การวิเคราะห์หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุเป็นชั้นๆ

นาย นพปฎล เสงี่ยมศักดิ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-17-6413-8

TRANSIENT THERMAL STRESS ANALYSIS OF
LAMINATED HOLLOW CYLINDERS

Mr. Noppadol Sangiumsak

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
For the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering
Department of Civil Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2004
ISBN 974-17-6413-8

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุเป็นชั้นๆ
โดย	นาย นพปฎล เสงี่ยมศักดิ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิทธากร

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

……………………………………………….. คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

……………………………………………….. ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เริงเดชา รัชตโพธิ์)

……………………………………………….. อาจารย์ที่ปรึกษา

(อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิทธากร)

……………………………………………….. กรรมการ

(อาจารย์ ดร. ฉัตรพันธ์ จินตนาภักดี)

……………………………………………….. กรรมการ

(อาจารย์ ดร. เกรียงศักดิ์ แก้วกุลชัย)

นพปฎล เสงี่ยมศักดิ์ : การวิเคราะห์หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุเป็นชั้นๆ (TRANSIENT THERMAL STRESS ANALYSIS OF LAMINATED HOLLOW CYLINDERS) อ. ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิทธากร, 112 หน้า, ISBN 974-17-6413-8

งานวิจัยนี้ทำการศึกษาการกระจายของอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุเป็นชั้นๆ แต่ละชั้นเป็นเนื้อเดียวกัน การนำความร้อนเกิดขึ้นใน 2 มิติ ในระนาบตัดขวาง ส่งผลให้พฤติกรรมที่เกิดขึ้นอยู่ในสภาวะความเครียดระนาบ เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวของทรงกระบอกจะพิจารณาเป็นการกำหนดอุณหภูมิ การกำหนดฟลักซ์ความร้อน หรือมีการพาความร้อนเกิดขึ้น การแก้ปัญหาจะอาศัยทฤษฎีตามชั้น (layerwise theory) มาพัฒนาเป็นแบบจำลองแยกชั้นสำหรับใช้วิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิ และหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ คำตอบของการกระจายอุณหภูมิและการกระจัดสมมติให้มีฟังก์ชันสัณฐานในทิศทางรัศมีเป็นแบบลากรางจ์เชิงเส้น และมีฟังก์ชันสัณฐานในทิศทางเส้นรอบวงเป็นอนุกรมฟูเรียร์ ส่วนการแก้ปัญหาในภาวะชั่วครู่นั้น อาศัยวิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด โดยมีการแบ่งเวลาออกเป็นช่วงๆ แล้วทำการคำนวณทีละช่วงต่อเนื่องกันไป แบบจำลองแยกชั้นที่พัฒนาขึ้นนี้เมื่อทำการตรวจสอบความถูกต้องโดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงพบว่า ผลการวิเคราะห์มีความถูกต้องแม่นยำเป็นอย่างดี

จากการประยุกต์ใช้แบบจำลองแยกชั้นเพื่อวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิของท่อบรรจุของเหลวในระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์ โดยพิจารณาท่อในลักษณะต่างๆ ทั้งท่อเหล็กชั้นเดียว ท่อทองแดงชั้นเดียว รวมถึงท่อ 2 ชั้น และ 3 ชั้น ที่ประกอบด้วยเหล็กและทองแดงในหลายๆ ลักษณะ เมื่อเปรียบเทียบพฤติกรรมของการนำความร้อนและหน่วยแรงภายในที่เกิดขึ้นพบว่า ท่อทองแดงชั้นเดียวมีการถ่ายเทความร้อนได้ดีที่สุด รองลงมาเป็นท่อ 3 ชั้นที่มีวัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดง ชั้นกลางเป็นเหล็ก ในขณะที่ท่อเหล็กชั้นเดียวนำความร้อนได้ช้าที่สุด สำหรับการเปรียบเทียบหน่วยแรงที่เกิดขึ้นพบว่า ท่อชั้นเดียวไม่ว่าจะเป็นท่อเหล็กหรือท่อทองแดง จะเกิดหน่วยแรงภายในต่ำกว่ากรณีท่อ 2 ชั้น และ 3 ชั้น ค่อนข้างมาก ทั้งนี้ ในทุกๆ กรณีที่พิจารณาพบว่า หน่วยแรงเฉือนมีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับหน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง โดยหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงมีค่าสูงที่สุด และหน่วยแรงที่เกิดขึ้นสูงสุดมีค่าประมาณ 40% ของหน่วยแรงครากของวัสดุ

