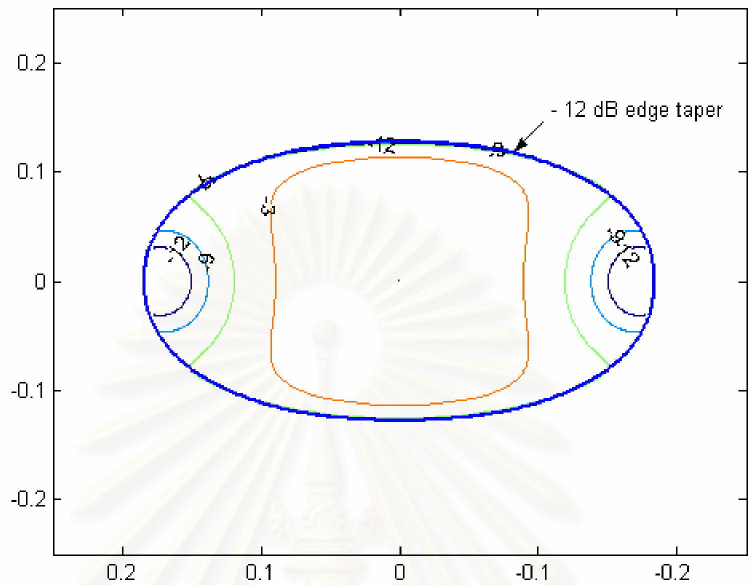
คำนวณพื้นผิวของสายอากาศตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตด้วยค่าปัจจัยข้างต้น และ เงื่อนไขเริ่มต้น ที่ใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิวสายอากาศในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตคือ

$$\gamma = \tfrac{\pi}{2}, \psi = g \text{ และ } \alpha = \tfrac{\pi}{2}, \beta = f(g)$$

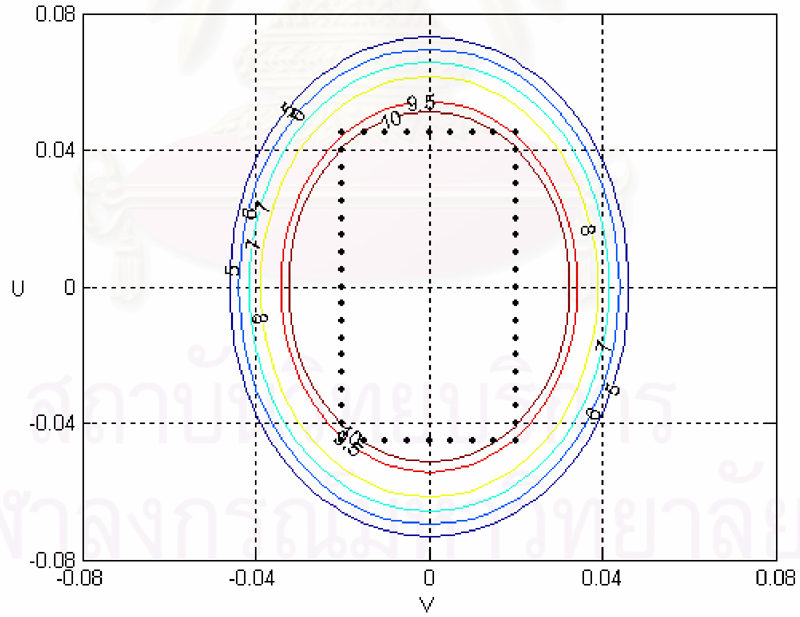
ซึ่ง $$f'(g) = \left[D\left(\tfrac{\pi}{2}, g\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{4\sin g}{\cosh\left(35\cos g\right)}$$

จะได้ช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนเป็นดังรูปที่ 4.14 และเลือกระดับความเรียวที่ -12 dB เป็นขอบของจานสะท้อนกำหนดให้ขนาดของจานสะท้อนมีความยาวเป็น $Dx = 11.20\lambda$ และ $Dy = 17.73\lambda$ โดยใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันไฮเพอร์ควอดริกแบบ 2 มิติ เท่ากับ 3 พจน์ ในการประมาณขอบจานสะท้อน และ

สัมประสิทธิ์ในสมการประมาณพื้นผิว PFS เท่ากับ 18 พจน์ หลังจากนั้นนำพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้ไปคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานในแนวโพลาไรเซชันร่วม และแนวโพลาไรเซชันไขว้ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ ผลการวิเคราะห์แสดงดังรูปที่ 4.15 ก และรูปที่ 4.15 ข

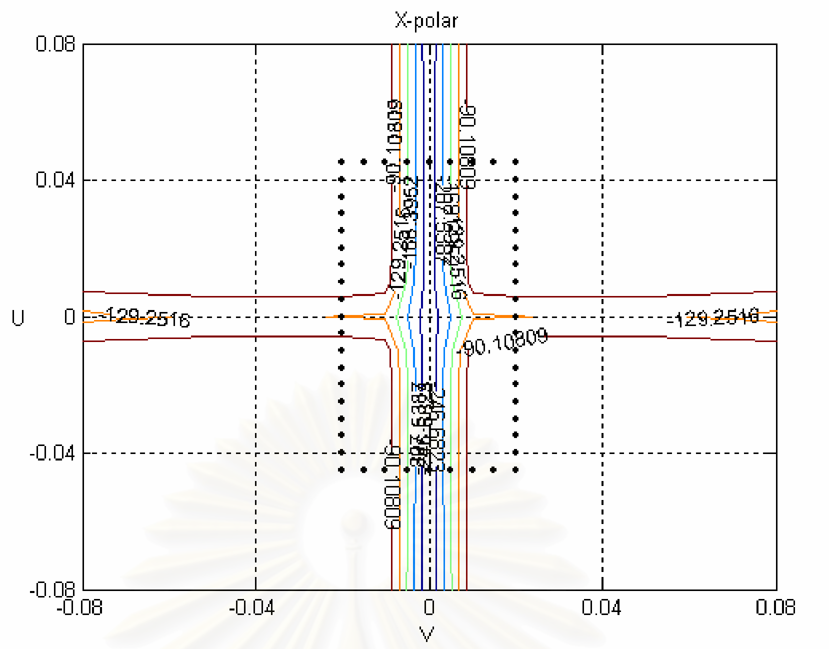


รูปที่ 4.14 รังสีตกกระทบในระนาบช่องเปิด กรณี RECT2



(ก) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี RECT2

รูปที่ 4.15 แบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต

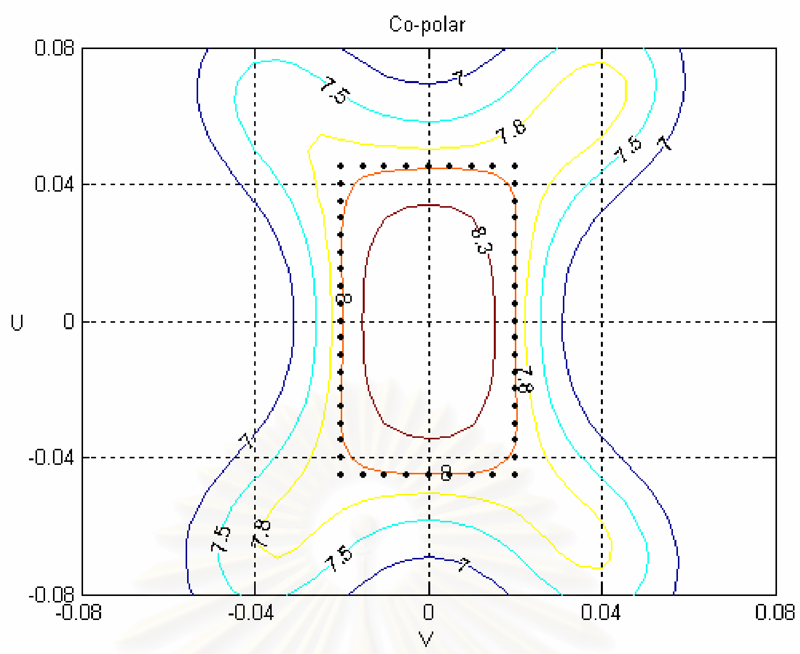


(ข) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี RECT2

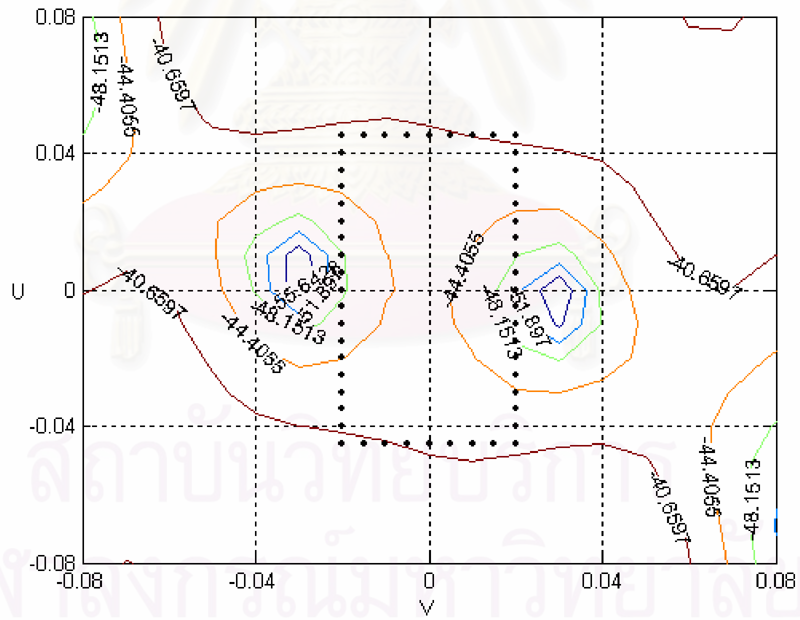
รูปที่ 4.15 แบบรูปการแผ่พลังงานของพื้นผิวจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต (ต่อ)

จะเห็นได้จากรูปที่ 4.15 ก ว่า แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้มีลักษณะเป็นรูปวงรีแนวตั้ง ซึ่งมีรูปร่างใกล้เคียงกับรูปร่างสี่เหลี่ยมที่ผืนผ้า จึงถือว่ามีความเหมาะสมที่จะนำไปใช้เป็นพื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของประสิทธิ์สมการพื้นผิว

นำพื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเข้าสู่กระบวนการหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิว เพื่อปรับพื้นผิวของจานสะท้อนให้ได้อัตราขยายใกล้กับอัตราขยายที่ต้องการมากที่สุด ผลการคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานใน แนวโพลาไรเซชันร่วม และแนวโพลาไรเซชันไขว้ตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพผลที่ได้ ปรากฏดังรูปที่ 4.16 ก และ 4.16 ข สำหรับผลการสังเคราะห์พื้นผิวจานสะท้อนด้วยกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดในกรณีที่ใช้พื้นผิวเริ่มต้นเป็นจานสะท้อนแบบพาราโบลอยด์แบบสมมาตรขนาด 15 เท่าของความยาวคลื่น ผลการวิเคราะห์ปรากฏดังรูปที่ 4.17 ก และ 4.17 ข

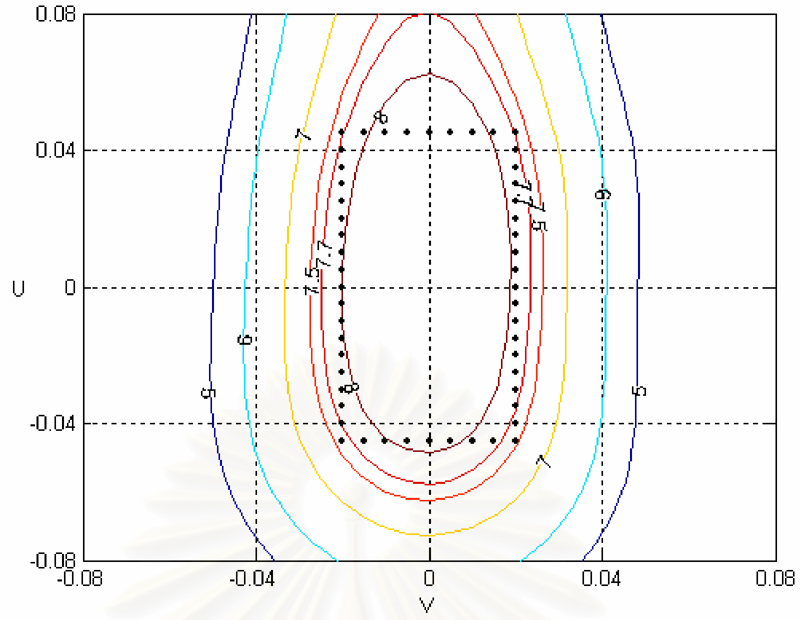


(ก) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี RECT2

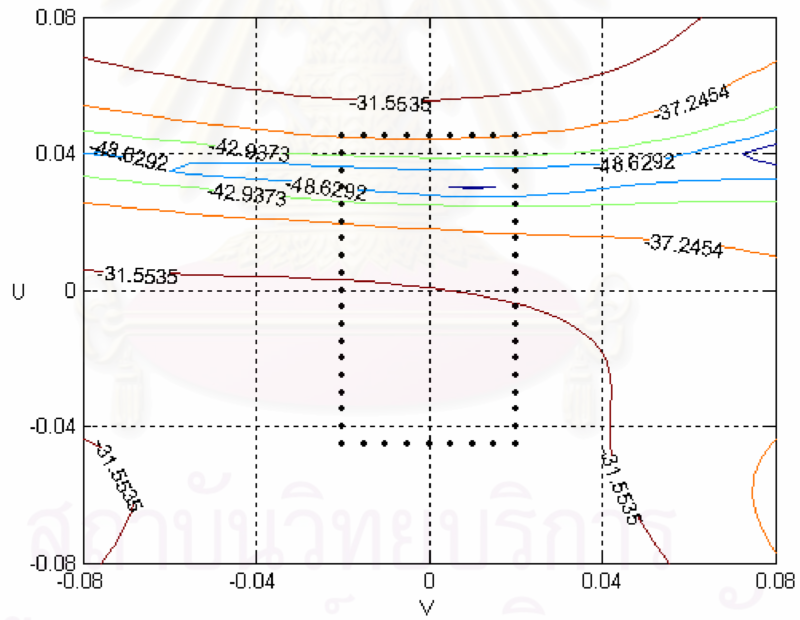


(ข) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี RECT2

รูปที่ 4.16 แบบรูปการแผ่พลังงานจากการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบนที่ใช้พื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นจาก IVP



(ก) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม ในกรณี RECT2



(ข) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ ในกรณี RECT2

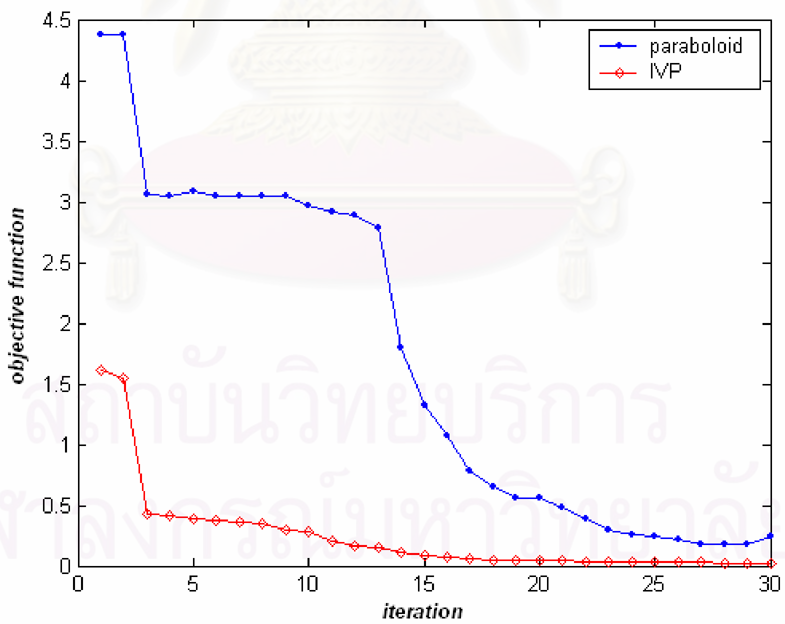
รูปที่ 4.17 แบบรูปการแผ่พลังงานจากการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบนที่ใช้พื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นแบบพาราโบลอยด์

สายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบนหลังจากผ่านกระบวนการวนซ้ำจนเป็นที่พึงพอใจแล้ว ผลการวิเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพได้ค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานดังปรากฏในตารางที่ 4.6 ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยของอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมที่จุดสังเกตมีค่าที่ค่อนข้างใกล้เคียงกับอัตราขยายที่ต้องการโดยที่ค่า

คลาดเคลื่อนเฉลี่ยเป็น 0.0249 สำหรับอัตราขยายมากที่สุดในแนวโพลาไรเซชันไขว้ที่จุดสังเกตมีค่าเท่ากับ -40.2310 dBi ต่ำกว่าอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม 48.23 dB ซึ่งถือว่ายอมรับได้ เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่ใช้พื้นผิวจานสะท้อนแบบพาราโบลอยด์เป็นพื้นผิวเริ่มต้น จะพบว่า ค่าเฉลี่ยอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วมที่ได้จากการใช้พื้นผิวเริ่มต้นจากทัศนศาสตร์เรขาคณิตมีค่าใกล้เคียงมากกว่าและความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยมีค่าน้อยกว่า เมื่อพิจารณาระดับอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากที่สุดพบว่า การใช้พื้นผิวเริ่มต้นแบบพาราโบลอยด์มีค่าที่สูงกว่า เปรียบเทียบในแง่เวลาที่ใช้การคำนวณดังแสดงรูปที่ 4.18 จะพบว่าการใช้พื้นผิวที่เริ่มต้นด้วยทัศนศาสตร์เรขาคณิตจะลู่เข้าสู่คำตอบที่ต้องการรวดเร็วกว่า คือ ใช้จำนวน 30 รอบในกระบวนการวนซ้ำของกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการผิว

<u>ตารางที่ 4.6</u> ค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานของจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิว กรณี RECT2

พื้นผิวเริ่มต้น	ค่าเฉลี่ยอัตราขยาย แนวโพลาไรเซชันร่วม	ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	อัตราขยายแนว โพลาไรเซชันไขว้มากที่สุด
IVP	7.9785 dBi	0.0249	-40.2310 dBi
พาราโบลอยด์	7.8906 dBi	0.15597	-28.441 dBi



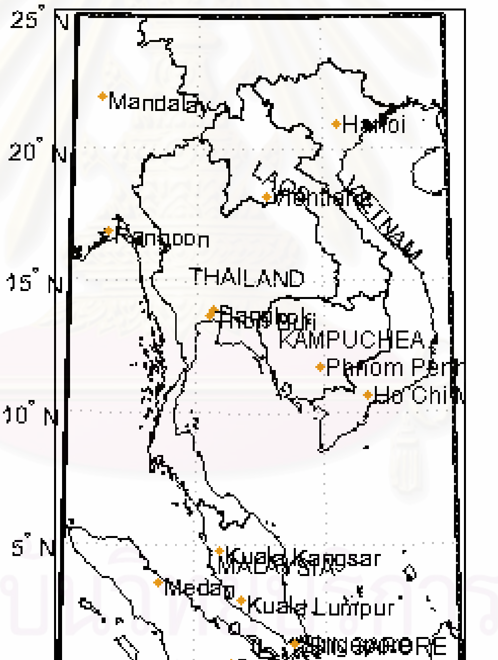
รูปที่ 4.18 เปรียบเทียบจำนวนรอบการวนซ้ำในกรณี RECT2

เมื่อพิจารณาผลที่ได้จาก กรณี RECT1 และ กรณี RECT2 สรุปได้ว่า กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่พิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นช่วยในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวที่มีช่องเปิด และพื้นผิวซึ่งให้แบบรูปการแผ่พลังงานเป็นลำวงรี ที่เหมาะสมกับพื้นที่ครอบคลุมรูปเรขาคณิตอย่างง่าย ได้ และเมื่อนำพื้นผิว

และช่องเปิดที่ได้เข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์พื้นผิว ก็จะทำให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานที่มีรูปร่างใกล้เคียงกับพื้นที่ครอบคลุมที่ต้องการ โดยใช้จำนวนรอบของการวนซ้ำน้อยกว่าการใช้พื้นผิวจานสะท้อนแบบพาราโบลอยด์ที่มีขนาดใกล้เคียงกันเป็นค่าปัจจัยเริ่มต้นในกรรมวิธีการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบน

4.3 ผลการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปสำหรับครอบคุลมพื้นที่ประเทศไทย

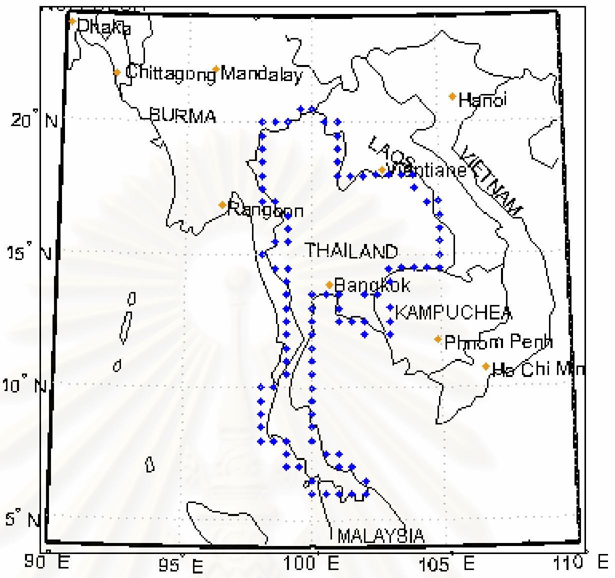
เนื่องจากในระบบสื่อสารผ่านดาวเทียมมีความต้องการที่จะให้กำลังงานในการส่งสัญญาณนั้นมีประสิทธิภาพมากที่สุด ดังนั้นจึงมีการนำสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปมาใช้เพื่อลดอัตราขยายในบริเวณพื้นที่ที่ไม่ใช่พื้นที่ให้บริการ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะยกตัวอย่างการนำสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตมาใช้เป็นพื้นผิวเริ่มต้น ในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวเพื่อครอบคลุมพื้นที่ของประเทศไทย โดยความถี่ที่ใช้นั้นจะอยู่ในย่านแถบ Ku หรือ ช่วงความถี่ 11 – 14 GHz เมื่อพิจารณาลักษณะทางกายภาพจะพบว่า ประเทศไทยมีลักษณะคล้ายรูปขวานตั้งอยู่ที่พิกัด ละติจูด 6-21 องศาเหนือ และลองจิจูด 98 – 106 องศาตะวันออก ทิศตะวันออกเฉียงเหนือติดกับสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว ทิศตะวันตกเฉียงเหนือติดกับสาธารณรัฐสังคมนิยมแห่งสภาพพม่า ทิศตะวันออกเฉียงใต้ติดกับประเทศกัมพูชาประชาธิปไตย ทิศใต้ติดต่อกับประเทศมาเลเซีย ส่วนที่ติดกับทะเลคือบริเวณภาคใต้ฝั่งตะวันตกติดกับทะเลอันดามัน และฝั่งตะวันตกติดกับอ่าวไทยดังรูปที่ 4.19



รูปที่ 4.19 ลักษณะและตำแหน่งของประเทศไทย

ในการกำหนดตำแหน่งของดาวเทียมที่ติดตั้งสายอากาศจานสะท้อนดัดรูปนั้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้กำหนดตำแหน่งของดาวเทียมไว้ที่วงโคจรดาวเทียมค้างฟ้า ซึ่งจะอยู่ในตำแหน่งระนาบศูนย์สูตร วงโคจรค้างฟ้านั้นจะอยู่ที่ความสูงประมาณ 35,786 กิโลเมตร ทำให้ดาวเทียมเคลื่อนที่ด้วยทิศทางและความเร็วคงที่เท่ากับความเร็วการหมุนรอบตัวเองของโลก จึงเหมือนกับปรากฏที่ตำแหน่งเดิมเสมอเมื่อเทียบกับโลก สำหรับกรณีที่ต้องการส่งสัญญาณมายังประเทศไทยจะกำหนดให้อยู่ที่ลองจิจูด 101 จานสะท้อนเล็งมาที่ตำแหน่งละติจูด 14

องศาเหนือ และ ลองจิจูด 101 องศาตะวันออก ในที่นี้จะคำนวณในระบบพิกัดเป็นแบบละติจูดและ ลองจิจูดทั้งหมด กำหนดให้อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมที่ต้องการเท่ากับ 30 dBi จุดสังเกตทั้งหมด 98 จุด และการลงตำแหน่งของจุดสังเกตแสดงดังรูปที่ 4.20



รูปที่ 4.20 ตำแหน่งของจุดสังเกตที่ต้องการให้มีอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วมเท่ากับ 30 dBi

กรณีศึกษาปัจจัยในการสังเคราะห์สายอากาศจะแบ่งออกเป็น 4 กรณี คือ กรณีที่หนึ่ง ผลของการปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น กรณีที่สอง ผลของการเปลี่ยนจำนวนพจน์ของฮาร์มอนิกฟูริเยร์ในสมการพื้นผิว กรณีที่สาม ผลการปรับตัวประกอบปรับขนาดของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปและ กรณีสุดท้ายผลการปรับอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทของช่องเปิดสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

4.3.1 **การสังเคราะห์พื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดเริ่มต้นของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปสำหรับพื้นที่ครอบคลุมรูปประเทศไทยเพื่อศึกษาผลการปรับค่าปัจจัยต่างๆ**

เนื่องจากรูปร่างของประเทศไทยนั้นมีลักษณะทางภูมิศาสตร์ใกล้เคียงกับรูปวงรีแนวตั้ง ดังนั้นการออกแบบสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่สร้างลำคลื่นรูปวงรีเพื่อครอบคลุมพื้นที่ประเทศไทยจึงเหมาะสมมากที่จะใช้เป็นพื้นผิวและช่องเปิดเริ่มต้นของกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด งานวิจัยของ Dah-Weih Duan และ Yahya Rahmat-Samii [7] พบว่าข้อดีในการใช้สายอากาศจานสะท้อนที่มีช่องเปิดที่เหมาะสมก็คือจะทำให้ได้สายอากาศที่มีน้ำหนักเบาซึ่งจะช่วยลดต้นทุนในการสร้าง นอกจากนี้ยังเพิ่มความสะดวกในการติดตั้งในบริเวณที่มีพื้นที่ค่อนข้างจำกัดอีกด้วย ค่าปัจจัยการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นในที่นี้กำหนดให้เป็นดังตารางที่ 4.7

ตารางที่ 4.7 ค่าปัจจัยต่าง ๆ ที่ใช้ในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต เพื่อจัดลำคลื่นแบบวงรีสำหรับพื้นที่ครอบคลุมรูปประเทศไทย

ค่าสัมประสิทธิ์ K	145
ค่าสัมประสิทธิ์ a เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง γ	45
ค่าสัมประสิทธิ์ b เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง ψ	51
ระดับความเรียว	-20 dB
ค่าสัมประสิทธิ์ของสายอากาศป้อนกำลัง (m)	6

กำหนดให้สายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ใช้มีอัตราขยายเท่ากับ 15 dB และมีแบบรูปการแผ่พลังงานเป็นดังนี้

$$I(\alpha,\beta) = 31.62\left[1+m\left(\cos^{-1}\left(\sin\alpha\cos\left(\beta-\left(\beta_o-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right)\right)\right]^{-2} \tag{4.2}$$

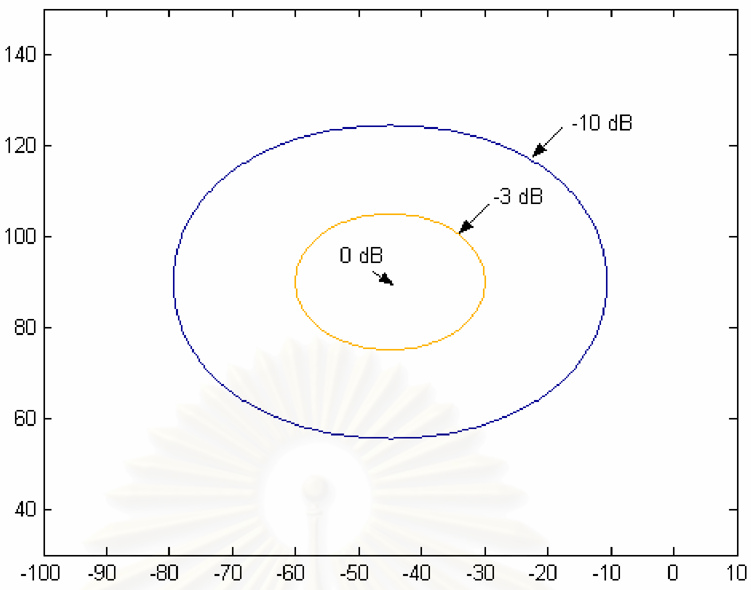
เงื่อนไขเริ่มต้น ที่ใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิวสายอากาศในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตคือ

$$\gamma = \tfrac{\pi}{2}, \psi = g \text{ และ } \alpha = \tfrac{\pi}{2}, \beta = f(g)$$

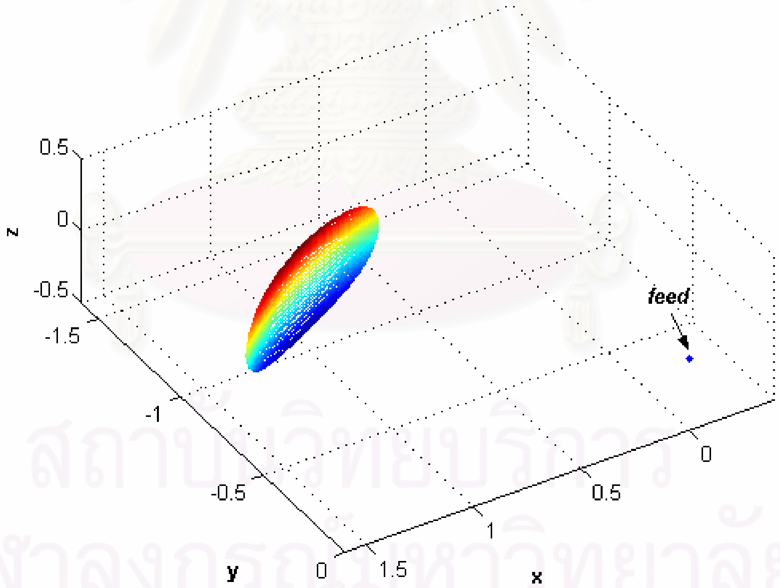
ที่ซึ่ง $f'(g) = \left[D\left(\tfrac{\pi}{2}, g\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{145}\sin g}{\cosh(65\cos g)}$ และจากสมการ (2.111) จะได้ β ที่ $t = 0$ เป็นดังนี้

$$f = \frac{1}{\sqrt{6}}\tan\left\{\sqrt{6}\left(-\frac{2\sqrt{145}}{65}\left[\tan^{-1}\left(\exp(65\cos g)\right)-\tfrac{\pi}{4}\right]\right)\right\}+\left(\beta_o-\tfrac{\pi}{2}\right)$$

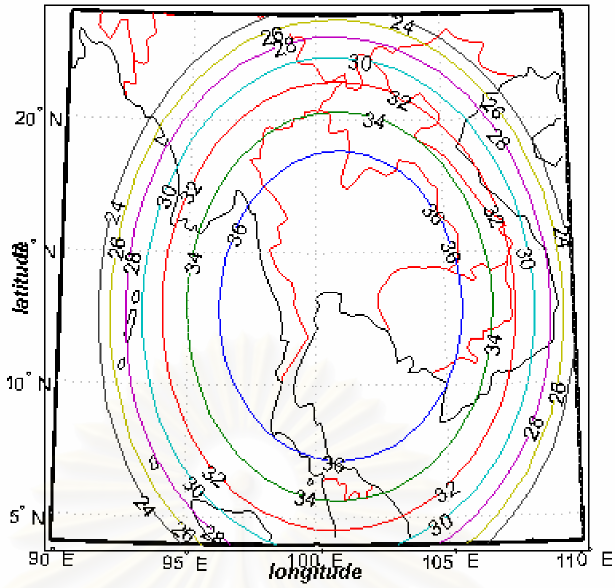
ในกรณีที่กำหนดให้มุมเล็งมีค่าเท่ากับ 45 องศา ลำวงรอบของสายอากาศป้อนกำลังจะเป็นดังรูปที่ 4.21 จะเห็นว่าแบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้มีลักษณะสมมาตร โดยที่ขนาดลำคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กมีค่าเท่ากัน โดยความกว้างลำคลื่นที่ – 3 dB มีขนาดประมาณ 30 องศา และ ความกว้างลำคลื่นที่ – 10 dB มีขนาดประมาณ 70 องศา ผลการสังเคราะห์เมื่อกำหนดให้ใช้สัดส่วน 1 ต่อ 1.41 เมตร จะได้สายอากาศจานสะท้อนปรากฏดังรูปที่ 4.22 เมื่อนำสายอากาศมาวิเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพโดยใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ในสมการประมาณพื้นผิว PFS เท่ากับ 34 พจน์ $(Nx \times Ny = 5\times 5)$ และจำนวนพจน์ของสมการไฮเพอร์ควอดริกเท่ากับ 3 พจน์ อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม และ อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้จะเป็นดังรูปที่ 4.23



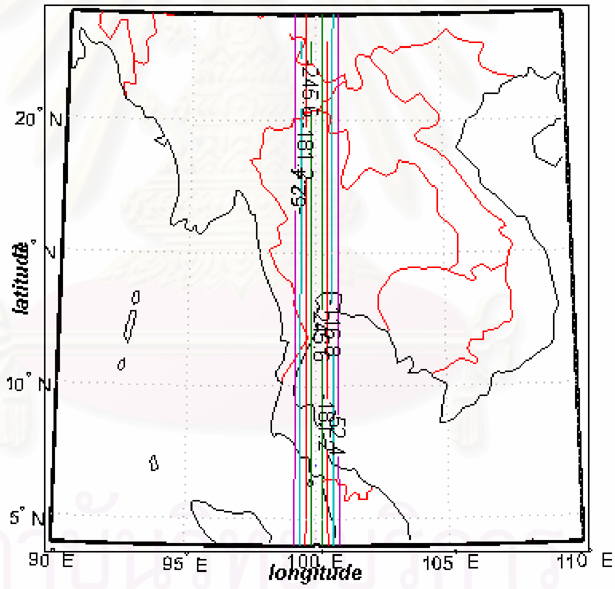
รูปที่ 4.21 ลำวงรอบของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น I



รูปที่ 4.22 สายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเมื่อมุมเล็งสายอากาศป้อนกำลัง เท่ากับ 45 องศา



(ก) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม



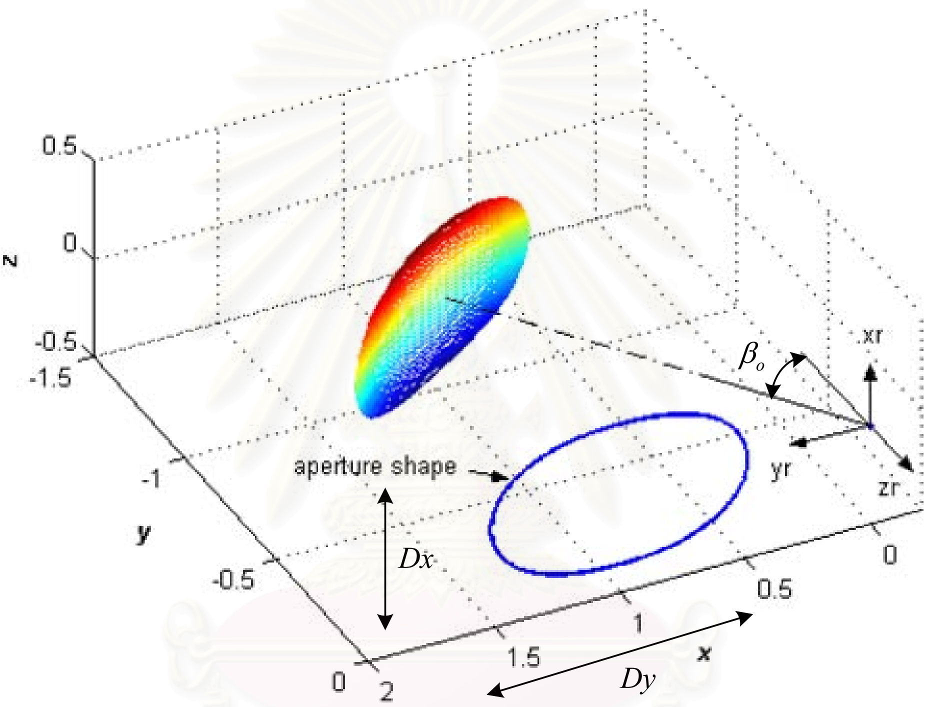
(ข) อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้

รูปที่ 4.23 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเริ่มต้นเมื่อกำหนดให้สายอากาศป้อนกำลังคลื่นมีมุมเล็งเท่ากับ 45 องศา

พบว่าพื้นผิวและช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต จะจัดให้ลำคลื่นที่ได้เป็นลักษณะรูปวงรีที่ครอบคลุมพื้นที่ของประเทศไทย

4.3.2 กรณีศึกษาผลของการการปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น

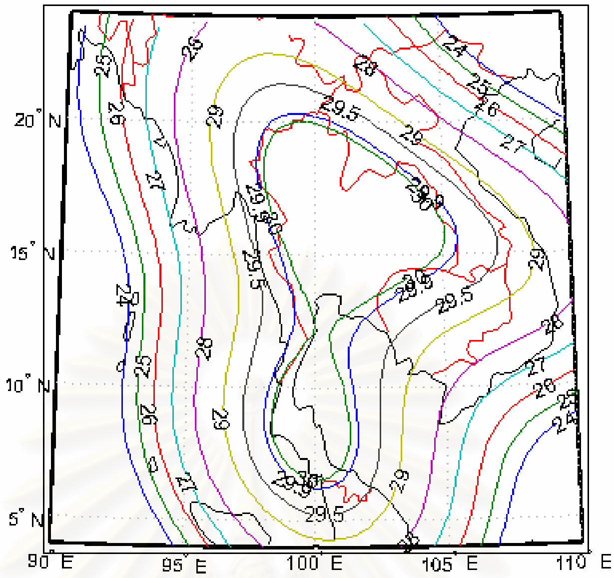
หัวข้อนี้จะกล่าวถึงการเปรียบเทียบผลการสังเคราะห์โดยการปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นของระบบสายอากาศจานสะท้อนซึ่งถือเป็นหนึ่งในค่าปัจจัยเริ่มต้น ในการศึกษาผลของการปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น จะกำหนดค่าปัจจัยต่างๆ ที่ ใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิว และช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนเริ่มต้นด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเป็นดังตารางที่ 4.7 และ เงื่อนไขเริ่มต้นเหมือนกันหมดทุกกรณี โดยจะเปลี่ยนแปลงเฉพาะมุมเล็ง (β_o) เท่านั้น เรขาคณิตของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวตัดรูปแสดงดังรูปที่ 4.24



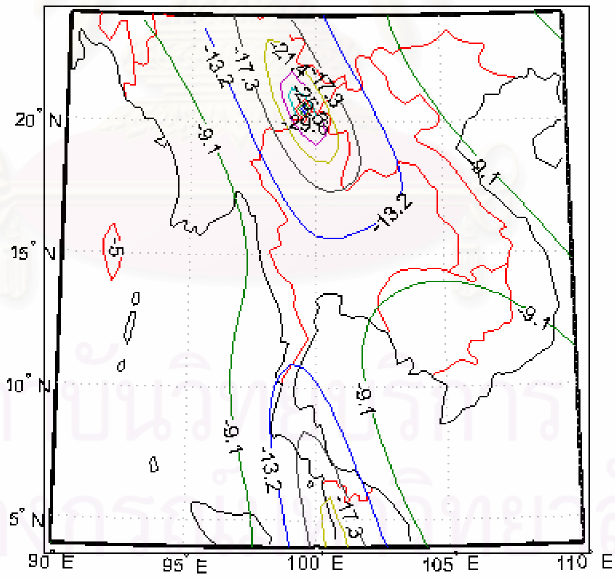
รูปที่ 4.24 เรขาคณิตของจานสะท้อนเดี่ยวตัดรูปเมื่อทำการปรับมุมเล็ง

เมื่อพิจารณารูปที่ 4.24 จะพบว่าช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนจะมีแกนเอกและความไม่สมมาตรอยู่ในแนวแกน x ของระบบพิกัดในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต ซึ่งสอดคล้องกับแกน y_r ของระบบพิกัดในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิว สัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวใช้จำนวนสัมประสิทธิ์ของสมการประมาณพื้นผิว PFS เท่ากับ 34 พจน์ $(Nx \times Ny = 5 \times 5)$ และใช้สมการไฮเพอร์ควอดริกจำนวน 3 พจน์ในการประมาณรูปร่างของช่องเปิด สายอากาศป้อนกำลังคลื่นสมมุติให้มีโพลาไรเซชันอยู่ในแนวแกน x

<u>กรณีกำหนดมุมเล็งสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเท่ากับ 30 องศา</u>



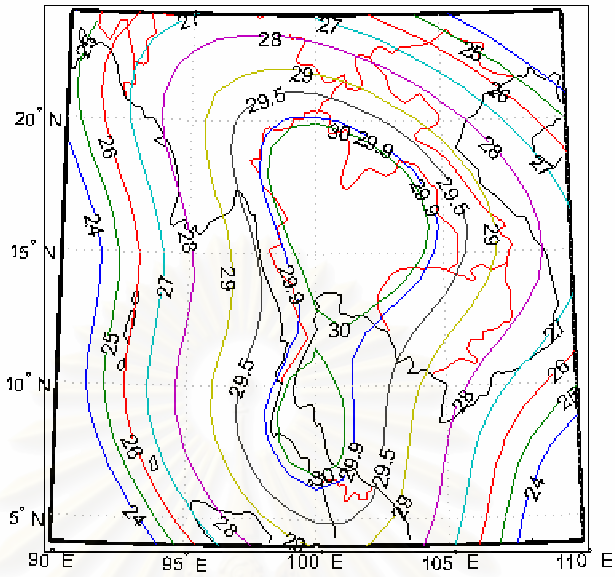
(ก) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณี $\beta_o = 30$



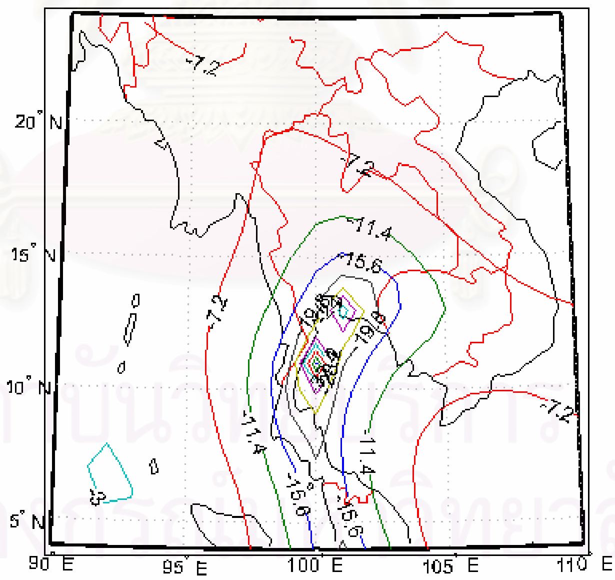
(ข) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณี $\beta_o = 30$

รูปที่ 4.25 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น

<u>กรณีกำหนดมุมเล็งสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเท่ากับ 35 องศา</u>



(ค) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณี $\beta_o = 35$

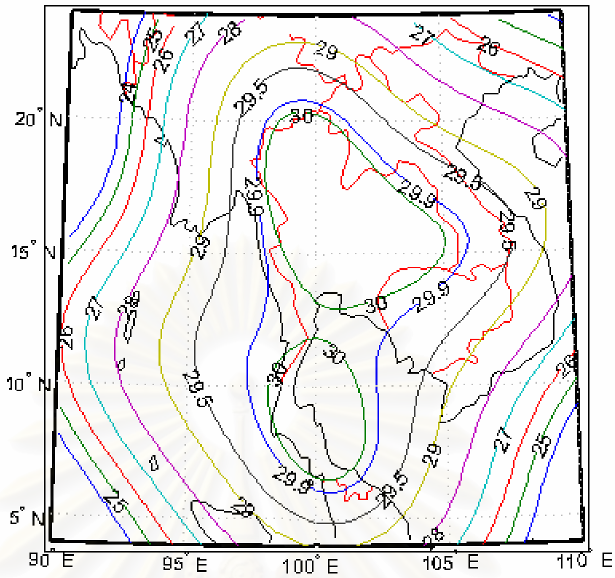


(ง) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณี $\beta_o = 35$

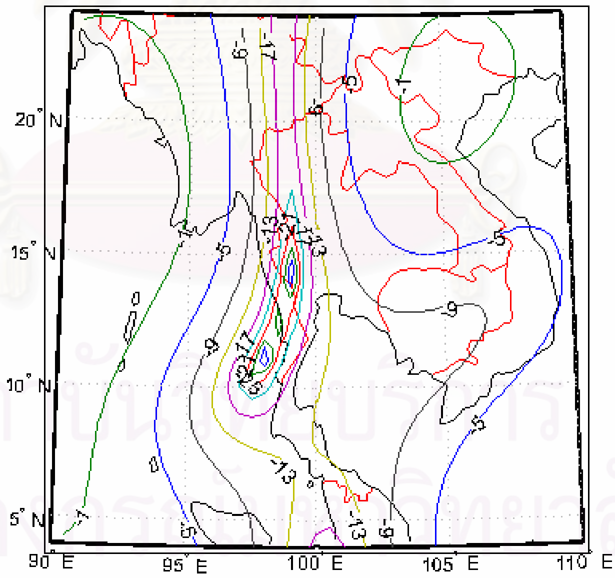
รูปที่ 4.25 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น

(ต่อ)

<u>กรณีกำหนดมุมเล็งสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเท่ากับ 40 องศา</u>



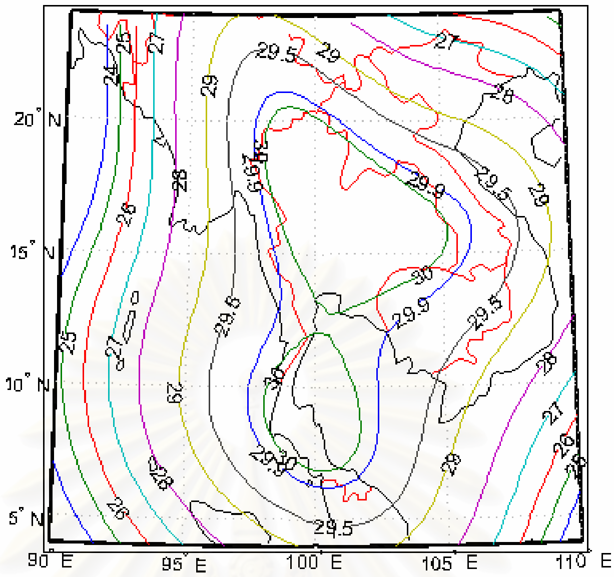
(จ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณี $\beta_o = 40$



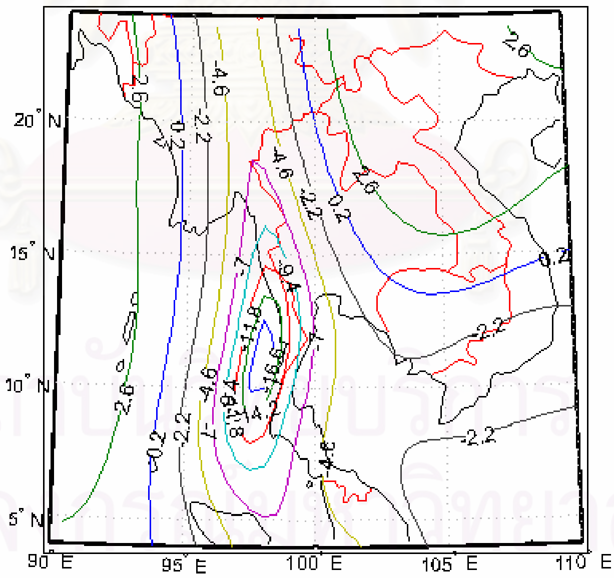
(ฉ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณี $\beta_o = 40$

รูปที่ 4.25 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น (ต่อ)

<u>กรณีกำหนดมุมเล็งสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเท่ากับ 45 องศา</u>



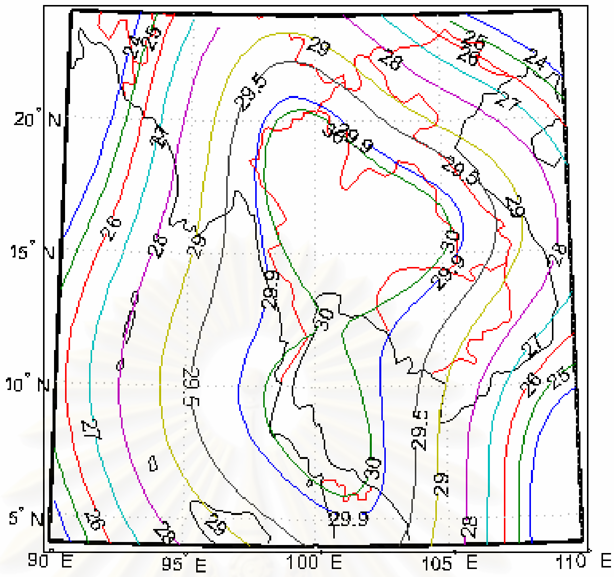
(ช) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณี $\beta_o = 45$



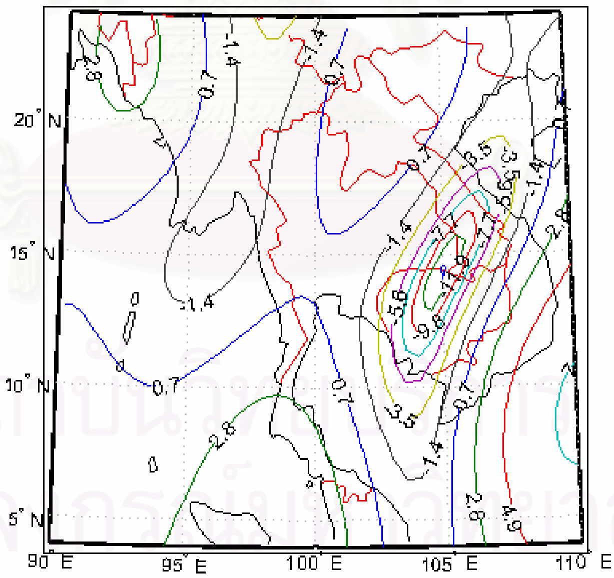
(ซ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณี $\beta_o = 45$

รูปที่ 4.25 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น (ต่อ)

<u>กรณีกำหนดมุมเล็งสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเท่ากับ 50 องศา</u>



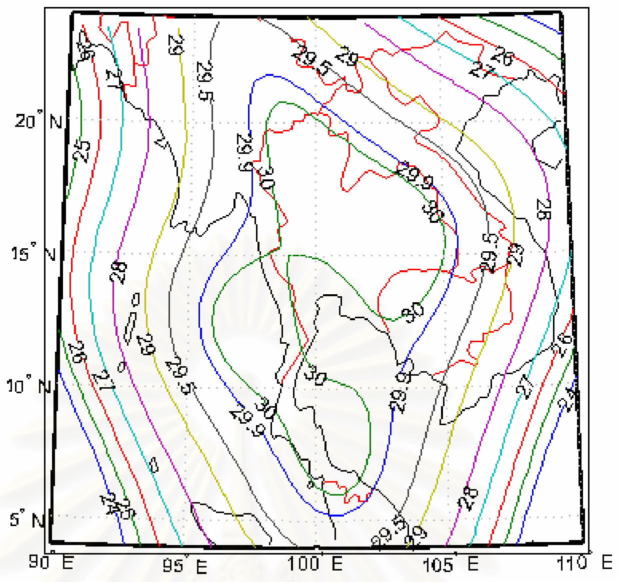
(ฌ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณี $\beta_o = 50$



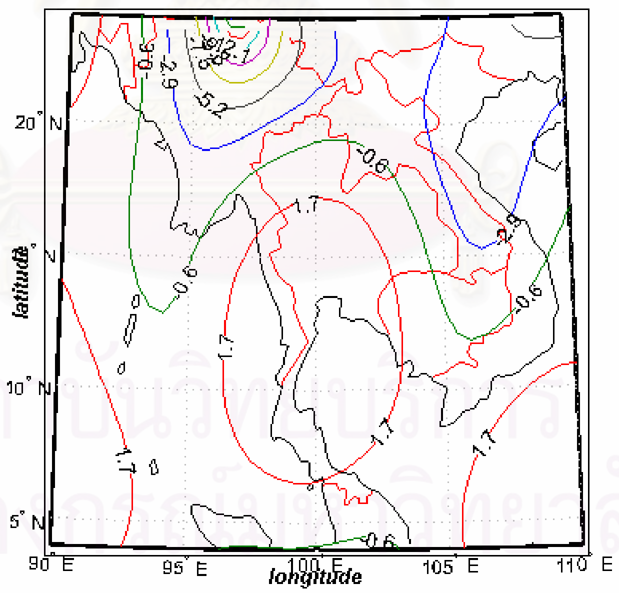
(ญ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณี $\beta_o = 50$

รูปที่ 4.25 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น (ต่อ)

<u>กรณีกำหนดมุมเล็งสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเท่ากับ 55 องศา</u>



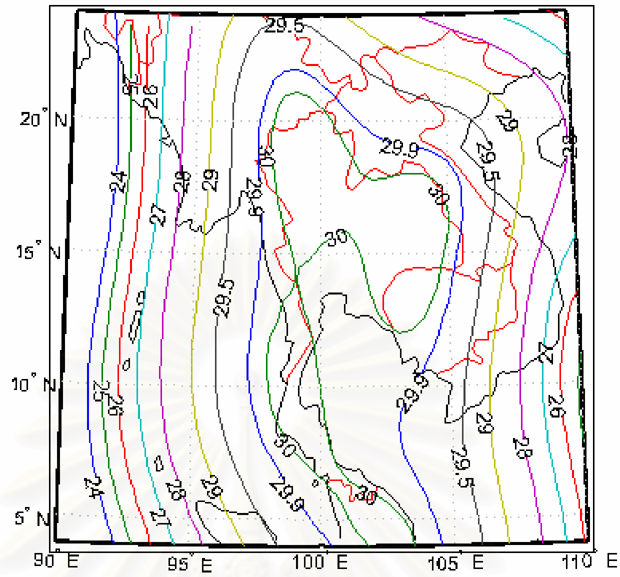
(ฎ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณี $\beta_o = 55$



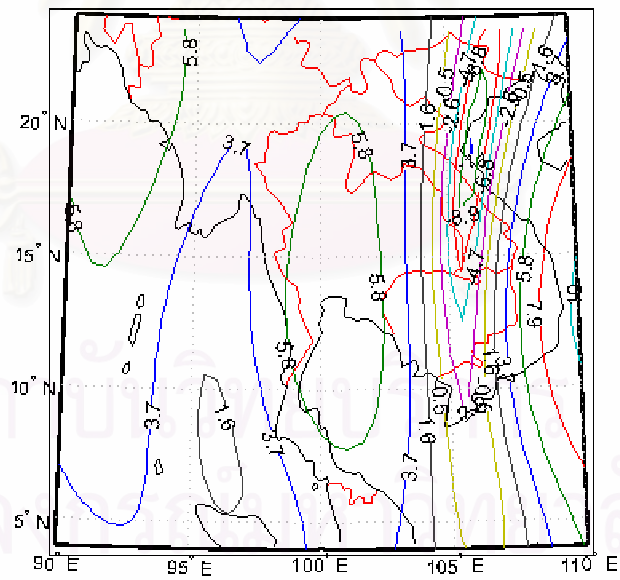
(ฏ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณี $\beta_o = 55$

รูปที่ 4.25 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น (ต่อ)

<u>กรณีกำหนดมุมเล็งสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเท่ากับ 60 องศา</u>



(ฐ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณี $\beta_o = 60$



(ฑ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณี $\beta_o = 60$

รูปที่ 4.25 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น (ต่อ)

การปรับมุมเล็งของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวตัดรูป เริ่มจาก 30 องศา แล้วเพิ่มขึ้นทีละ 5 องศา ไปจนถึง 60 องศาผลการคำนวณค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานดังตารางที่ 4.8 จะเห็นได้ว่าจานสะท้อนที่ได้มี

ค่าเฉลี่ยอัตราขยายที่จุดสังเกตใกล้เคียงกับอัตราขยายที่ต้องการคือ 30 dBi ทุกกรณี ความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.122 dB โดยที่การเพิ่มมุมนั้นจะทำให้ค่าเฉลี่ยอัตราขยายที่จุดสังเกตใกล้ 30 dBi มากขึ้น และ ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยก็มีขนาดลดลง จะเห็นได้ว่ามุมเล็ง 30 องศามีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยมากที่สุดเท่ากับ 0.1219 dB และ มุมเล็ง 60 องศา มีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยน้อยที่สุดเท่ากับ 0.0168 แต่เมื่อสังเกตจากรูปร่างของลำคลื่นจะพบว่า มุมเล็งตั้งแต่ 50 องศาไปจนถึง 60 องศานั้นมีแนวโน้มว่าระดับของอัตราขยายแผ่ไปยังบริเวณพื้นที่ใกล้เคียงสูงขึ้นขณะที่การปรับมุมเล็งที่ 30 องศา ถึง 45 องศานั้น มีระดับของอัตราขยายแนวโพ-ลาไรเซชันร่วมบริเวณพื้นที่ใกล้เคียงประเทศไทยจะมีค่าน้อยกว่าทำให้ระดับสัญญาณรบกวนมีค่าลดลงในกรณีที่ใช้ความถี่ซ้ำกัน เมื่อพิจารณาอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้มากที่สุดในพื้นที่ครอบคลุมประเทศไทย การปรับมุมเล็งที่ 30 องศาจะมีค่าต่ำสุด ซึ่งเมื่อมุมเล็งมีค่าเพิ่มขึ้นก็จะทำให้ประสิทธิภาพของการส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชันมีค่าลดลง เนื่องจากการเพิ่มมุมเล็งจะทำให้สายอากาศมีความไม่สมมาตรมากขึ้น ดังนั้นสนามในแนวโพลาไรเซชันไขว้จึงมีค่าเพิ่มขึ้น และ ที่มุมเล็ง 60 องศาจะให้ประสิทธิภาพในการส่งสัญญาณแบบสอง โพลาไรเซชันด้อยสุดคือ 0.082เท่านั้น

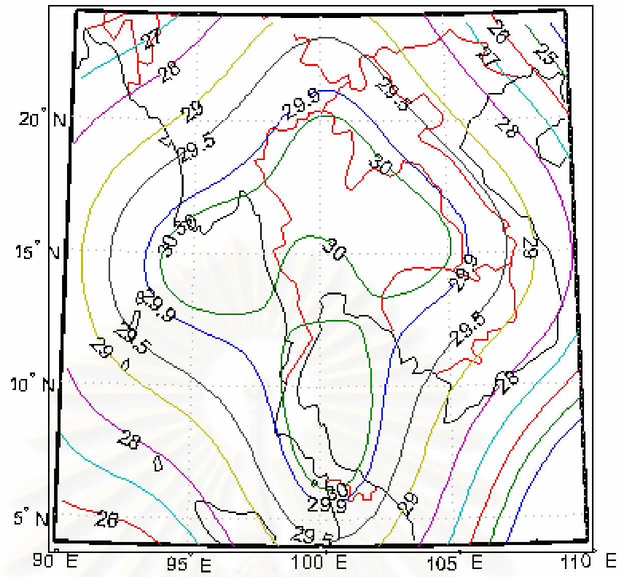
ตารางที่ 4.8 ค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อครอบคลุมพื้นที่ประเทศไทยในกรณีศึกษาผลของการการปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น

มุมเล็ง	ค่าเฉลี่ยอัตราขยาย ในแนวโพลาไรเซชันร่วม	ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากสุด	ประสิทธิภาพของการส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชัน
30	29.9790	0.1219	-7.8989	1
35	29.96	0.12094	-5.9054	1
40	29.9914	0.0582	-1.5349	1
45	29.9899	0.0517	3.9938	0.735
50	30.0117	0.0407	3.9378	0.41
55	30.0002	0.0313	3.9973	0.25
60	29.9990	0.0168	7.0838	0.082

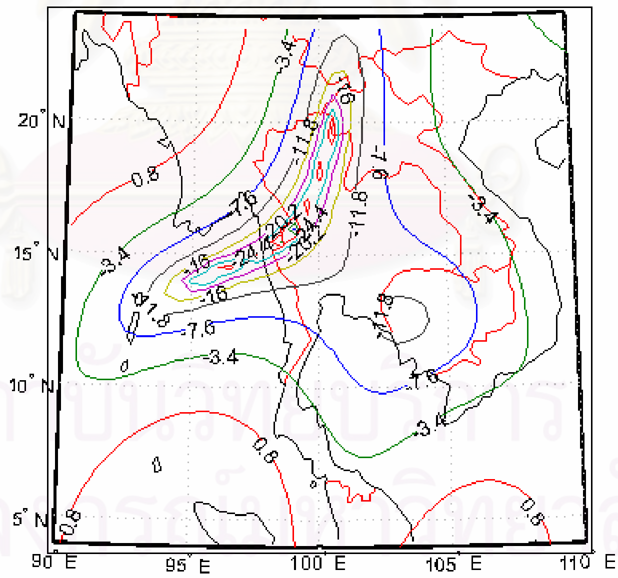
4.3.3 กรณีศึกษาผลของการปรับจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ในสมการพื้นผิว

ในการศึกษาผลของการเปลี่ยนจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ในสมการประมาณพื้นผิว จะกำหนดค่าปัจจัยต่าง ๆ จะเลือกใช้ค่าปัจจัยการสังเคราะห์พื้นผิวและเลือกช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อน เริ่มต้นด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเหมือนกับตารางที่ 4.1 และเงื่อนไขเริ่มต้นเหมือนกันหมดทุกกรณี โดยจะกำหนดให้มุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นเป็น $\beta_o = \frac{\pi}{4}$ หรือมุม 45 องศา รูปทรงทางเรขาคณิตของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเป็นเช่นเดียวกับรูปที่ 4.24 ผลการวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปหลังเข้าสู่ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ ได้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วม และแนวโพลาไรเซชันไขว้ เป็นดังรูป 4.26 ก ถึง 4.26 ซ

<u>กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 3x3</u>



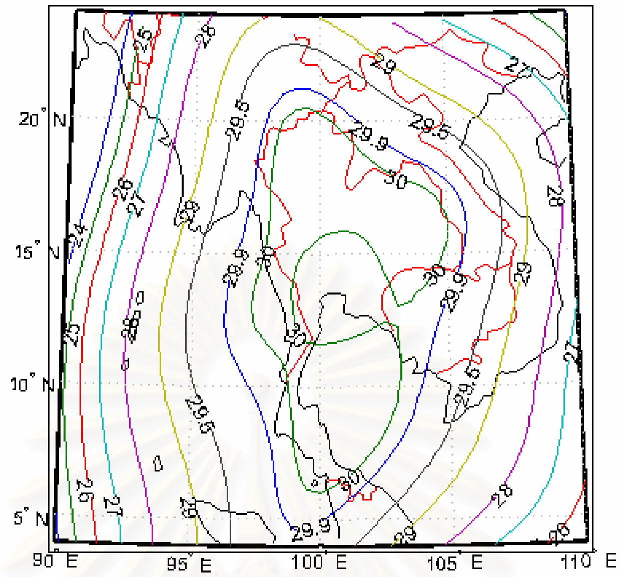
(ก) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 3x3



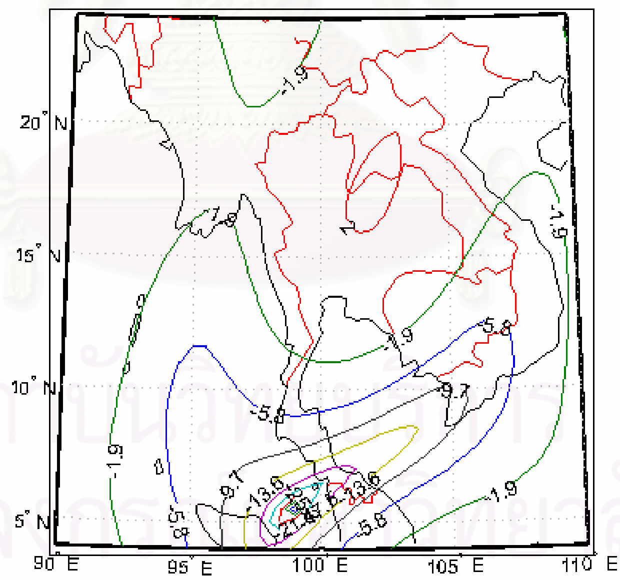
(ข) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 3x3

รูปที่ 4.26 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อเปลี่ยนจำนวนพจน์ของฮาร์มอนิกฟูริเยร์

<u>กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 4 x 4</u>



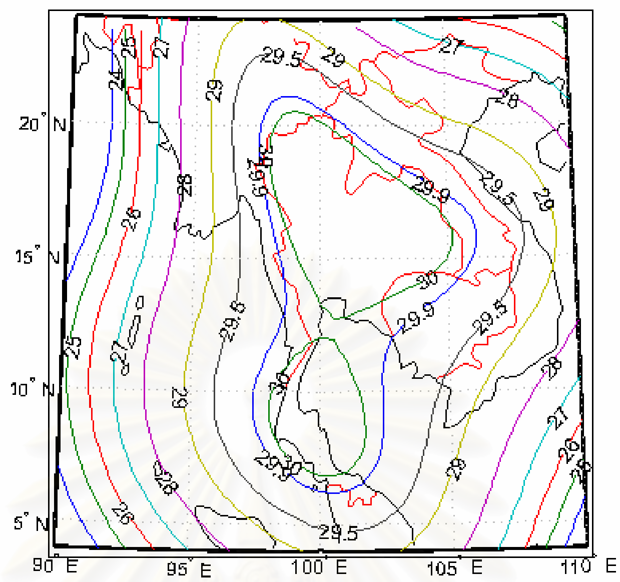
(ค) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 4 x 4



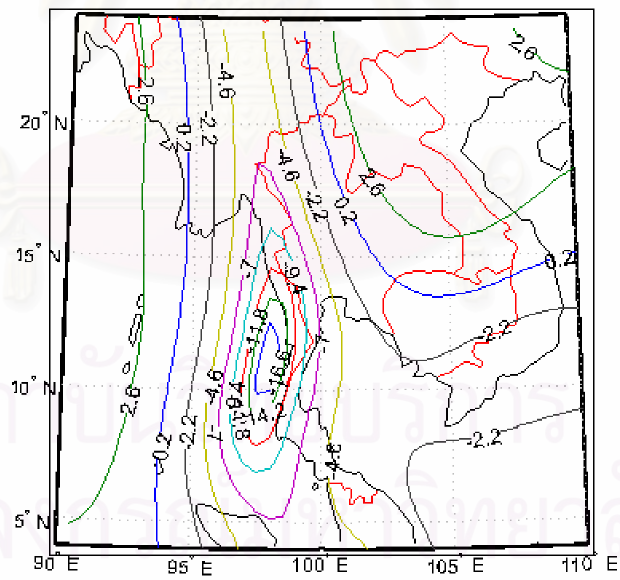
(ง) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 4 x 4

รูปที่ 4.26 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อเปลี่ยนจำนวนพจน์ของฮาร์มอนิกฟูริเยร์

<u>กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 5 x 5</u>



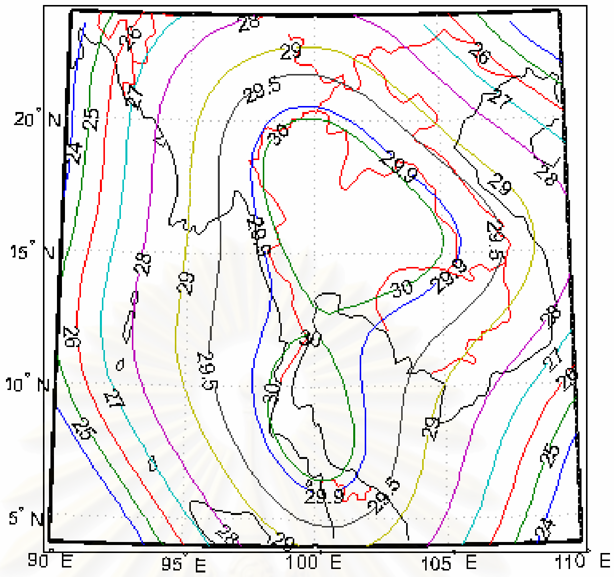
(จ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 5 x 5



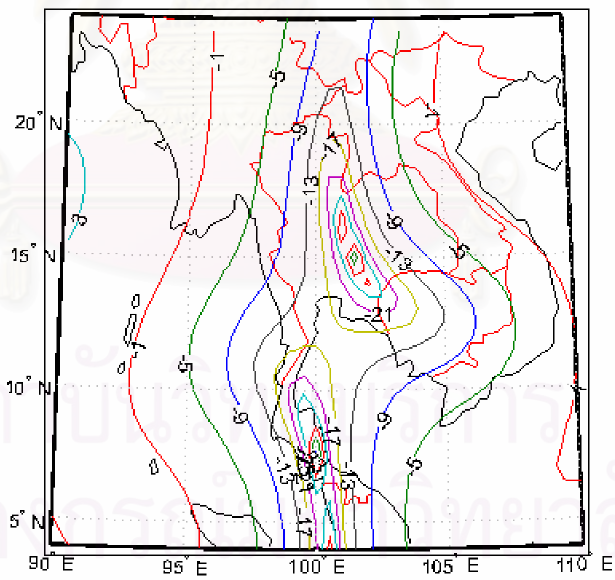
(ฉ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 5 x 5

รูปที่ 4.26 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อเปลี่ยนจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์

<u>กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 7 x 7</u>



(ช) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 7 x 7

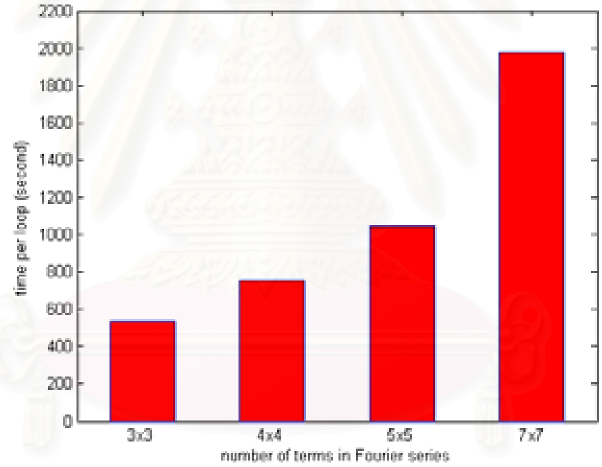


(ซ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เท่ากับ 7 x 7

รูปที่ 4.26 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนเมื่อเปลี่ยนจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์

ผลการเปรียบเทียบการเปลี่ยนจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ทั้ง 4 กรณีโดยใช้จำนวน Nx เท่ากับจำนวน Ny พบว่าการใช้จำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์มีผลต่อแบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้ โดยการใช้จำนวนพจน์

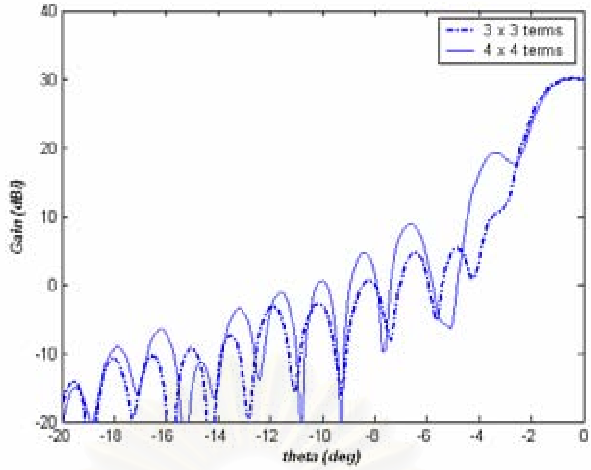
ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ 3x3 และ 4x4 จานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้นั้นให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่มีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยน้อยกว่าการใช้จำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ 5x5 และ 7x7 แต่จากรูปที่ 4.26 ก และ รูปที่ 4.26 ค จะเห็นว่าอัตราขยายที่ระดับ 30 dBi ตกในบริเวณฝั่งทะเลอันดามันค่อนข้างมากซึ่งเป็นสิ่งที่ไม่ต้องการ และเมื่อใช้จำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์เพิ่มมากขึ้น จะพบว่าระดับของอัตราขยายในบริเวณทะเลอันดามันมีค่าลดลงรวมทั้งอัตราขยายในบริเวณอ่าวไทยก็มีค่าลดลง และรูปลำคลื่นมีลักษณะใกล้เคียงรูปร่างพื้นที่ครอบคลุมประเทศไทยมากขึ้น เมื่อพิจารณาอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากสุดพบว่า การใช้จำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ 4x4 และ 5x5 จะทำให้ระดับของอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้มีค่าค่อนข้างสูง จึงทำให้ประสิทธิภาพในการใช้ส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชันมีค่าค่อนข้างต่ำ เมื่อเปรียบเทียบระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณต่อ 1 รอบของการวนซ้ำที่แสดงในรูปที่ 4.27 จะพบว่าจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ 3x3 ใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุดเนื่องจากมีจำนวนสัมประสิทธิ์ของสมการน้อยที่สุดคือ 18 พจน์ แม้ว่าการเพิ่มจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์จะทำให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานใกล้เคียงมากที่สุดแต่ก็ใช้เวลามากขึ้นด้วยเช่นกัน นอกจากนั้นการเพิ่มจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ ตามรูปที่ 4.28 จะทำให้ระดับของอัตราขยายบริเวณพูข้างเกิดการแกว่งตัวและยกระดับเพิ่มขึ้น ดังนั้นการเลือกจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ว่าจะใช้จำนวนเท่าไรนั้นจะขึ้นอยู่กับการกำหนดขนาดของสายอากาศ และ รูปร่างของแบบรูปการแผ่พลังงาน



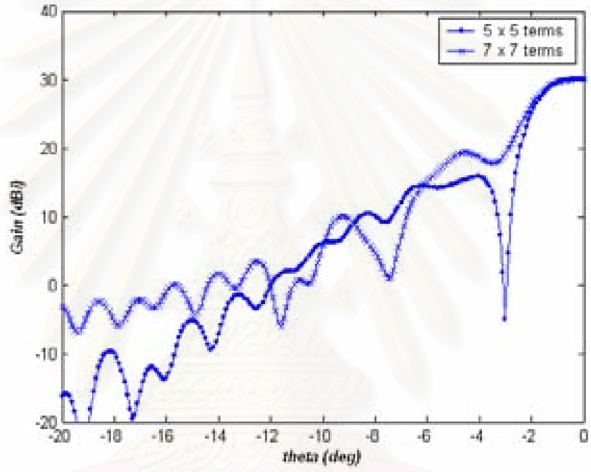
รูปที่ 4.27 เปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการสังเคราะห์ เมื่อเปลี่ยนจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์

<u>ตารางที่ 4.9</u> ค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อครอบคลุมพื้นที่ประเทศไทยในกรณีศึกษาผลของการปรับจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ในสมการพื้นผิว

จำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์	ค่าเฉลี่ยอัตราขยาย	ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากสุด	ประสิทธิภาพของการส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชัน
3x3	29.995	0.0512	0.58287	0.9693
4x4	29.996	0.0267	2.1321	0.643
5x5	29.9899	0.0517	3.9938	0.735
7x7	29.999	0.0642	-3.2279	1



(ก) กรณี $Nx \times Ny$ เท่ากับ 3x3 และ 4x4



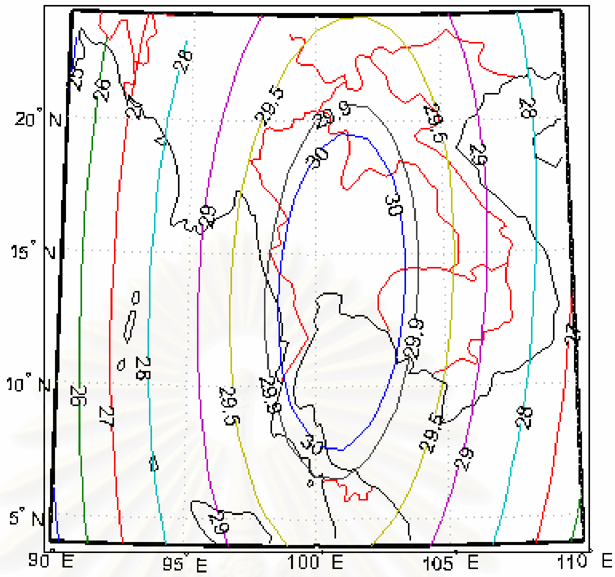
(ข) กรณี $Nx \times Ny$ เท่ากับ 5x5 และ 7x7

รูปที่ 4.28 แบบรูปการแผ่พลังงานแบบลำดินสอกรณีเปลี่ยนจำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์

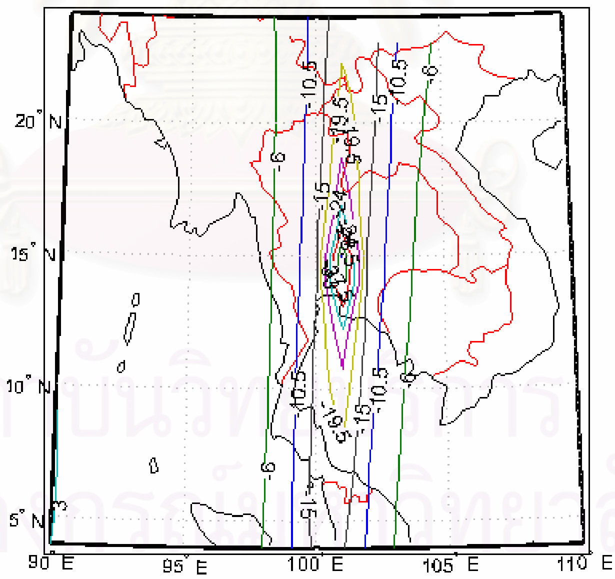
4.3.4 กรณีศึกษาผลการปรับตัวประกอบปรับขนาดของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

ในการศึกษาผลการปรับตัวประกอบปรับขนาด (sc) ของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปทั้งหมด 3 กรณี จะกำหนดค่าปัจจัยต่าง ๆ ที่ ใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิว และช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อน เริ่มต้นด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตดังตารางที่ 4.7 และ เงื่อนไขเริ่มต้นเหมือนกันหมดทุกกรณี โดยจะเปลี่ยนแปลงเฉพาะค่าตัวประกอบปรับขนาดเมื่อนำพื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวเพื่อคำนวณหาพื้นผิวที่ต้องการ โดยกำหนดให้มุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นมีค่าเท่ากับ 45 องศาเท่ากันหมดทุกกรณี ผลการวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ ได้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วม และแนวโพลาไรเซชันไขว้ เป็นดังรูปที่ 4.29 ก ถึง 4.29 ญ

<u>กรณีตัวประกอบปรับขนาดเท่ากับ 1 ต่อ 0.705 เมตร</u>



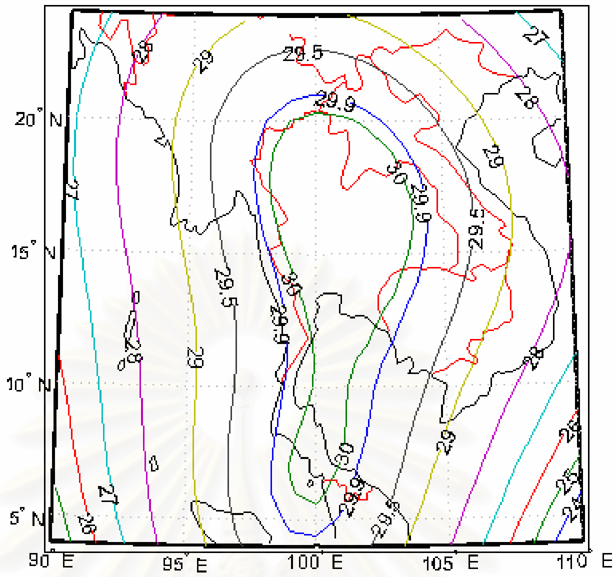
(ก) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีตัวประกอบปรับขนาดเป็น 1:0.705 เมตร



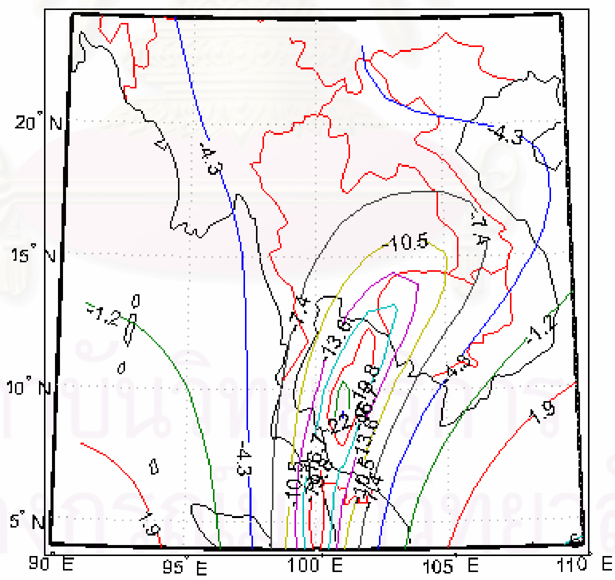
(ข) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีตัวประกอบปรับขนาดเป็น 1:0.705 เมตร

รูปที่ 4.29 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนกรณีปรับตัวประกอบปรับขนาด

<u>กรณีตัวประกอบปรับขนาดเท่ากับ 1 ต่อ 0.85 เมตร</u>



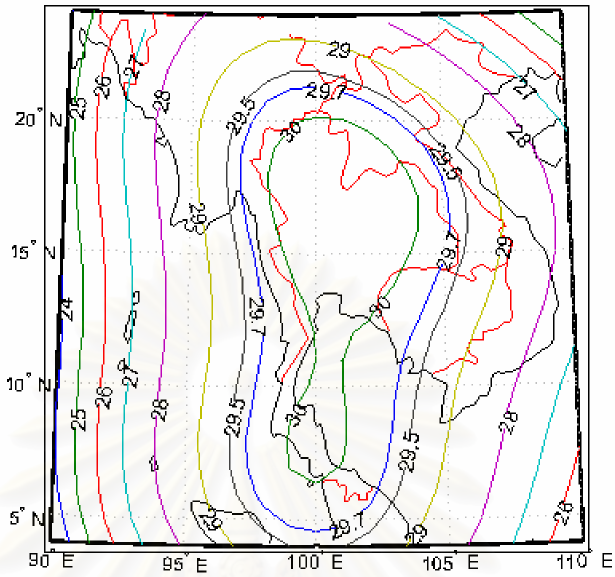
(ค) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีตัวประกอบปรับขนาดเป็น 1:0.85 เมตร



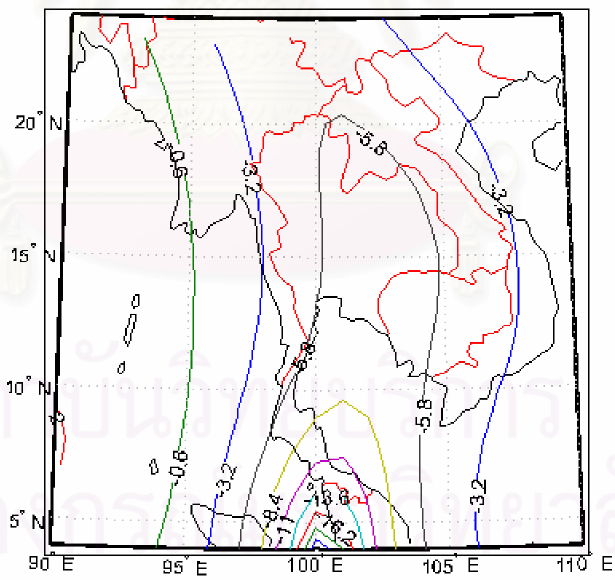
(ง) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีตัวประกอบปรับขนาดเป็น 1:0.85 เมตร

รูปที่ 4.29 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนกรณีปรับตัวประกอบปรับขนาด

กรณีตัวประกอบปรับขนาดเท่ากับ 1 ต่อ 1 เมตร



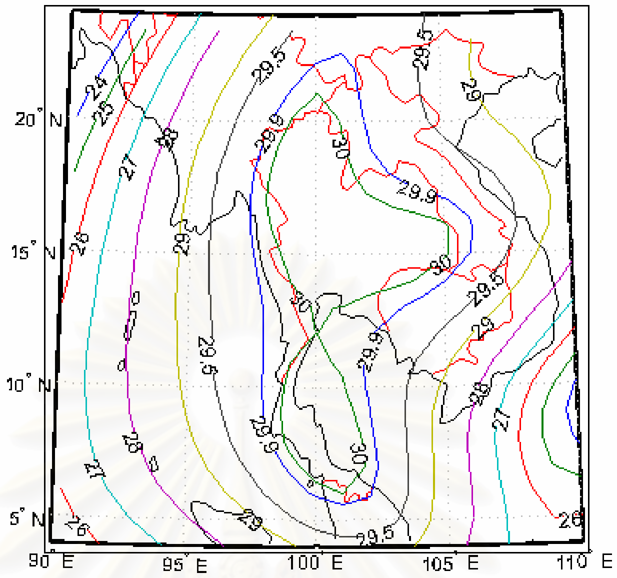
(จ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีตัวประกอบปรับขนาดเป็น 1:1 เมตร