ภาควิชา.....วิศวกรรมโยธา..... ลายมือชื่อนิสิต..........

สาขาวิชา.....วิศวกรรมโยธา..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..........

ปีการศึกษา.....2547.....

4570368021 : MAJOR ENGINEERING

KEY WORD: LAMINATED HOLLOW CYLINDERS/TRANSIENT/HEAT CONDUCTION

MR.NOPPADOL SANGIUMSAK: TRANSIENT THERMAL STRESS ANALYSIS OF LAMINATED HOLLOW CYLINDERS: THESIS ADVISOR: DR. WATANACHAI SMITTAKORN, 112 pp, ISBN 974-17-6413-8

This research studies the transient thermal stress behavior in laminated hollow cylinders. The laminate is composed of layers of homogeneous orthotropic materials. Heat conduction occurs in two dimensions in the cross-sectional plane, and the problem is considered as plane strain. Three types of boundary conditions are allowed at the inner and outer surfaces: prescribed temperature distribution, heat flux, or convection heat transfer. By applying layerwise theory, a discrete-layer model is developed for analyzing the temperature distribution and the thermal stress. Temperature and displacement are the primary unknowns, with their shape functions taken as Lagrange linear interpolation functions in the radial direction and Fourier series in the circumferential direction. In solving for the transient problem, a recurrence relation method using step-by-step integration is employed. Results from the discrete-layer model show good agreement with the exact solutions.

The discrete-layer model is then applied to analyze the thermal conduction and thermal stress of an absorber tube in the solar trough system. Several case studies are investigated: one layer, two layers, and three layers of steel and copper tubes. The results have shown that the best heat conduction occurs in the tube with pure copper. The next best conduction is in the case of three-layer tube (copper / steel / copper). The worst conduction occurs in the tube with pure steel. In terms of thermal stress, noncomposite tubes have much lower stresses than the composite tubes. However, in all cases, shear stress is very small compared to the radial and circumferential stresses. Circumferential stress happens to be the largest and is about 40% of the yield stress.

Department……CIVIL ENGINEERING….. Student 's signature……………………………………

Concentration……CIVIL ENGINEERING…. Advisor 's signature……………………………………

Academic year………2004…………………

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้ ผู้จัดทำมิได้หวังเพียงใช้เป็นเอกสารประกอบการศึกษาตามหลักสูตรเท่านั้น แต่มีความตั้งใจแน่วแน่ที่จะให้เป็นเอกสารวิชาการที่มีความสมบูรณ์ที่สุด ทั้งด้านเนื้อหาสาระ รูปแบบเอกสาร ภาษา ตลอดจนแนวคิด เพื่อที่จะเป็นประโยชน์ เป็นแนวทางต่อการพัฒนาวงการวิศวกรรมศาสตร์ของชาติให้เจริญก้าวหน้ายิ่งขึ้น