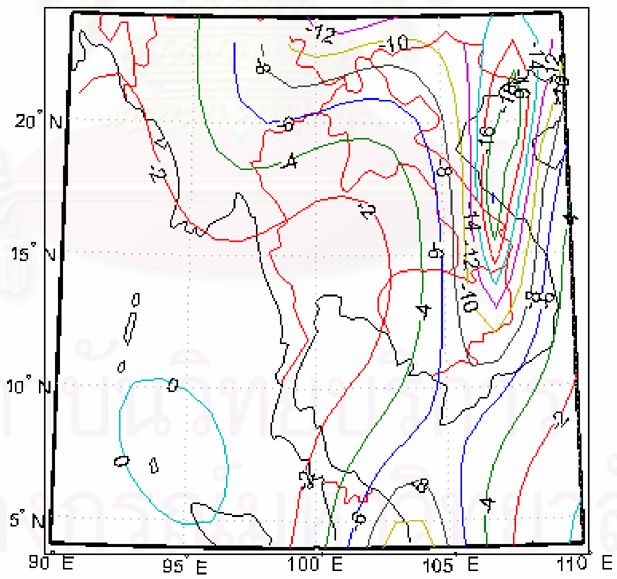
(ฉ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีตัวประกอบปรับขนาดเป็น 1:1 เมตร

รูปที่ 4.29 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนกรณีปรับตัวประกอบปรับขนาด

<u>กรณีตัวประกอบปรับขนาดเท่ากับ 1 ต่อ 1.27 เมตร</u>



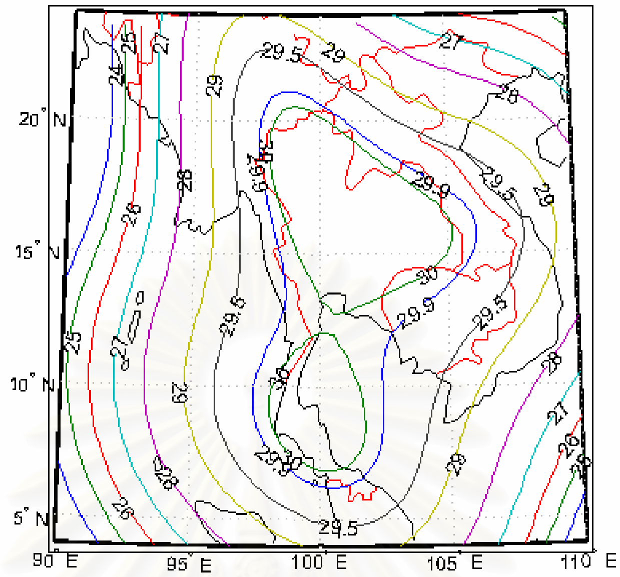
(ช) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีตัวประกอบปรับขนาดเป็น 1:1.27 เมตร



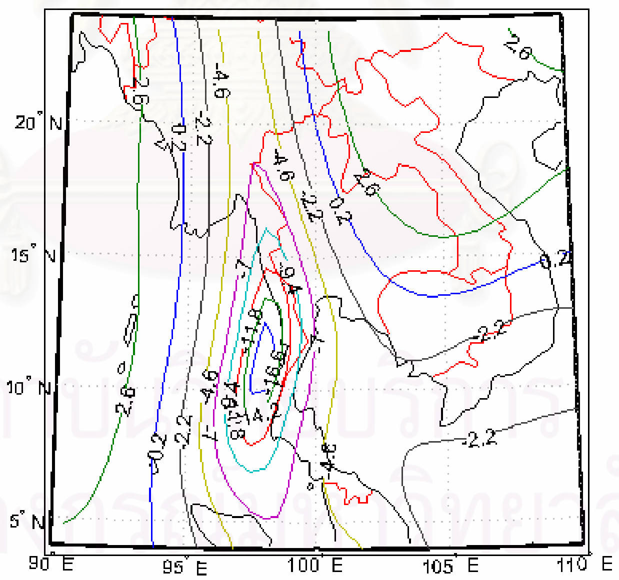
(ซ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีตัวประกอบปรับขนาดเป็น 1:1.27 เมตร

รูปที่ 4.29 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนกรณีปรับตัวประกอบปรับขนาด

<u>กรณีตัวประกอบปรับขนาดเท่ากับ 1 ต่อ 1.41 เมตร</u>



(ฌ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีตัวประกอบปรับขนาดเป็น 1:1.41 เมตร



(ญ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีตัวประกอบปรับขนาดเป็น 1:1.41 เมตร

รูปที่ 4.29 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนกรณีปรับตัวประกอบปรับขนาด

กรณีศึกษาการปรับตัวประกอบปรับขนาดของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปทั้งหมด 5 กรณี จากผลการวิเคราะห์จะสังเกตเห็นว่าขนาดของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่มีขนาดใหญ่ขึ้นจะทำให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้มีความโค้ง-เว้ามากขึ้นและมีรูปร่างใกล้เคียงกับแบบรูปการแผ่พลังงานที่รูปร่างซับซ้อน

ได้มากขึ้น เนื่องจากมีพื้นที่ในการปรับพื้นผิวเพื่อให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการมากขึ้น แต่ก็จะมีน้ำหนักมากขึ้นรวมทั้งต้นทุนในการผลิตเพิ่มขึ้นเช่นกัน เมื่อพิจารณาอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้จากตารางที่ 4.10 จะพบว่าการเพิ่มค่าตัวประกอบปรับขนาดของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปมีแนวโน้มที่จะทำให้อัตราในแนวโพลาไรเซชันไขว้มากสุดมีระดับเพิ่มสูงขึ้นและทำให้ประสิทธิภาพในการส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชันลดลง

<u>ตารางที่ 4.10</u> ค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อครอบคลุมพื้นที่ประเทศไทยในกรณีศึกษาผลการปรับตัวประกอบปรับขนาดของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

ตัวประกอบปรับขนาด (sc)	ค่าเฉลี่ยอัตราขยาย	ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากสุด	ประสิทธิภาพในการใช้ส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชัน
1: 0.70	29.953	0.1534	-5.1423	1
1: 0.85	29.974	0.0973	-5.0483	1
1:1.00	29.974	0.0974	-3.3291	1
1:1.27	29.988	0.0443	-0.6073	1
1:1.41	29.9899	0.0517	3.9938	0.735

4.3.5 กรณีศึกษาผลการปรับอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทของช่องเปิดสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

ในการศึกษาผลการปรับอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทของช่องเปิดสายอากาศจานสะท้อน จะเลือกใช้ค่าปัจจัยการสังเคราะห์พื้นผิวและช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนเริ่มต้นด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตดังตารางที่ 4.11 และเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นดังนี้

$$\gamma = \tfrac{\pi}{2}, \psi = g \text{ และ } \alpha = \tfrac{\pi}{2}, \beta = f(g) \quad \text{ที่ซึ่ง } f'(g) = \left[D\left(\tfrac{\pi}{2}, g\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

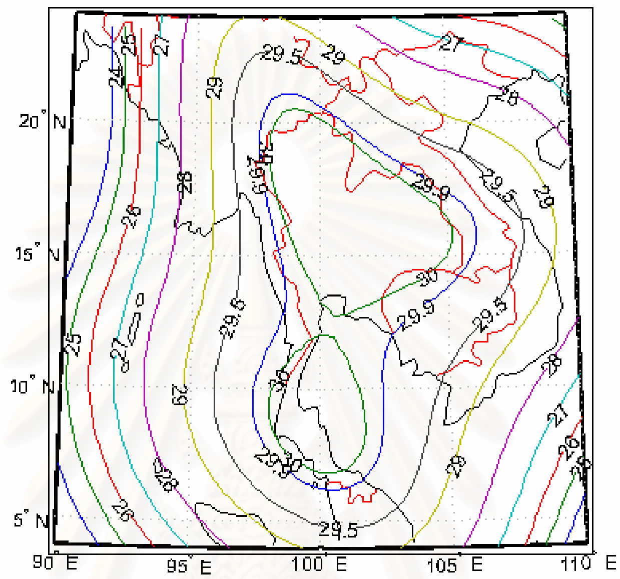
<u>ตารางที่ 4.11</u> ค่าปัจจัยต่าง ๆ ที่ใช้ในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตกรณีศึกษาผลการปรับอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทของช่องเปิดสายอากาศจานสะท้อน

อัตราส่วนระหว่างแกนเอก (Dy) และแกนโท (Dx)	1:0.82	1:0.725	1:0.615
ค่าสัมประสิทธิ์ K	145	145	145
ค่าสัมประสิทธิ์ a เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง γ	45	45	45
ค่าสัมประสิทธิ์ b เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง ψ	51	65	70
ระดับความเรียว (dB)	-20	-20	-20
ค่าสัมประสิทธิ์ของสายอากาศป้อนกำลัง (m)	6	6	6

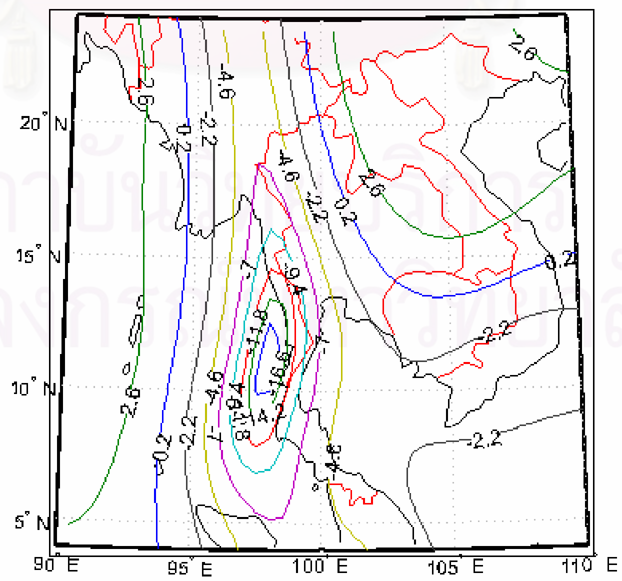
เมื่อนำพื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเข้าสู่กรรมวีธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิวเพื่อคำนวณหาพื้นผิวที่ต้องการ โดย

กำหนดให้มุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นมีค่าเท่ากับ 45 องศา เท่ากันหมดทุกกรณีผลการวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพร่วมกับทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพได้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วม และแนวโพลาไรเซชันไขว้ ดังรูป 4.30 ก ถึง 4.30 ข

<u>กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเป็น 1:0.82</u>



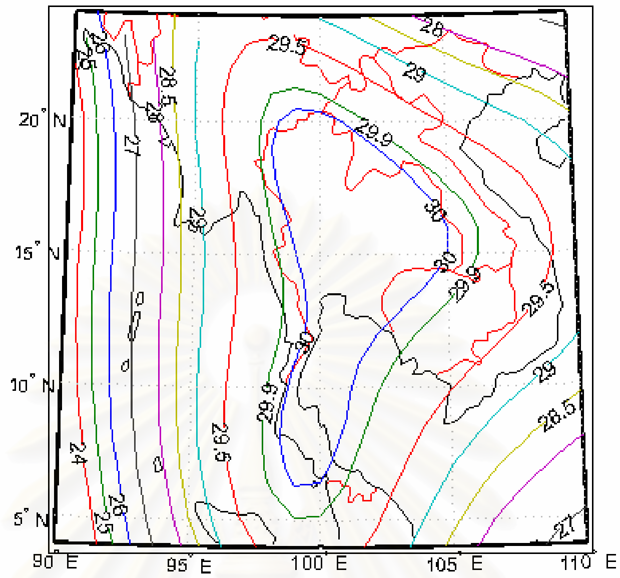
(ก) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเป็น 1:0.82



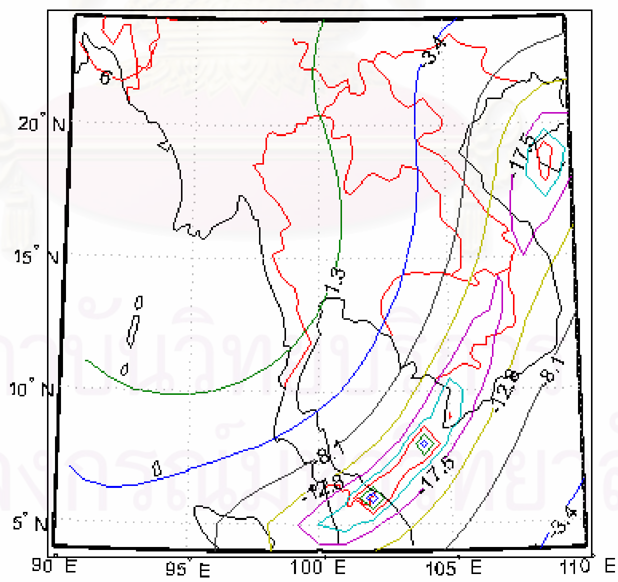
(ข) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเป็น 1:0.82

รูปที่ 4.30 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนกรณีเปลี่ยนอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโท

<u>กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเป็น 1:0.725</u>



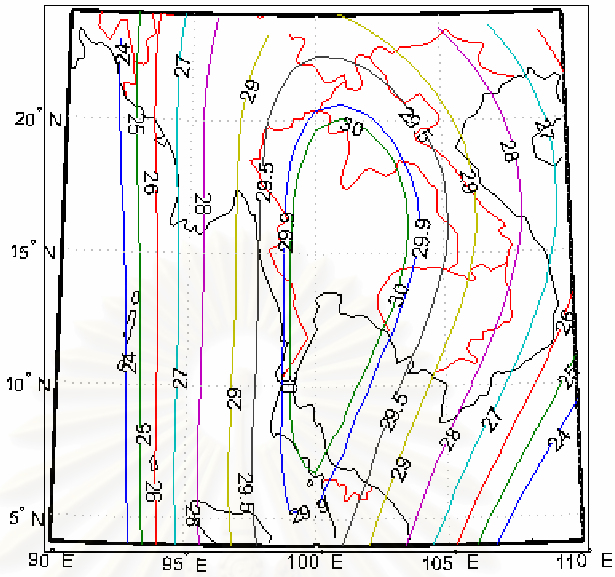
(ค) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเป็น 1:0.725



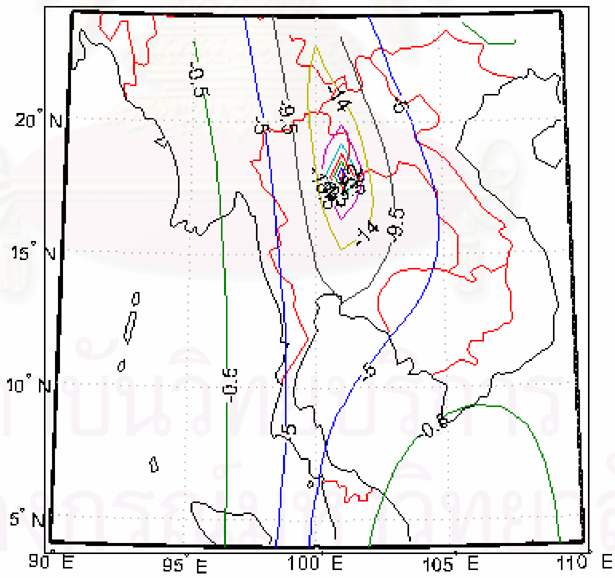
(ง) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเป็น 1:0.725

รูปที่ 4.30 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนกรณีเปลี่ยนอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโท

<u>กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเป็น 1:0.615</u>



(จ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วม กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเป็น 1:0.615



(ฉ) อัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเป็น 1:0.615

รูปที่ 4.30 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศจานสะท้อนกรณีเปลี่ยนอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโท

ผลการเปรียบเทียบในกรณีเปลี่ยนอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทของช่องเปิดสายอากาศจานสะท้อนทั้ง 3 ขนาด โดยมุมเล็งเท่ากับ 45 องศาเหมือนกันทุกกรณี จากรูปที่ 4.30 จะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อ

อัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทมีค่าแตกกันมากขึ้น แบบรูปการแผ่พลังงานในแนวโพลาไรเซชันร่วมที่ได้จะยืดตัวออกในแนวลองจิจูดมากขึ้น กล่าวคือค่าอัตราขยายจะลดลงอย่างช้าในแนวลองจิจูดหรือแนวที่ตั้งฉากกับแกนโทของช่องเปิดจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป เมื่อพิจารณาตารางที่ 4.12 พบว่าระดับอัตราขยายมากที่สุดในแนวโพลาไรเซชันไขว้กรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเท่ากับ 1:0.82 จะมีค่าสูงสุดคือ 3.99 สำหรับกรณีอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทเท่ากับ 1:0.615 จะมีค่าอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากสุดที่จุดสังเกตต่ำสุด และประสิทธิภาพของการใช้ส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชันมากสุดคือ 1 เนื่องจากขนาดของจานสะท้อนเล็กกว่ากรณีอื่น แต่ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมก็จะมากกว่ากรณีอื่นเช่นเดียวกัน

<u>ตารางที่ 4.12</u> ค่าลักษณะสมบัติการแผ่พลังงานของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อครอบคลุมพื้นที่ประเทศไทยในกรณีศึกษาผลการปรับอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโท

อัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโท	ค่าเฉลี่ยอัตราขยาย	ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากสุด	ประสิทธิภาพของการใช้ส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชัน
1:0.820	29.9899	0.0517	3.9938	0.735
1:0.725	29.983	0.0597	3.6321	0.643
1:0.615	29.92	0.1862	-1.222	1

<u>สรุป</u>

ผลการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่พิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นร่วมกับกรรมวิธีสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบน พบว่าจานสะท้อนที่สังเคราะห์ด้วยทัศนศาสตร์เรขาคณิตสามารถจัดรูปลำคลื่นแบบลำวงรีขนาดต่าง ๆ ได้ เมื่อนำพื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดมาเข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดในกรรมวิธีสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบนเพื่อปรับพื้นผิวต่อ ก็จะช่วยทำให้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้ใกล้เคียงกับแบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการมากขึ้น โดยระดับพูข้างมีขนาดไม่เกิน -20 dB สำหรับพื้นที่ครอบคลุมอย่างง่ายนั้นจะใช้ทัศนศาสตร์เรขาคณิตในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนที่ให้ลำคลื่นรูปร่างใกล้เคียงการแบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการ แล้วจึงนำพื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดที่ได้เข้าสู่กรรมวิธีการสังเคราะห์เชิงการเลี้ยวเบน จะพบว่าใช้จำนวนรอบในกระบวณการวนซ้ำน้อยกว่าการใช้พื้นผิวพาราโบลอยด์เป็นพื้นผิวเริ่มต้น

สำหรับการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปเพื่อครอบคลุมพื้นที่ซับซ้อนนั้น จะใช้ทัศน-ศาสตร์เรขาคณิตในการสังเคราะห์รูปร่างช่องเปิดที่เหมาะสมกับรูปร่างประเทศไทย สายอากาศที่รูปร่างช่องเปิดมีความเหมาะสมนี้จะช่วยให้ลดทุนต้นการสร้างและสายอากาศมีน้ำหนักที่เบาขึ้น วิทยานิพนธ์นี้แบ่งกรณีศึกษาค่าปัจจัยต่าง ๆ ของระบบสายอากาศที่มีผลต่อการสังเคราะห์ออกเป็น 4 กรณี กรณีแรกผลของการปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นพบว่าการเพิ่มมุมเล็งจะส่งผลทำให้ระดับอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้มีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากความไม่สมมาตรของตัวสายอากาศที่เพิ่มขึ้น กรณีที่สองผลจากการเปลี่ยนจำนวนพจน์ของ

ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ในสมการพื้นผิวปรากฏว่าการใช้จำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์น้อยเกินไปจะไม่สามารถสร้างลำคลื่นที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ แต่การใช้จำนวนพจน์ฮาร์มอนิกฟูริเยร์ที่มากขึ้นก็จะทำให้ระดับของพูข้างมีค่าเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน กรณีที่สามผลการปรับตัวประกอบปรับขนาดของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป จะพบว่าการปรับให้ขนาดของสายอากาศเพิ่มขึ้นจะช่วยทำให้สามารถจัดรูปลำคลื่นที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ดีขึ้น แต่อัตราขยายแนว โพลาไรเซชันไขว้ก็จะยกระดับขึ้นด้วย และกรณีสุดท้าย ผลจากการปรับอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทของช่องเปิดสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปปรากฏว่าแบบรูปการแผ่พลังงานที่สังเคราะห์ได้จะมีลักษณะยืดตัวออกในแนวตั้งกับแกนโทมากขึ้นเมื่ออัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทมีค่ามากขึ้น

บทที่ 5

การทดสอบสายอากาศต้นแบบ

ความนำ

บทนี้กล่าวถึงรายละเอียดของการสร้างสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปต้นแบบ ที่ให้แบบรูปการแผ่พลังงานครอบคลุมพื้นที่ของประเทศไทย รวมทั้งการตรวจวัดลักษณะพื้นผิวสายอากาศต้นแบบที่สร้างขึ้น และการทดสอบคุณลักษณะสมบัติการแผ่กระจายคลื่นด้วยวิธีการทดสอบสายอากาศย่านสนามใกล้เชิงระนาบซึ่งนิยมนำมาใช้ในการทดสอบสายอากาศช่องเปิด เช่น สายอากาศจานสะท้อน เป็นต้น วิธีการนี้จะไม่สามารถให้ค่าสนามที่มีความน่าเชื่อถือในช่วงองศาไกล ๆ ได้ เพราะการจะทราบรายละเอียดค่าสนามทุกทิศทางนั้นจำเป็นต้องสร้างระนาบปิดล้อมสายอากาศทุกทิศทาง แต่เนื่องจากสายอากาศต้นแบบใช้งานสำหรับพื้นที่ครอบคลุมอยู่ในบริเวณพูหลักในช่วง 1-2 องศา ดังนั้นวิธีการที่ใช้จึงถือว่าเพียงพอแก่การเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์ซึ่งได้กล่าวรายละเอียดไว้ในบทที่ 3

5.1 การสร้างสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปต้นแบบ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกที่จะสร้างสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปต้นแบบสำหรับพื้นที่ครอบคลุมรูปประเทศไทย โดยกำหนดให้ใช้ความถี่ปฏิบัติการย่าน Ku 12 GHz ตำแหน่งดาวเทียมที่วงโคจรค้างฟ้าอยู่ที่ลองจิจูด 101 องศา ตะวันออก ตำแหน่งมุมเล็งของสายอากาศจานสะท้อนอยู่ที่ละติจูด 14 องศาเหนือ ลองจิจูด 101 องศาตะวันออก โดยแบบรูปการแผ่พลังงานของแหล่งกำเนิดให้เป็นดังสมการ (4.2) สำหรับค่าปัจจัยที่ใช้ในสังเคราะห์จานสะท้อนตั้งต้นด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตเป็นดังนี้

ค่าสัมประสิทธิ์ K	60
ค่าสัมประสิทธิ์ a เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง γ	40
ค่าสัมประสิทธิ์ b เพื่อปรับขนาดลำวงรอบคลื่นในทิศทาง ψ	53
ระดับความเรียว	-20 dB
ค่าสัมประสิทธิ์ของสายอากาศป้อนกำลัง (m)	7
มุมเล็งของสายอากาศป้อน (β_o)	$-\frac{\pi}{4}$

<u>เงื่อนไขเริ่มต้น</u> ที่ใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิวสายอากาศในกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตคือ

$$\gamma = \tfrac{\pi}{2}, \psi = g \text{ และ } \alpha = \tfrac{\pi}{2}, \beta = f(g)$$

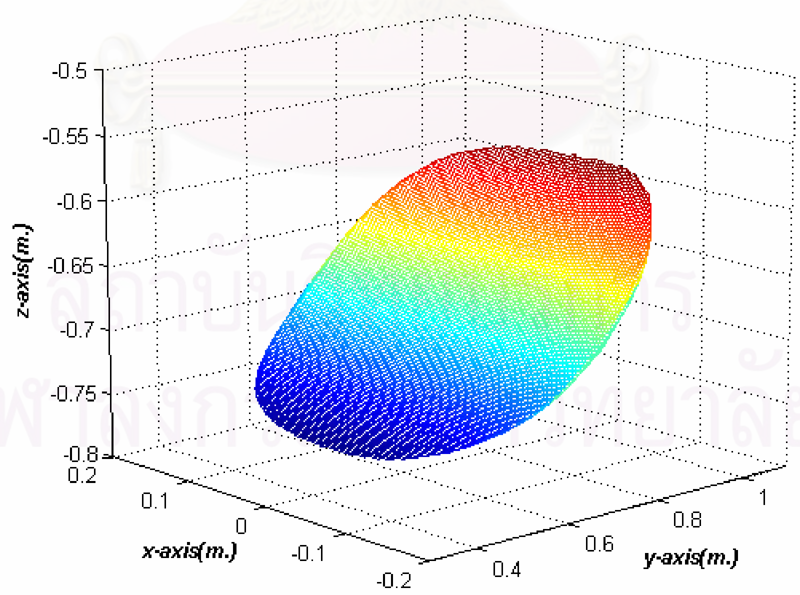
ซึ่ง $f'(g) = \left[D\left(\tfrac{\pi}{2}, g\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \dfrac{7.746\sin g}{\cosh(53\cos g)}$ และจะได้ β ที่ $t = 0$ ดังนี้

$$f = 0.378\tan\left(-0.7734\left[\tan^{-1}\left(\exp(65\cos g)\right) - \tfrac{\pi}{4}\right]\right) - \tfrac{\pi}{4}$$

ในขั้นตอนการสร้างนั้น เนื่องจากเครื่องจักรกล CNC (Computer Numerical Control) มีขนาดที่ค่อนข้างจำกัด (0.5 ม. X 0.9 ม. X 0.45 ม.) ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้เลือกใช้อัตราส่วนขนาด 1 : 1 เมตร เพื่อไม่ให้สายอากาศต้นแบบต้องแบ่งชิ้นส่วนย่อยในการสร้าง อันจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนหรือรอยต่อของพื้นผิว เมื่อนำพื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป ที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่พิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น เข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหาะสมที่สุดของพื้นผิวด้วยสมการพหุนามอันดับสามรวมกับฮาร์มอนิกฟูริเยร์ โดยใช้จำนวนพจน์ฮาร์มอนิกทั้งสิ้น 25 พจน์ และใช้สมการไฮเพอร์ควอดริกเพื่อประมาณขอบของจานสะท้อนจำนวน 3 พจน์ กำหนดให้สายอากาศป้อนกำลังคลื่นมีโพลาไรเซชันเชิงเส้นในแกน x หลังจากผ่านกระบวนการหาค่าเหมาะสมที่สุดจนได้พื้นผิวของจานสะท้อน พื้นผิวของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่สังเคราะห์ได้แสดงดังรูปที่ 5.1 และแบบรูปการแผ่พลังงานในแนวโพลาไรเซชันร่วมและแนวโพลาไรเซชันไขว้แสดงดังรูปที่ 5.14 และ 5.17 ตามลำดับ ผลการคำนวณลักษณะสมบัติการแผ่กระจายคลื่นเป็นดังตารางที่ 5.1 จะเห็นได้ว่าลำคลื่นครอบคลุมพื้นที่ประเทศไทยโดยมีอัตราขยายในแนวโพลไรเซชันร่วมเฉลี่ยอยู่ที่ 30 dBi ตรงตามที่ต้องการ และระดับของอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้มีค่ามากสุดที่ระดับ -1.8044 dBi ประสิทธิภาพการส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชันเป็น 1

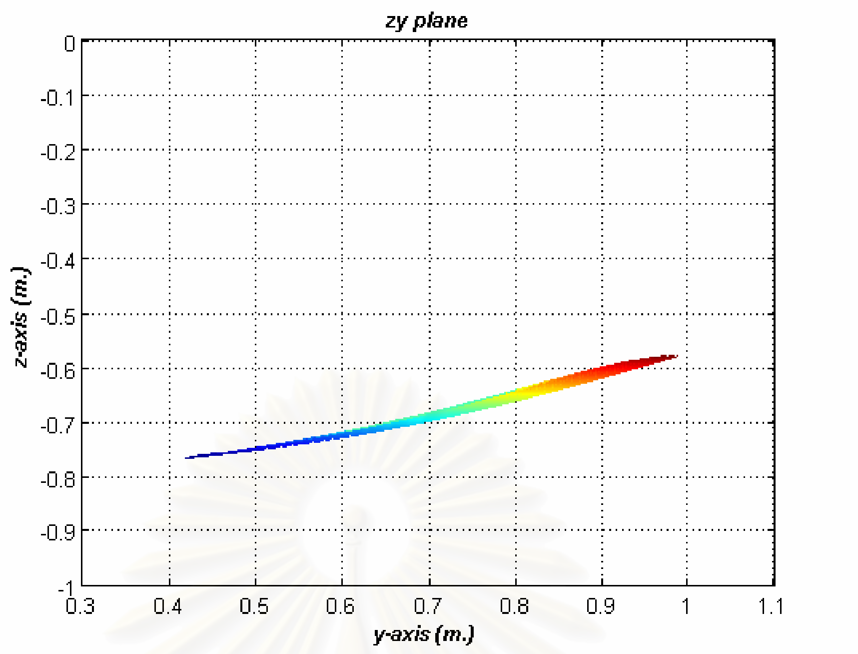
<u>ตารางที่ 5.1</u> ค่าลักษณะสมบัติการแผ่กระจายคลื่นของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปต้นแบบ

ค่าเฉลี่ยอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม	ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากสุด	ประสิทธิภาพของการส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชัน
29.981	0.0854	-1.8044	1

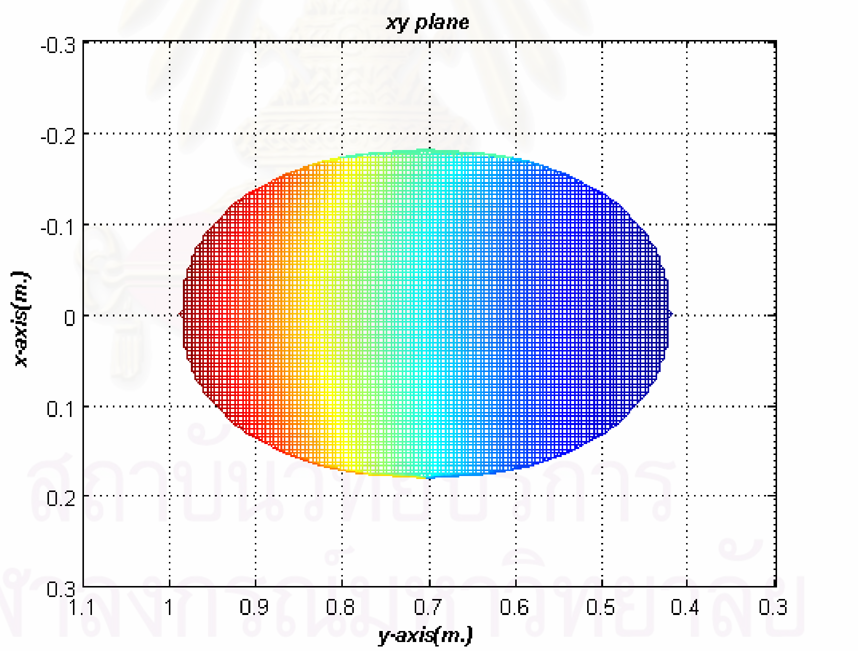


(ก) ภาพ 3 มิติของพื้นผิวสายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้

รูปที่ 5.1 พื้นผิวของจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้



(ข) พื้นผิวสายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้ในระนาบ zy



(ค) พื้นผิวสายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้ในระนาบ xy

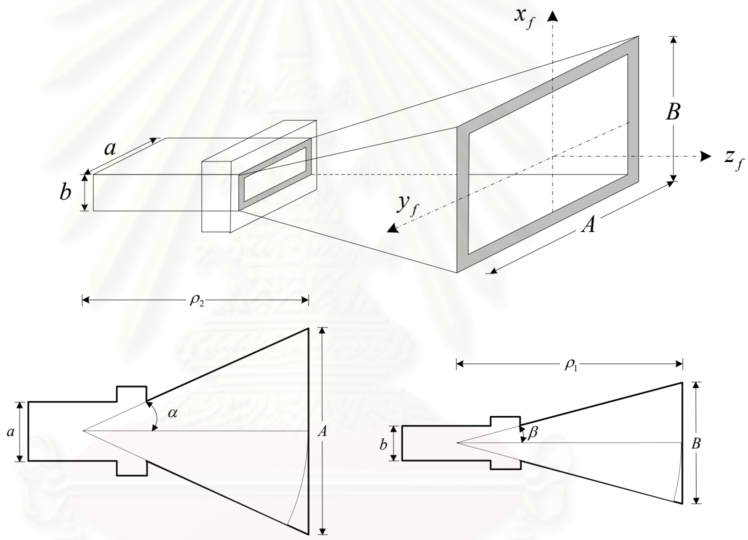
รูปที่ 5.1 พื้นผิวของจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้ (ต่อ)

เนื่องจากจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้นั้นอยู่ในรูปของสมการพื้นผิว เพราะฉะนั้นในกระบวนการสร้างสายอากาศจึงไม่จำเป็นต้องใช้การประมาณพื้นผิวด้วยโปรแกรม CAD จำนวนจุดที่ใช้ในการสร้างสายอากาศจานสะท้อนต้นแบบแบ่งเป็นจำนวนจุดในแกน x จำนวน 162 จุด แกน y จำนวน 254 จุด คิดเป็นระยะห่าง

ระหว่างจุดคือ หนึ่งในสิบเท่าของความยาวคลื่น โดยมีจำนวนทั้งหมด 41148 จุด ที่ใช้ในการลงจุดเพื่อกัดผิวจานด้วยเครื่องจักร CNC ที่ วิทยาลัยเทคโนโลยีอุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ วัสดุที่ใช้กัดพื้นผิวคือ แผ่นอะคริลิกขนาด (40 มม. X 700 มม. X 450 มม.) 2 แผ่น เมื่อประกบกันจะได้ความหนารวมเป็น 80 มม. พื้นผิวที่กัดเสร็จเรียบร้อยจะถูกนำมาฉาบด้วย สีนำไฟฟ้า (-80 dB ต่อ สีหนา 2 มม.)

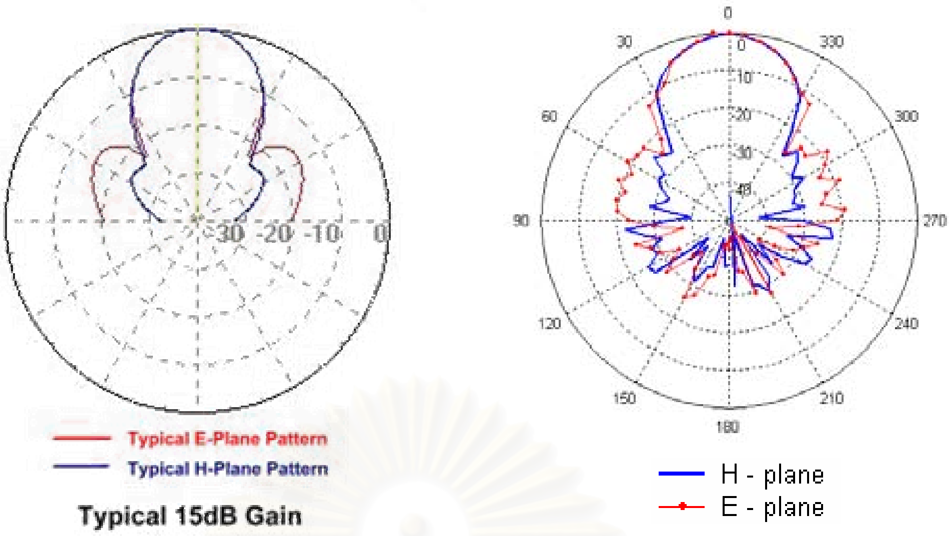
สายอากาศป้อนกำลังคลื่น

เนื่องจากในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนดัดรูปด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตนั้น ใช้สายอากาศป้อนที่เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นเพื่อให้การทดสอบมีความถูกต้องมากขึ้น ในการวิเคราะห์จานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่สังเคราะห์ได้จึงเลือกสายอากาศช่องเปิดที่มีแบบรูปการแผ่พลังงานใกล้เคียงในช่วงมุมที่ครอบคลุมการสาดส่องไปยังสายอากาศจานสะท้อน คือช่วงมุมระหว่าง –25 ถึง 25 องศา วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกสายอากาศปากแตรรูปทรงพีระมิดดังรูปที่ 5.2



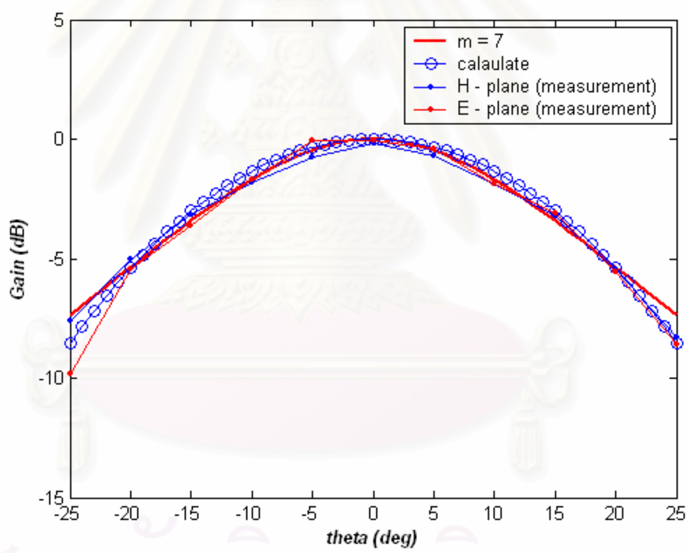
รูปที่ 5.2 สายอากาศป้อนกำลังคลื่นแบบปากแตรรูปทรงพีระมิด

สายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ใช้ในการทดสอบมีขนาดความกว้างในระนาบสนามแม่เหล็ก (A) เป็น 5.7 ซม. ขนาดความกว้างในระนาบสนามไฟฟ้า (B) เป็น 3.4 ซม. รัศมีจากศูนย์กลางวัฏภาคถึงช่องเปิดในระนาบสนามไฟฟ้า (ρ_1) เป็น 14 ซม. และ รัศมีจากศูนย์กลางวัฏภาคถึงช่องเปิดในระนาบสนามแม่เหล็ก (ρ_2) เป็น 13.2 ซม. อัตราขยายเท่ากับ 15 dB แบบรูปการแผ่พลังงานในแนวสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กเป็นดัง รูปที่ 5.3 เมื่อเปรียบเทียบกับแบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้จากสมการ (4.2) ที่ m = 7 ดังรูปที่ 5.4 จะเห็นได้ว่าแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ใช้ในการวิเคราะห์กับสายอากาศปากแตรที่ใช้ในการทดลองมีค่าใกล้เคียงกันในช่วงมุมที่สาดส่องไปยังสายอากาศจานสะท้อน



(ก) แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้จากการคำนวณ [30]   (ข) แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้จากการวัด

รูปที่ 5.3 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศปากแตรรูปทรงพีระมิด



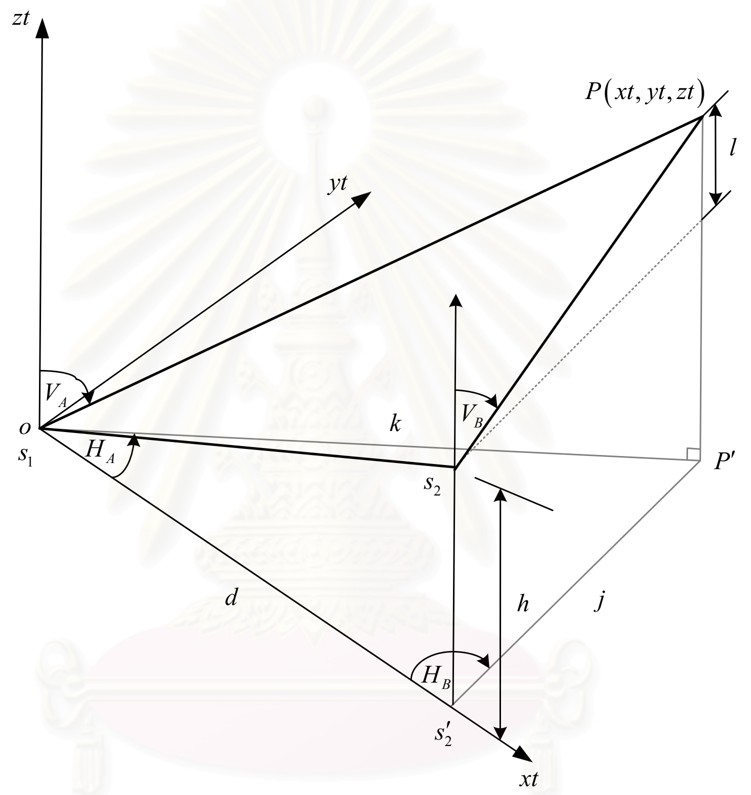
รูปที่ 5.4 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์และผลการวัดแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นในช่วงมุมสาดส่องบนจานสะท้อน

5.2 การตรวจวัดลักษณะพื้นผิวของจานสะท้อนต้นแบบ

เนื่องจากคุณภาพของพื้นผิวจานสะท้อนที่ได้จากกระบวนการสร้างมีผลกระทบโดยตรงต่อคุณสมบัติการแผ่กระจายคลื่น ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องตรวจวัดลักษณะของพื้นผิว และคำนวณหาความผิดพลาดเพื่อนำมาทำนายระดับของผลกระทบที่จะเกิดขึ้น โดยอุปกรณ์ที่ใช้ในการเล็งจุดบนพื้นผิวคือ กล้อง theodolite รุ่น leica TC 1700 ที่มีความละเอียดในระดับ 0.1 มิลิเมตร หลักการในการตรวจวัดลักษณะของพื้นผิวสายอากาศจานสะท้อนต้นแบบที่สร้างขึ้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้ทฤษฎีการตัดสามมิติ (three -

dimensional intersection theory) [28] ข้อจำกัดของวิธีการนี้คือจะต้องวางสายอากาศในแนวดิ่งเท่านั้น ระบบพิกัดที่ใช้ในการวัดแสดงดังรูปที่ 5.5

ค่าที่ได้จากกล้อง theodolite นั้นจะเป็นความสูงของกล้อง และ มุมดิ่ง (ก้ม-เงย) V กับมุมทิศ H ดังนั้นเมื่อกำหนดให้จุด s_1 เป็นจุดกำเนิด แกน zt คือ แกนในแนวดิ่งของจุด s_1 และแกน xt ให้อยู่บนเส้นที่ลากจุด s_1 ไปยังจุด s_2' การหา P ในระบบพิกัด (xt, yt, zt) สามารถทำได้โดยใช้หลักของตรีโกณมิติซึ่งมีความสัมพันธ์กับมุมทิศ H_A , H_B , V_A และ V_B



รูปที่ 5.5 ระบบพิกัดและเรขาคณิตในการตรวจวัดลักษณะพื้นผิว

ใช้กฎของไซน์ร่วมกับรูปสามเหลี่ยม $\Delta s_1 P' s_2'$ จะได้

$$k = \frac{b \sin H_B}{\sin(H_A + H_B)} \tag{5.1}$$

$$j = \frac{b \sin H_A}{\sin(H_A + H_B)} \tag{5.2}$$

ตำแหน่งของจุด P ในแนวแกน xt และแกน yt จะได้เป็น

$$xt = \frac{b \sin H_B \sin H_A}{\sin\left(H_A + H_B\right)} \tag{5.3}$$

$$yt = \frac{b \sin H_B \cos H_A}{\sin\left(H_A + H_B\right)} \tag{5.4}$$

ตำแหน่งของจุด P ในแนวแกน zt มีค่าเท่ากับ

$$zt = \tfrac{1}{2}\left(k \cot V_A + j \cot V_B + h\right) \tag{5.5}$$

หรือ

$$zt = \tfrac{1}{2}\left(b \frac{\sin H_B \cot V_A + \sin H_A \cot V_B}{\sin\left(H_A + H_B\right)} + h\right) \tag{5.6}$$

ในการวัดนั้นจะตั้งกล้อง 2 จุด ตั้งจุดแรกที่ s_1 และ จุดที่สองที่ s_2 เมื่อได้จุด P ที่อยู่บนพื้นผิวของจานสะท้อนมาก็จะสามารถหาความคลาดเคลื่อนของพื้นผิวได้ โดยเปรียบกับพื้นผิวที่ได้มาจากการสังเคราะห์จะได้ความคลาดเคลื่อนในแนวแกน yt แต่ละจุดดังนี้

$$\delta_{yti} = yt_i - f\left(xt_i, zt_i\right) \tag{5.7}$$

โดยที่ yt_i คือ จุดที่อยู่บนพื้นผิวที่สร้างขึ้น และ $f\left(xt_i, zt_i\right)$ คือ จุดในแนวแกน yt ที่ได้จากผลการคำนวณ

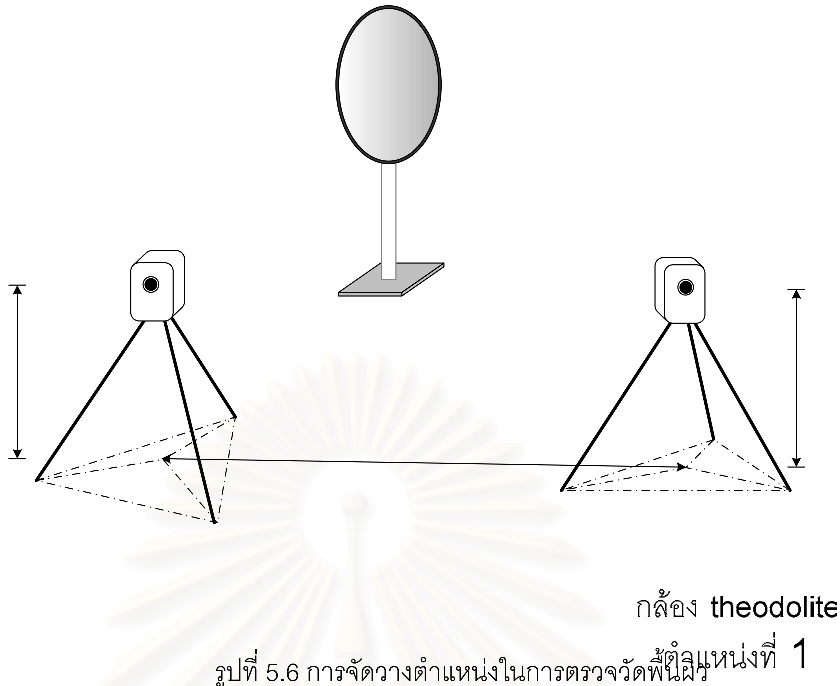
ค่ารากของกำลังสองเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนในแนวแกน $\left(\sigma_{yt}\right)$ และความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยในแนวแกน $\left(\mu_{yt}\right)$ จากจุดสุ่มตัวอย่างทั้งหมดจำนวน n จุด สามารถหาได้ดังนี้

$$\mu_{yt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| yt_i - \overline{\delta}_{yt} \right|}{n} \tag{5.8}$$

$$\sigma_{yt} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\delta_{yti} - \mu_{yt}\right)^2}{n}} \tag{5.9}$$

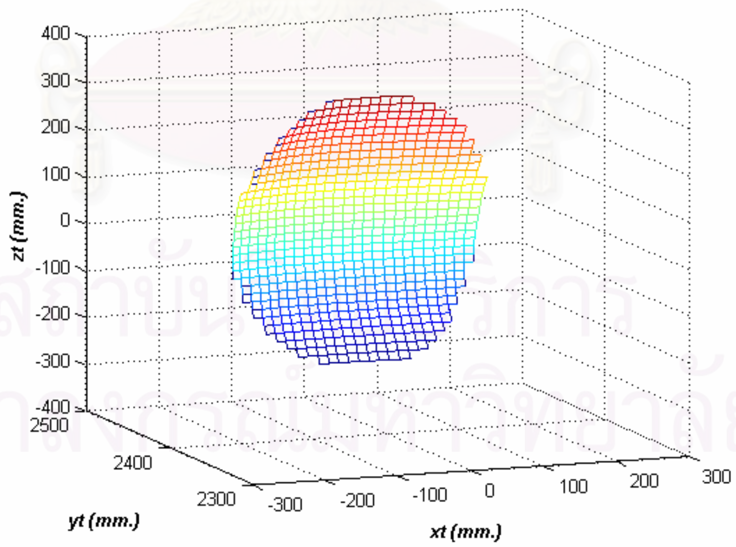
โดย $\overline{\delta}_{yt} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left|\delta_{yti}\right|}{n}$

ขั้นตอนในการวัดเริ่มโดย ทำเครื่องหมายที่ตำแหน่งที่ต้องการจะวัดลักษณะพื้นผิวโดยที่วิทยานิพนธ์นี้ใช้วิธี ได้จำนวนของตัวอย่างทั้งสิ้น 875 ตัวอย่างแบ่งเป็น 35 แถว ในแกน zt ระยะห่างระหว่างจุดคิดเป็น 180 มม. และ 25 สดมภ์ ในแกน xt ระยะห่างระหว่างจุดคิดเป็น 136 มม. มีค่าความเชื่อมั่น 95 เปอร์เซ็นต์ มีความคลาดเคลื่อนที่ ± 3.28 เปอร์เซ็นต์ เมื่อได้จำนวนตัวอย่างที่ใช้ในการตรวจสอบพื้นผิวแล้วก็จะนำมาลงจุดบนพื้นผิวของจานสะท้อน จากนั้นจึงใช้กล้องสำรวจเล็งตำแหน่งพิกัดดังกล่าวเพื่อหาลักษณะของพื้นผิวจานสะท้อนการจัดวางตำแหน่ง และระยะของกล้องสำรวจเป็นดังรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.6 การจัดวางตำแหน่งในการตรวจวัดพื้นผิว

ครั้งแรกจะเก็บค่ามุม H_A และ V_A ที่จุดสุ่มทุกตำแหน่งก่อน โดยตั้งกล้อง theodolite ที่ตำแหน่งที่ 1 ซึ่งก็คือจุด s_1 ความสูงที่อ่านจากกล้องคือ 1.27 เมตร เมื่อเก็บค่ามุมในตำแหน่งที่ 1 ณ จุดสุ่มตัวอย่างแล้วทุกจุด จึงตั้งกล้อง theodolite ที่ตำแหน่งที่สอง หรือ จุด s_2' ห่างจากจุด s_1 เป็นระยะ d = 2.21 เมตร ที่ระดับความสูง 1.3 เมตร ดังนั้นจะได้ค่า h = 30 มิลลิเมตร ผลการตรวจวัดลักษณะพื้นผิวเป็นดังรูปที่ 5.7



รูปที่ 5.7 พื้นผิวจานสะท้อนที่ได้จากการตรวจวัดพื้นผิวด้วยกล้อง theodolite

ได้ค่ารากของกำลังสองเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนในแนวแกน $\left(\sigma_{yt}\right)$ เป็น 1.42 มิลลิเมตร และค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยในแนวแกน $\left(\mu_{yt}\right)$ เป็น 2.01 มิลลิเมตร คิดเป็น 0.0804 เท่าของความยาวคลื่น ในการ

ทำนายผลกระทบที่เกิดจากพื้นผิวที่มีความคลาดเคลื่อน วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้แบบจำลองพื้นผิวด้วยสมการต่อไปนี้ [31]

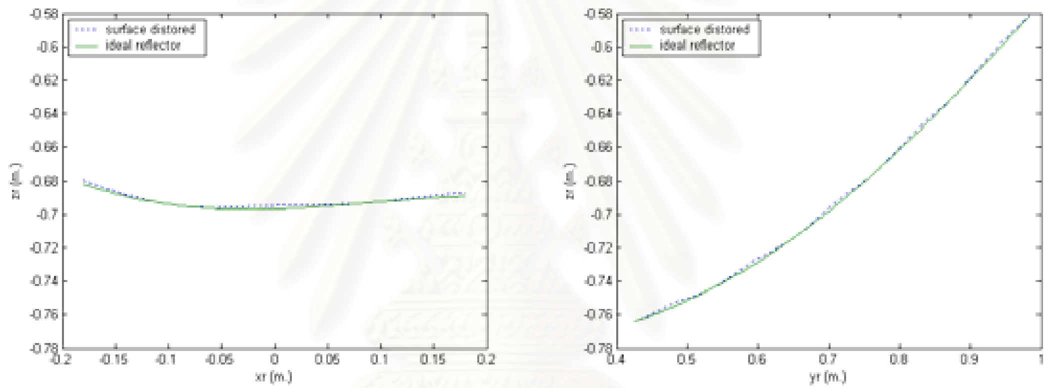
$$\Delta z_r = \frac{\mu_{dz}}{2}\cos\left(n_x \pi \frac{x'}{Dx}\right) + \frac{\mu_{dz}}{2}\cos\left(n_y \pi \frac{y'}{Dy}\right) \tag{5.10}$$

โดยที่ Δz_r คือ พื้นผิวที่คลาดเคลื่อนในทางแกน z_r มีผลทำให้ค่าวัฏภาคเปลี่ยนไปเท่ากับ $e^{jk\Delta z_r}$

μ_{dz} คือ ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนของพื้นผิว

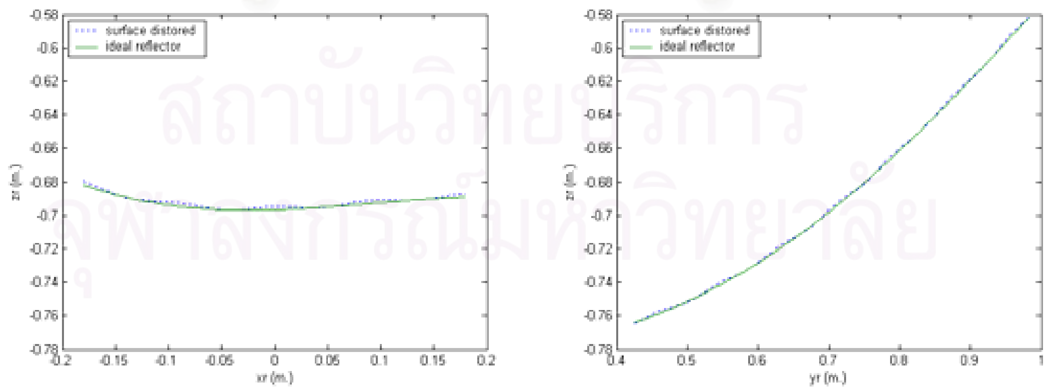
n_x และ n_y คือ จำนวนระลอกคลื่นของพื้นผิวในแนวแกน x' และ y' ตามลำดับ

เมื่อให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนของพื้นผิว μ_{dz} มีค่าเท่ากับ 0.0804 เท่าของความยาวคลื่น โดยกำหนด n_x และ n_y แตกต่างกันจะได้พื้นผิวจานสะท้อนเป็นดังนี้



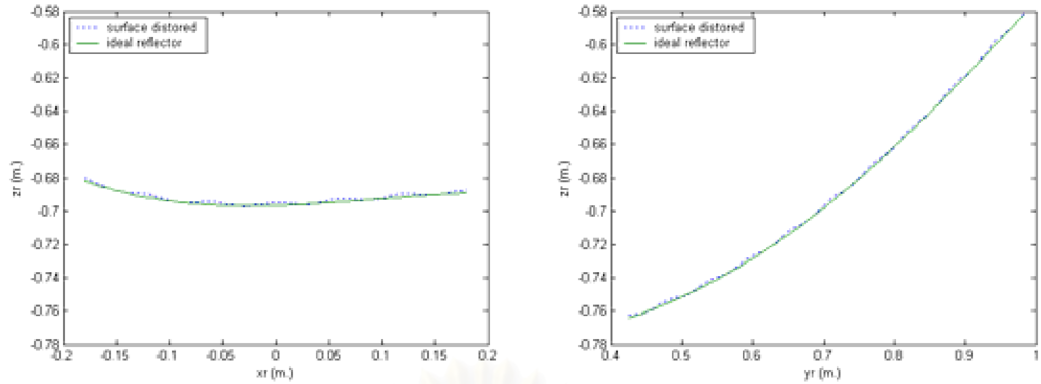
(ก) หน้าตัดในระนาบ $x_r z_r$ (ข) หน้าตัดในระนาบ $y_r z_r$

รูปที่ 5.8 พื้นผิวจานสะท้อนที่มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.0804 λ เมื่อ n_x = 2 และ n_y = 5



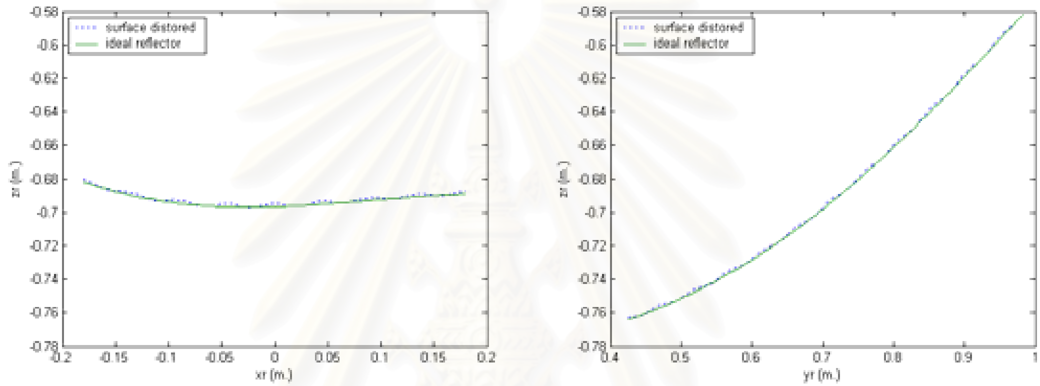
(ก) หน้าตัดในระนาบ $x_r z_r$ (ข) หน้าตัดในระนาบ $y_r z_r$

รูปที่ 5.9 พื้นผิวจานสะท้อนที่มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.0804 λ เมื่อ n_x = 4 และ n_y = 7



(ก) หน้าตัดในระนาบ $x_r z_r$ (ข) หน้าตัดในระนาบ $y_r z_r$

รูปที่ 5.10 พื้นผิวจานสะท้อนที่มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.0804 λ เมื่อ n_x = 6 และ n_y = 10



(ก) หน้าตัดในระนาบ $x_r z_r$ (ข) หน้าตัดในระนาบ $y_r z_r$

รูปที่ 5.11 พื้นผิวจานสะท้อนที่มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.0804 λ เมื่อ n_x = 8 และ n_y = 12

ความผิดเพี้ยนของพื้นผิวมีผลทำให้อัตราขยายลดลงจากเดิม เมื่อคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้จากพื้นผิวที่มีระลอกจำนวนต่าง ๆ แล้ว จะได้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วมและแนวโพลาไรเซชันไขว้เป็นดังรูปที่ 5.15 จะสังเกตเห็นว่าจำนวนระลอกน้อย ๆ ทำให้แบบรูปการแผ่พลังงานผิดเพี้ยนไปมากกว่าจำนวนระลอกมาก ๆ พิจารณาได้จากความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยในตารางที่ 5. 2 เนื่องจากพื้นผิวคลาดเคลื่อนเป็นบริเวณที่กว้างกว่า

<u>ตารางที่ 5.2</u> ค่าลักษณะสมบัติการแผ่กระจายคลื่นของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปในกรณีพื้นผิวมีความผิดเพี้ยน

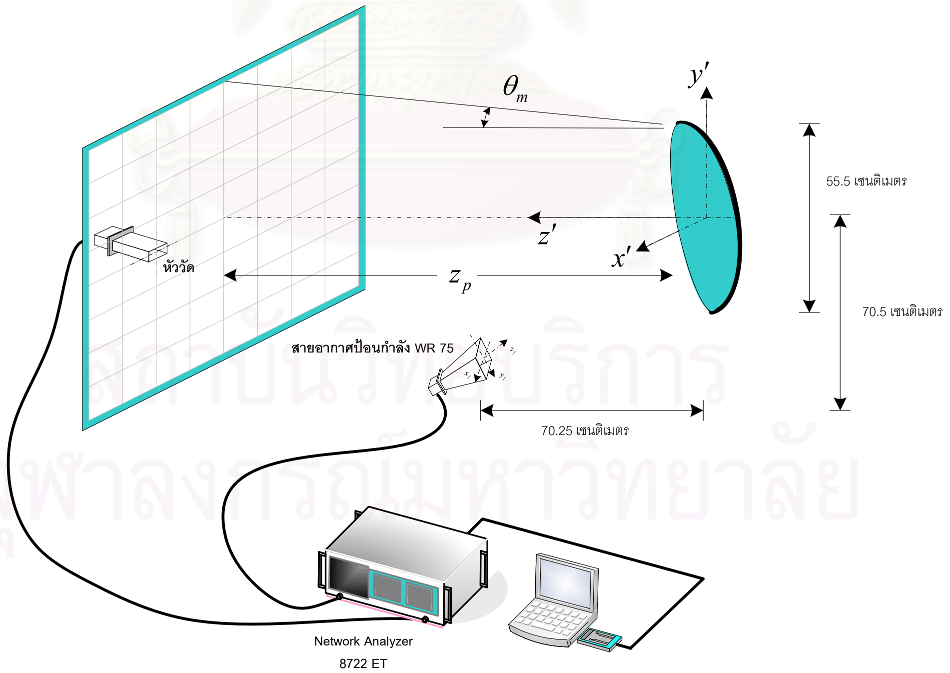
กรณี	ค่าเฉลี่ยอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วม	ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้มากสุด	ประสิทธิภาพการส่งสัญญาณแบบสองโพลาไรเซชัน
n_x = 2 , n_y = 5	29.865	0.20482	-1.8462	1
n_x = 4 , n_y = 7	29.89	0.171	-1.569	1
n_x = 6 , n_y = 10	29.86	0.15351	-1.8278	1
n_x = 8 , n_y = 12	29.887	0.13719	-1.682	1
พื้นผิวไม่ผิดเพี้ยน	29.981	0.0854	-1.8044	1

5.3 ระบบการวัดสนามย่านใกล้เชิงระนาบ

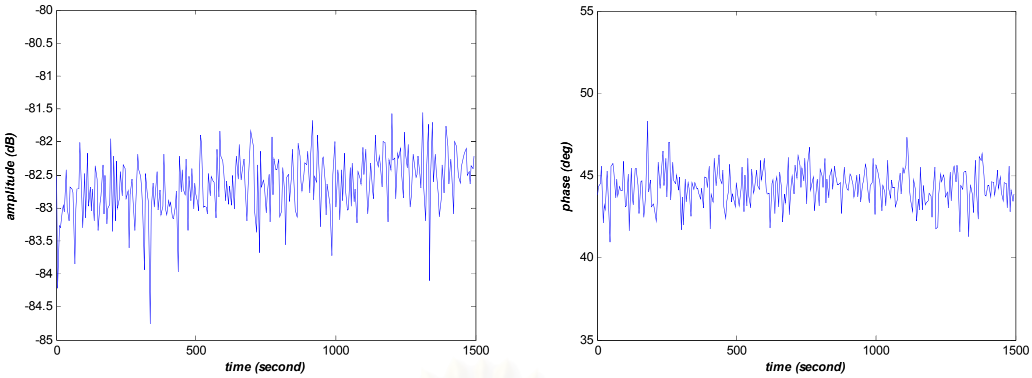
การทดสอบสายอากาศแบบสนามย่านใกล้เชิงระนาบนั้น เป็นวิธีการกวาดวัดค่าสนามที่แผ่กระจายออกมาเฉพาะบริเวณด้านหน้าของสายอากาศในระยะใกล้ ที่มีข้อแม้ว่าต้องพ้นระยะที่เกิดปรากฏการณ์คลื่นจางหาย แล้วนำข้อมูลของสนามไปผ่านการแปลงฟูริเยร์เพื่อคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล วิธีการนี้มักนิยมใช้กันมากกับการทดสอบสายอากาศประเภทจานสะท้อน เพราะมีสภาพเจาะจงทิศทางไปทางด้านหน้าสูง ข้อดีของวิธีการนี้คือ เนื่องจากระยะในการวัดนั้นใกล้กับสายอากาศ จึงสามารถสร้างเป็นห้องทดสอบที่ควบคุมสภาพแวดล้อมได้ง่ายขึ้น อย่างไรก็ตาม วิธีการนี้ยังมีข้อด้อยคือผลการวัดจะเป็นที่ยอมรับได้เฉพาะสนามในบริเวณพูหลักหรือพูข้างองศาใกล้ เนื่องจากการเปรียบเทียบผลวัดกับระเบียบวิธีการวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้ความสำคัญกับค่าสนามที่ช่วงพูหลักเท่านั้น ดังนั้นจึงถือว่าอยู่ภายในขอบเขตของวิธีการนี้

การทดสอบ

ห้องทดสอบสายอากาศย่านสนามใกล้เชิงระนาบเป็นห้องสี่เหลี่ยมติดวัสดุดูดซับคลื่นที่เพดาน ผนังด้านข้าง พื้น และด้านหลังของสายอากาศต้นแบบ ในการเก็บค่าสนามที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนระนาบช่องเปิดรูปสี่เหลี่ยมจะใช้เครื่องวิเคราะห์ข่ายวงจร (Network Analyzer) เชื่อมต่อกับคอมพิวเตอร์ผ่านแผงวงจร GPIB ซึ่งจะเก็บข้อมูลทีละสดมภ์ (column) โดยใช้คอมพิวเตอร์เชื่อมต่อกับวงจรนับเพื่อควบคุมมอเตอร์ที่ติดกับหัววัดแบบกึ่งอัตโนมัติ ตำแหน่งของการติดตั้งสายอากาศต้นแบบในระบบการวัดเป็นดังรูปที่ 5.12



รูปที่ 5.12 ระบบการวัด และการวางตำแหน่งของสายอากาศทดสอบ



(ก) ความแกว่งทางขนาด (ข) ความแกว่งทางวัฏภาค

รูปที่ 5.13 ความเสถียรในระบบการวัด

การตรวจสอบหาความเสถียรในระบบการวัดทำได้ด้วยการเลื่อนหัววัดไว้ที่ตำแหน่งมุมล่างซ้ายสุดของระนาบกวาดวัด ซึ่งถือว่าเป็นกรณีด้อยที่สุดเนื่องจากเป็นบริเวณที่ได้รับผลกระทบจากการสะท้อนภายในห้องทดสอบมากที่สุดโดยจะตั้งหัววัดทิ้งไว้เพื่อเก็บค่าสนามทุกๆ 5 วินาที คิดเป็นเวลาทั้งสิ้น 25 นาที ได้ผลดังรูปที่ 5.13 จะเห็นได้ว่ามีค่าค่อนข้างนิ่งคือขนาดของสนามมีการแกว่งตัวไม่เกิน 2 dB และวัฏภาคมีการแกว่งตัวไม่เกิน 5 องศา เมื่อใช้จำนวนจุดเท่ากับ 11 จุด ตัวประกอบค่าเฉลี่ยเท่ากับ 32 ขั้นตอนการทดสอบสายอากาศต้นแบบเป็นดังนี้

1. ความถี่ปฏิบัติการ 12 GHz คิดเป็นความยาวคลื่น 0.025 เมตร.

2. หัววัดที่ใช้เป็นท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมปลายเปิด ขนาดช่องเปิดเป็น ความยาว 0.0231 เมตร. ความกว้าง 0.0101 เมตร. (รุ่น WR 75)

3. การกวาดวัดสนามบนระนาบกวาดวัดที่มีขนาดความกว้างและความยาวเป็น 1 เมตร หรือ 40 เท่าของความยาวคลื่น ระยะระหว่างระนาบหน้าจานและระนาบกวาดวัดเป็นระยะ 0.905 เมตร คิดเป็นระยะ z_p =36.2 เท่าของความยาวคลื่น กำหนดให้ระยะชักค่าเป็น 0.25 เท่าของความยาวคลื่น วัดสดมภ์ละ 160 จุด ดังนั้นจำนวนข้อมูลทั้งหมดคิดเป็น 25,600 จุด

4. การกำหนดค่าปัจจัยของเครื่องวิเคราะห์ข่ายวงจรในการทดสอบเป็นดังนี้

กำลังส่ง	-5 dBm
ความกว้างแถบความถี่ (IF Bandwidth)	300 Hz
ตัวประกอบค่าเฉลี่ย (avg. factor)	32
จำนวนจุด (number of point)	11
ช่วงความถี่หน้าจอ	0 Hz

5. แบบรูปการแผ่พลังงานที่คำนวณจากค่าสนามไฟฟ้าที่กวาดวัดได้มีความน่าเชื่อถืออยู่ในช่วงมุมหนึ่ง ซึ่งมีค่าเท่ากับมุมที่ลากจากเส้นขอบของสายอากาศต้นแบบไปถึงขอบนอกของระนาบการกวาดวัดทำกับแกน z ดังรูปที่ 5.8 มีค่าเป็นดังนี้

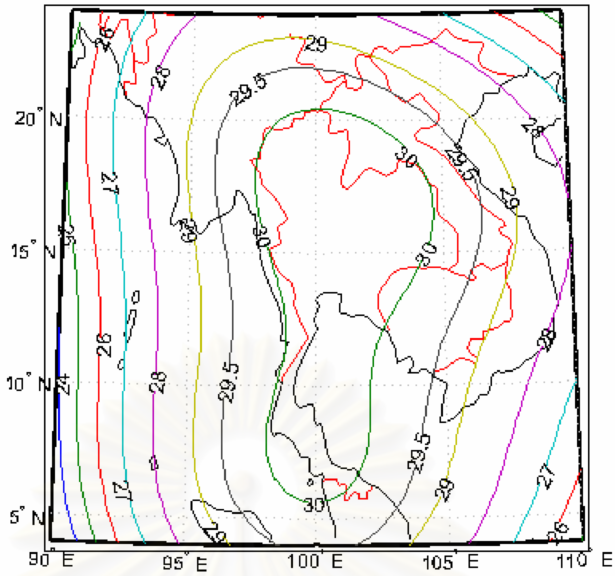
$$\theta_m = \tan^{-1}\left(\frac{(100-55.5)/2}{90.2}\right) = 13.857^\circ$$

6. ความสูญเสียที่เกิดในระบบการวัดแบ่งได้เป็น ความสูญเสียที่เกิดในสายส่งมีค่าเป็น 14.37 dB (รวมความสูญเสียในข้อต่อแล้ว)

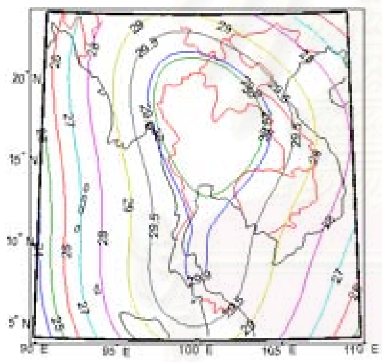
เปรียบเทียบผลการวัดกับผลการวิเคราะห์

การทดสอบสายอากาศจานสะท้อนต้นแบบในย่านทดสอบสนามใกล้เชิงระนาบ การกวาดวัดจะใช้ระยะชักค่าเท่ากับ 0.25 เท่าของความยาวคลื่น หรือ 0.625 เซนติเมตร ระยะจากระนาบหน้าจานถึงระนาบช่องเปิดมีค่าเท่ากับ 90.5 เซนติเมตร หรือ 36.2 เท่าของความยาวคลื่น ผลการวัดแสดงดังรูปที่ 5.16 ข และ 5.19 ข

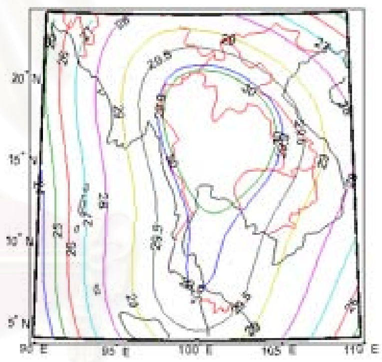
ในแบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้จากการวัด พบว่าอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันร่วมที่ครอบคลุมประเทศไทยอยู่ในช่วงระหว่าง 28 - 30 dBi (รวมความสูญเสียที่เกิดขึ้นในระบบแล้ว) จะเห็นได้ว่าอัตราขยายที่ได้จากการวัดมีค่าน้อยกว่าอัตราขยายที่ได้จากการคำนวณเล็กน้อย เนื่องจากระยะห่างของการสุ่มข้อมูลมีค่าเท่ากับ 0.25 เท่าของความยาวคลื่น การจะให้อัตราขยายเพิ่มขึ้นอาจจะทำได้โดยชักค่าข้อมูลด้วยระยะชักค่าที่น้อยลง กว่านี้ อีกทั้งระยะห่างระหว่างระนาบกวาดวัดและระนาบหน้าจานคิดเป็น 36.2เท่าของความยาวคลื่นซึ่งมีผลทำให้เกิดความสูญเสียลดทอน (attenuation loss) สำหรับทางด้านฝั่งตะวันตกของประเทศไทยนั้นจะเห็นว่าแบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้มีค่าแกว่งตัวเล็กน้อย เนื่องจากเป็นข้อมูลบนระนาบกวาดวัดที่อยู่บริเวณใกล้สายอากาศป้อนกำลังคลื่น อาจจะทำให้ได้รับผลกระทบจากสนามบริเวณพูหลังในแนวโพลาไรเซชันร่วมและสนามเลี้ยวเบนของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น รวมทั้งสนามกระเจิงที่เกิดจากโครงสร้างตัวยึดสายอากาศป้อนกำลังคลื่น แม้ว่าจะมีการติดวัสดุดูดซับคลื่นแล้ว ทางตอนเหนือของประเทศไทยมีค่าอัตราขยายที่คลาดเคลื่อนไปจากผลการคำนวณเนื่องจากได้รับผลจากการสะท้อนที่ผนังด้านซ้ายมือ เพราะเป็นบริเวณที่ติดตั้งตัวดูดซับคลื่นน้อยที่สุด และพบว่าผลของการหักล้างของวัฏภาคของข้อมูลที่อยู่บริเวณริมของระนาบกวาดวัดจะมีค่าสูงขึ้นเนื่องจากความเข้มสนามที่สะท้อนจากสายอากาศทดสอบมีค่าต่ำข้อมูลด้านข้างจึงมีค่าแกว่งตัวมากขึ้น นอกจากนี้เมื่อสังเกตจากรูปที่ 5.15 ก็พบว่าผลกระทบที่เกิดจากพื้นผิวที่ผิดเพี้ยนทำให้อัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วมที่ครอบคลุมพื้นที่ประเทศไทยมีค่าลดลงโดยเฉพาะบริเวณภาคใต้ของประเทศไทยซึ่งถือว่าสอดคล้องกับผลการคำนวณ เมื่อพิจารณาอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้มากที่สุดจะพบว่ามีค่าเท่ากับ 5.1 ต่ำกว่าอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วมประมาณ 25 dB และมีค่าแตกต่างจากผลการคำนวณประมาณ 7 dB สาเหตุเนื่องจากสนามแนวโพลาไรเซชันไขว้บริเวณพูหลังของสายอากาศป้อนกำลังที่ใช้ในการทดสอบมีค่าอยู่ในระดับที่สูง



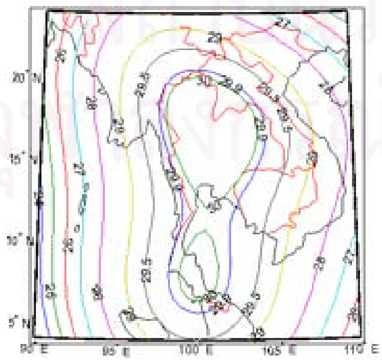
รูปที่ 5.14 แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วมของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่ได้การคำนวณกรณีพื้นผิวไม่มีความผิดเพี้ยน



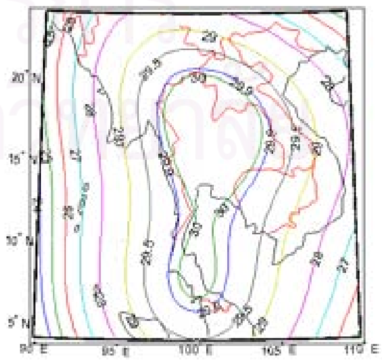
(ก) เมื่อ n_x = 2 และ n_y = 5



(ข) เมื่อ n_x = 4 และ n_y = 7

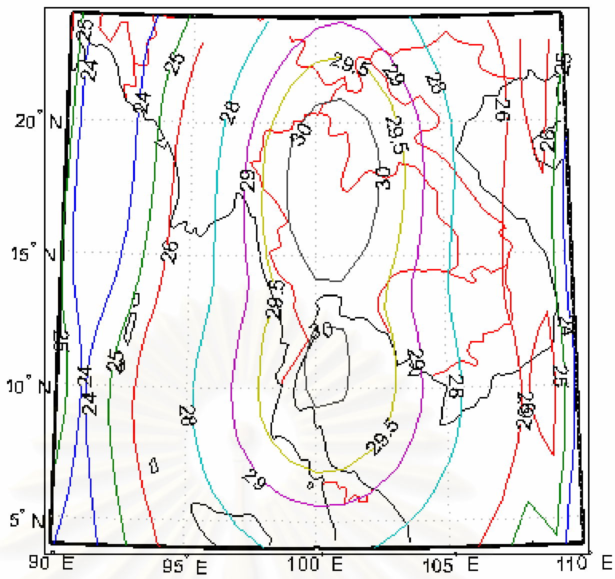


(ค) เมื่อ n_x = 6 และ n_y = 10

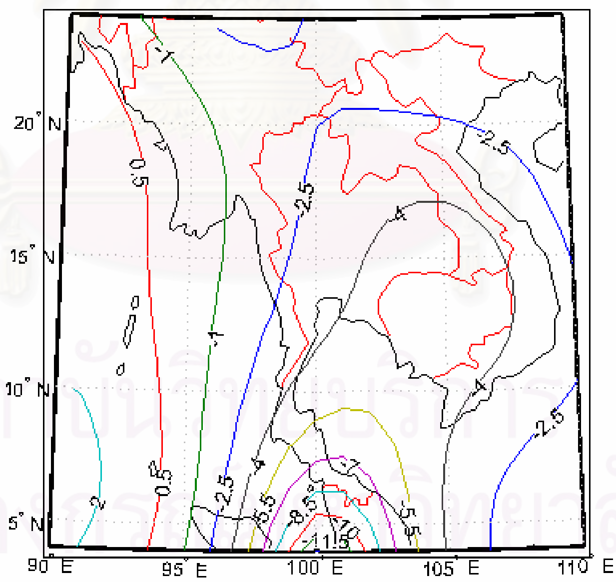


(ง) เมื่อ n_x = 8 และ n_y = 12

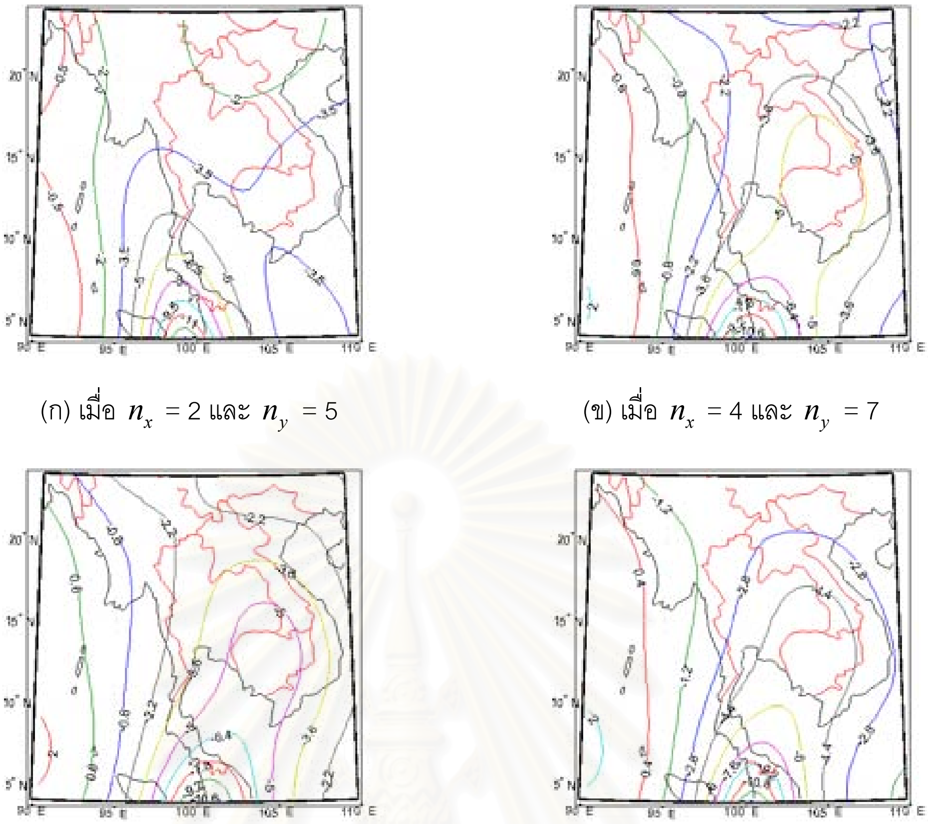
รูปที่ 5.15 แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วมของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่ได้การคำนวณกรณีที่มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนพื้นผิวเท่ากับ 0.08 λ



รูปที่ 5.16 แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันร่วมของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่ได้จากการวัด



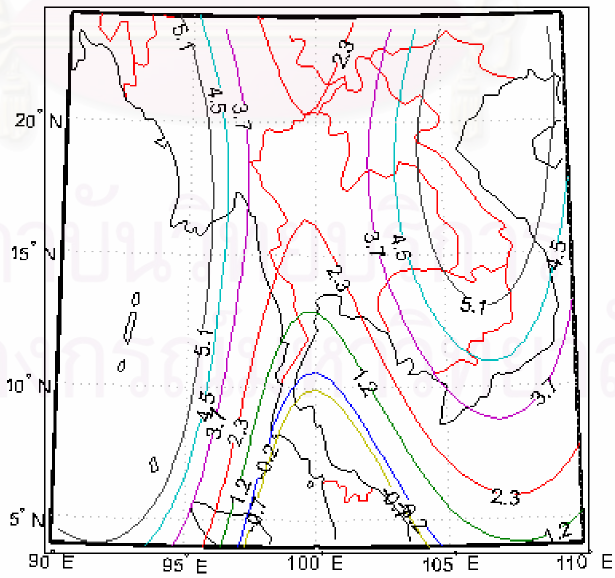
รูปที่ 5.17 แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันไขว้ของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่ได้การคำนวณกรณีพื้นผิวไม่มีความผิดเพี้ยน



(ก) เมื่อ n_x = 2 และ n_y = 5 (ข) เมื่อ n_x = 4 และ n_y = 7

(ค) เมื่อ n_x = 6 และ n_y = 10 (ง) เมื่อ n_x = 8 และ n_y = 12

รูปที่ 5.18 แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันไขว้ของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่ได้การคำนวณกรณีที่มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนพื้นผิวเท่ากับ 0.08 λ



รูปที่ 5.19 แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในแนวโพลาไรเซชันไขว้ของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่ได้จากการวัด

5.4 สาเหตุของความคลาดเคลื่อนระหว่างผลการทดสอบและผลการคำนวณ

สาเหตุที่ทำให้ผลการวิเคราะห์คลาดเคลื่อนเมื่อเทียบกับผลการทดสอบ สามารถสรุปได้เป็นดังนี้

1. สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่สร้างขึ้นประกอบจากแผ่นอะคริลิก 2 แผ่น เพื่อให้มีความหนาเพียงพอ มีรอยต่อระหว่างแผ่นอะคริลิก 2 ชั้น อาจจะทำให้ตำแหน่งของพื้นผิวเกิดความผิดพลาดที่บริเวณรอยต่อ สาเหตุความคลาดเคลื่อนของพื้นผิวอีกประการ คือ วัสดุที่ใช้ในการขึ้นรูปพื้นผิวเป็นแผ่นอะคริลิก ดังนั้นจึงต้องมีการลงสีนำไฟฟ้าเพื่อให้สามารถสะท้อนคลื่นได้ดีขึ้นแต่เนื่องจากสีนำไฟฟ้าที่ใช้มีลักษณะเหนียวและข้นมากซึ่งทำให้พื้นผิวเกิดความไม่สม่ำเสมอ ดังนั้นพื้นผิวจานสะท้อนที่สร้างขึ้นจึงมีความคลาดเคลื่อนไปจากที่สังเคราะห์ได้ ทำให้อัตราขยายในทิศทางเล็งมีค่าลดลง

2. การจัดวางตำแหน่งของสายอากาศจานสะท้อนต้นแบบ และสายอากาศป้อนกำลังคลื่น อาจมีความคลาดเคลื่อนจึงทำให้จึงทำให้แบบรูปการแผ่พลังงานมีการเลื่อนเชิงตำแหน่ง

3. สายอากาศป้อนกำลังคลื่นที่ใช้ในการคำนวณจะสมมติให้เป็นสายอากาศชนิดโพลาไรเซชันแนวแกน x แต่สายอากาศปากแตรที่ใช้ในการทดลองนั้นไม่เป็นอุดมคติ ทำให้คลื่นที่แพร่กระจายออกมาประกอบด้วยสนามที่มีโพลาไรเซชันทั้งในแนวแกน x และแนวแกน y จึงทำให้ระดับอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ที่มาจากสายอากาศจานสะท้อนมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อร่วมกับอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันไขว้ที่มาจากพูหลังของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นก็จะทำให้ผลการวัดแบบรูปการแผ่พลังงานในแนวโพลาไรเซชันไขว้มีค่าสูงกว่าผลการคำนวณ

4. ผลจากมอเตอร์แบบขั้น (stepping motor) ที่ใช้ในการกวาดวัดซึ่งควบคุมด้วยวงจรนับเคลื่อนที่คลาดเคลื่อนไปจากจุดชักตัวอย่าง ทำให้ได้ข้อมูลไม่ตรงกับจุดสุ่มที่ต้อง และอาจจะทำให้ระยะในแนวแกน z มีการเปลี่ยนแปลงซึ่งจะทำให้ค่าสนามเปลี่ยนแปลงในเชิงวัฏภาค

5. อัตราขยายทางด้านบริเวณทะเลอันดามัน และประเทศพม่ามีค่าแกว่งตัวค่อนข้างมากเนื่องจากเนื่องจากวัสดุดูดซับคลื่นมีจำนวนไม่เพียงพอที่ผนัง และพื้นห้องด้านซ้ายมือทำให้มีสนามสะท้อนไปยังหัววัด