หากวิทยานิพนธ์นี้เป็นประโยชน์และคุณค่าตามเจตนารมณ์ที่ตั้งไว้ ผู้จัดทำขอยกเป็นคุณความดีและขอขอบพระคุณต่อครูอาจารย์ในอดีตทุกท่าน ทุกสถาบัน ท่านผู้แต่งเอกสารที่ผู้จัดทำนำมาอ้างอิงทุกท่าน คณาจารย์คณะวิศวกรรมศาสตร์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ผู้ประสาทวิชาการระดับมหาบัณฑิตแก่ผู้จัดทำ และขอขอบพระคุณสูงสุดต่อ อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิทธากร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้กรุณาตรวจสอบและให้คำปรึกษาแนะนำในทุกๆ ด้านอย่างใกล้ชิด และขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เริงเดชา รัชตโพธิ์ อาจารย์ ดร. ฉัตรพันธ์ จินตนาภักดี และอาจารย์ ดร. เกรียงศักดิ์ แก้วกุลชัย ที่ได้ให้ความกรุณาเป็นคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งช่วยตรวจแก้รายงานและให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ในการทำวิทยานิพนธ์นี้ด้วย

ท้ายที่สุดนี้ ขอกราบขอบพระคุณบิดา – มารดา ญาติพี่น้อง เพื่อนๆ รวมทั้งบุคคลอื่นๆ ที่ได้ให้การสนับสนุนในทุกๆ ด้าน รวมทั้งได้ให้กำลังใจแก่ข้าพเจ้าในการทำวิทยานิพนธ์นี้มาโดยตลอด

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์

q_n	ฟลักซ์ความร้อน (heat flux) ในทิศทาง n
k, k_i, k_{ij}	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity)
T , T_0	อุณหภูมิที่เวลาใดๆ และอุณหภูมิเริ่มต้น ตามลำดับ
T_s , T_∞	อุณหภูมิที่ผิว และอุณหภูมิของตัวกลางการพาความร้อนรอบๆ ผิว ตามลำดับ
r, θ, z	พิกัดอ้างอิงทิศทางรัศมี ทิศทางเส้นรอบวง และทิศทางตามยาว ตามลำดับ ในระบบพิกัดทรงกระบอก
g	อัตราการผลิตความร้อนต่อหน่วยปริมาตรภายในวัตถุ (heat generation)
ρ	ความหนาแน่นของวัตถุ (density)
c	ความจุความร้อนจำเพาะของวัตถุ (specific heat)
t	เวลา
h	สัมประสิทธิ์การพาความร้อน (heat transfer coefficient)
W	ฟังก์ชันน้ำหนัก (weight) ในวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาเลอร์คิน
N	ฟังก์ชันสัณฐาน (shape function)
Ω , Γ	ขอบเขตของปริมาตรและขอบเขตของพื้นผิว ตามลำดับ
Γ_{in} , Γ_{out}	พื้นผิวในของทรงกระบอก และพื้นผิวนอกของทรงกระบอก ตามลำดับ
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x , y และ z ตามลำดับ
$\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z$	เวคเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ในทิศทาง r , θ และ z ตามลำดับ
$\hat{n}$	เวคเตอร์แนวฉาก (normal vector)
n_r , n_θ	ทิศทางโคไซน์ (direction cosine)
$\lfloor \; \rfloor$	เมตริกซ์แถว (row matrix)
$\{ \; \}$	เมตริกซ์แนวตั้ง (column matrix)
$[\;]$	เมตริกซ์สี่เหลี่ยม (rectangular matrix)
α	สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ
ΔT	อุณหภูมิที่เปลี่ยนไป
σ_i	หน่วยแรงตั้งฉาก
τ_{ij}	หน่วยแรงเฉือน
ε_i	ความเครียดตั้งฉาก
γ_{ij}	ความเครียดเฉือน
u_r, u_θ, u_z	การกระจัดในทิศทาง r, θ และ z ตามลำดับ
f_r, f_θ, f_z	แรงวัตถุ (body force) ต่อหน่วยปริมาตรของวัตถุ
T_r, T_θ, T_z	หน่วยแรงที่ผิวในทิศทาง r, θ, z ตามลำดับ
$\mathfrak{T}$	หน่วยแรงที่ผิว

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

E	มอดูลัสยืดหยุ่น
ν	อัตราส่วนปัวซง
σ_y	หน่วยแรงครากของวัสดุ
ε	สัดส่วนระหว่างค่ายูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองต่อค่าผลรวมของคำตอบยกกำลังสอง