บทที่ 6

บทสรุป และ ข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เสนอแนวคิดในการนำพื้นผิวและรูปร่างช่องเปิดของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป ที่สังเคราะห์ด้วยกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตโดยพิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น มาใช้ค่าปัจจัยเริ่มต้นในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์สมการพื้นผิว เพื่อให้ได้พื้นผิวที่เหมาะสมที่สุดในการจัดรูปลำคลื่น กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตนั้นสามารถสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเพื่อจัดรูปลำคลื่นได้ในเวลาอันสั้น โดยใช้กฏการอนุรักษ์พลังงานที่ส่งแบบจุดต่อจุด พื้นผิวของจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้จะเป็นจุดไม่ต่อเนื่อง จึงต้องประมาณรูปร่างจานสะท้อนด้วยสมการพื้นผิวที่เป็นผลรวมระหว่างสมการพหุนามอันดับที่สามกับฮามอร์นิกฟูริเยร์ เหตุที่เลือกใช้สมการนี้เนื่องจากใช้เวลาในการคำนวณหาคำตอบน้อยกว่าการใช้สมการรูปแบบอื่น และพื้นผิวมีความต่อเนื่องเพราะสมการที่ใช้สามารถหาอนุพันธ์อันดับที่สองได้ การพิจาณากรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตให้เป็นปัญหาค่าเริ่มต้นจะต่างกับกรรมวิธีทัศนศาสตร์แบบอื่น ที่ไม่ได้กำหนดรูปร่างขอบของจานสะท้อนขึ้นก่อน แต่จะกำหนดจากระดับความเรียวที่ได้จากการคำนวณอัตราขยายในทิศทางรังสีตกกระทบ ดังนั้นรูปร่างของช่องเปิดจานสะท้อนจะประมาณโดยใช้สมการประมาณเส้นโค้งเพื่อความสะดวกในการคำนวณผลจากสนามกระเจิงที่ขอบของจานสะท้อนในที่นี้จะใช้สมการไฮเพอร์ควอดริกแบบ 2 มิติ ซึ่งสามารถใช้ในการประมาณรูปร่างเปิดแบบใด ๆ โดยไม่จำเป็นต้องเป็น รูปวงรี รูปวงกลม หรือ รูปที่สมมาตร หลังจากได้พื้นผิวและรูปร่างของช่องเปิดจานสะท้อนก็จะนำไปเข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของพื้นผิว เพื่อให้ได้แบบรูปการแผ่พลังงานที่ตรงกับความต้องการมากที่สุด ในขั้นตอนการวิเคราะห์นั้นจะใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพ และเพื่อให้การคำนวณสนามที่พูข้างองศาไกล ๆ มีความแม่นยำมากขึ้น จะใช้กรรมวิธีกระแสมมูลที่ขอบที่กำจัดจุดเอกฐานตามแนวคิดของมิคาเอลลิในทำนายผลของสนามเลี้ยวเบนที่ขอบของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

ในการสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเพื่อใช้ในการจัดลำคลื่นให้ได้ลำวงรีขนาดต่างๆ สำหรับงานเรดาร์นั้น กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ตั้งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นนั้นสามารถสังเคราะห์พื้นผิวจานสะท้อนโดยใช้เวลาน้อยกว่ากรรมวิธีอื่นเนื่องจากไม่มีขั้นตอนการวนซ้ำ แบบรูปการแผ่พลังงานที่ได้แม้จะยังมีความคลาดเคลื่อนอยู่บ้างเพราะยังไม่ได้รวมผลจากการสนามกระเจิงที่ขอบ แต่ก็ถือว่ามีความใกล้เคียงกับแบบรูปการแผ่พลังงานที่ต้องการ ดังนั้นเมื่อนำพื้นผิวที่สังเคราะห์ได้มาเข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด ก็จะช่วยให้อัตราขยายที่จุดสังเกตมีความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยลดลง โดยระดับของพูข้างถือว่ามีค่าอยู่ในระดับที่ต่ำ (ไม่เกิน 20 dB)

การสังเคราะห์พื้นผิวจานสะท้อนสำหรับพื้นที่ครอบคลุมที่มีรูปร่างทางเรขาคณิตอย่างง่าย เช่น รูปทรงสี่เหลี่ยมที่อ้างอิงระบบพิกัดของจุดสังเกตแบบ (U,V) ทำได้โดยใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตในการสังเคราะห์พื้นผิว และรูปร่างช่องเปิดของจานสะท้อนที่ให้จัดคลื่นแบบวงรีที่มีขนาดใกล้เคียงกับรูปทรงสี่เหลี่ยม

แล้วนำมาเข้าสู่กรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุด ซึ่งพบว่าใช้จำนวนรอบในการวนซ้ำน้อยกว่าการใช้พื้นผิวพาราโบลอยด์เป็นค่าเริ่มต้นในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของพื้นผิว

สำหรับการสร้างลำคลื่นที่ครอบคลุมพื้นที่ประเทศไทยนั้น ในงานวิจัยนี้จะแบ่งการพิจารณาปัจจัยต่าง ๆ ที่มีผลต่อการสังเคราะห์สายอากาศ ออกเป็น 3 อย่าง ดังนี้

1. *ผลของการปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่น*พบว่าการปรับมุมเล็งของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นตั้งแต่ 30 องศา ถึง 60 องศา ทำให้ความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยจะมีขนาดลดลงเมื่อเพิ่มค่ามุมเล็ง แต่จะสังเกตเห็นว่าอัตราขยายแนวโพลาไรเซชันร่วมในบริเวณพื้นที่ใกล้เคียงประเทศไทยมีค่าเพิ่มมากขึ้นด้วยเช่นกัน ซึ่งทำให้เกิดเป็นสัญญาณรบกวนในกรณีที่มีการใช้ความถี่ซ้ำกัน และระดับของอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้ก็จะมีค่าเพิ่มมากขึ้น จึงทำให้ประสิทธิภาพในการใช้ส่งสัญญาณ แบบสองโพลาไรเซชันมีค่าลดลง ทั้งนี้เนื่องจากสายอากาศจานสะท้อนมีความไม่สมมาตรเพิ่มมากขึ้น

2. *ผลของการเปลี่ยนจำนวนพจน์ของฮาร์มอนิกฟูริเยร์ในสมการพื้นผิว* พบว่าการเพิ่มจำนวนพจน์ของฮาร์มอนิกฟูริเยร์จะทำให้รูปร่างของลำคลื่นใกล้เคียงกับรูปร่างของพื้นที่ครอบคลุมประเทศไทยได้ดีขึ้น แต่จะใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น และทำให้ระดับของพูข้างยกระดับเพิ่มขึ้น ดังนั้นการเลือกใช้จำนวนพจน์ของฮาร์มอนิกฟูริเยร์จะต้องพิจารณาตามความเหมาะสมของขนาดของจานสะท้อน และรูปร่างพื้นที่ครอบคลุม

3. *ผลการปรับตัวประกอบปรับขนาดของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป* เนื่องจากสายอากาศจานสะท้อนที่สังเคราะห์ด้วยทัศนศาสตร์เรขาคณิตนั้นไม่มีหน่วยจึงต้องใช้วิธีเทียบสัดส่วนโดยวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้เป็นตัวประกอบปรับขนาด ผลการสังเคราะห์พบว่าเมื่อสายอากาศมีขนาดใหญ่ขึ้นก็จะสามารถจัดลำคลื่นให้มีรูปร่างซับซ้อนได้มากขึ้น

4. *ผลของการเปลี่ยนรูปร่างช่องเปิดของสายอากาศจานสะท้อน* การเมื่อเพิ่มค่าสัดส่วนของแกนเอก และ แกนโท จะสังเกตเห็นว่ารูปร่างของลำคลื่นจะยืดตัวออกในแนวที่ตั้งฉากกับรูปร่างช่องเปิดของจานสะท้อนมากขึ้น ในการลดขนาดของแกนโทนี้มีข้อดีคือ ต้นทุนในการใช้สายอากาศจานสะท้อนจะมีค่าถูกลง และประหยัดพื้นที่ใช้สอยมากขึ้น

<u>ข้อเสนอแนะ</u>

1. ในการสังเคราะห์สายอากาศตามกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่พิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้น พบว่าจะกำหนดระดับความเรียวได้ไม่เกิน -20 dB เพราะที่ระดับความเรียวน้อยกว่านี้พบว่าระเบียบวิธีที่ใช้จะให้ค่าเปลี่ยนแปลงไปอย่างรวดเร็วมาก จึงไม่สามารถกำหนดรูปร่างช่องเปิดที่แน่นอนได้ หากต้องการกำหนดระดับความเรียวที่ต่ำกว่านี้จะต้องใช้ระเบียบวิธีอื่น

2. เนื่องจากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตที่ใช้ในการสังเคราะห์พื้นผิวที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้นั้นแม้จะสังเคราะห์ได้อย่างรวดเร็ว แต่จะต้องกำหนดแบบรูปการแผ่พลังงานด้วยฟังก์ชันเท่านั้น เพื่อให้เกิดความยืดหยุ่นมากขึ้น และระดับของอัตราขยายในแนวโพลาไรเซชันไขว้มีค่าลดลง สามารถใช้วิธีการสังเคราะห์พื้นผิวสายอากาศจานสะท้อนคู่แบบไม่สมมาตร (dual offset reflector) จากสนามช่องเปิด [7] , [15] เพื่อใช้เป็นพื้นผิวเริ่มต้นในกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดได้

3. สมการประมาณพื้นผิวที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้คือ PFS นั้นแม้ว่าจะใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างรวดเร็วกว่าสมการรูปแบบอื่นแต่จะพบว่า มีข้อด้อยคือ พูข้างที่ได้ยังมีการแกว่งตัวค่อนข้างมาก การลดผลกระทบนี้อาจจะทำได้โดยใช้สมการพื้นผิวแบบ QPS หรือ JPSE ซึ่งจะให้แบบรูปการพลังงานที่มีพูข้างเสถียรมากกว่าแต่การหาอนุพันธ์ของสมการเหล่านี้จะมีความซับซ้อนมากขึ้น อาจจะทำให้ใช้เวลานานในการคำนวณ

4. ในกรรมวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดของพื้นผิววิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้วิธี SQP เนื่องจากฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ซึ่งไม่สามารถประกันได้ว่าค่าต่ำสุดของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ได้เป็นค่าต่ำสุดแบบท้องถิ่น (local minimum) หรือ ค่าต่ำสุดทั่วไป (global minimum) ดังนั้นอาจจะมีค่าต่ำสุดกว่าค่าที่ได้จากวิธีการนี้ซึ่งหาได้โดยใช้ genetic algorithms

5. ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีผลต่อการลู่เข้าสู่คำตอบของกรรมวิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดดังนั้น การใช้ฟังก์ชันวัตถุที่เหมาะสมมากกว่านี้จะช่วยให้การลูเข้าสู่คำตอบรวดเร็วขึ้น

6. การสังเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปนี้จะใช้ในงานที่มีลักษณะตายตัวเท่านั้น สามารถทำให้มีความยืดหยุ่นมากขึ้นโดยใช้วิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดของพื้นผิวจานสะท้อนร่วมกับการหาค่าเหมาะสมที่สุดของสัมประสิทธิ์การกระตุ้นสายอากาศป้อนกำลังแบบแถวลำดับ

7. การใช้งานเพื่อส่งสัญญาณแบบหลายจุด (multi spot) อาจจะทำได้โดยการใช้จานสะท้อนมากกว่า 1 ตัวในการหาค่าเหมาะสมที่สุด เช่น หากต้องการส่งสัญญาณไปยัง 2 ที่ในเวลาเดียวกันอาจจะใช้ จานสะท้อน 2 ตัวร่วมกับสายอากาศป้อนกำลังคลื่นแถวลำดับ เป็นต้น

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

กระแสไม่สม่ำเสมอที่กำจัดส่วนเอกฐานตามแนวคิดของมิคาเอลลิ

เป็นที่ทราบกันว่าข้อด้อยหลักของทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตซึ่งทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเอกรูป (UTD) ก็ไม่สามารถแก้ไขได้คือการคำนวณสนามอนันต์ที่จุดตัดแตะ เหตุการณ์เช่นนี้มักจะพบบ่อยๆ เมื่อมีการคำนวณสนามที่กระเจิงไปด้านหลังของวัตถุโดยเฉพาะบริเวณใกล้ๆ กับแกนของวัตถุ การแก้ไขข้อบกพร่องของทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตมีสองวิธี วิธีแรกคือใช้ ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพที่นำเสนอโดยอูฟิมเซฟ (Ufimtsev) และอีกวิธีคือกรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบ (edge equivalent -current, EEC)

ทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพเป็นแนวคิดที่ทำให้กรรมวิธีทัศนศาสตร์กายภาพมีความสมบูรณ์ขึ้น โดยเป็นการหากระแสไม่ต่อเนื่องเชิงพื้นผิวของตัวนำสมบูรณ์หรือกระแสไม่สม่ำเสมอ (nonuniform) เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของพื้นผิว การเลี้ยวเบนที่ย่านความถี่สูงจะถือเป็นปรากฏการณ์เฉพาะที่ บริเวณใกล้จุดของขอบนั่นเปรียบเสมือนชิ้นส่วนเล็กๆ ของพื้นผิวสัมผัสรูปลิ่มอนันต์ ดังนั้นการหากระแสไม่สม่ำเสมอสามารถหาได้ด้วยการประมาณขอบของวัตถุใดๆ เป็นรูปลิ่ม และสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบสามารถพิจารณาเป็นคลื่นระนาบเมื่อเทียบกับชิ้นส่วนเล็กๆ ของขอบ การยอมรับการประมาณนี้ทำให้สามารถใช้การวิเคราะห์เช่นเดียวกับการหากระแสเชิงผิวของปัญหารูปลิ่มได้ [22] อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์หาสนามก็มีความยุ่งยากมากเนื่องจากต้องหาปริพันธ์วงรอบปิดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งเป็นสาเหตุหลักว่าทำไมการหาสนามด้วยทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพไม่เป็นที่นิยม

กรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบเป็นอีกวิธีหนึ่งที่ใช้ในการหาปริพันธ์ของการแผ่พลังงานโดยจะตั้งข้อสมมติว่าสนามเลี้ยวเบนเกิดจากกระแสสมมูลหรือกระแสที่สมมติขึ้นทั้งสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าตามขอบของวัตถุตัวนำไฟฟ้า แนวคิดนี้ทำให้กรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบเป็นการคำนวณด้วยการหาปริพันธ์เชิงเส้นซึ่งต่างจากการหาปริพันธ์พื้นผิวของทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ จึงทำให้กรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบเป็นการคำนวณที่ง่ายกว่า ดังนั้นโดยทั่วไปจะนิยมใช้กรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบมากกว่าทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพแบบดั้งเดิม

นิพจน์ของกระแสสมมูลจะขึ้นกับทิศทางของจุดสังเกตจึงเคยมีการใช้ทิศทางบนกรวยของเคลเลอร์ (Keller) เพื่อกำหนดทิศของรังสีเลี้ยวเบนจากจุดที่อยู่บนขอบซึ่งอาจตีความหมายในเชิงทัศนศาสตร์ได้ว่าเป็นการพิจารณาทิศทางของการตกกระทบและสะท้อนที่จุดขอบ โดยกระแสสมมูลนี้จะพบว่าเป็นบริเวณเล็กๆ บนขอบเท่านั้น ก็เปรียบเสมือนจุดเลี้ยวเบนตามหลักของทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงทัศนศาสตร์ ในกรณีที่แนวตกกระทบอยู่บนขอบของวงกลมและมีจุดสังเกตวางตัวอยู่บนแกนแล้วจะสามารถประมาณหาค่าของกระแสสมมูลได้ เพราะฉะนั้นการหาปริพันธ์ด้วยวิธีกรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบจึงทำได้ไม่ยาก แต่ในกรณีที่พบจริงๆ โดยทั่วไปขอบมักเป็นรูปอื่นซึ่งยังไม่สามารถหากระแสสมมูลนี้ได้ดังนั้นกรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบก็จะไม่สามารถใช้ได้

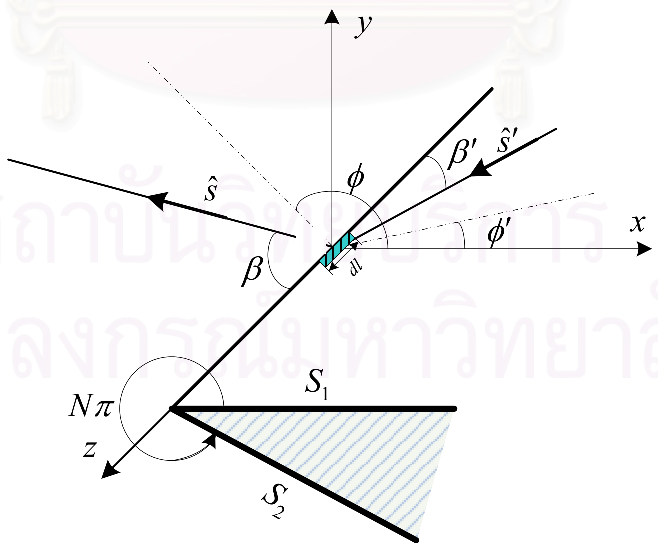
จึงมีความพยายามที่จะแก้ข้อบกพร่องนี้ โดยมิคาเอลได้เสนอวิธีการหากระแสสมมูลที่ขอบสำหรับจุดสังเกตทิศทางใดๆ และวิธีกำจัดส่วนเอกฐาน โดยหาจากทฤษฎีเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ

การหาความหนาแน่นกระแสสมมูลรวมและความหนาแน่นองค์ประกอบกระแสทัศนศาสตร์กาย-ภาพ

กรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบเป็นวิธีที่จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อจะต้องทราบค่าของกระแสสมมูลทุกจุดที่อยู่ตามขอบเพื่อใช้ในการหาปริพันธ์เชิงเส้นซึ่งกระแสสมมูลนี้จะคำนวณจากความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางของ รังสีตกกระทบ และทิศทางของรังสีสะท้อนที่เกี่ยวข้องตามแนวสัมผัสที่ขอบ ถ้าใช้วิธีการหากระแสสมมูลจากทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตจะพบว่ากระแสสมมูลที่คำนวณได้นั้นเกิดได้เฉพาะในกรณีที่ $\beta = \beta'$ เพราะฉะนั้นถ้าเมื่อใดที่ $\beta \neq \beta'$ วิธีการนี้จะไม่สามารถหาค่ากระแสสมมูลที่จุดนั้นได้ นั่นหมายความว่ากรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบถูกจำกัดขีดความสามารถในการคำนวณด้วยทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต ซึ่งถือว่าเป็นทฤษฎีที่ด้อยกว่า ดังนั้นเพื่อเพิ่มขีดความสามารถในการคำนวณให้กรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบ จึงต้องเริ่มต้นใหม่ในวิธีการหากระแสสมมูลซึ่งพบว่าทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพถือเป็นกรรมวิธีที่มีความสามารถครอบคลุมกว่าวิธีอื่น ความเข้มสนามไฟฟ้าที่ย่านสนามไกลเนื่องมาจากการกระเจิงที่ขอบสามารถหาได้จากทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพดังนี้

$$\vec{E}^{s} = jkZ\sum_{i=1}^{2}\iint_{S_i} \hat{s}\times\left[\hat{s}\times\vec{j}_i\left(\vec{r}'\right)\right]G\left(\vec{r}',\vec{r}\right)dS_i \qquad (ก.1)$$

สมการ (ก.1) เป็นการหาปริพันธ์เชิงพื้นผิวที่เกิดจากพื้นผิว S_1 และ S_2 ซึ่งเป็นพื้นผิวด้านบนและด้านล่างของขอบตามลำดับดังรูปที่ ก.1 และ $\vec{j}_i\left(\vec{r}'\right)$ เป็นกระแสเหนี่ยวนำที่อยู่บนพื้นผิว S_i



รูปที่ ก.1 เรขาคณิตการกระเจิงของรูปลิ่มที่เป็นแนวคิดกระแสสมมูลรวมที่ขอบ

ถ้าสนามที่จุด $\vec{r}$ ไม่ได้อยู่ในแนวตัดแตะของสนามกระเจิง เมื่อ $k \to \infty$ การหาปริพันธ์ของการ - แผ่พลังงานในสมการ (ก.1) สามารถใช้กรรมวิธีแนวเส้นกำกับช่วยหาผลรวมของสนามกระเจิงที่เกิดจากพื้นผิว S_1 และ S_2 ได้ ซึ่งจะกลายเป็นการหาปริพันธ์เชิงเส้นตามขอบแทน เมื่อพิจารณาในเชิงกายภาพก็จะหมายถึงสนามที่เกิดจากการเลี้ยวเบนที่พื้นผิวแถบบางๆ ของพื้นผิว S_1 และ S_2 ตามขอบ กำหนดให้ x_1 และ x_2 เป็นระยะจากขอบในแนวตั้งฉากกับแนวสัมผัสของขอบไปบนพื้นผิว S_1 และ S_2 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าเมื่อพิจารณา $\vec{E}^s$ เป็นสนามเลี้ยวเบนที่ขอบ สามารถหาได้ในรูปแบบดังนี้

$$\vec{E}^d \overset{k\to\infty}{\cong} jkZ\int_C \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_0 \hat{s} \times \left[\hat{s} \times \vec{j}_i(l,x_i) \right] \cdot G\left(\vec{r}'(l,x_i),\vec{r}\right) J_i(l,x_i)\, dx_i \right\} dl \qquad (ก.2)$$

ให้ x_i และ dl เป็นตัวแปรของปริพันธ์ในแถบของ S_1 และ S_2 ตามขอบ และ $J_i(l,x_i)$ เป็นจาโคเบียนของการแปลงจากพิกัดคาร์ทีเชียนท้องถิ่นบนองค์ประกอบพื้นผิว dS_i ไปยังตัวแปร x_i และ dl ขอบเขตบนการหาปริพันธ์ของตัวแปร x_i จะจำกัดที่ $x_i = 0$ ค่า x_i ในตัวแปรต่างๆ จะแทนด้วยศูนย์ ดังนั้นจะได้ค่าจาโคบีตามนิยามของมิคาเอลลิ [22] เป็น

$$J_i(l,0) = 1 \qquad \text{ที่} \quad i = 1,2 \qquad (ก.3)$$

ฟังก์ชันของกรีนที่ x_i น้อยมากๆ สามารถประมาณได้เป็น

$$G\left(\vec{r}'(l,x_i),\vec{r}\right) \approx G\left(\vec{r}'(l,0),\vec{r}\right) e^{(jkx_i\hat{x}_i\cdot\hat{s})} \qquad (ก.4)$$

โดยที่ $\hat{x}_i$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ x_i
แทนสมการ (ก.3) กับสมการ (ก.4) ที่ $x_i = 0$ ลงในสมการ (ก.2) จะได้เป็น

$$\vec{E}^d \overset{k\to\infty}{\cong} jkZ\int_C \left\{ \sum_{i=1}^{2} \int_0 \hat{s} \times \left[\hat{s} \times \vec{j}_i(l,x_i) \right] G\left(\vec{r}',\vec{r}\right) e^{(jkx_i\hat{x}_i\cdot\hat{s})} dx_i \right\} dl \qquad (ก.5)$$

เมื่อต้องการหากระแสสมมูลรวมที่ขอบจะทำได้โดยการเทียบสมการ (ก.1) กับสมการ (ก.5) ดังนี้

$$ZI^T(l)\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e}) + M^T(l)\hat{s}\times\hat{e} = Z\hat{s}\times\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right] \qquad (ก.6)$$

โดยให้ $$K_i^T(l) = \int_0 \vec{j}_i^T(l,x_i) e^{jkx_i\hat{x}_i\cdot\hat{s}} dx_i \qquad (ก.7)$$

กระแสไฟฟ้าสมมูลที่ขอบหาได้โดยดำเนินการแบบจุดกับสมการ (ก.6) ด้วย $\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{t})$ ดังนี้

$$I^T(l)\left|\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{t})\right|^2 = \left[\hat{s}\times\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]\right]\cdot\left[\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{t})\right] \qquad (ก.8)$$

ใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์ $A\cdot B\times C = B\cdot C\times A = C\cdot A\times B$ กับฝั่งซ้ายมือของสมการ (ก.8) จะได้

$$I^T(l)\left|\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})\right|^2 = \hat{s}\cdot\left[(\hat{s}\times\hat{e})\times\left[\hat{s}\times\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]\right]\right] \qquad (ก.9)$$

และใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์ $A\times(B\times C) = (A\cdot C)B - (A\cdot B)C$ กับสมการ (ก.9) จะได้

$$I^T(l)\left|\hat{e}\times\hat{s}\right|^2 = \hat{s}\cdot\left[\left\{(\hat{s}\times\hat{e})\cdot\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]\right\}\hat{s} - \left\{(\hat{s}\times\hat{e})\cdot\hat{s}\right\}\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]\right] \qquad (ก.10)$$

เนื่องจาก $\hat{s}\cdot\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right] = 0$ เพราะฉะนั้นจะได้กระแสไฟฟ้าสมมูลเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} I^T(l) &= \frac{(\hat{s}\times\hat{e})\cdot\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]}{\left|\hat{e}\times\hat{s}\right|^2} \\ &= \frac{\hat{s}\cdot\left[(\hat{e}\times\hat{s})\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]}{\left|\hat{e}\times\hat{s}\right|^2} \end{aligned} \qquad (ก.11)$$

กระแสแม่เหล็กสมมูลรวมที่ขอบหาได้โดยดำเนินการแบบจุดกับสมการ (ก.6) ด้วย $(\hat{s}\times\hat{t})$ ดังนี้

$$M^T(l)\left|\hat{s}\times\hat{e}\right|^2 = Z(\hat{s}\times\hat{e})\cdot\left[\hat{s}\times\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]\right] \qquad (ก.12)$$

เมื่อใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์ข้างต้นจะหากระแสแม่เหล็กสมมูลได้ดังนี้

$$\begin{aligned} M^T(l) &= \frac{Z\hat{s}\cdot\left[\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]\times(\hat{s}\times\hat{e})\right]}{\left|\hat{s}\times\hat{e}\right|^2} \\ &= \frac{Z\hat{s}\cdot\left[\left\{\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]\cdot\hat{e}\right\}\hat{s} - \left\{\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]\cdot\hat{s}\right\}\hat{e}\right]}{\left|\hat{s}\times\hat{e}\right|^2} \\ &= \frac{Z\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right]\cdot\hat{e}}{\left|\hat{s}\times\hat{e}\right|^2} \end{aligned} \qquad (ก.13)$$

พิจารณารูปที่ ก.1 โดยให้ $\hat{e} = \hat{z}$ จะพบว่า $\left|\hat{e}\times\hat{s}\right| = \left|\hat{s}\times\hat{e}\right| = \sin\beta$ แทนลงในสมการ (ก.11) และ (ก.13) ทำให้ได้กระแสไฟฟ้าสมมูลรวมและกระแสแม่เหล็กสมมูลรวมเป็นดังนี้

$$I^T(l) = \frac{1}{\sin^2\beta}\,\hat{s}\cdot\left[(\hat{e}\times\hat{s})\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_i^T(l)\right] \qquad (ก.14)$$

$$M^{T}\left(l\right)=\frac{Z}{\sin^{2}\beta}\,\hat{e}\cdot\left[\hat{s}\times\sum_{i=1}^{2}\vec{K}_{i}^{T}\left(l\right)\right] \tag{ก.15}$$

กระแสเหนี่ยวนำบนพื้นผิวในพจน์ $K_i^T\left(l\right)=\int_0 j_i^T\left(l,x_i\right)e^{jkx_i\hat{x}_i\cdot\hat{s}}dx_i$ นี้ประมาณจากกระแสในทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพสำหรับรูปลิ่มที่มีความยาวอนันต์ ดังนั้นกระแสสมมูลรวมที่ขอบตามสมการ (ก.14) และ (ก.15) จะอยู่ในพจน์ของกระแสพื้นผิวของทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงกายภาพ ถ้าต้องการคำนวณหากระแสสมมูล I_1^T และ M_1^T จากพื้นผิว S_1 ในรูปที่ ก.1 หรือพื้นผิวด้านบนจะเริ่มต้นด้วยการแทนที่ $\hat{e}$ ด้วย $\hat{z}$ และแทน x_1 ด้วย x จะได้ ทิศทางที่ไปยังจุดสังเกตและกระแสเหนี่ยวนำดังนี้

$$\hat{s}=\sin\beta\cos\phi\hat{x}+\sin\beta\sin\phi\hat{y}+\cos\beta\hat{z} \tag{ก.16}$$

$$\vec{j}_1^T=j_{1x}^T\hat{x}+j_{1z}^T\hat{z} \tag{ก.17}$$

เมื่อ $\beta=\cos^{-1}\left(\hat{s}\cdot\hat{z}\right)$ เป็นมุมระหว่างทิศตกกระทบกับทิศทางในแนวสัมผัสขอบและกระแสเหนี่ยวนำจะไหลในระนาบ $y=0$ ผลจากสมการ (ก.16) กับสมการ (ก.17) เมื่อแทนลงในสมการ (ก.14) และสมการ (ก.15) จะได้กระแสไฟฟ้าสมมูลและกระแสแม่เหล็กสมมูลรวมที่ขอบบนพื้นผิว S_1 เป็นดังนี้

$$I_1^T\left(l\right)=\frac{1}{\sin^2\beta}\left.\begin{bmatrix}\left(\hat{z}\times\left(\sin\beta\cos\phi\hat{x}+\sin\beta\sin\phi\hat{y}+\cos\beta\hat{z}\right)\right)\\ \times\int_0\left(j_{1x}^T\hat{x}+j_{1z}^T\hat{z}\right)e^{jkx\hat{x}\cdot\left(\sin\beta\cos\phi\hat{x}+\sin\beta\sin\phi\hat{y}+\cos\beta\hat{z}\right)}dx\end{bmatrix}\cdot\left(\sin\beta\cos\phi\hat{x}+\sin\beta\sin\phi\hat{y}+\cos\beta\hat{z}\right)\right|_{y=0} \tag{ก.18}$$

$$M_1^T\left(l\right)=\frac{Z}{\sin^2\beta}\,\hat{z}\cdot\left.\begin{bmatrix}\left(\sin\beta\cos\phi\hat{x}+\sin\beta\sin\phi\hat{y}+\cos\beta\hat{z}\right)\\ \times\int_0\left(j_{1x}^T\hat{x}+j_{1z}^T\hat{z}\right)e^{jkx\hat{x}\cdot\left(\sin\beta\cos\phi\hat{x}+\sin\beta\sin\phi\hat{y}+\cos\beta\hat{z}\right)}dx\end{bmatrix}\right|_{y=0} \tag{ก.19}$$

หลังจากดำเนินการทางเวกเตอร์สุดท้ายจะได้กระแสสมมูลรวมที่ขอบเป็นดังนี้

$$I_1^T=K_{1z}^T-K_{1x}^T\cot\beta\cos\phi \tag{ก.20}$$

$$M_1^T=-ZK_{1x}^T\frac{\sin\phi}{\sin\beta} \tag{ก.21}$$

โดยที่ $K_{1x,1z}^T\left(l\right)=\int_0 j_{1x,1z}^T e^{jkx\sin\beta\cos\phi}dx$

กระแสเหนี่ยวนำที่ขอบ $\vec{j}_1^T$ บนพื้นผิวด้านบนสามารถคำนวณโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{j}_1^T&=\hat{y}\times\vec{H}\left(y=0\right)\\&=H_z\left(y=0\right)\hat{x}-H_x\left(y=0\right)\hat{z}\end{aligned} \tag{ก.22 ก}$$

ดังนั้น

$$J_{1x}^T=H_z\left(y=0\right) \tag{ก.22 ข}$$

$$J_{1z}^T=-H_x\left(y=0\right) \tag{ก.22 ค}$$

จะเห็นว่าสนามรวมขึ้นอยู่กับสนามแนวแกน z เท่านั้น และมีตัวประกอบวัฏภาคเป็น $e^{-jkz\cos\beta'}$ เมื่อใช้สมการแมกซ์เวลล์ $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -jkZ\bar{H}$ และ $\bar{\nabla}\times\bar{H} = -jk\bar{E}/Z$ จะได้นิพจน์ของ H_x ในพจน์ขององค์ประกอบสนามแนวแกน z ดังนี้

$$H_x = -\frac{1}{jkZ\sin^2\beta'}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\cos\beta'}{jk\sin^2\beta'}\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \text{(ก.23)}$$

สามารถหาสนาม E_z และ H_z จากปัญหารูปลิ่มอันเนื่องมาจากสนามตกกระทบ E_{zo}^i และ H_{zo}^i ที่จุด o ได้ดังนี้

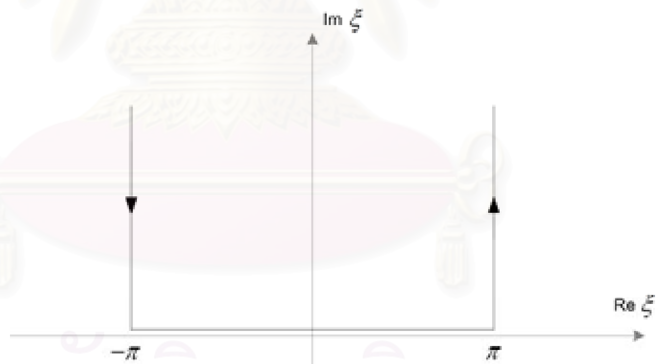
$$E_z = E_{zo}^i\left[\frac{U(X,\psi-\phi') - U(X,\psi+\phi')}{j2\pi N}\right] \quad \text{(ก.24)}$$

$$H_z = H_{zo}^i\left[\frac{U(X,\psi-\phi') + U(X,\psi+\phi')}{j2\pi N}\right] \quad \text{(ก.25)}$$

โดยที่ $X = k\rho\sin\beta'$

ρ และ ψ เป็นระบบพิกัดเชิงขั้วของสนามในระนาบ xy

$U(X,\Phi) = \int_\Gamma \frac{\sin\left(\xi/N\right)^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/N\right) - \cos\left(\Phi/N\right)}d\xi$ เส้นทางดำเนินการ (contour) Γ ในระนาบเชิงซ้อน ξ แสดงดังรูปที่ ก.2



รูปที่ ก.2 เส้นทางดำเนินการของการหาปริพันธ์สำหรับปัญหารูปลิ่ม

เมื่อ $y = 0$ จะหากระแสสมมูลรวมที่ขอบในขององค์ประกอบแนวแกน z ได้ดังนี้

$$J_{1z}^T = \frac{1}{jk\sin^2\beta'}\left(\frac{1}{Z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - \cos\beta'\left(\frac{\partial H_z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right)\Bigg|_{y=0} \quad \text{(ก.26)}$$

ที่ $y = 0$ จะได้ว่า $\rho = x$ ดังนั้น $\partial X/\partial x = k\sin\beta'$, $\partial X/\partial y = \partial(kx\sin\beta')/\partial y = 0$, $\partial\Phi/\partial x = 0$ และ $\partial\Phi/\partial y = 1/x$ แทนทั้งหมดลงในสมการ (ก.26) จะได้

$$J_{1z}^{T}=\frac{1}{jk\sin^{2}\beta'}\left(\frac{1}{Zx}\frac{\partial E_z}{\partial\Phi}-k\sin\beta'\cos\beta'\frac{\partial H_z}{\partial X}\right)\Bigg|_{y=0} \quad \text{(ก.27)}$$

ที่ $\psi=0$ จะได้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่แผ่กระจายออกมาจากรูปลิ่มเป็น $H_z=2H_{zo}^{i}\dfrac{U(X,\phi')}{j2\pi N}$ ตามลำดับ แทนลงในสมการ (ก.27) จะได้เป็น

$$J_{1z}^{T}=\frac{1}{jk\sin^{2}\beta'}\left(\frac{1}{Zx}\frac{\partial E_z}{\partial\Phi}-2H_{zo}^{i}k\sin\beta'\cos\beta'\frac{\partial u(X,\phi')}{\partial X}\right)\Bigg|_{y=0} \quad \text{(ก.28)}$$

โดยที่ $u(X,\phi')=U(X,\phi')/j2\pi N$

กำหนดให้ $dx=dX/k\sin\beta'$ และ $\mu_1=\sin\beta\cos\phi/\sin\beta'$ จะได้ว่า

$$K_{1z}^{T}=\frac{1}{k\sin\beta'}\int_{0}J_{1z}^{T}e^{jX\mu_1}dX \quad \text{(ก.29)}$$

แทนสมการ (ก.28) ลงใน (ก.29) จะได้เป็น

$$K_{1z}^{T}=-\frac{j}{Zk\sin^{2}\beta'}\int_{0}\frac{1}{X}\frac{\partial E_z}{\partial\Phi}e^{jX\mu_1}dX+H_{zo}^{i}\frac{j2\cot\beta'}{k\sin\beta'}\int_{0}\frac{\partial u(X,\phi')}{\partial X}e^{jX\mu_1}dX \quad \text{(ก.30)}$$

พิจารณา $\left.\dfrac{1}{X}\dfrac{\partial E_z}{\partial\Phi}\right|_{y=0}$ โดยแทนสมการ (ก.24) ลงไปจะได้

$$\left.\frac{1}{X}\frac{\partial E_z}{\partial\Phi}\right|_{y=0}=\left.\frac{1}{X}\frac{E_{zo}^{i}\partial u(X,\Phi_1)}{\partial\Phi_1}\right|_{y=0}-\left.\frac{1}{X}\frac{E_{zo}^{i}\partial u(X,\Phi_2)}{\partial\Phi_2}\right|_{y=0} \quad \text{(ก.31)}$$

โดยที่ $\Phi_1=\psi-\phi'$ และ $\Phi_2=\psi+\phi'$ เมื่อใช้ผลจากภาคผนวก ข สมการ (ค.23) จะได้

$$\frac{1}{X}\frac{\partial u(X,\Phi)}{\partial\Phi}=-\frac{\sin\left(\Phi/N\right)}{2\pi N}\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/N\right)-\cos\left(\Phi/N\right)}d\xi \quad \text{(ก.32)}$$

ดังนั้น

$$\left.\frac{1}{X}\frac{\partial u(X,\Phi_1)}{\partial\Phi_1}\right|_{y=0}=-\frac{\sin\left(-\phi'/N\right)}{2\pi N}\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/N\right)-\cos\left(\Phi/N\right)}d\xi \quad \text{(ก.33 ก)}$$

$$\left.\frac{1}{X}\frac{\partial u(X,\Phi_2)}{\partial\Phi_2}\right|_{y=0}=-\frac{\sin\left(\phi'/N\right)}{2\pi N}\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/N\right)-\cos\left(\Phi/N\right)}d\xi \quad \text{(ก.33 ข)}$$

เมื่อแทนสมการ (ก.33 ก) และสมการ (ก.33 ข) ในสมการ (ก.31) จะได้

$$\left.\frac{1}{X}\frac{\partial E_z}{\partial\Phi}\right|_{y=0}=2E_{zo}^{i}\frac{\sin\left(\phi'/N\right)}{2\pi N}\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/N\right)-\cos\left(\Phi/N\right)}d\xi \quad \text{(ก.34)}$$

$$=-2E_{zo}^{i}\frac{1}{X}\frac{\partial u\left(X,\phi'\right)}{\partial\phi'}\bigg|_{y=0} \tag{ก.35}$$

แทนสมการ (ก.35) ในสมการ (ก.30) จะได้เป็น

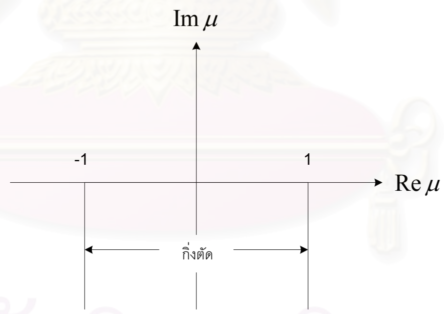
$$K_{1z}^{T}=E_{zo}^{i}\frac{j2}{Zk\sin^{2}\beta'}\int_{0}\frac{1}{X}\frac{\partial u\left(X,\phi'\right)}{\partial\phi'}\bigg|_{y=0}e^{jX\mu_1}dX+H_{zo}^{i}\frac{j2\cot\beta'}{k\sin\beta'}\int_{0}\frac{\partial u\left(X,\Phi\right)}{\partial X}e^{jX\mu_1}dX \tag{ก.36}$$

แทนสมการ (ค.12) และ (ค.28) ลงในสมการ (ก.36) จะได้เป็น

$$K_{1z}^{T}=-E_{zo}^{i}\frac{j2}{Zk\sin^{2}\beta'}\frac{\left(1/N\right)\sin\left(\Phi/N\right)}{\cos\left(\frac{\pi-\alpha_1}{N}\right)-\cos\left(\frac{\Phi}{N}\right)}+H_{zo}^{i}\frac{j2\cot\beta'}{k\sin\beta'}\frac{\left(\cot\alpha_1/N\right)\sin\left(\frac{\pi-\alpha_1}{N}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi-\alpha_1}{N}\right)-\cos\left(\frac{\Phi}{N}\right)\right]} \tag{ก.37 ก}$$

โดยที่
$$\alpha_1=\cos^{-1}\mu_1=-j\ln\left(\mu_1+\sqrt{\mu_1^2-1}\right) \tag{ก.37 ข}$$

$\sqrt{\mu_1^2-1}$ จะมีค่าเป็นบวกเมื่อ $\mu_1>1$ และเมื่อ $\mu_1<1$ ค่าของ $\sqrt{\mu_1^2-1}$ จะสามารถนิยามได้ดัง รูปที่ ก.3



รูปที่ ก.3 นิยามกิ่งตัดของ $\sqrt{\mu_1^2-1}$

พิจารณากระแส J_{1x}^{T} จะพบว่ามีค่าเท่ากับ $H_z\left(y=0\right)$ เมื่อแทนลงสมการ (ก.25) จะได้ว่า

$$H_z\big|_{y=0}=H_{zo}^{i}\left[\frac{U\left(X,-\phi'\right)+U\left(X,+\phi'\right)}{j2\pi N}\right] \tag{ก.38}$$

เนื่องจาก $U\left(X,-\phi'\right)=U\left(X,+\phi'\right)$ ฉะนั้นกรแสสมมูล J_{1x}^{T} จะมีค่า

$$J_{1x}^{T}=H_z\big|_{y=0}=2H_{z0}^{i}\frac{U\left(X,\phi'\right)}{j2\pi N} \tag{ก.39}$$

เช่นเดียวกับ (ก.29) จะได้ว่า

$$K_{1x}^{T} = \frac{1}{k\sin\beta}\int_{0} J_{1x}^{T} e^{jX\mu_1} dX \qquad (ก.40)$$

แทนสมการ (ก.39) ลงในสมการ (ก.40)จะได้ว่า

$$K_{1x}^{T} = H_{z0}^{i}\frac{2}{k\sin\beta}\int_{0}\frac{U\left(X,\phi'\right)}{j2\pi N} e^{jX\mu_1} dX \qquad (ก.41)$$

ค่าของปริพันธ์ในสมการ (ก.41) สามารถหาได้จากภาคผนวก ข โดยใช้สมการ (ข.12) แทนลงในสมการ (ก.41) จะได้เป็น

$$K_{1x}^{T} = -H_{z0}^{i}\frac{j2}{Nk\sin\beta\sin\alpha_1}\frac{\sin\left(\frac{\pi-\alpha_1}{N}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi-\alpha_1}{N}\right)-\cos\left(\frac{\phi'}{N}\right)\right]} \qquad (ก.42)$$

สุดท้ายกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็กที่ขอบของพื้นผิวด้านบน S_1 สามารถหาได้โดยแทนสมการ (ก.37) และสมการ (ก.41) ลงในสมการ (ก.20) และสมการ (ก.21) ตามลำดับจะได้

$$\begin{aligned} I_1^{T} = &-E_{zo}^{i}\frac{2j}{Zk\sin^2\beta'}\frac{(1/N)\sin\left(\phi'/N\right)}{\cos\left[\left(\pi-\alpha_1\right)/N\right]-\cos\left(\phi'/N\right)} \\ &-H_{zo}^{i}\frac{2j\left(\mu_1\cot\beta'-\cot\beta\cos\phi\right)}{k\sin\beta'\sin\alpha_1}\frac{(1/N)\sin\left[\left(\pi-\alpha_1\right)/N\right]}{\cos\left[\left(\pi-\alpha_1\right)/N\right]-\cos\left(\phi'/N\right)} \end{aligned} \qquad (ก.43 ก)$$

$$M_1^{T} = H_{z0}^{i}\frac{j2Z\sin\phi}{Nk\sin\beta\sin\beta'\sin\alpha_1}\frac{\sin\left(\frac{\pi-\alpha_1}{N}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi-\alpha_1}{N}\right)-\cos\left(\frac{\phi'}{N}\right)\right]} \qquad (ก.43 ข)$$

ถ้าต้องการคำนวณหากระแสสมมูล I_2^T และ M_2^T จากพื้นผิว S_2 หรือพื้นผิวด้านล่างจะเริ่มต้นด้วยการแทนที่ $\hat{e}$ ด้วย $-\hat{z}$ ซึ่งจะได้ ทิศทางที่ไปยังจุดสังเกตและกระแสเหนี่ยวนำดังนี้

$$\hat{s} = \sin\left(\pi-\beta\right)\cos\left(N\pi-\phi\right)\hat{x}+\sin\left(\pi-\beta\right)\sin\left(N\pi-\phi\right)\hat{y}+\cos\left(\pi-\beta\right)\hat{z} \qquad (ก.44)$$

$$\vec{j}_2 = j_{2x}^{T}\hat{x}+j_{2z}^{T}\hat{z} \qquad (ก.45)$$

เมื่อ $\pi-\beta=\cos^{-1}\left(\hat{s}\cdot-\hat{z}\right)$ เป็นมุมระหว่างทิศตกกระทบกับทิศทางในแนวสัมผัสขอบและกระแสเหนี่ยวนำจะไหลในระนาบ $y=0$ จากสมการ (ก.44) กับสมการ (ก.45) เมื่อแทนลงในสมการ (ก.14) และสมการ (ก.15) จะได้กระแสไฟฟ้าสมมูลและกระแสแม่เหล็กสมมูลรวมที่ขอบบนพื้นผิว S_2 เป็นดังนี้

$$I_2^T(l)=\Big\{\Big(-\hat{z}\times\big(\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)\hat{x}+\sin(\pi-\beta)\sin(N\pi-\phi)\hat{y}+\cos(\pi-\beta)\hat{z}\big)\Big)$$
$$\times\int_0\left(j_{1x}^T\hat{x}+j_{1z}^T\hat{z}\right)e^{jkx\hat{x}\cdot\left(\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)\hat{x}+\sin(\pi-\beta)\sin(N\pi-\phi)\hat{y}+\cos(\pi-\beta)\hat{z}\right)}dx\Big\}\frac{1}{\sin^2(\pi-\beta)}$$
$$\cdot\left(\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)\hat{x}+\sin(\pi-\beta)\sin(N\pi-\phi)\hat{y}+\cos(\pi-\beta)\hat{z}\right)$$

(ก.46 ก)

$$M_2^T(l)=\Big\{\Big(\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)\hat{x}+\sin(\pi-\beta)\sin(N\pi-\phi)\hat{y}+\cos(\pi-\beta)\hat{z}\Big)$$
$$\times\int_0\left(j_{2x}^T\hat{x}+j_{2z}^T\hat{z}\right)e^{jkx\hat{x}\cdot\left(\left(\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)\hat{x}+\sin(\pi-\beta)\sin(N\pi-\phi)\hat{y}+\cos(\pi-\beta)\hat{z}\right)\right)}dx\Big\}$$
$$\cdot(-\hat{z})\frac{Z}{\sin^2(\pi-\beta)}$$

(ก.46 ข)

หลังจากดำเนินการทางเวกเตอร์จะได้กระแสสมมูลรวมที่ขอบเป็นดังนี้

$$I_2^T=K_{2z}^T-K_{2x}^T\cot(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi) \quad \text{(ก.47)}$$

$$M_2^T=-ZK_{2x}^T\frac{\sin(N\pi-\phi)}{\sin(\pi-\beta)} \quad \text{(ก.48)}$$

โดยที่ $K_{2x,2z}^T(l)=\int_0 j_{2x,2z}^T e^{jkx\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)}dx$

กระแสเหนี่ยวนำที่ขอบ $\vec{j}_2^T$ บนพื้นผิวด้านล่างสามารถคำนวณโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{j}_2^T &= \hat{y}\times\vec{H}(y=0)\\ &= H_z(y=0)\hat{x}-H_x(y=0)\hat{z}\end{aligned} \quad \text{(ก.49 ก)}$$

ดังนั้น

$$J_{2x}^T=H_z(y=0) \quad \text{(ก.49 ข)}$$

$$J_{2z}^T=-H_x(y=0) \quad \text{(ก.49 ค)}$$

จะเห็นสนามรวมมีเฉพาะสนามแนวแกน z เท่านั้น และมีตัวประกอบวัฏภาคเป็น $e^{jkz\cos(\pi-\beta')}$ เมื่อใช้สมการแมกซ์เวลล์ $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-jkZ\vec{H}$ และ $\vec{\nabla}\times\vec{H}=-jk\vec{E}/Z$ จะได้นิพจน์ของ H_x ในพจน์ขององค์ประกอบสนามแนวแกน z ดังนี้

$$H_x=-\frac{1}{jkZ\sin^2(\pi-\beta')}\frac{\partial E_z}{\partial y}+\frac{\cos(\pi-\beta')}{jk\sin^2(\pi-\beta')}\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \text{(ก.50)}$$

สามารถหาสนาม E_z และ H_z จากปัญหารูปลิ่มอันเนื่องมาจากสนามตกกระทบ E_{zo}^i และ H_{zo}^i ที่จุด o ได้ดังนี้

$$E_z=E_{zo}^i\left[\frac{U\left(X,\psi-(N\pi-\phi')\right)-U\left(X,\psi+(N\pi-\phi')\right)}{j2\pi N}\right] \quad \text{(ก.51)}$$

$$H_z = H_{zo}^i \left[\frac{U\left(X,\psi-\left(N\pi-\phi'\right)\right)+U\left(X,\psi+\left(N\pi-\phi'\right)\right)}{j2\pi N} \right] \tag{ก.52}$$

โดยที่ $X = k\rho\sin\left(\pi-\beta'\right)$

ρ และ ψ เป็นระบบพิกัดเชิงขั้วของสนามในระนาบ xy

เมื่อ $y=0$ จะหากระแสสมมูลรวมที่ขอบในองค์ประกอบแนวแกน z ได้ดังนี้

$$J_{2z}^T = \frac{1}{jk\sin^2\left(\pi-\beta'\right)} \left(\frac{1}{Z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \cos\left(\pi-\beta'\right)\left(\frac{\partial H_z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right)\Bigg|_{y=0} \tag{ก.53}$$

ที่ $y=0$ จะได้ว่า $\rho = x$ ดังนั้น $\partial X/\partial x = k\sin\left(\pi-\beta'\right)$, $\partial X/\partial y = 0$, $\partial\Phi/\partial x = 0$ และ $\partial\Phi/\partial y = -1/x$ แทนทั้งหมดลงในสมการ (ก.53) จะได้

$$J_{2z}^T = \frac{1}{jk\sin^2\left(\pi-\beta'\right)} \left(-\frac{1}{Zx}\frac{\partial E_z}{\partial \Phi} - k\sin\left(\pi-\beta'\right)\cos\left(\pi-\beta'\right)\frac{\partial H_z}{\partial X} \right)\Bigg|_{y=0} \tag{ก.54}$$

ที่ $\psi = 0$ จะได้สนามแม่เหล็กที่แผ่กระจายออกมาจากรูปลิ่มเป็น $H_z = 2H_{zo}^i \dfrac{U\left(X,N\pi-\phi'\right)}{j2\pi N}$ ตามลำดับ แทนลงในสมการ (ก.54) จะได้เป็น

$$J_{2z}^T = \frac{1}{jk\sin^2\left(\pi-\beta'\right)} \left(\begin{array}{l} -\dfrac{1}{Zx}\dfrac{\partial E_z}{\partial \Phi} \\ -2H_{zo}^i k\sin\left(\pi-\beta\right)\cos\left(\pi-\beta'\right)\dfrac{\partial u\left(X,N\pi-\phi'\right)}{\partial X} \end{array} \right)\Bigg|_{y=0} \tag{ก.55}$$

โดยที่ $u\left(X,N\pi-\phi'\right) = U\left(X,N\pi-\phi'\right)/j2\pi N$

กำหนดให้ $dX/k\sin\left(\pi-\beta\right)$ และ $\mu_2 = \sin\left(\pi-\beta\right)\cos\left(N\pi-\phi\right)/\sin\left(\pi-\beta'\right)$ จะได้ว่า

$$K_{2z}^T = \frac{1}{k\sin\left(\pi-\beta\right)}\int_0 J_{2z}^T e^{jX\mu_2}\,dX \tag{ก.56}$$

แทนสมการ (ก.55) ลงใน (ก.56) จะได้เป็น

$$K_{2z}^T = -\frac{j}{Zk\sin^2\left(\pi-\beta'\right)}\int_0 \frac{1}{X}\frac{\partial E_z}{\partial \Phi} e^{jX\mu_2}\,dX + H_{zo}^i \frac{j2\cot\left(\pi-\beta'\right)}{k\sin\left(\pi-\beta'\right)}\int_0 \frac{\partial u\left(X,N\pi-\phi'\right)}{\partial X} e^{jX\mu_2}\,dX \tag{ก.57}$$

พิจารณา $\left.\dfrac{1}{X}\dfrac{\partial E_z}{\partial \Phi}\right|_{y=0}$ โดยแทนสมการ (ก.51) ลงไปจะได้

$$\frac{1}{X}\frac{\partial E_z}{\partial \Phi}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{X}\frac{E_{zo}^i \partial u\left(X,\Phi_1\right)}{\partial \Phi_1}\bigg|_{y=0} - \frac{1}{X}\frac{E_{zo}^i \partial u\left(X,\Phi_2\right)}{\partial \Phi_2}\bigg|_{y=0} \qquad (\text{ก.58})$$

โดยที่ $\Phi_1 = \psi - \left(N\pi - \phi'\right)$ และ $\Phi_2 = \psi + \left(N\pi - \phi'\right)$

ใช้ผลจากภาคผนวก ข สมการ (ค.23) จะได้

$$\frac{1}{X}\frac{\partial u\left(X,\Phi\right)}{\partial \Phi} = -\frac{\sin\left(\Phi/_N\right)}{2\pi N}\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}d\xi \qquad (\text{ก.59})$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{X}\frac{\partial u\left(X,\Phi_1\right)}{\partial \Phi_1}\bigg|_{y=0} = -\frac{\sin\left(-\left(\frac{N\pi-\phi'}{N}\right)\right)}{2\pi N}\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(^{N\pi-\phi'}/_N\right)}d\xi \qquad (\text{ก.60 ก})$$

$$\frac{1}{X}\frac{\partial u\left(X,\Phi_2\right)}{\partial \Phi_2}\bigg|_{y=0} = -\frac{\sin\left(\frac{N\pi-\phi'}{N}\right)}{2\pi N}\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(^{N\pi-\phi'}/_N\right)}d\xi \qquad (\text{ก.60 ข})$$

เมื่อแทนสมการ (ก.60 ก) และสมการ (ก.60 ข) ในสมการ (ก.58) จะได้

$$\frac{1}{X}\frac{\partial E_z}{\partial \Phi}\bigg|_{y=0} = 2E_{zo}^i\frac{\sin\left(\frac{N\pi-\phi'}{N}\right)}{2\pi N}\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(^{N\pi-\phi'}/_N\right)}d\xi \qquad (\text{ก.61})$$

$$= -2E_{zo}^i\frac{1}{X}\frac{\partial u\left(X,N\pi-\phi'\right)}{\partial\left(N\pi-\phi'\right)}\bigg|_{y=0} \qquad (\text{ก.62})$$

แทนสมการ (ก.62) ในสมการ (ก.57) จะได้เป็น

$$\begin{aligned} K_{2z}^T = {} & E_{zo}^i\frac{j2}{Zk\sin^2\left(\pi-\beta'\right)}\int_0\frac{1}{X}\frac{\partial u\left(X,N\pi-\phi'\right)}{\partial\left(N\pi-\phi'\right)}\bigg|_{y=0} e^{jX\mu_2}dX \\ & + H_{zo}^i\frac{j2\cot\left(\pi-\beta'\right)}{k\sin\left(\pi-\beta'\right)}\int_0\frac{\partial u\left(X,\Phi\right)}{\partial X}e^{jX\mu_2}dX \end{aligned} \qquad (\text{ก.63})$$

แทนสมการ (ค.12) และ (ค.28) ลงในสมการ (ก.63) จะได้เป็น

$$\begin{aligned} K_{1z}^T = {} & -E_{zo}^i\frac{j2}{Zk\sin^2\left(\pi-\beta'\right)}\frac{\left(1/N\right)\sin\left(N\pi-\phi'/N\right)}{\cos\left(\frac{\pi-\alpha_2}{N}\right)+\cos\left(\frac{\phi'}{N}\right)} \\ & + H_{zo}^i\frac{j2\cot\left(\pi-\beta'\right)}{k\sin\left(\pi-\beta'\right)}\frac{\left(\cot\alpha_2/N\right)\sin\left(\frac{\pi-\alpha_2}{N}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi-\alpha_2}{N}\right)+\cos\left(\frac{\phi'}{N}\right)\right]} \end{aligned} \qquad (\text{ก.64 ก})$$

โดยที่

$$\alpha_2 = \cos^{-1}\mu_2 \qquad (\text{ก.64 ข})$$

พิจารณากระแส J^T_{2x} จะพบว่ามีค่าเท่ากับ $H_z\left(y=0\right)$ เมื่อแทนลงในสมการ (ก.52) จะได้ว่า

$$H_z\big|_{y=0} = H^i_{zo}\left[\frac{U\left(X,-\left(N\pi-\phi'\right)\right)+U\left(X,+\left(N\pi-\phi'\right)\right)}{j2\pi N}\right] \tag{ก.65}$$

เนื่องจาก $U\left(X,-\left(N\pi-\phi'\right)\right)=U\left(X,+\left(N\pi-\phi'\right)\right)$ เมื่อแทนลงในสมการ (ก.65) และสมการ (ก.49 ข) จะได้

$$J^T_{2x} = H_z\big|_{y=0} = 2H^i_{z0}\frac{U\left(X,N\pi-\phi'\right)}{j2\pi N} \tag{ก.66}$$

เช่นเดียวกับ (ก.56) จะได้ว่า

$$K^T_{2x} = \frac{1}{k\sin\left(\pi-\beta\right)}\int_0 J^T_{2x}e^{jX\mu_2}dX \tag{ก.67}$$

แทนสมการ (ก.66) ลงในสมการ (ก.67) จะได้ว่า

$$K^T_{2x} = H^i_{z0}\frac{2}{k\sin\left(\pi-\beta\right)}\int_0 \frac{U\left(X,N\pi-\phi'\right)}{j2\pi N}e^{jX\mu_2}dX \tag{ก.68}$$

ค่าของปริพันธ์ในสมการ (ก.68) สามารถหาได้จากภาคผนวก ข สมการ (ข.12) เมื่อแทนแล้วจะได้เป็น

$$K^T_{2x} = -H^i_{z0}\frac{j2}{Nk\sin\left(\pi-\beta\right)\sin\left(\pi-\alpha_2\right)}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi-\alpha_2}{N}\right)}{\left[\cos\left(\dfrac{\pi-\alpha_2}{N}\right)+\cos\left(\dfrac{\phi'}{N}\right)\right]} \tag{ก.69}$$

ดังนั้นกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็กที่ขอบของพื้นผิวด้านล่าง S_2 สามารถหาได้โดยแทนสมการ (ก.64) และ (ก.68) ลงในสมการ (ก.47) และสมการ (ก.48) ตามลำดับจะได้เป็น

$$\begin{aligned} I^T_2 = &-E^i_{zo}\frac{2j}{Zk\sin^2\left(\pi-\beta'\right)}\frac{\left(1/N\right)\sin\left(\left(N\pi-\phi'\right)/N\right)}{\cos\left[\left(\pi-\alpha_2\right)/N\right]+\cos\left(\phi'/N\right)} \\ &-H^i_{zo}\frac{2j\left(\mu_2\cot\left(\pi-\beta'\right)-\cot\left(\pi-\beta\right)\cos\left(N\pi-\phi\right)\right)}{k\sin\left(\pi-\beta'\right)\sin\alpha_2}\frac{\left(1/N\right)\sin\left[\left(\pi-\alpha_2\right)/N\right]}{\cos\left[\left(\pi-\alpha_2\right)/N\right]+\cos\left(\phi'/N\right)} \end{aligned} \tag{ก.70 ก}$$

$$M^T_2 = H^i_{z0}\frac{j2Z\sin\left(N\pi-\phi\right)}{Nk\sin\left(\pi-\beta\right)\sin\left(\pi-\beta'\right)\sin\alpha_2}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi-\alpha_2}{N}\right)}{\left[\cos\left(\dfrac{\pi-\alpha_2}{N}\right)+\cos\left(\dfrac{\phi'}{N}\right)\right]} \tag{ก.70 ข}$$

ดังนั้นจะได้กระแสไฟฟ้าสมมูลรวมและกระแสแม่เหล็กสมมูลรวมที่เกิดจากพื้นผิวบนและพื้นผิวล่างเป็นดังนี้

$$I^T = \sum_{i=1}^{2} I_i^T = -E_{zo}^i \frac{2j\sin(\phi'/N)}{NZk\sin^2\beta'}\left\{\frac{1}{\cos\left[(\pi-\alpha_1)/N\right]-\cos(\phi'/N)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\cos\left[(\pi-\alpha_2)/N\right]+\cos(\phi'/N)}\right\} - H_{zo}^i \frac{2j}{Nk\sin(\pi-\beta')}$$

$$\cdot\left\{\frac{\mu_1\cot\beta'-\cot\beta\cos\phi}{\sin\alpha_1}\frac{\sin\left[(\pi-\alpha_1)/N\right]}{\cos\left[(\pi-\alpha_1)/N\right]-\cos(\phi'/N)}\right. \tag{ก.71 ก}$$

$$\left.-\frac{\mu_2\cot\beta'-\cot\beta\cos(N\pi-\phi)}{\sin\alpha_2}\frac{\sin\left[(\pi-\alpha_2)/N\right]}{\cos\left[(\pi-\alpha_2)/N\right]+\cos(\phi'/N)}\right\}$$

$$M^T = \sum_{i=1}^{2} M_i^T = H_{z0}^i \frac{j2Z}{Nk\sin\beta\sin\beta'}\left\{\frac{\sin\phi}{\sin\alpha_1}\frac{\sin\left(\frac{\pi-\alpha_1}{N}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi-\alpha_1}{N}\right)-\cos\left(\frac{\phi'}{N}\right)\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(N\pi-\phi)}{\sin\alpha_2}\frac{\sin\left(\frac{\pi-\alpha_2}{N}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi-\alpha_2}{N}\right)+\cos\left(\frac{\phi'}{N}\right)\right]}\right\} \tag{ก.71 ข}$$

เมื่อพิจารณากระแสสมมูลรวมตามแนวคิดของมิคาเอลอิในกรณีที่ $\beta = \beta'$ ซึ่งสอดคล้องกับกรวยการเลี้ยวเบนของเคลเลอร์ในทิศทางไปยังจุดสังเกตหน้าจาน จะพบว่า $\mu_1 = \cos\phi,\ \alpha_1 = \phi,$ $\mu_2 = \cos(N\pi - \phi)$ แทนทั้งหมดลงในสมการ (ก.71 ก) และสมการ (ก.71 ข) จะได้

$$I^T(\beta=\beta') = E_{zo}^i \frac{2j\sin(\pi/N)}{NZk\sin^2\beta'}\left\{\frac{1}{\cos[\pi/N]-\cos\left[(\phi-\phi')/N\right]}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\cos[\pi/N]-\cos\left[(\phi+\phi')/N\right]}\right\} \tag{ก.72 ก}$$

$$M^T(\beta=\beta') = H_{zo}^i \frac{2jZ\sin(\pi/N)}{Nk\sin^2\beta'}\left\{\frac{1}{\cos[\pi/N]-\cos\left[(\phi-\phi')/N\right]}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\cos[\pi/N]-\cos\left[(\phi+\phi')/N\right]}\right\} \tag{ก.72 ข}$$

จะเห็นได้ว่าพจน์ในวงเล็บปีกกาของกระแสไฟฟ้าสมมูลรวมและกระแสแม่เหล็กสมมูลรวมจะสอดคล้องกับค่าสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนของเคลเลอร์

การใช้กรรมวิธีเส้นกำกับเพื่อลดรูปปริพันธ์ของพื้นผิวให้เป็นปริพันธ์ที่ขอบตามแนวคิดของมิคาเอลลินี้ สนามกระเจิงจะเกิดจากกระแสสมมูลรวมบริเวณใกล้ๆ ขอบ ในขณะที่กระแสสมมูลตามแนวคิดของทั้งอูฟิล์ม-

เซฟ [24] และสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนของส่วนความยาวส่วนย่อย (Mitzner 's incremental length diffraction coefficient, ILDC) ของมิทซ์เนอร์ [25] นั้นคือองค์ประกอบของกระแสไม่สม่ำเสมอเท่านั้น โดย นอทท์ (Knott) [26] พบว่าผลต่างของกระแสสมมูลรวมและกระแสไม่สม่ำเสมอนั้นเกิดเนื่องมาจากกระแสทัศนศาสตร์กายภาพที่พื้นผิวบริเวณขอบเพราะฉะนั้นกระแสไม่สม่ำเสมอสามารถหาได้จาก

$$\sum_{i=1}^{2} I_i^F = \sum_{i=1}^{2} I_i^T - \sum_{i=1}^{2} I_i^{PO} \qquad \text{(ก.73)}$$

การหากระแสไม่สม่ำเสมอจำเป็นต้องทราบกระแสทัศนศาสตร์กายภาพ โดยจะพิจารณาจากปัญหาการกระเจิงของรูปลิ่มที่มีแหล่งกำเนิดเป็นไดโพลขนาดเล็กมากและวางตัวในแนวแกน z ในตำแหน่งที่ไกลมาก ซึ่งจะได้สนามไฟฟ้าตกกระทบและสนามแม่เหล็กตกกระทบบนพื้นผิวบนเป็นดังนี้

$$E_z = E_{zo}^i e^{jk\rho \sin\beta' \cos(\phi-\phi')} U\left(\pi - \phi'\right) \qquad \text{(ก.74 ก)}$$

$$H_z = H_{zo}^i e^{jk\rho \sin\beta' \cos(\phi-\phi')} U\left(\pi - \phi'\right) \qquad \text{(ก.74 ข)}$$

โดยที่ $U(\bullet)$ คือฟังก์ชันหนึ่งหน่วยแบบขั้น (unit step function) ที่พื้นผิวบนกระแสสมมูลทัศนศาสตร์กายภาพบริเวณขอบเป็นดังนี้

$$I_1^{PO} = K_{1z}^{PO} - K_{1x}^{PO} \cot\beta \cos\phi \qquad \text{(ก.75)}$$

$$M_1^{PO} = -ZK_{1x}^{PO} \frac{\sin\phi}{\sin\beta} \qquad \text{(ก.76)}$$

โดยที่

$$K_{1x,1z}^{PO} = \int_0 j_{1x,1z}^{PO} e^{jkx\sin\beta\cos\phi} dx \qquad \text{(ก.77)}$$

กระแสทัศนศาสตร์กายภาพ $\vec{j}_1^{PO}$ ที่เหนี่ยวนำบนพื้นผิวด้านบนสามารถคำนวณโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{j}_1^{PO} &= 2\hat{y} \times \vec{H}\left(y=0\right) \\ &= 2H_z\left(y=0\right)\hat{x} - 2H_x\left(y=0\right)\hat{z}\end{aligned} \qquad \text{(ก.78 ก)}$$

ดังนั้น

$$J_{1x}^{PO} = 2H_z\left(y=0\right) \qquad \text{(ก.78 ข)}$$

$$J_{1z}^{PO} = -2H_x\left(y=0\right) \qquad \text{(ก.78 ค)}$$

สนามรวมขึ้นอยู่กับสนามแนว z เท่านั้น และ จะได้นิพจน์ของ H_x ในพจน์ขององค์ประกอบสนามแนวแกน z ดังนี้

$$H_x = -\frac{1}{jkZ\sin^2\beta'}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\cos\beta'}{jk\sin^2\beta'}\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad \text{(ก.79)}$$

เมื่อใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์กับสมการ (ก.79) จะได้เป็น

$$H_x\Big|_{y=0} = \frac{1}{jk\sin^2\beta'}\left(-\frac{1}{Z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \cos\beta'\left(\frac{\partial H_z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right)\Bigg|_{y=0} \qquad \text{(ก.80)}$$

โดยที่ $X = k\rho\sin\beta'$ และ $\Phi = \phi - \phi'$

ที่ $y = 0$ จะได้ว่า $\rho = x$ ดังนั้น $\partial X/\partial x = k\sin\beta'$, $\partial X/\partial y = \partial\left(kx\sin\beta'\right)/\partial y = 0,$ $\partial\Phi/\partial x = 0$ และ $\partial\Phi/\partial y = -1/x$ แทนทั้งหมดรวมทั้ง (ก.74 ก) และ (ก.74 ข) ลงในสมการ (ก.80) จะได้

$$H_x\Big|_{y=0} = \frac{1}{jk\sin^2\beta'}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{Z}E^i_{zo}jkx\sin\beta'\sin\phi' e^{jk\sin\beta'\cos\phi'}U\left(\pi-\phi'\right) \\ +H^i_{zo}jk\sin\beta'\cos\beta'\cos\phi' e^{jk\sin\beta'\cos\phi'}U\left(\pi-\phi'\right)\end{pmatrix} \quad \text{(ก.81)}$$

แทนสมการ (ก.81) ลงในสมการ (ก.78 ค) จะได้องค์ประกอบของกระแสทัศนศาสตร์กายภาพแนวแกน z ดังนี้

$$J^{PO}_{1z} = 2\left[E^i_{zo}\frac{\sin\phi' e^{jkx\sin\beta'\cos\phi'}}{Z\sin\beta'} - H^i_{zo}\cot\beta'\cos\phi' e^{jkx\sin\beta'\cos\phi'}\right]U\left(\pi-\phi'\right) \quad \text{(ก.82)}$$

แทนสมการ (ก.82) ลงใน (ก.77)

$$K^{PO}_{1z} = 2\begin{bmatrix} E^i_{zo}\int_0 \dfrac{\sin\phi' e^{jkx\sin\beta'\cos\phi' + jkx\sin\beta\cos\phi}}{Z\sin\beta'}dx \\ -H^i_{zo}\int_0 \cot\beta'\cos\phi' e^{jkx\sin\beta'\cos\phi' + jkx\sin\beta\cos\phi}dx\end{bmatrix}U\left(\pi-\phi'\right) \quad \text{(ก.83)}$$

กำหนดให้ $dx = dX/k\sin\beta'$ และ $\mu_1 = \sin\beta\cos\phi/\sin\beta'$ จะได้ว่า

$$K^{PO}_{1z} = 2\begin{bmatrix} E^i_{zo}\dfrac{\sin\phi'}{Zk\sin^2\beta'}\int_0 e^{jX\left(\cos\phi'+\mu_1\right)}dX \\ -H^i_{zo}\dfrac{\cot\beta'\cos\phi'}{k\sin\beta'}\int_0 e^{jX\left(\cos\phi'+\mu_1\right)}dX\end{bmatrix}U\left(\pi-\phi'\right) \quad \text{(ก.84)}$$

แทน $\int_0 e^{jX\left(\cos\phi'+\mu_1\right)}dX = \dfrac{j}{\cos\phi'+\mu_1}$ ลงใน (ก.84) จะได้เป็น

$$K^{PO}_{1z} = \frac{2jU\left(\pi-\phi'\right)}{\cos\phi'+\mu}\left[E^i_{zo}\frac{\sin\phi'}{Zk\sin^2\beta'} - H^i_{zo}\frac{\cot\beta'\cos\phi'}{k\sin\beta'}\right] \quad \text{(ก.85)}$$

แทน (ก.74 ข) ลงใน (ก.78 ข) จะได้องค์ประกอบของกระแสทัศนศาสตร์กายภาพแนวแกน x ดังนี้

$$J^{PO}_{1x} = 2H^i_{zo}e^{jkx\sin\beta'\cos\phi'}U\left(\pi-\phi'\right) \quad \text{(ก.86)}$$

แทน (ก.86) ลงใน (ก.77) จะได้

$$K^{PO}_{1x} = 2H^i_{zo}U\left(\pi-\phi'\right)\int_0 e^{jkx\sin\beta'\cos\phi' + jkx\sin\beta\cos\phi}dx \quad \text{(ก.87)}$$

แทน $dx = dX/k\sin\beta'$ และ $\mu_1 = \sin\beta\cos\phi/\sin\beta'$ ลงใน (ก.87) จะได้ว่า

$$K_{1x}^{PO} = \frac{2H_{zo}^{i}U(\pi-\phi')}{k\sin\beta'}\int_0 e^{jX(\cos\phi'+\mu_1)}dX \tag{ก.88}$$

แทน $\int_0 e^{jX(\cos\phi'+\mu_1)}dX = \dfrac{j}{\cos\phi'+\mu_1}$ ลงใน (ก.88) จะได้เป็น

$$K_{1x}^{PO} = \frac{2jH_{zo}^{i}U(\pi-\phi')}{k\sin\beta'(\cos\phi'+\mu_1)} \tag{ก.89}$$

แทนสมการ (ก.85) และสมการ (ก.89) ลงในสมการ (ก.75) และ สมการ (ก.76) จะได้กระแสไฟฟ้าสมมูลทัศนศาสตร์กายภาพและกระแสแม่เหล็กสมมูลทัศนศาสตร์กายภาพเป็นดังนี้

$$I_1^{PO} = \frac{2jU(\pi-\phi')}{k\sin\beta'(\cos\phi'+\mu_1)}\left[E_{zo}^{i}\frac{\sin\phi'}{Z\sin\beta'} - H_{zo}^{i}\left(\cot\beta'\cos\phi'+\cot\beta\cos\phi\right)\right] \tag{ก.90 ก}$$

$$M_1^{PO} = -H_{zo}^{i}\frac{2jZ\sin\phi U(\pi-\phi')}{k\sin\beta\sin\beta'(\cos\phi'+\mu_1)} \tag{ก.90 ข}$$

สำหรับสนามไฟฟ้าตกกระทบและสนามแม่เหล็กตกกระทบบนพื้นผิวล่างในปัญหารูปลิ่มเป็นดังนี้

$$E_z = E_{zo}^{i}e^{jk\rho\sin(\pi-\beta')\cos((N\pi-\phi')-(N\pi-\phi))}U\left(\pi-(N\pi-\phi')\right) \tag{ก.91 ก}$$

$$H_z = H_{zo}^{i}e^{jk\rho\sin(\pi-\beta')\cos((N\pi-\phi')-(N\pi-\phi))}U\left(\pi-(N\pi-\phi')\right) \tag{ก.91 ข}$$

โดยที่ $U(\bullet)$ คือฟังก์ชันหนึ่งหน่วยแบบขั้น (unit step function) ที่พื้นผิวบนกระแสสมมูลทัศนศาสตร์กายภาพบริเวณขอบเป็นดังนี้

$$I_2^{PO} = K_{2z}^{PO} - K_{2x}^{PO}\cot(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi) \tag{ก.92}$$

$$M_2^{PO} = -ZK_{2x}^{PO}\frac{\sin(N\pi-\phi)}{\sin(\pi-\beta)} \tag{ก.93}$$

โดยที่
$$K_{2x,2z}^{PO} = \int_0 j_{2x,2z}^{PO}e^{jkx\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)}dx \tag{ก.94}$$

กระแสทัศนศาสตร์กายภาพ $\vec{j}_2^{PO}$ ที่เหนี่ยวนำบนพื้นผิวด้านล่างสามารถคำนวณโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{j}_2^{PO} &= 2\hat{y}\times\vec{H}(y=0)\\ &= 2H_z(y=0)\hat{x} - 2H_x(y=0)\hat{z}\end{aligned} \tag{ก.95 ก}$$

ดังนั้น

$$J_{2x}^{PO} = 2H_z(y=0) \tag{ก.95 ข}$$

$$J_{2z}^{PO} = -2H_x(y=0) \tag{ก.95 ค}$$

สนามรวมขึ้นอยู่กับสนามแนวแกน z เท่านั้น และ จะได้นิพจน์ของ H_x ในพจน์ขององค์ประกอบสนามแนวแกน z ดังนี้

$$H_x = -\frac{1}{jkZ\sin^2(\pi-\beta')}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\cos(\pi-\beta')}{jk\sin^2(\pi-\beta')}\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{ก.96}$$

ใช้กฎลูกโซ่จะได้เป็น

$$H_x\Big|_{y=0} = \frac{1}{jk\sin^2(\pi-\beta')}\left(-\frac{1}{Z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \cos(\pi-\beta')\left(\frac{\partial H_z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right)\Bigg|_{y=0} \tag{ก.97}$$

โดยที่ $X = k\rho\sin(\pi-\beta')$ และ $\Phi = \phi' - \phi$

ที่ $y=0$ จะได้ว่า $\rho = x$ ดังนั้น $\partial X/\partial x = k\sin(\pi-\beta')$, $\partial X/\partial y = 0$, $\partial\Phi/\partial x = 0$ และ $\partial\Phi/\partial y = 1/x$ แทนทั้งหมดรวมทั้ง (ก.91 ก) และ (ก.92 ข)ลงในสมการ (ก.97) จะได้

$$H_x\Big|_{y=0} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{Z}E^i_{zo}jkx\sin(\pi-\beta')\sin(N\pi-\phi')e^{jk\sin(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')}U\left(\pi-(N\pi-\phi')\right) \\ +H^i_{zo}jk\sin(\pi-\beta')\cos(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')e^{jk\sin\beta'\cos(N\pi-\phi')}U\left(\pi-(N\pi-\phi')\right) \end{pmatrix} \cdot\frac{1}{jk\sin^2(\pi-\beta')} \tag{ก.98}$$

แทนสมการ (ก.98) ลงในสมการ (ก.95 ค) จะได้องค์ประกอบของกระแสทัศนศาสตร์กายภาพแนวแกน $-z$ ดังนี้

$$J^{PO}_{2z} = 2\begin{bmatrix} E^i_{zo}\dfrac{\sin(N\pi-\phi')e^{jkx\sin(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')}}{Z\sin(\pi-\beta')} \\ -H^i_{zo}\cot(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')e^{jkx\sin(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')} \end{bmatrix} U\left(\pi-(N\pi-\phi')\right) \tag{ก.99}$$

แทนสมการ (ก.99) ลงในสมการ (ก.94) จะได้

$$K^{PO}_{2z} = 2\begin{bmatrix} E^i_{zo}\displaystyle\int_0 \frac{\sin(N\pi-\phi')e^{jkx\sin(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')+jkx\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)}}{Z\sin(\pi-\beta')}dx \\ -H^i_{zo}\displaystyle\int_0 \cot(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')e^{jkx\sin(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')+jkx\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)}dx \end{bmatrix} \cdot U\left(\pi-(N\pi-\phi')\right) \tag{ก.100}$$

กำหนดให้ $dx = dX/k\sin(\pi-\beta')$ และ $\mu_2 = \sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi')/\sin(\pi-\beta')$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} K^{PO}_{2z} = 2U\left(\pi-(N\pi-\phi')\right)\Bigg[& E^i_{zo}\frac{\sin(N\pi-\phi')}{Zk\sin^2(\pi-\beta')}\int_0 e^{jX\left(\cos(N\pi-\phi')+\mu_2\right)}dX \\ & -H^i_{zo}\frac{\cot(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')}{k\sin(\pi-\beta')}\int_0 e^{jX\left(\cos(N\pi-\phi')+\mu_2\right)}dX\Bigg] \end{aligned} \tag{ก.101}$$

แทน $\int_0 e^{jX(\cos(N\pi-\phi')+\mu_2)}dX = \dfrac{j}{\cos(N\pi-\phi')+\mu_2}$ ลงในสมการ (ก.101) จะได้

$$K_{2z}^{PO} = \frac{2jU(\pi-(N\pi-\phi'))}{\cos(N\pi-\phi')+\mu_2}\left[E_{zo}^{i}\frac{\sin(N\pi-\phi')}{Zk\sin^2(\pi-\beta')} - H_{zo}^{i}\frac{\cot(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')}{k\sin(\pi-\beta')}\right] \quad \text{(ก.102)}$$

แทนสมการ (ก.91 ข) ลงในสมการ (ก.96) จะได้องค์ประกอบของกระแสทัศนศาสตร์กายภาพแนวแกน x ดังนี้

$$J_{2x}^{PO} = 2H_{zo}^{i}e^{jk\rho\sin(\pi-\beta')\cos((N\pi-\phi')-(N\pi-\phi))}U(\pi-(N\pi-\phi')) \quad \text{(ก.103)}$$

แทนสมการ (ก.103) ลงในสมการ (ก.94) จะได้

$$K_{2x}^{PO} = 2H_{zo}^{i}U(\pi-(N\pi-\phi'))\int_0 e^{jkx\sin(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')+jk\rho\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)}dx \quad \text{(ก.104)}$$

แทน $dx = dX/k\sin(\pi-\beta')$ และ $\mu_2 = \sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi')/\sin(\pi-\beta')$ ลงในสมการ (ก.104) จะได้ว่า

$$K_{2x}^{PO} = \frac{2H_{zo}^{i}U(\pi-(N\pi-\phi'))}{k\sin(\pi-\beta')}\int_0 e^{jX(\cos(N\pi-\phi')+\mu_2)}dX \quad \text{(ก.105)}$$

แทน $\int_0 e^{jX(\cos(N\pi-\phi')+\mu_2)}dX = \dfrac{j}{\cos(N\pi-\phi')+\mu_2}$ ลงในสมการ (ก.105) จะได้

$$K_{2x}^{PO} = \frac{2jH_{zo}^{i}U(N\pi-\phi')}{k\sin(\pi-\beta')(\cos(N\pi-\phi')+\mu_2)} \quad \text{(ก.106)}$$

แทนสมการ (ก.102) และสมการ (ก.106) ลงในสมการ (ก.92) และ สมการ (ก.93) จะได้กระแสไฟฟ้าสมมูลทัศนศาสตร์กายภาพและกระแสแม่เหล็กสมมูลทัศนศาสตร์กายภาพเป็นดังนี้

$$I_2^{PO} = \frac{2jU(\pi-(N\pi-\phi'))}{k\sin(\pi-\beta')(\cos(N\pi-\phi')+\mu_2)} \cdot \begin{bmatrix} E_{zo}^{i}\dfrac{\sin(N\pi-\phi')}{Z\sin(\pi-\beta')} \\ -H_{zo}^{i}(\cot(\pi-\beta')\cos(N\pi-\phi')+\cot(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi)) \end{bmatrix} \quad \text{(ก.107 ก)}$$

$$M_2^{PO} = -H_{zo}^{i}\frac{2jZ\sin(N\pi-\phi)U(\pi-(N\pi-\phi'))}{k\sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\beta')(\cos(N\pi-\phi')+\mu_2)} \quad \text{(ก.107 ข)}$$

เพราะฉะนั้นความหนาแน่นของกระแสทัศนศาสตร์กายภาพจากทั้งพื้นผิวบนและพื้นผิวล่างจะมีค่าเป็น

$$I^{PO}=\sum_{i=1}^{2}I_i^{PO}=\left[E_{zo}^{i}\frac{\sin\phi'}{Z\sin\beta'}-H_{zo}^{i}\left(\cot\beta'\cos\phi'+\cot\beta\cos\phi\right)\right]$$
$$\cdot\frac{2jU\left(\pi-\phi'\right)}{k\sin\beta'\left(\cos\phi'+\mu_1\right)}$$
$$+\left[\begin{array}{l}E_{zo}^{i}\dfrac{\sin\left(N\pi-\phi'\right)}{Z\sin\left(\pi-\beta'\right)}\\ -H_{zo}^{i}\left(\cot\left(\pi-\beta'\right)\cos\left(N\pi-\phi'\right)+\cot\left(\pi-\beta\right)\cos\left(N\pi-\phi\right)\right)\end{array}\right]$$
$$\cdot\frac{2jU\left(\pi-\left(N\pi-\phi'\right)\right)}{k\sin\left(\pi-\beta'\right)\left(\cos\left(N\pi-\phi'\right)+\mu_2\right)} \qquad \text{(ก.108 ก)}$$

$$M^{PO}=\sum_{i=1}^{2}M_i^{PO}=-H_{zo}^{i}\left[\frac{2jZ\sin\left(N\pi-\phi\right)U\left(\pi-\left(N\pi-\phi'\right)\right)}{k\sin\left(\pi-\beta\right)\sin\left(\pi-\beta'\right)\left(\cos\left(N\pi-\phi'\right)+\mu_2\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{2jZ\sin\phi U\left(\pi-\phi'\right)}{k\sin\beta\sin\beta'\left(\cos\phi'+\mu_1\right)}\right] \qquad \text{(ก.108 ข)}$$

การพิจารณาและการแก้จุดเอกฐานในกระแสไม่สม่ำเสมอ

การพิจารณาจุดเอกฐานขององค์ประกอบกระแสไม่สม่ำเสมอแบ่งออกได้เป็น 2 ส่วน คือ 1. พิจารณาจุดเอกฐานขององค์ประกอบความหนาแน่นกระแสทัศนศาสตร์กายภาพ และ 2. พิจารณาจุด เอกฐานของความหนาแน่นกระแสสมมูลรวม

1. พิจารณาสมการ (ก.90 ก) และ สมการ (ก.90 ข) พบว่า I_1^{PO} และ M_1^{PO} จะมีค่าเป็นอนันต์เมื่อ $\cos\phi'+\mu_1=0$ นั่นคือ

$$\sin\beta\cos\phi=-\sin\beta'\cos\phi' \qquad \text{(ก.109)}$$

ทำนองเดียวกันเมื่อพิจาณาสมการ (ก.107 ก) และ สมการ (ก.107 ข) พบว่า I_2^{PO} และ M_2^{PO} จะมีค่าเป็นอนันต์เมื่อ $\cos\left(N\pi-\phi'\right)+\mu_2=0$ หรือ

$$\sin\left(\pi-\beta\right)\cos\left(N\pi-\phi\right)=-\sin\left(\pi-\beta'\right)\cos\left(N\pi-\phi'\right) \qquad \text{(ก.110)}$$

หากมองให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางของรังสีตกกระทบและรังสีสะท้อนจะได้เป็น

$$\hat{s}\cdot\hat{x}=\hat{s}'\cdot\hat{x} \qquad \text{(ก.111)}$$

2. พิจารณาความหนาแน่นกระแสสมมูลรวม I_1^T และ M_1^T ในสมการ (ก.43 ก) และ สมการ (ก.43 ข) จะพบว่าเกิดจุดเอกฐานเมื่อ $\sin\alpha_1=0$ หรือ $\mu_1=1$ จะได้เป็น

$$\sin\beta\cos\phi=\sin\beta' \qquad \text{(ก.112)}$$

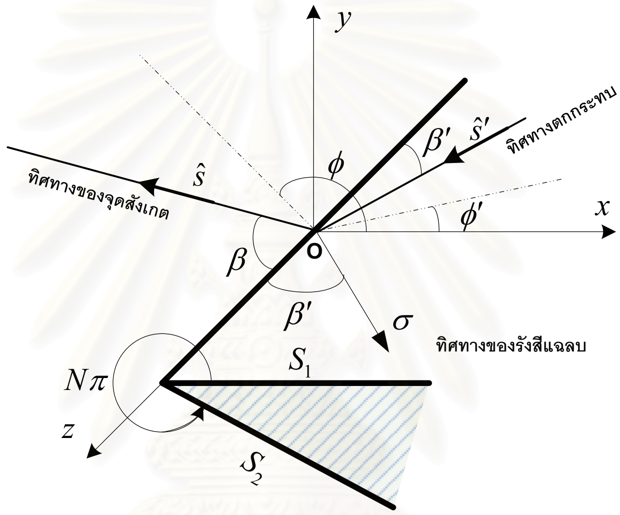
ทำนองเดียวกันเมื่อพิจาณาสมการ (ก.71 ก) และ สมการ (ก.71 ข) พบว่า I_2^T และ M_2^T จะมีค่าเป็นอนันต์เมื่อ $\mu_2 = 1$ หรือ

$$\sin(\pi-\beta)\cos(N\pi-\phi) = \sin(\pi-\beta') \tag{ก.113}$$

หรือ หากมองให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางของรังสีตกกระทบและรังสีเลี้ยวเบนที่แฉลบ (ทิศทางของรังสีแฉลบนี้หาได้โดยอาศัยกรวยรังสีเลี้ยวเบนของเคลเลอร์) บนพื้นผิวดังรูปที่ ก.4 จะได้เป็น

$$\hat{s}\cdot\hat{x} = \hat{\sigma}\cdot\hat{x} \tag{ก.114}$$

โดยที่ $\hat{\sigma} = \sin\beta'\hat{x} + \cos\beta'\hat{z}$



รูปที่ ก.4 ทิศทางของรังสีแฉลบที่ขอบของลิ่ม

3. พิจาณาบนพื้นผิวบนจะเห็นได้ว่าค่าของ μ และ α จะขึ้นอยู่กับพจน์ $\sin\beta'$ อาศัยความสัมพันธ์ $\mu_1 = \sin\beta\cos\phi/\sin\beta'$ ในกรณีที่ $\sin\beta\cos\phi \neq 0$ และเมื่อพจน์ $\sin\beta' \to 0$ จะพบว่า I_1^{PO} และ M_1^{PO} จะมีค่าเป็นอนันต์ และ $\alpha \sim j\ln(\sin\beta')$ ทำให้

$$\sin\alpha = \mathrm{O}(1/\sin\beta') \tag{ก.115 ก}$$

$$\sin\frac{\pi-\alpha}{N} \sim \cos\frac{\pi-\alpha}{N} = \mathrm{O}\left(\sin\beta'^{\frac{-1}{N}}\right) \tag{ก.115 ข}$$

เมื่อแทน (ก.115 ก) และ (ก.115 ข) ลงในสมการ (ก.43 ก) และ สมการ (ก.43 ข) จะได้ว่า

$$I_1^T = \mathrm{O}\left(\sin\beta'^{\frac{(1-N)}{N}}\right) \tag{ก.116}$$

$$M_1^T = \mathrm{O}(\sin\beta') \tag{ก.117}$$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $\sin\beta' \to 0$ พบว่า M_1^T จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ สำหรับที่ $N>1$ ค่า I_1^T จะเข้าใกล้อนันต์

เช่นเดียวกันเมื่อพิจารณาพื้นผิวล่าง ในกรณีที่ $\sin\left(\pi-\beta'\right)\to 0$ ก็จะได้เป็น

$$I_2^T = \mathrm{O}\left(\sin\left(\pi-\beta'\right)^{\frac{(1-N)}{N}}\right) \tag{ก.118}$$

$$M_2^T = \mathrm{O}\left(\sin\left(\pi-\beta'\right)\right) \tag{ก.119}$$

ดังนั้น M_2^T จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ สำหรับที่ $N>1$ ค่า I_2^T จะเข้าใกล้อนันต์

การกำจัดจุดเอกฐานในความหนาแน่นกระแสไม่สม่ำเสมอบนพื้นผิวบนนั้น เริ่มต้นจะพิจารณาจาก

$$I_1^F = K_{1z}^F - K_{1x}^F \cot\beta\cos\phi \tag{ก.120}$$

$$M_1^F = -ZK_{1x}^F \frac{\sin\phi}{\sin\beta} \tag{ก.121}$$

โดยที่ $$K_{1x,1z}^F = \int_0 j_{1x,1z}^F\left(x,0\right)e^{jkx\hat{x}\cdot\hat{s}}dx \tag{ก.122}$$

จะเห็นได้ว่าเมื่อคลื่นตกกระทบมาในทิศทางที่ทำให้เกิดการหักล้างกับวัฏภาคในปริพันธ์ของสมการ (ก.122) จะทำให้เกิดจุดเอกฐาน ขึ้น อาทิเช่น วัฏภาคของ $j_{1x,1z}^F$ เป็น $e^{-jkx\hat{x}\cdot\hat{s}'}$ ซึ่งจะตรงกับเงื่อนไขในการเกิดจุดเอกฐาน ข้อที่ 1 และ เมื่อวัฏภาคของ $j_{1x,1z}^F$ เป็น $e^{-jkx\hat{x}\cdot\hat{\sigma}}$ ซึ่งจะตรงกับเงื่อนไขในการเกิดจุดเอกฐาน ข้อที่ 2

แนวคิดในการกำจัดจุดเอกฐานในกระแสไม่สม่ำเสมอของมิคาเอลลิ [23] คือปรับพิกัดของกระแสไม่สม่ำเสมอโดยให้ใช้แกน $\hat{\sigma}$ แทนที่แกน $\hat{x}$ ในการหาปริพันธ์ในสมการ (ก.122) ทำให้สมการ (ก.114) กลายเป็น $\hat{s}=\hat{\sigma}$ เพราะฉะนั้นจะแทนพิกัดที่ใช้หากระแสสม่ำเสมอเป็น $\left(\sigma,z\right)\to\left(x,z\right)$ และจะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ $dx\to\sin\beta' d\sigma,\ e^{jkx\hat{x}\cdot\hat{s}}\to e^{jkx\hat{x}\cdot\hat{\sigma}}$ และ $\vec{j}\left(x,z\right)\to\vec{j}^F\left(\sigma\sin\beta', z+\sigma\cos\beta'\right)$ สมการ (ก.122) จะได้เป็น

$$K_{1x,1z}^F = \sin\beta'\int_0 j_{1x,1z}^F\left(\sigma\sin\beta',\sigma\cos\beta'\right)e^{jk\sigma\cos\gamma}d\sigma \tag{ก.123}$$

โดยที่ $$\cos\gamma = \hat{\sigma}\cdot\hat{s} = \sin\beta'\sin\beta\cos\phi + \cos\beta'\cos\beta \tag{ก.124}$$

เมื่อพิจารณาปัญหารูปลิ่มที่ $y=0$ จะได้ กระแสไม่สม่ำเสมอเป็นดังนี้ [23]

$$\vec{j}^F\left(x,z\right) = \vec{j}^F\left(x,0\right)e^{-jkz\cos\beta'} \tag{ก.125}$$

เมื่อแทน (ก.125) ลงใน (ก.123) ดังนั้นวัฏภาคของปริพันธ์จะกลายเป็น

$$e^{jk\sigma\cos\gamma - jkz\cos\beta'} = e^{jk\sigma\cos\gamma - jk\sigma\cos^2\beta'} \tag{ก.126}$$

เพราะฉะนั้นจะนิยาม X ได้ใหม่ดังนี้

$$X = k\sigma\sin^2\beta' \tag{ก.127}$$

วัฏภาคใน (ก.126) จะกำหนดให้เป็น

$$e^{jk\sigma\cos\gamma - jk\sigma\cos^2\beta'} = e^{jX\mu} \tag{ก.128}$$

โดยที่

$$\mu = \frac{\cos\gamma - \cos^2\beta'}{\sin^2\beta'} = 1 - 2\frac{\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin^2\beta'} \tag{ก.129}$$

พบว่าความหนาแน่นกระแสไม่สม่ำเสมอในนิพจน์ใหม่นี้เมื่อพิจารณา μ ที่นิยามไว้ใน (ก.129) กับ (ก.124) เมื่อ $\beta' \to 0, \beta \neq 0$ หรือ $\beta' \to \pi, \beta \neq \pi$ จะได้ $\mu = \mathrm{O}\left(\sin^{-2}\beta'\right), \alpha \sim 2j\ln\left(\sin\beta'\right)$ จะได้ว่า

$$\sin\alpha = \mathrm{O}\left(\sin^{-2}\beta'\right) \tag{ก.130 ก}$$

$$\sin\frac{\pi-\alpha}{N} \sim \cos\frac{\pi-\alpha}{N} = \mathrm{O}\left(\sin\beta'^{\frac{-2}{N}}\right) \tag{ก.130 ข}$$

จะพบว่า $I_1^{PO}, M_1^{PO}, M_1^T \to 0$ และ $I_1^T = \mathrm{O}\left[\left(\sin\beta'\right)^{(2-N)/N}\right]$ เมื่อในกรณีที่ลิ่ม $N < 2$ จะได้ว่า I_1^T มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และสำหรับ $N = 2$ จะเห็นว่า I_1^T มีค่าไม่เป็นอนันต์ ทำให้การเกิดจุดเอกฐานในหัวข้อที่สามถูกกำจัดไป

ความหนาแน่นของกระแสไม่สม่ำเสมอสามารถหาได้จาก $I^F = I^T - I^{PO}$ ฉะนั้นเมื่อแทน (ก.129) ลงใน (ก.72 ก) , (ก.72 ข) , (ก.108 ก) และ (ก.108 ข) จะได้เป็น

$$\begin{aligned} I^F = {} & \left(E_{zo}^i \cdot \hat{e}\right)\frac{2j}{Zk\sin^2\beta'}\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\phi'}{2}\right)}{\cos\phi' + \mu}\left[\sqrt{1-\mu} - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\phi'}{2}\right)\right] \\ & + \left(H_{zo}^i \cdot \hat{e}\right)\frac{2j}{k\sin\beta'}\frac{1}{\cos\phi' + \mu}\left[\begin{aligned} & \cot\beta'\cos\phi' + \cot\beta\cos\phi \\ & + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\phi'}{2}\right)\left(\mu\cot\beta' - \cot\beta\cos\phi\right)\left(1-\mu\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right] \end{aligned} \tag{ก.131ก}$$

$$M^F = \left(H_{zo}^i \cdot \hat{e}\right)\frac{2jZ\sin\phi}{k\sin\beta\sin\beta'}\frac{1}{\cos\phi' + \mu}\left[1 - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\phi'}{2}\right)\left(1-\mu\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{ก.131 ข}$$

ภาคผนวก ข

ผลเฉลยของปริพันธ์ที่ใช้ในปัญหารูปลิ่ม

ในการหาปริพันธ์ของปัญหารูปลิ่มจะใช้ทฤษฎีบทส่วนตกค้าง (residue theorem) ช่วย โดยการทำให้เส้นทางปริพันธ์เปลี่ยนไปจากเส้นทางเดิม ส่วนตกค้างหาได้ดังนี้

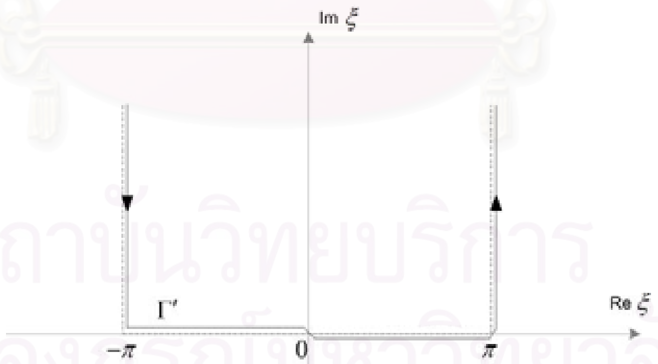
$$\oint_{C'} = \int_{L'} - \int_{L} = 2\pi j \,\mathrm{Res}(pole) \; = 2\pi j \sum_{n} \frac{N(pole)}{D'(pole)} \qquad \text{(ข.1)}$$

โดย $2\pi j \,\mathrm{Res}(pole)$ คือ ส่วนตกค้าง (residue)

<u>**แบบที่ 1**</u>

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{j2\pi N}\int_0 U(X,\Phi)\, e^{jX\mu} dX \\ &= \frac{1}{j2\pi N}\int_0 \int_{\Gamma} \frac{\sin\left(\xi/_N\right) e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right) - \cos\left(\Phi/_N\right)} d\xi dX \end{aligned}} \qquad \text{(ข.2)}$$

จากสมการ (ข.2) พบว่าขั้วเกิดขึ้นเมื่อ $\cos\left(\xi/_N\right) - \cos\left(\Phi/_N\right) = 0$ แต่เส้นทาง Γ ไม่ครอบคลุมขั้วที่เกิดขึ้น ดังนั้นจึงต้องกำหนดเส้นทางใหม่เป็น Γ' เพื่อให้ครอบคลุมขั้วที่เกิดขึ้นคือ $0 < \xi < \pi$ ซึ่งเป็นเส้นทางที่ทำให้เกิดเป็นวงรอบปิดที่อนันต์ ดังรูปที่ ข.1



รูปที่ ข.1 เส้นทาง Γ' ที่ทำให้เกิดเป็นวงรอบปิด C' ที่อนันต์

จากสมการ (ข.1) พบว่า $\oint_{C'} = \int_{\Gamma'} - \int_{\Gamma} = 2\pi j \,\mathrm{Res}(\xi = \xi_n)$ ดังนั้นปริพันธ์บนเส้นทางเดิม Γ หาได้โดยหักส่วนตกค้าง (residue) ออกจากปริพันธ์บนเส้นทางใหม่ Γ' เป็น

$$\int_{\Gamma}\frac{\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}d\xi=\int_{\Gamma'}\frac{\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}d\xi-2\pi j\sum_{n=1}^{N_p}\frac{N(\xi=\xi_n)}{D'(\xi=\xi_n)} \qquad (ข.3)$$

โดยจะกำหนดให้ $N(\xi=\xi_n)=\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX\cos\xi}$, $D(\xi=\xi_n)=\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)$ และอนุพันธ์ของ $D(\xi=\xi_n)$ จะเป็น $D'(\xi_n)=-\sin\left(\xi/_N\right)/N$ เมื่อแทนลงในสมการ (ข.3) จะได้

$$\int_{\Gamma}\frac{\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}d\xi=\int_{\Gamma'}\frac{\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}d\xi+j2\pi N\sum_{n=1}^{N_p}e^{jX\cos\xi_n} \qquad (ข.4)$$

แทนสมการ (ข.4) ลงในสมการ (ข.2) แล้วจะได้

$$U_1=\frac{1}{j2\pi N}\left\{\int_{\Gamma'}\frac{\sin\left(\xi/_N\right)}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}\int_0^{\infty}e^{jX(\cos\xi+\mu)}dXd\xi+j2\pi N\sum_{n=1}^{N_p}\int_0^{\infty}e^{jX(\cos\xi_n+\mu)}dX\right\} \qquad (ข.5)$$

หาปริพันธ์บนโดเมน X หาได้ดังนี้

$$\int_0^{\infty}e^{jX(\cos\xi+\mu)}dX=\frac{j}{\cos\xi+\mu} \qquad (ข.6)$$

แทนสมการ (ข.6) ลงในสมการ (ข.5) จะได้ดังนี้

$$U_1=\frac{1}{j2\pi N}\left\{\int_{\Gamma'}\frac{\sin\left(\xi/_N\right)}{\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right](\cos\xi+\mu)}d\xi-2\pi N\sum_{n=1}^{N_p}\frac{1}{\cos\xi_n+\mu}\right\} \qquad (ข.7)$$

เส้นทาง Γ' ในตอนนี้อาจพิจารณาว่าเป็นวงปิดที่อนันต์ ซึ่งทำให้ปริพันธ์ลดลงเป็นผลรวมของส่วนตกค้างของขั้วภายในเส้นทางปิด Γ' ประกอบไปด้วยขั้ว ξ_n ทั้งหมดและรวมทั้งขั้วที่เป็นรากของสมการ

$$\cos\xi+\mu=0 \qquad (ข.8)$$

สำหรับค่าจำนวนจริง μ ใดๆ สมการนี้มีรากเพียงค่าเดียวภายในวงปิด Γ' ซึ่งอยู่บนเส้นประในรูปที่ ข.1 รากของสมการ (ข.8) กำหนดเป็น $\pi-\alpha$ โดยที่

$$\alpha=\cos^{-1}\mu=-j\ln(\mu+\sqrt{\mu^2-1}) \qquad (ข.9)$$

จากสมการ (ข.8) ผลรวมของส่วนตกค้างของขั้วภายในเส้นทาง Γ' เป็น $2\pi j\,N(\xi)/D'(\xi)$ โดยที่ $N(\xi)=\sin\left(\xi/_N\right)$, $D(\xi)=\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right](\cos\xi+\mu)$ และ อนุพันธ์ของ $D(\xi)$ เป็น

$$D'(\xi)=-\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right]\sin\xi-(\cos\xi+\mu)\frac{\sin\left(\xi/_N\right)}{N} \qquad (ข.10)$$

เมื่อแทนลงในปริพันธ์ตามเส้นทาง Γ' และ $\cos\xi+\mu=0$ จะได้

$$\int_{\Gamma'} \frac{\sin\left(\xi/_N\right)}{\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right]\left(\cos\xi+\mu\right)}d\xi = \left\{\begin{matrix} +2\pi N\displaystyle\sum_{n=1}^{N_p}\frac{1}{\cos\xi_n+\mu} \\ -\dfrac{2\pi j}{\sin\alpha}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi-\alpha}{N}\right)}{\left[\cos\left(\dfrac{\pi-\alpha}{N}\right)-\cos\left(\dfrac{\Phi}{N}\right)\right]} \end{matrix}\right\} \qquad \text{(ข.11)}$$

เมื่อแทนสมการ (ข.11) ลงในสมการ (ข.7) จะได้ U_1 เป็นดังนี้

$$\boxed{U_1 = -\frac{j}{N}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi-\alpha}{N}\right)}{\left[\cos\left(\dfrac{\pi-\alpha}{N}\right)-\cos\left(\dfrac{\Phi}{N}\right)\right]}\frac{1}{\sin\alpha}} \qquad \text{(ข.12)}$$

<u>**แบบที่ 2**</u>

$$\boxed{\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{j2\pi N}\int_0 \frac{\partial U\left(X,\Phi\right)}{\partial X}e^{jX\mu}dX \\ &= \frac{1}{j2\pi N}\int_0\int_{\Gamma}\frac{j\cos\xi\sin\left(\xi/_N\right)^{jX(\cos\xi+\mu)}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}d\xi dX \end{aligned}} \qquad \text{(ข.13)}$$

จากสมการ (ข.13) พบว่าขั้วเกิดขึ้นเมื่อ $\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)=0$ แต่เส้นทาง Γ ไม่ครอบคลุมขั้วที่เกิดขึ้น ใช้เส้นทาง Γ' ดังรูปที่ ข.1 ดังนั้นปริพันธ์บนเส้นทางเดิม Γ หาได้โดยหักส่วนตกค้าง (residue) ออกจากปริพันธ์บนเส้นทางใหม่ Γ' เป็น

$$\int_{\Gamma}\frac{j\cos\xi\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}d\xi = \int_{\Gamma'}\frac{j\cos\xi\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}d\xi - 2\pi j\sum_{n=1}^{N_p}\frac{N(\xi=\xi_n)}{D'(\xi=\xi_n)} \qquad \text{(ข.14)}$$

โดยจะกำหนดให้ $N(\xi=\xi_n)=j\cos\xi\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX\cos\xi}$, $D(\xi=\xi_n)=\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)$ และอนุพันธ์ของ $D(\xi=\xi_n)$ จะเป็น $D'(\xi=\xi_n)=-\sin\left(\xi/_N\right)/N$ เมื่อแทนลงในสมการ (ข.14) จะได้

$$\int_{\Gamma}\frac{j\cos\xi\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}d\xi = \int_{\Gamma'}\frac{j\cos\xi\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX\cos\xi}}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}d\xi + 2\pi N\sum_{n=1}^{N_p}\cos\xi_n e^{jX\cos\xi_n} \qquad \text{(ข.15)}$$

แทนสมการ (ข.15) ลงในสมการ (ข.13) แล้วจะได้

$$U_2 = \frac{1}{j2\pi N}\left\{\begin{aligned}&\int_{\Gamma'} \frac{j\cos\xi \sin\left(\xi/_N\right)}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}\int_0^\infty e^{jX(\cos\xi+\mu)}dXd\xi \\ &+2\pi N\sum_{n=1}^{N_p}\cos\xi_n\int_0^\infty e^{jX(\cos\xi_n+\mu)}dX\end{aligned}\right\}$$

$$= \frac{1}{j2\pi N}\left\{\begin{aligned}&\int_{\Gamma'} \frac{-\cos\xi\sin\left(\xi/_N\right)}{\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right](\cos\xi+\mu)}d\xi \\ &+j2\pi N\sum_{n=1}^{N_p}\frac{\cos\xi_n}{(\cos\xi_n+\mu)}\end{aligned}\right\} \qquad (\text{ข}.16)$$

เส้นทาง Γ' ในตอนนี้อาจพิจารณาว่าเป็นวงปิดที่อนันต์ ซึ่งทำให้ปริพันธ์ลดลงเป็นผลรวมของส่วนตกค้างของขั้วภายในเส้นทางปิด Γ' ประกอบไปด้วยขั้ว ξ_n ทั้งหมดและรวมทั้งขั้วที่เป็นรากของสมการ $\cos\xi+\mu=0$ สำหรับค่าจำนวนจริง μ ใดๆ สมการนี้มีรากเพียงค่าเดียวภายในวงปิด Γ' ซึ่งอยู่บนเส้นประในรูปที่ ข.1 กำหนดเป็น $\pi-\alpha$ โดยที่ $\alpha=\cos^{-1}\mu=-j\ln(\mu+\sqrt{\mu^2-1})$

จากสมการ (ข.17) ผลรวมของส่วนตกค้างของขั้วภายในเส้นทาง Γ' เป็น $2\pi j N(\xi)/D'(\xi)$ โดยที่ $N(\xi)=\cos\xi\sin\left(\xi/_N\right)$, $D(\xi)=\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right](\cos\xi+\mu)$ แล้วอนุพันธ์ของ $D(\xi)$ เป็นดังสมการ (ข.10) เมื่อแทนลงในปริพันธ์ตามเส้นทาง Γ' และ $\cos\xi+\mu=0$ จะได้

$$\int_{\Gamma'}\frac{\cos\xi\sin\left(\xi/_N\right)}{\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right](\cos\xi+\mu)}d\xi = \left\{\begin{aligned}&+2\pi N\sum_{n=1}^{N_p}\frac{j\cos\xi_n}{\cos\xi_n+\mu} \\ &-2\pi j\cot\alpha\frac{\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{N}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{N}\right)-\cos\left(\frac{\Phi}{N}\right)\right]}\end{aligned}\right\} \qquad (\text{ข}.17)$$

แทนสมการ (ข.17) ลงในสมการ (ข.16) จะได้

$$\boxed{U_2=\frac{\cot\alpha}{N}\frac{\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{N}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{N}\right)-\cos\left(\frac{\Phi}{N}\right)\right]}} \qquad (\text{ข}.18)$$

<u>แบบที่ 3</u>

$$\boxed{\begin{aligned}U_3 &= \frac{1}{j2\pi N}\int_0 \frac{1}{X}\frac{\partial U(X,\Phi)}{\partial\Phi}e^{jX\mu}dX \\ &= \frac{1}{j2\pi N}\int_0\int_\Gamma \frac{1}{X}\frac{-\sin\left(\xi/_N\right)e^{jX(\cos\xi+\mu)}}{\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right]^2}\frac{\sin\left(\Phi/_N\right)}{N}d\xi dX\end{aligned}} \qquad (\text{ข}.19)$$

พิจารณาพจน์ $\dfrac{\partial U(X,\Phi)}{\partial \Phi}$ กำหนดให้เป็น $M\dfrac{-\sin(\Phi/N)}{N}$ ดังนั้นจะได้

$$M=\int_{\Gamma}\frac{\sin(\xi/N)e^{jX\cos\xi}}{\left[\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)\right]^{2}}d\xi \qquad (ข.20)$$

หา M ได้โดยใช้การหาปริพันธ์แยกส่วน (integration by part) เมื่อกำหนดให้

$$u=e^{jX\cos\xi}\ ,\ dv=\frac{\sin(\xi/N)d\xi}{\left[\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)\right]^{2}}$$

$$du=-jX\sin\xi e^{jX\cos\xi}d\xi\ ,\ v=\frac{N}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}$$

จะได้ $M=uv-\int vdu$ เป็นดังนี้

$$M=\frac{Ne^{jX\cos\xi}}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}+\int_{\Gamma}\frac{jNX\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}d\xi \qquad (ข.21)$$

ดังนั้นพจน์ $\dfrac{\partial U(X,\Phi)}{\partial \Phi}$ หาได้เป็นดังนี้

$$\frac{\partial U(X,\Phi)}{\partial \Phi}=\frac{-\sin(\Phi/N)}{N}\left\{\left[\frac{Ne^{jX\cos\xi}}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}\right]_{\xi=-\pi+j\infty}^{\pi+j\infty}+\int_{\Gamma}\frac{jNX\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}d\xi\right\}$$

$$=-j\sin(\Phi/N)\int_{\Gamma}\frac{X\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}d\xi \qquad (ข.22)$$

จากสมการ (ข.22) จะได้

$$\frac{1}{X}\frac{\partial U(X,\Phi)}{\partial \Phi}=-j\sin(\Phi/N)\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}d\xi \qquad (ข.23)$$

พิจารณาพจน์ที่อยู่ในปริพันธ์ของอาณาจักร ξ

$$\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}d\xi=\int_{\Gamma'}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}d\xi-2\pi j\sum_{n=1}^{N_p}\frac{N(\xi=\xi_n)}{D'(\xi=\xi_n)} \qquad (ข.24)$$

โดยจะกำหนดให้ $N(\xi=\xi_n)=\sin\xi e^{jX\cos\xi},\ D(\xi=\xi_n)=\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)$ และอนุพันธ์ของ $D(\xi=\xi_n)$ จะเป็น $D'(\xi_n)=-\sin(\xi_n/N)/N$ เมื่อแทนลงในสมการ (ข.24) จะได้

$$\int_{\Gamma}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}d\xi=\int_{\Gamma'}\frac{\sin\xi e^{jX\cos\xi}}{\cos(\xi/N)-\cos(\Phi/N)}d\xi+2\pi Nj\sum_{n=1}^{N_p}\frac{\sin\xi_n e^{jX\cos\xi}}{\sin(\xi_n/N)} \qquad (ข.25)$$

แทนสมการ (ข.25) ลงในสมการ (ข.23) แล้วนำไปหา U_3 จะได้

$$U_3 = \frac{-\sin\left(\Phi/_N\right)}{2\pi N}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\Gamma'}\frac{\sin\xi}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}\int_0^\infty e^{jX(\cos\xi+\mu)}dX\,d\xi \\ \displaystyle +\ j2\pi N\sum_{n=1}^{N_p}\frac{\sin\xi_n\int_0^\infty e^{jX(\cos\xi_n+\mu)}dX}{\sin\left(\xi_n/_N\right)}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{-\sin\left(\Phi/_N\right)}{2\pi N}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\Gamma'}\frac{j\sin\xi}{\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right]\left(\cos\xi+\mu\right)}d\xi \\ \displaystyle -\ j2\pi N\sum_{n=1}^{N_p}\frac{\sin\xi_n}{\sin\left(\xi_n/_N\right)\left(\cos\xi_n+\mu\right)}\end{array}\right\} \qquad \text{(ข.26)}$$

เส้นทาง Γ' ในตอนนี้อาจพิจารณาว่าเป็นวงปิดที่อนันต์ ซึ่งทำให้ปริพันธ์ลดลงเป็นผลรวมของส่วนตกค้างของขั้วภายในเส้นทางปิด Γ' ประกอบไปด้วยขั้ว ξ_n ทั้งหมดและรวมทั้งขั้วที่เป็นรากของสมการ $\cos\xi+\mu=0$ สำหรับค่าจำนวนจริง μ ใดๆ สมการนี้มีรากเพียงค่าเดียวภายในวงปิด Γ' ซึ่งอยู่บนเส้นประในรูปที่ ข.1 กำหนดเป็น $\pi-\alpha$ โดยที่ $\alpha=\cos^{-1}\mu=-j\ln(\mu+\sqrt{\mu^2-1})$

จากสมการ (ข.26) ผลรวมของส่วนตกค้างของขั้วภายในเส้นทาง Γ' เป็น $2\pi j N(\xi)/D'(\xi)$ โดยที่ $N(\xi)=j\sin\xi,\ \ D(\xi)=\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right](\cos\xi+\mu)$ แล้วอนุพันธ์ของ $D(\xi)$ เป็นดังสมการ (ข.10) เมื่อแทนลงในปริพันธ์ตามเส้นทาง Γ' และ $\cos\xi+\mu=0$ จะได้

$$\int_{\Gamma'}\frac{j\sin\xi}{\left[\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)\right]\left(\cos\xi+\mu\right)}d\xi = \left\{\begin{array}{l}\displaystyle 2\pi N\sum_{n=1}^{N_p}\frac{\sin\xi_n}{\sin\left(\xi_n/_N\right)\left(\cos\xi_n+\mu\right)} \\ \displaystyle +\frac{2\pi}{\cos\left(\xi/_N\right)-\cos\left(\Phi/_N\right)}\end{array}\right\} \qquad \text{(ข.27)}$$

แทนสมการ (ข.27) ลงในสมการ (ข.26) จะได้ U_3 เป็นดังนี้

$$\boxed{U_3 = \frac{-1}{N}\frac{\sin\left(\Phi/N\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi-\alpha}{N}\right)-\cos\left(\dfrac{\Phi}{N}\right)}} \qquad \text{(ข.28)}$$

ภาคผนวก ค

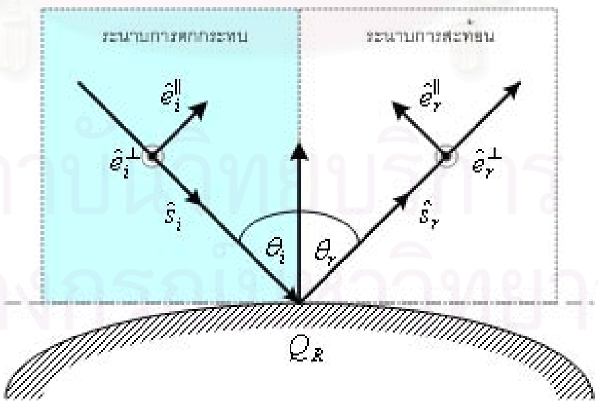
การวิเคราะห์สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปด้วยระเบียบวิธีปริพันธ์สนามบนช่องเปิด

กรรมวิธีนี้เป็นการศึกษาพฤติกรรมทางกายภาพของคลื่นโดยใช้คุณสมบัติการแปลงฟูริเยร์มาอธิบาย การแผ่พลังงานของคลื่นที่มีหน้าคลื่นใดๆ ในลักษณะของกลุ่มคลื่นระนาบในทิศทางต่างๆ ซึ่งเรียกว่าสเปกตรัมคลื่นระนาบ สำหรับสายอากาศจานสะท้อนนั้นสามารถหาสเปกตรัมคลื่นระนาบได้จากการแปลงฟูริเยร์ของการแจกแจงความเข้มสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดของสายอากาศ

สนามบนระนาบช่องเปิดเกิดจากสนามที่สะท้อนออกมาจากจานสะท้อนรวมกับสนามเลี้ยวเบนจากขอบของจานสะท้อนมายังระนาบช่องเปิดหน้าจานสะท้อน $\left(\vec{E}^{p} = \vec{E}^{r} + \vec{E}^{d}\right)$ ซึ่งมีหน้าคลื่นแบบใดๆ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้กรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตและกรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบเพื่อใช้หาสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิด

<u>สนามสะท้อนจากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต</u>

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามระเบียบวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตจะเคลื่อนที่ไปในลักษณะของรังสีซึ่งเป็นพฤติกรรมเฉพาะที่ ดังนั้นในการศึกษาพฤติกรรมการสะท้อนของคลื่นสามารถหาได้โดยสมมติให้สนามไฟฟ้าที่มาตกกระทบที่จุด Q_R บนพื้นผิวสะท้อนดังรูปที่ ค.1 ในทิศทาง $\hat{s}_i$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการตกกระทบและมีโพลาไรเซชันในทิศทาง $\hat{e}_i^{\perp}$ และ $\hat{e}_i^{\parallel}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากและขนานกับระนาบตกกระทบ (plane of incidence) ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\hat{s}_i$ และ $\hat{n}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวสะท้อนที่จุด Q_R โพลาไรเซชันของสนามที่ตกกระทบพื้นผิวสะท้อนที่จุด Q_R หาได้จากความสัมพันธ์ดังสมการ ค.1 ก และ ค.1 ข



รูปที่ ค.1 สนามไฟฟ้าที่ตกกระทบและสะท้อนจากจุด Q_R บนพื้นผิวสะท้อน

$$\hat{e}_i^{\perp} = \frac{\hat{s}_i \times \hat{n}}{\left|\hat{s}_i \times \hat{n}\right|} \quad \text{(ค.1 ก)}$$

$$\hat{e}_i^{\parallel} = \hat{e}_i^{\perp} \times \hat{s}_i \quad \text{(ค.1 ข)}$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบที่จุด Q_R สามารถเขียนในรูปสมการได้เป็น

$$\vec{E}^i(Q_R) = \left[\vec{E}^i(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\perp}\right]\hat{e}_i^{\perp} + \left[\vec{E}^i(Q_R)\cdot\hat{e}_i^{\parallel}\right]\hat{e}_i^{\parallel} \quad \text{(ค.2)}$$

ในทำนองเดียวกันสนามที่สะท้อนออกจากจุด Q_R ก็จะเคลื่อนที่ออกไปในทิศทางที่กำหนดโดย $\hat{s}_r$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการสะท้อนและมีโพลาไรเซชันในทิศทาง $\hat{e}_r^{\perp}$ และ $\hat{e}_r^{\parallel}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากและขนานกับระนาบการสะท้อน (plane of reflection) ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\hat{s}_r$ และ $\hat{n}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิวสะท้อนที่จุด Q_R จากหลักการของแฟร์มาต์พบว่าระนาบตกกระทบและระนาบสะท้อนนี้จะอยู่บนระนาบเดียวกัน โพลาไรเซชันของสนามที่ตกกระทบพื้นผิวสะท้อนที่จุด Q_R หาได้จากความสัมพันธ์ดังสมการ ค.3 ก และ ค.3 ข

$$\hat{e}_r^{\perp} = \frac{\hat{s}_r \times \hat{n}}{\left|\hat{s}_r \times \hat{n}\right|} \quad \text{(ค.3 ก)}$$

$$\hat{e}_r^{\parallel} = \hat{e}_r^{\perp} \times \hat{s}_r \quad \text{(ค.3 ข)}$$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่สะท้อนออกจากจุด Q_R สามารถเขียนในรูปสมการได้เป็น

$$\vec{E}^r(Q_R) = \left[\vec{E}^r(Q_R)\cdot\hat{e}_r^{\perp}\right]\hat{e}_r^{\perp} + \left[\vec{E}^r(Q_R)\cdot\hat{e}_r^{\parallel}\right]\hat{e}_r^{\parallel} \quad \text{(ค.4)}$$

หรือสามารถหาได้จากสนามไฟฟ้าที่ตกกระทบคูณกับสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบไดแอดิก $\widetilde{R}$ (dyadric reflection coefficient) ดังนี้

$$\vec{E}^r(Q_R) = \vec{E}^i(Q_R)\cdot\widetilde{R} \quad \text{(ค.5)}$$

โดยที่ $\widetilde{R} = -\hat{e}_i^{\perp}\hat{e}_r^{\perp} + \hat{e}_i^{\parallel}\hat{e}_r^{\parallel}$ ในกรณีที่พื้นผิวสะท้อนเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์

ความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าตกกระทบและสนามไฟฟ้าสะท้อนที่จุด Q_R สามารถหาได้โดยการประยุกต์ใช้เงื่อนไขขอบเขตของสนามไฟฟ้าในแนวขนานบนพื้นผิวสะท้อนดังนี้

$$\hat{n} \times \vec{E}^r(Q_R) = -\hat{n} \times \vec{E}^i(Q_R) \quad \text{(ค.6 ก)}$$

และ

$$\hat{n} \cdot \vec{E}^r(Q_R) = \hat{n} \cdot \vec{E}^i(Q_R) \quad \text{(ค.6 ข)}$$

สามารถจัดรูปสมการ (ค.6 ก) ใหม่ได้ดังนั้น $\hat{n} \times \left[\vec{E}^i(Q_R) + \vec{E}^r(Q_R)\right] = 0$ และเมื่อใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์จะได้ดังนี้

$$0 = \left[\hat{n} \times \left[\vec{E}^i(Q_R) + \vec{E}^r(Q_R)\right]\right] \times \hat{n} = \vec{E}^i(Q_R) + \vec{E}^r(Q_R) - \hat{n}\left[\hat{n} \cdot \vec{E}^i(Q_R) + \hat{n} \cdot \vec{E}^r(Q_R)\right] \quad \text{(ค.7)}$$

แทนสมการ (ค.6 ข) ลงใน (ค.7) จะได้

$$\vec{E}^r(Q_R) = -\vec{E}^i(Q_R) + 2\hat{n}\left[\hat{n} \cdot \vec{E}^i(Q_R)\right] \quad \text{(ค.8)}$$

สมการ (ค.5) และ (ค.8) แสดงสนามไฟฟ้าสะท้อนที่จุด Q_R ซึ่งได้จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิต ถ้าให้จุด Q_R เป็นจุดอ้างอิงของสนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นผิวสะท้อนและเคลื่อนที่ไปตามลำรังสี ในตัวกลางเอกพันธ์ที่ไม่มีการสูญเสีย สนามไฟฟ้าสะท้อนไปยังจุดสังเกตใดๆจะเป็นดังสมการ ค.9 ก และ ค.9 ข

$$\vec{E}^r(s) = \vec{E}^i(Q_R) \cdot \widetilde{R} \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s)(\rho_2^r + s)}} e^{-jk_o s} \quad \text{(ค.9 ก)}$$

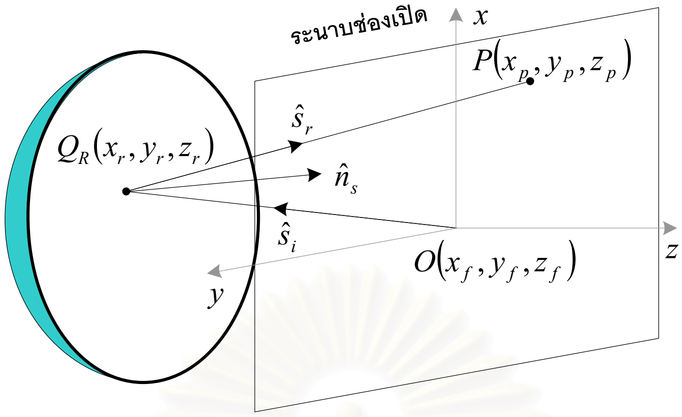
หรือ

$$\vec{E}^r(s) = -\vec{E}^i(Q_R) + 2\hat{n}\left[\hat{n} \cdot \vec{E}^i(Q_R)\right] \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s)(\rho_2^r + s)}} e^{-jk_o s} \quad \text{(ค.9 ข)}$$

โดยที่ ρ_1^r, ρ_2^r คือ รัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นสะท้อนที่จุดสะท้อน สำหรับรัศมีความโค้งหลักของหน้าคลื่นสะท้อนที่จานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

สนามสะท้อนจากสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปมายัง $P(x_p, y_p, z_p)$ ซึ่งเป็นจุดสังเกตใดๆ บนระนาบหน้าจานดังรูปที่ ค.2 โดยให้สายอากาศป้อนกำลังคลื่นวางอยู่ที่พิกัด (x_f, y_f, z_f) และให้ $Q_R(x_r, y_r, z_r)$ เป็นจุดบนพื้นผิวจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป สามารถคำนวณได้จากสมการ (ค.9 ข) ดังนี้

$$\vec{E}^r(P) = -\vec{E}^i(Q_R) + 2\hat{n}_s\left[\hat{n}_s \cdot \vec{E}^i(Q_R)\right] \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s_r)(\rho_2^r + s_r)}} e^{-jk_o s_r} \quad \text{(ค.10)}$$



รูปที่ ค.2 เรขาคณิตของสนามสะท้อนบนระนาบช่องเปิด

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้กำหนดให้ศูนย์กลางวัฏภาค (phase center) ของสายอากาศป้อนกำลังคลื่นอยู่ที่พิกัด $x_f = 0$, $y_f = 0$, $z_f = 0$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป สามารถหาได้ดังนี้

$$\hat{n}_s = \frac{\nabla_x \vec{a}_x + \nabla_y \vec{a}_y + \vec{a}_z}{\sqrt{\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + 1}} \qquad (\text{ค}.11)$$

โดยที่
$$\nabla_{x_r} = -\left(a_1 + 2a_2 x_r + 3a_3 x_r^2 + a_7 y_r + a_8 y_r^2 + 2a_9 x_r y_r + \sum_{r=1}^{Nx}\sum_{s=1}^{Ny} C_{rs} f_s(y_r) \frac{df_r(x_r)}{dx_r} \right)$$
$$\nabla_{y_r} = -\left(a_4 + 2a_5 y_r + 3a_6 y_r^2 + a_7 x_r + a_9 x_r^2 + 2a_8 x_r y_r + \sum_{r=1}^{Nx}\sum_{s=1}^{Ny} C_{rs} f_s(x_r) \frac{df_s(y_r)}{dy_r} \right)$$

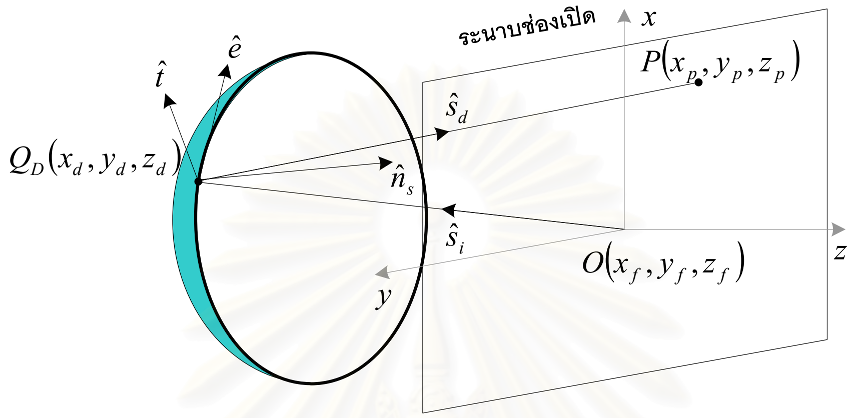
ระยะระหว่างจุด Q_R บนจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปมายังจุดใดๆ บนระนาบช่องเปิด สามารถคำนวณได้จาก

$$s_r = \sqrt{(x_p - x_r)^2 + (y_p - y_r)^2 + (z_p - z_r)^2} \qquad (\text{ค}.12)$$

<u>สนามเลี้ยวเบนจากกรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบ</u>

แนวคิดเกี่ยวกับกระแสสมมูลที่ขอบของจานสะท้อนมาจากการข้อสมมติว่าสนามเลี้ยวเบนตามรูปที่ ค.3 นั้นเกิดจากกระแสสมมูลหรือกระแสที่สมมติขึ้นทั้งกระแสแม่เหล็กและกระแสไฟฟ้าตามขอบของตัวนำไฟฟ้า การคำนวณสนามเลี้ยวเบนสามารถทำได้โดยการหาปริพันธ์เชิงเส้นของกระแสสมมูลที่เกิดขึ้นที่ขอบของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปดังนี้

$$\bar{E}^{d}(P)= jk\oint\left[ZI(Q_D)\hat{s}_d\times(\hat{s}_d\times\hat{e})+M(Q_D)\hat{s}_d\times\hat{e}\right]\frac{e^{-jks_d}}{4\pi s_d}\left|d\bar{r}(\phi)\right| \qquad \text{(ค.13)}$$



รูปที่ ค.3 เรขาคณิตของสนามเลี้ยวเบนบนระนาบช่องเปิด

โดยที่ $\bar{r}(\phi)$ คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งบนเส้นโค้งขอบของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป และ จะได้กระแสไฟฟ้าสมมูลและกระแสแม่เหล็กสมมูลเป็นดังนี้ [ภาคผนวก ง]

$$I = -\frac{2\left(\bar{E}^{i}(Q_D)\cdot\hat{e}\right)D_s}{jkZ\sin\beta'} \qquad \text{(ค.14)}$$

$$M = -\frac{2Z\left(\bar{H}^{i}(Q_D)\cdot\hat{e}\right)D_h}{jk\sin\beta'} \qquad \text{(ค.15)}$$

ที่ซึ่ง β' คือมุมระหว่างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวสัมผัสกับขอบที่จุดเลี้ยวเบนกับเวกเตอร์หนึ่งที่เลี้ยวเบนมายังระนาบช่องเปิด มีค่าเท่ากับ $\cos^{-1}(\hat{e}\cdot\hat{s}_d)$

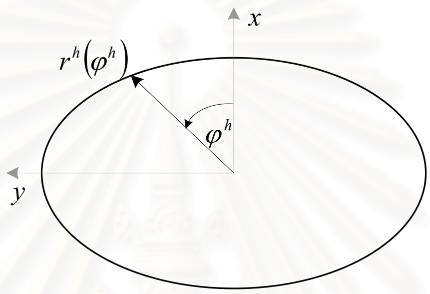
D_s และ D_h คือค่าสัมประสิทธิ์ของการเลี้ยวเบนแบบอ่อนและแบบแข็งตามลำดับโดยได้นิยามไว้ใน [29]

เนื่องจากจานสะท้อนที่สังเคราะห์ได้จากกรรมวิธีทัศนศาสตร์เรขาคณิตแบบดั้งเดิมซึ่งพิจารณาเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นนั้นขอบของจานสะท้อนไม่ได้เป็นรูปวงกลม วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงประมาณขอบของจานสะท้อนนี้โดยใช้สมการพาราเมติกชนิดไฮเพอร์ควอดริกแบบ 2 มิติ สมการนี้อยู่ในรูปผลรวมจำนวนใดๆ ของสมการเชิงเส้นที่ถูกยกกำลัง ซึ่งจะสามารถประมาณรูปร่างขอบของจานสะท้อนเป็นรูปร่างใดๆ ได้ตามการเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์ของสมการไฮเพอร์ควอดริกแบบ 2 มิติสามารถเขียนได้ดังนี้

$$H(x_d, y_d) = \sum_{i=1}^{N} \left| H_i(x_d, y_d) \right|^{\gamma_i} = 1 \qquad \text{(ค.16)}$$

โดยที่ $N \geq 2$ และ $H_i(x_d, y_d) = b_i x_d + c_i y_d + d_i$ ที่ซึ่ง b_i, c_i, d_i และ γ_i เป็นค่าคงที่ใดๆ $(\gamma_i > 0)$

เพื่อความสะดวกในการนำมาคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสามารถแทนตำแหน่งขอบจานสะท้อนให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ดังรูปที่ ค.4



รูปที่ ค.4 ขอบของจานสะท้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

กรณีจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปแบบสมมาตร

$$x_d(r^h, \varphi^h) = r^h(\varphi^h)\cos\varphi^h \qquad \text{(ค.17)}$$
$$y_d(r^h, \varphi^h) = r^h(\varphi^h)\sin\varphi^h \qquad \text{(ค.18)}$$

กรณีจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปแบบไม่สมมาตร

$$x_d(r^h, \varphi^h) = h_x + r^h(\varphi^h)\cos\varphi^h \qquad \text{(ค.19)}$$
$$y_d(r^h, \varphi^h) = h_x + r^h(\varphi^h)\sin\varphi^h \qquad \text{(ค.20)}$$

ที่ซึ่ง $r^h(\varphi^h) \geq 0, \varphi^h \in [0, 2\pi]$

h_x คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางวัฏภาคของสายอากาศป้อนไปยังจุดศูนย์กลางของภาพฉายจานสะท้อนบนระนาบช่องเปิดในแนวแกน x

h_y คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางวัฏภาคของสายอากาศป้อนไปยังจุดศูนย์กลางของภาพฉายจานสะท้อนบนระนาบช่องเปิดในแนวแกน y

การหาค่า $r^h\left(\varphi^h\right)$ ที่แต่ละ φ^h ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้ฟังก์ชัน fsolve.m ในโปรแกรม matlab รุ่น 6.1 โดยจะต้องเป็นค่าเชิงขนาดที่น้อยที่สุด เพราะฉะนั้นในกรณีจานสะท้อนเดี่ยวตัดรูปแบบสมมาตรเวกเตอร์บอกตำแหน่งบนเส้นโค้งของขอบที่จุดขอบสามารถหาได้ดังนี้

$$\vec{r}_{rim} = r^h\left(\varphi^h\right)\cos\varphi^h \vec{a}_x + r^h\left(\varphi^h\right)\sin\varphi^h \vec{a}_y + z_d\left(r^h\left(\varphi^h\right)\cos\varphi^h, r^h\left(\varphi^h\right)\sin\varphi^h\right)\vec{a}_z \quad (ค.21)$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวสัมผัสกับขอบที่จุดเลี้ยวเบน $Q_D\left(x_d, y_d, z_d\right)$ หาได้จาก

$$\hat{e} = -\frac{\vec{r}'_{rim}}{\left|\vec{r}'_{rim}\right|} = \frac{r'_x\vec{a}_x + r'_y\vec{a}_y + r'_z\vec{a}_z}{\sqrt{r_x'^2 + r_y'^2 + r_z'^2}} \quad (ค.22)$$

การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์บอกตำแหน่งบนเส้นโค้งของขอบที่จุดขอบสามารถหาได้จากระเบียบวิธีอนุพันธ์เชิงตัวเลข และ เวกเตอร์หนึ่งที่เลี้ยวเบนมายังระนาบช่องเปิด หาได้จาก

$$\hat{s}_d = \frac{\left(x_p - x_d\right)\vec{a}_x + \left(y_p - y_d\right)\vec{a}_y + \left(z_p - z_d\right)\vec{a}_z}{\sqrt{\left(x_p - x_d\right)^2 + \left(y_p - y_d\right)^2 + \left(z_p - z_d\right)^2}} \quad (ค.23)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (ค.15) กับระบบพิกัดเชิงขั้ว $\left(r^h, \varphi^h\right)$ สนามไฟฟ้าอันเนื่องจากกระแสสมมูลบริเวณขอบของจานสะท้อนไปยังจุดสังเกต P บนระนาบช่องเปิดสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\vec{E}^d\left(P\right) = jk\oint\left[ZI\left(Q_D\right)\hat{s}_d \times \left(\hat{s}_d \times \hat{e}\right) + M\left(Q_D\right)\hat{s}_d \times \hat{e}\right]\frac{e^{-jks_d}}{4\pi s_d}\left|\vec{r}'_{rim}\left(\varphi^h\right)\right| d\varphi^h \quad (ค.24)$$

<u>ความสัมพันธ์ระหว่างสเปกตรัมคลื่นระนาบและสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิด</u>

แนวคิดสเปกตรัมคลื่นระนาบพิจารณาสนามไฟฟ้าใดๆสามารถขยายออกเป็นผลรวมของสนามไฟฟ้าของกลุ่มคลื่นระนาบที่เคลื่อนที่ไปในทิศทางต่างๆกัน โดยที่ขนาดของสนามไฟฟ้า และวัฏภาคที่จุดกำเนิดของสนามไฟฟ้าของคลื่นระนาบในแต่ละทิศทางนั้นสามารถมีค่าแตกต่างกันออกไป เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{A}(k_x,k_y)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}dk_x dk_y \quad (ค.25)$$

$\vec{A}(k_x,k_y)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ เป็นสนามไฟฟ้าของคลื่นระนาบที่เคลื่อนที่ไปในทิศทางตามเวกเตอร์ $\vec{k}$ เวกเตอร์ $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งในระบบพิกัดคาร์ทีเชียน ส่วนเวกเตอร์ $\vec{k}$ เมื่อเป็นเวกเตอร์ค่าจริงและแสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นระนาบ สามารถแตกองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{k}$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเชียนได้เป็น $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$ โดยขนาดของ $\vec{k}$ ก็คือค่าคงที่เลขคลื่น (wave number constant)

$$\left|\vec{k}\right| = k = \omega/c = 2\pi/\lambda$$

เนื่องจากในกรณีของคลื่นระนาบ สนามไฟฟ้าต้องตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ และ $\vec{A}$ เป็นสนามไฟฟ้าในทิศทางการเคลื่อนที่ $\vec{k}$ ดังนั้น $\vec{k} \perp \vec{A}$ หรือ $\vec{k}\cdot\vec{A} = 0$ ซึ่งขยายออกได้ดังสมการ (ค.26)

$$k_x A_x(k_x,k_y) + k_y A_y(k_x,k_y) + k_z A_z(k_x,k_y) = 0 \qquad (ค.26)$$

สมการ (ค.26) นี้ยังสามารถหาได้จากสมการ (ค.25) โดยใช้สูตร $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ สำหรับบริเวณที่ไม่มีแหล่งกำเนิด สังเกตว่าสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ตามที่ได้จากสมการ (ค.25) นี้เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเฮล์ม-โฮลทซ์ (Helmholtz equation)

$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$$

โดยอินทิกรัล 2 ชั้นบนโดเมน (k_x,k_y) ในสมการ (ค.25) แสดงถึงผลรวมของสนามไฟฟ้าของคลื่นระนาบในทุกโมดที่ค่า k_x และ k_y เป็นค่าจริง ดังนั้น k_z จึงสามารถมีค่าเป็นจำนวนจินตภาพได้ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในเรื่องของคลื่นที่จางหายไป (evanescent wave)

เมื่อเวกเตอร์ $\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ค่าจริง $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ จะแสดงถึงการเปลี่ยนค่าวัฏภาคของสนามไฟฟ้าตามตำแหน่งของคลื่นระนาบที่เคลื่อนที่ตามทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{k}$ เทียบกับค่าวัฏภาค ณ จุดกำเนิด ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{A}$ ก็คือเวกเตอร์แสดงค่าขนาดของสนามไฟฟ้ารวมกับวัฏภาคของสนามไฟฟ้าในส่วนที่ไม่แปรค่าตามตำแหน่ง เวกเตอร์ $\vec{A}$ จึงเป็นเวกเตอร์ค่าเชิงซ้อน เรียกเวกเตอร์ $\vec{A}$ ว่าสเปกตรัมคลื่นระนาบซึ่งเป็นฟังชันก์ของเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{k}$ แต่ไม่เป็นฟังชันก์ของเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}$ โดยคลื่นระนาบในที่นี้จะเป็นคลื่นระนาบเอกรูป (uniform plane wave) ถ้าเวกเตอร์ $\vec{k}$ เป็น เวกเตอร์ค่าจริง

สนามบนระนาบช่องเปิดนั้นสามารถหาได้จากการแปลงฟูริเยร์ของสเปกตรัมคลื่นระนาบ พิจารณาสมการ (ค.25) เมื่อแทน z ด้วย z_p และขยายออกเป็นสมการเชิงขนาดตามองค์ประกอบในระบบพิกัดคาร์ทีเชียนจะได้

$$E_x^a(x,y,z_p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_x(k_x,k_y)e^{-jk_z z_p}e^{-j(k_x x+k_y y)}dk_x dk_y \qquad (ค.27)$$

$$E_y^a(x,y,z_p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_y(k_x,k_y)e^{-jk_z z_p}e^{-j(k_x x+k_y y)}dk_x dk_y \qquad (ค.28)$$

โดยที่สมการในองค์ประกอบ z ไม่จำเป็นเนื่องจาก E_z หาได้จาก $\nabla\cdot\overline{E} = 0$

ค่าสนาม E_x^a และ E_y^a ทางซ้ายของสมการ (ค.27) และ (ค.28) คือ สนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดโดยคำนวณจากผลรวมของสนามที่สะท้อนบนจานสะท้อนและสนามที่เลี้ยวเบนจากขอบของจานสะท้อนหรือเขียนได้เป็น $\bar{E}^r(P)$ + $\bar{E}^d(P)$ โดยสมการ (ค.27) และ (ค.28) นี้เข้ารูปแบบของการแปลงฟูริเยร์ 2 มิติจากโดเมน (k_x,k_y) มาสู่โดเมน (x,y) ดังนั้นองค์ประกอบของสเปกตรัมคลื่นระนาบ A_x และ A_y สามารถหาได้จากการแปลงกลับฟูริเยร์ดังนี้

$$A_x(k_x,k_y) = \frac{e^{jk_z z_p}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_x^a(x,y,z_p)e^{j(k_x x+k_y y)}dxdy \qquad (ค.29)$$

$$A_y(k_x,k_y) = \frac{e^{jk_z z_p}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_y^a(x,y,z_p)e^{j(k_x x+k_y y)}dxdy \qquad (ค.30)$$

การคำนวณการขยายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะสมมุติให้ตั้งอยู่ที่ระนาบ $z = 0$ ดังสมการต่อไปนี้ ซึ่งได้มาจากการแทน z_p เป็นศูนย์ในสมการ (ค.29) และ (ค.30)

$$A_x(k_x,k_y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_x(x,y,0)e^{j(k_x x+k_y y)}dxdy \qquad (ค.31)$$

$$A_y(k_x,k_y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_y(x,y,0)e^{j(k_x x+k_y y)}dxdy \qquad (ค.32)$$

แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศนั้น สามารถหาได้จากสเปกตรัมคลื่นระนาบ สนามไฟฟ้าเนื่องจากสายอากาศจานสะท้อนที่ตำแหน่งใด ๆ ในบริเวณ $z > 0$ ไม่ว่าจะอยู่ในบริเวณสนามใกล้หรือสนามไกลจะมีความสัมพันธ์กับสเปกตรัมคลื่นระนาบดังต่อไปนี้

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(k_x,k_y)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}dk_x dk_y \qquad (ค.33)$$

ในบริเวณย่านสนามไกลกล่าวคือ เมื่อระยะทาง r มีค่ามาก ๆ สามารถใช้เทคนิคการคำนวณค่าโดยประมาณที่เรียกว่า วิธีการวัฏภาคคงตัว (method of stationary phase) มาใช้หาค่าโดยประมาณของสมการ (ค.33) ได้ดังนี้

$$E_\theta\left(r,\theta,\phi\right)\cong j\frac{ke^{-jkr}}{r}\left(A_x\cos\phi+A_y sin\phi\right) \quad \text{(ค.34)}$$

$$E_\phi\left(r,\theta,\phi\right)\cong j\frac{ke^{-jkr}}{r}\cos\theta\left(-A_x\sin\phi+A_y\cos\phi\right) \quad \text{(ค.35)}$$

โดยที่ θ และ ϕ เป็นมุมในระบบพิกัดทรงกลม โดยแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลมีความสัมพันธ์กับ $\vec{A}(k\sin\theta\cos\phi, k\sin\theta\sin\phi)$ ซึ่งเป็นค่าสเปกตรัมคลื่นระนาบที่ k_x เท่ากับ $k\sin\theta\cos\phi$ และ k_y เท่ากับ $k\sin\theta\sin\phi$

ภาคผนวก ง

การหากระแสสมมูลจากทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต

ตามกรรมวิธีกระแสสมมูลที่ขอบ สนามเลี้ยวเบน $\vec{E}^d\left(\vec{r}\right)$ ที่เกิดจากขอบ C ในย่านเฟรสเนล และย่านสนามไกลสามารถหาได้จากการหาผลรวมของกระแสสมมูลที่เกิดขึ้นที่ขอบดังนี้

$$\vec{E}^d\left(\vec{r}\right) \cong jk\int_C \left[ZI(\vec{r}')\hat{s}\times\left(\hat{s}\times\hat{e}\right)+M(\vec{r}')\hat{s}\times\hat{e}\right]G\left(\vec{r}',\vec{r}\right)dl \qquad (ง.1)$$

โดยที่ k เป็นเลขคลื่นของคลื่นตกกระทบ Z เป็นอิมพีแดนซ์ของตัวกลางในปริภูมิเสรี กำหนดให้ $\vec{r}$ และ $\vec{r}'$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดสังเกตและจุดที่อยู่บน C ตามลำดับ $dl = \left|d\vec{r}'\right|$ เป็นขนาดของส่วนย่อยตามแนว C $\hat{e} = d\vec{r}'/dl$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแนวสัมผัส $\hat{s}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศของจุดสังเกตของจุดขอบที่ $\vec{r}'$ มีค่าเป็น $\hat{s} = \vec{s}/s = \left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)/\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|$ ฟังก์ชันของกรีนเป็น $G\left(\vec{r},\vec{r}'\right) = e^{-jks}/4\pi s$ กระแสไฟฟ้าสมมูลและกระแสแม่เหล็กสมมูลให้เป็น $\vec{I}\left(\vec{r}'\right)$ และ $\vec{M}\left(\vec{r}'\right)$ ตามลำดับ

ตามกรรมวิธีกระแสสมมูลนั้นจะสมมติให้กระแสแบบเส้นให้กำเนิดสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเท่ากับสนามที่เลี้ยวเบนจากขอบไปยังจุดสังเกตใดๆ เมื่อพิจารณาแหล่งกำเนิดไฟฟ้าแบบเส้นตรงมีทิศทางในแนวแกน z และสมมติให้มีความยาวอนันต์กระแสไฟฟ้าสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\vec{I}\left(z'\right) = I\,\hat{z} \qquad (ง.2)$$

โดย I เป็นค่าคงที่

เนื่องจากกระแสไฟฟ้านั้นวิ่งไปตามแกน z สนามที่แผ่กระจายออกมาก็จะกำเนิดจากแหล่งกำเนิดแบบเส้นที่เป็น TM^z และเมื่อพิจารณาคลื่นที่แผ่กระจายออกไปเป็นโมดอันดับต่ำสุดจะได้เป็น

$$F^m = 0 \qquad (ง.3)$$

$$\begin{aligned} A^e &= A_z^e\left(\rho,\phi,z\right)\hat{z} \\ &= \left[A_0 H_0^1\left(k\rho\right)\right]\hat{z} \end{aligned} \qquad (ง.4)$$

และสามารถหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กได้จาก

$$E = E_{A^e} + E_{F^m} = -j\omega A^e - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\left(\nabla\cdot A^e\right) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times F^m \qquad (ง.5)$$

$$H = H_{A^e} + H_{F^m} = \frac{1}{\mu}\nabla\times A^e - j\omega F^m - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\left(\nabla\cdot F^m\right) \qquad (ง.6)$$

ผลเฉลยของสมการ (ง.5) และสมการ (ง.6) ในระบบพิกัดทรงกระบอกเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
E = & \left\{-j\omega A^e_\rho - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A^e_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A^e_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A^e_z}{\partial z}\right]-\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F^m_z}{\partial\phi}+\frac{\partial F^m_\phi}{\partial z}\right)\right\}\hat{\rho} \\
& + \left\{\begin{array}{l} -j\omega A^e_\phi - j\dfrac{1}{\omega\mu\varepsilon}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A^e_\rho\right)+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial A^e_\phi}{\partial\phi}+\dfrac{\partial A^e_z}{\partial z}\right] \\ -\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial F^m_\rho}{\partial z}+\dfrac{\partial F^m_z}{\partial\rho}\right) \end{array}\right\}\hat{\phi} \\
& + \left\{\begin{array}{l} -j\omega A^e_z - j\dfrac{1}{\omega\mu\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A^e_\rho\right)+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial A^e_\phi}{\partial\phi}+\dfrac{\partial A^e_z}{\partial z}\right] \\ -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\left(\rho F^m_\phi\right)}{\partial\rho}+\dfrac{\partial F^m_\rho}{\partial\phi}\right) \end{array}\right\}\hat{z}
\end{aligned}
\qquad (ง.7)
$$

$$
\begin{aligned}
H = & \left\{-j\omega F^e_\rho - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho F^e_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F^e_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial F^e_z}{\partial z}\right]-\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A^m_z}{\partial\phi}+\frac{\partial A^m_\phi}{\partial z}\right)\right\}\hat{\rho} \\
& + \left\{\begin{array}{l} -j\omega F^e_\phi - j\dfrac{1}{\omega\mu\varepsilon}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho F^e_\rho\right)+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F^e_\phi}{\partial\phi}+\dfrac{\partial F^e_z}{\partial z}\right] \\ -\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial A^m_\rho}{\partial z}+\dfrac{\partial A^m_z}{\partial\rho}\right) \end{array}\right\}\hat{\phi} \\
& + \left\{\begin{array}{l} -j\omega F^e_z - j\dfrac{1}{\omega\mu\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho F^e_\rho\right)+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F^e_\phi}{\partial\phi}+\dfrac{\partial F^e_z}{\partial z}\right] \\ -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\left(\rho A^m_\phi\right)}{\partial\rho}+\dfrac{\partial A^m_\rho}{\partial\phi}\right) \end{array}\right\}\hat{z}
\end{aligned}
\qquad (ง.8)
$$

เมื่อแทนสมการ (ง.3) ลงใน สมการ (ง.6) และสมการ (ง.7) จะได้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กดังนี้

$$E_\rho = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\rho\,\partial z} = 0 \qquad (ง.9)$$

$$E_\phi = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\phi\,\partial z} = 0 \qquad (ง.10)$$

$$E_z = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)A_z = -j\omega A_0 H_0^{(2)}\left(k\rho\right) \qquad (ง.11)$$

$$H_\rho = \frac{1}{\mu}\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} = 0 \qquad (ง.12)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial\rho} = -\frac{A_0}{\mu}H_0^{(2)\prime}\left(k\rho\right) = A_0\frac{k}{\mu}H_1^{(2)}\left(k\rho\right) \qquad (ง.13)$$

$$H_z = 0 \tag{ง.14}$$

ค่าคงที่ A_0 หาได้จากความสัมพันธ์กับ I ซึ่งถือว่ามีรัศมีของเส้นลวดเล็กมากๆ (ρ เข้าใกล้ศูนย์) ดังนี้

$$I = \lim_{\rho \to 0} \oint_C H \cdot dl = \lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} \left(H_\phi \hat{\phi} \right) \cdot \left(\rho d\phi \hat{\phi} \right) = \lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi \tag{ง.15}$$

แทนค่า H_ϕ จากสมการ (ง.13) ลงในสมการ (ง.15) จะได้

$$I = \lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} A_0 \frac{k}{\mu} H_1^{(2)}\left(k\rho\right) \rho d\phi \tag{ง.16}$$

สามารถใช้กรรมวิธีเชิงเส้นกำกับในการประมาณการขยายฟังก์ชันแฮงเคล เมื่อลิมิต $k\rho \to 0$ ได้ดังนี้

$$H_0^{(2)\prime}\left(k\rho\right) = J_1\left(k\rho\right) - jY_1\left(k\rho\right) \overset{k\rho \to 0}{\simeq} \frac{k\rho}{2} + j\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k\rho}\right) \overset{k\rho \to 0}{\simeq} j\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k\rho}\right) \tag{ง.17}$$

เมื่อแทนฟังก์ชันแฮงเคลลงในปริพันธ์ของสมการ (ง.16) จะได้ผลดังนี้

$$I = \lim_{\rho \to 0} \int_0^{2\pi} A_0 \frac{k}{\mu} H_1^{(2)}\left(k\rho\right) \rho d\phi \simeq jA_0 \frac{2}{\pi\mu} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \rho d\phi \simeq jA_0 \frac{4}{\mu} \tag{ง.18}$$

หรือ

$$A_0 = -j\frac{4}{\mu} I \tag{ง.19}$$

เพราะฉะนั้นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของแหล่งกำเนิดแบบเส้นจะมีค่าเป็น

$$E_z = -I\frac{k^2}{4\omega\varepsilon} H_0^{(2)}\left(k\rho\right) \tag{ง.20}$$

$$H_\phi = -I\frac{k}{4} H_1^{(2)}\left(k\rho\right) \tag{ง.21}$$

สำหรับจุดสังเกตที่อยู่ไกลๆ ($k\rho$ มีค่ามากๆ) สามารถประมาณค่าฟังก์ชันแฮงเคลด้วยกรรมวิธีเชิงเส้นกำกับได้ดังนี้

$$H_0^2\left(k\rho\right) \overset{k\rho \to \infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2j}{\pi k\rho}}\, e^{-jk\rho} \tag{ง.22}$$

$$H_1^2\left(k\rho\right) \overset{k\rho \to \infty}{\simeq} j\sqrt{\frac{2j}{\pi k\rho}}\, e^{-jk\rho} \tag{ง.23}$$

แทนฟังก์ชันแฮงเคลลงในสมการ (ง.20) และสมการ (ง.21) สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะมีค่าดังนี้

$$E_z = -I\frac{k^2}{4\omega\varepsilon}H_0^{(2)}\left(k\rho\right) \overset{k\rho\to\infty}{\simeq} -ZI\sqrt{\frac{jk}{8\pi}}\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \qquad (ง.24)$$

$$H_\phi = -I\frac{k}{4}H_1^{(2)}\left(k\rho\right) \overset{k\rho\to\infty}{\simeq} I\sqrt{\frac{jk}{8\pi}}\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \qquad (ง.25)$$

สำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กซึ่งเกิดจากกระแสแม่เหล็ก ($\vec{M}\left(z'\right) = M\,\hat{z}$) หาได้โดยใช้ทฤษฎีบททวิภาพ คือแทน $I \Leftrightarrow M,\ Z \Leftrightarrow 1/Z,\ E_z \Leftrightarrow H_z$ และ $E_\phi \Leftrightarrow -H_\phi$ ลงในสมการ (ง.24) และสมการ (ง.25) จะได้

$$E_\phi = +jM\frac{k}{4}H_1^{(2)}\left(k\rho\right) \overset{k\rho\to\infty}{\simeq} -M\sqrt{\frac{jk}{8\pi}}\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \qquad (ง.26)$$

$$H_z = -M\frac{k^2}{4\omega\varepsilon}H_0^{(2)}\left(k\rho\right) \overset{k\rho\to\infty}{\simeq} -\frac{M}{Z}\sqrt{\frac{jk}{8\pi}}\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \qquad (ง.27)$$

แหล่งกำเนิดแบบเส้นนี้เทียบได้กับกระแสสมมูลเฉพาะที่ขอบของรูปลิ่มความยาวอนันต์โดยให้เป็นกระแสไฟฟ้าสมมูล $\vec{I}\left(\vec{r}'\right) = I\left(\vec{r}'\right)\hat{e}$ และกระแสแม่เหล็กสมมูล $\vec{M}\left(\vec{r}'\right) = M\left(\vec{r}'\right)\hat{e}$ และจะพิจารณาเฉพาะองค์ประกอบตามแนวสัมผัสของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเท่านั้น เนื่องจากแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าสมมูลแบบเส้นที่วางตัวในแนวสัมผัสจะไม่ก่อให้เกิดสนามแม่เหล็กตามแนวสัมผัส และแหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็กสมมูลแบบเส้นที่วางตัวในแนวสัมผัสก็จะไม่ก่อให้เกิดสนามไฟฟ้าตามแนวสัมผัสเช่นเดียวกัน ฉะนั้นสนามเลี้ยวเบนตามแนวสัมผัสที่ตำแหน่งสังเกต $\vec{r}$ ซึ่งเกิดจากกระแสไฟฟ้าสมมูล $\vec{I}\left(\vec{r}'\right) = I\left(\vec{r}'\right)\hat{t}$ คือ

$$E_e^{eq}\left(\vec{r}\right) = -I\left(\vec{r}\right)\frac{k^2}{4\omega\varepsilon}H_0^{(2)}\left(k\rho\right) \overset{k\rho\to\infty}{\simeq} -ZI\left(\vec{r}\right)\sqrt{\frac{jk}{8\pi}}\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \qquad (ง.28)$$

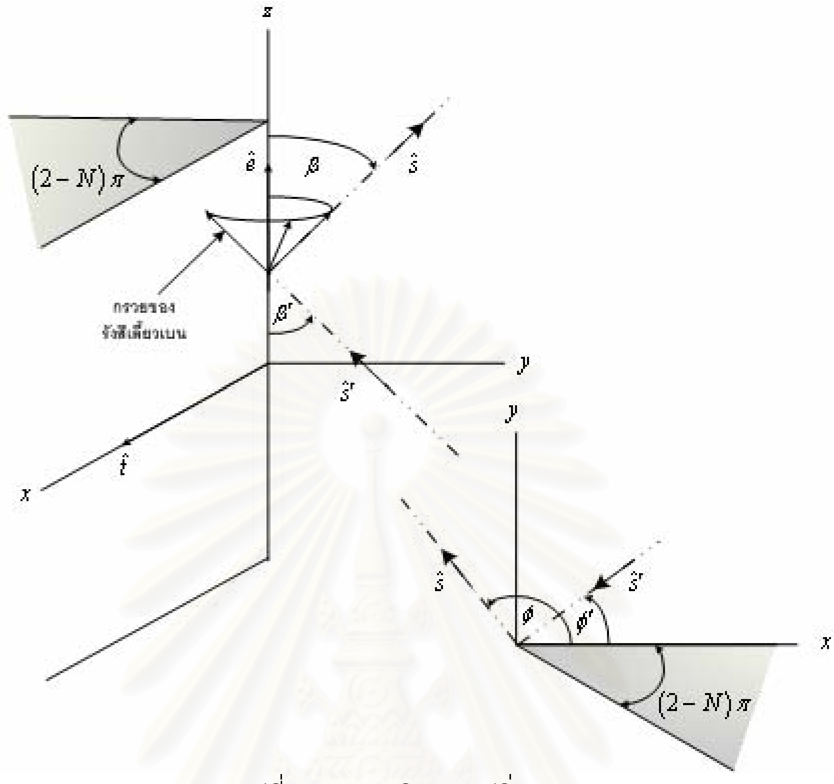
และสนามเลี้ยวเบนตามแนวสัมผัสที่ตำแหน่งสังเกต $\vec{r}$ ซึ่งเกิดจากกระแสแม่เหล็กสมมูลที่ขอบ $\vec{M}\left(\vec{r}'\right) = M\left(\vec{r}'\right)\hat{e}$ คือ

$$H_e^{eq}\left(\vec{r}\right) = -M\left(\vec{r}\right)\frac{k^2}{4\omega\varepsilon}H_0^{(2)}\left(k\rho\right) \overset{k\rho\to\infty}{\simeq} -\frac{M\left(\vec{r}\right)}{Z}\sqrt{\frac{jk}{8\pi}}\frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \qquad (ง.29)$$

เมื่อต้องการหาค่ากระแสสมมูลที่ขอบจะสมมติให้ค่านี้แปรผันตรงแบบเชิงเส้นกับสนามตกกระทบ $E^i\left(\vec{r}'\right)$ และ $H^i\left(\vec{r}'\right)$ ให้ตัวประกอบวัฏภาค (phase factor) ของสนามตกกระทบบนขอบที่ $\vec{r}'$ เป็น $e^{-jk\psi\left(\vec{r}'\right)}$ เมื่อแทนกระแสสมมูลลง (ง.1) จะเห็นได้ว่า วัฏภาครวมจะกลายเป็น $\psi\left(\vec{r}'\right)+\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|$ เมื่อพิจารณาที่ย่านความถี่สูงจะพบว่า k เข้าใกล้อนันต์ $\left(k\to\infty\right)$ ปริพันธ์ของ (ง.1) จะสามารถหาโดยใช้กรรมวิธีแนวเส้นกำกับได้ด้วยระเบียบวิธีวัฏภาคคงตัว จุดวัฏภาคคงที่คือจุดที่คลื่นตกกระทบกับขอบซึ่งพบว่ามีการเปลี่ยนแปลงของวัฏภาคน้อยมากๆ และจะเป็นบริเวณที่มีขนาดมากที่สุดด้วยเช่นกันหาได้จาก

$$\hat{e}\cdot\vec{\nabla}_{r'}\left[\psi\left(\vec{r}'\right)+\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|\right] = 0 \text{ หรือ } \beta = \beta' \qquad (ง.30)$$

ที่ β' คือมุมระหว่างทิศทางของสนามตกกระทบ $\hat{s}' = \bar{\nabla}_{r'}\psi$ กับทิศทางแนวสัมผัสขอบ ดังนั้น $\beta' = \cos^{-1}\left(\hat{s}' \cdot \hat{e}\right)$ และ β คือมุมที่คล้ายกับ β' แต่เป็นในทิศทางของจุดสังเกต $\cos^{-1}\left(\hat{s} \cdot \hat{e}\right)$



รูปที่ ง.1 เรขาคณิตของรูปลิ่ม

จะเห็นได้จากสมการ (ง.30) ว่าตรงกับกฎการเลี้ยวเบนของเคลเลอร์จึงสามารถพิจารณาทิศทางการเลี้ยวเบนด้วยกรวยของรังสีเลี้ยวเบนของเคลเลอร์ได้ สนามเลี้ยวเบนจากทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิตสามารถหาได้ดังนี้ [22]

$$E_{gtd}^{d} = E_e^i D_s \sqrt{\frac{\rho_2^d}{r\left(\rho_2^d + r\right)}} e^{-jkr} \qquad (ง.31)$$

$$H_{gtd}^{d} = H_e^i D_h \sqrt{\frac{\rho_2^d}{r\left(\rho_2^d + r\right)}} e^{-jkr} \qquad (ง.32)$$

โดยที่ E_e^i คือสนามไฟฟ้าตกกระทบบนขอบของจานสะท้อน$\left(E_e^i = \bar{E}^i \cdot \hat{e}\right)$

H_e^i คือสนามแม่เหล็กตกกระทบบนขอบของจานสะท้อน$\left(H_e^i = \bar{H}^i \cdot \hat{e}\right)$

D_s และ D_h คือสัมประสิทธิ์การเลี้ยวเบนแบบอ่อนและแบบแข็งตามลำดับหาได้ดังนี้

$$D_s = \frac{e^{-j\pi/4} \frac{1}{N} \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}{\sqrt{2\pi k}} \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) - \cos\left(\frac{\phi-\phi'}{N}\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) - \cos\left(\frac{\phi+\phi'}{N}\right)} \right] \qquad (ง.33)$$

$$D_h = \frac{e^{-j\pi/4} \frac{1}{N} \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}{\sqrt{2\pi k}} \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) - \cos\left(\frac{\phi-\phi'}{N}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) - \cos\left(\frac{\phi+\phi'}{N}\right)} \right] \qquad (ง.34)$$

ให้สนามเลี้ยวเบนที่เกิดจากกระแสสมมูลเท่ากับสนามเลี้ยวเบนจากทฤษฎีการเลี้ยวเบนเชิงเรขาคณิต เมื่อเทียบสมการ (ง.28) กับสมการ (ง.31) และเทียบสมการ (ง.29) กับสมการ (ง.32) จะได้กระแสสมมูลเป็นดังนี้

$$I\left(\vec{r}\right) = -\frac{2\left(\vec{E}^i \cdot \hat{e}\right) D_s}{jkZ \sin\beta'} \tag{ง.35}$$

$$M\left(\vec{r}\right) = -\frac{2Z\left(\vec{H}^i \cdot \hat{e}\right) D_h}{jk \sin\beta'} \tag{ง.36}$$

ภาคผนวก จ

การหาขนาดตัวอย่างของจุดบนพื้นผิวจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

เนื่องจากจำนวนของจุดที่ใช้ในการกัดพื้นผิวสะท้อนเดี่ยวดัดรูปด้วยเครื่องจักร CNC นั้นมีจำนวนที่ค่อนข้างมาก เพราะฉะนั้นในกระบวนการตรวจสอบพื้นผิวด้วยการใช้กล้องสำรวจ (theodolite) จึงจำเป็นต้องใช้ทฤษฏีการสุ่มตัวอย่างจากจำนวนของจุดที่ใช้ในการกัดพื้นผิวด้วยเครื่องจักร CNC โดยวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เลือกใช้วิธีการกำหนดขนาดกลุ่มตัวอย่าง (sampling size) ของ เครจซี่ และมอร์แกน (Krejcie & Morgan) ซึ่งเป็นวิธีที่เหมาะจะใช้ในการเลือกขนาดของตัวอย่างที่ได้สัดส่วน

$$n = \frac{\chi^2 NPQ}{e^2\left(N-1\right) + \chi^2 PQ}$$

โดยที่ n คือ ขนาดตัวอย่างของจุดบนพื้นผิวจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

N คือ ขนาดของจุดที่ใช้ในการกัดพื้นผิวด้วยเครื่องจักร CNC

P คือ สัดส่วนในการสุ่ม และ $Q = 1 - P$

e คือ เปอร์เซนของความคลาดเคลื่อน

χ^2 คือ ค่าไคสแควร์ (Chi-square)

การหาจำนวนสุ่มตัวอย่างขั้นต่ำสุดจะกำหนดให้มี ระดับนัยสำคัญ (significant) หรือค่าความเชื่อมั่นเป็น 95 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งจะได้ χ^2 มีค่าเป็น 3.841 ให้ สัดส่วนในการสุ่มเป็น 0.5 จะได้ Q มีค่าเป็น 0.5 และความคลาดเคลื่อนไม่เกิน ± 5 เปอร์เซ็นต์ เมื่อแทนขนาดของจุดที่ใช้ในการกัดพื้นผิวด้วยเครื่องจักร CNC จำนวน 41148 จุด จะได้ขนาดตัวอย่างขั้นต่ำสุดในการตรวจวัดพื้นผิวเป็นจำนวน 381 จุด วิทยานิพนธ์ชิ้นนี้ใช้ขนาดของจุดสุ่มเป็นจำนวน 875 เพราะฉะนั้นจะมีความคลาดเคลื่อนเท่ากับ ± 3.28 เปอร์เซ็นต์

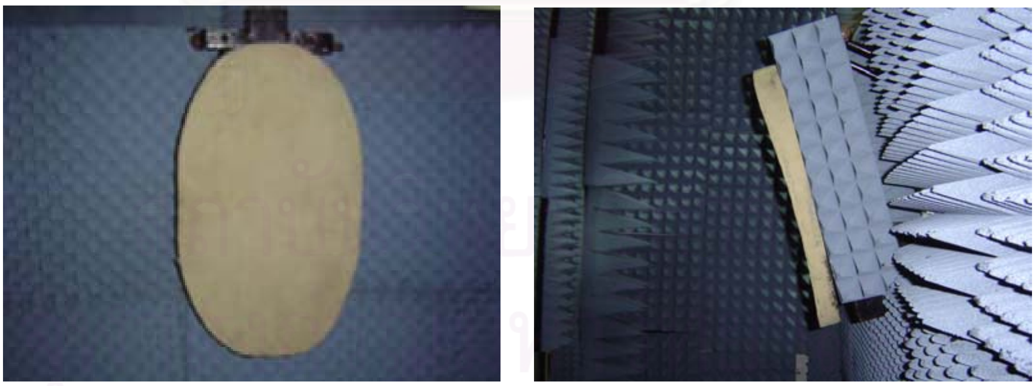
ภาคผนวก ฉ

อุปกรณ์ในการทดลอง

สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปต้นแบบ

ระบบของสายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปต้นแบบที่สังเคราะห์ขึ้นประกอบด้วย สายอากาศป้อนกำลังคลื่นแบบปากแตรรูปทรงพีระมิด (WR75) อัตราขยาย 15 dB ดังรูปที่ ฉ.1 และ จานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปที่ทำจากพลาสติก acylic ประกบกัน 2 แผ่น แล้วกัดพื้นผิวด้วย เครื่องจักรกล CNC ที่ วิทยาลัยเทคโนโลยีอุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ และฉาบพื้นผิวด้วยสีนำไฟฟ้า ฉ.2

รูปที่ ฉ.1 สายอากาศป้อนกำลังคลื่นแบบปากแตรรูปทรงพีระมิด



รูปที่ ฉ.2 สายอากาศจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูปต้นแบบ

อุปกรณ์ที่ใช้ในการตรวจวัดลักษณะพื้นผิว

การตรวจวัดลักษณะพื้นผิวของจานสะท้อนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้กล้อง theodolite รุ่น Leica TC 1700 ดังรูปที่ ฉ.3 โดยจะวัดพื้นผิวที่กำหนดจุดไว้บนจานสะท้อนทั้งสิ้น 875 จุดดังรูปที่ ฉ.4

รูปที่ ฉ. 3 กล้อง theodolite รุ่น TC 1700

รูปที่ ฉ. 4 การกำหนดจุดเพื่อตรวจวัดพื้นผิวของจานสะท้อนเดี่ยวดัดรูป

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายรชฎ ถาวรศิริ เกิดวันที่ 14 พฤษภาคม พ.ศ. 2522 อำเภอวารินชำราบ จังหวัดอุบลราชธานี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในปีการศึกษา 2544 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2544