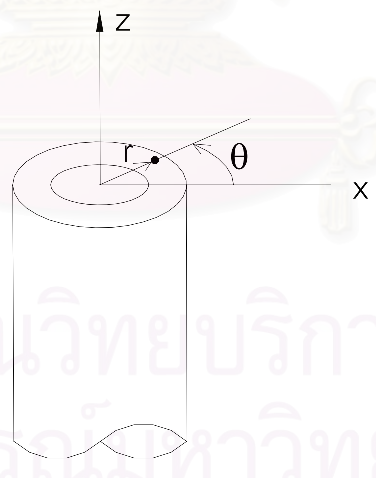
บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญของปัญหา

ปัญหาการนำความร้อนและผลของความร้อนที่เกิดขึ้นในโครงสร้าง หรือชิ้นส่วนที่มีลักษณะเป็นทรงกระบอก เป็นปัญหาที่พบเห็นได้ทั่วๆ ไปในงานด้านวิศวกรรม เช่น การนำความร้อนในท่อ กระบอกปืน ชิ้นส่วนเครื่องจักร มอเตอร์ เตาเผา ถังบรรจุของเหลว ท่อที่บรรจุสารเคมีซึ่งมีความร้อนเกิดขึ้นเนื่องจากปฏิกิริยาเคมีและเตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์ เป็นต้น ในการออกแบบโครงสร้างหรือชิ้นส่วนที่ต้องรับความร้อนนั้น การใช้วัสดุประกอบกันเป็นชั้นๆ (laminated composite) นับเป็นทางเลือกที่ดีอีกทางหนึ่ง เพราะวัสดุประกอบมีความสามารถในการรับแรงและทนต่อความร้อนได้เป็นอย่างดี ซึ่งในปัจจุบัน ก็ได้มีการใช้วัสดุประกอบกันอย่างแพร่หลาย และยังมีแนวโน้มที่จะใช้เพิ่มขึ้นอีกในอนาคต

ในวิทยานิพนธ์นี้ จะวิเคราะห์หาการกระจายของอุณหภูมิ (temperature distribution) และหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ (thermal stress) ในภาวะชั่วครู่ (transient) ของทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก ประกอบด้วยวัสดุเป็นชั้นๆ ซึ่งแต่ละชั้นเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous) และมีคุณสมบัติเป็นแบบออโธทรอปิก (orthotropic) โดยความร้อนที่เกิดขึ้นมีค่าคงที่ตลอดความยาว ดังนั้น การนำความร้อนจะอยู่ในระนาบหน้าตัดขวางเท่านั้น นั่นคือ เป็นปัญหาแบบความเครียดระนาบ (plane strain) ลักษณะของทรงกระบอกและระบบพิกัดอ้างอิงซึ่งเป็นระบบพิกัดทรงกระบอก แสดงได้ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 ทรงกระบอกกลวงและระบบแกนอ้างอิง

1.2 วัตถุประสงค์

1. ทำการวิเคราะห์การนำความร้อน และหาการกระจายของอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ยาวมากประกอบด้วยวัสดุเป็นชั้นๆ ภายใต้ฟลักซ์ความร้อนที่ผิวนอก และ / หรือ ผิวในของทรงกระบอก
2. ทำการวิเคราะห์หาหน่วยแรง และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดขึ้นเนื่องจากอุณหภูมิ ในทรงกระบอกกลวงดังกล่าว

3. พัฒนาแบบจำลองแยกชั้น (discrete layer model) สำหรับวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ โดยอาศัยทฤษฎีตามชั้น (layerwise theory) ซึ่งมีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยวิธีของกาเลอร์คิน

1.3 ขอบเขตการศึกษา

1. ทรงกระบอกประกอบด้วยชั้นวัสดุได้หลายชั้น แต่ละชั้นมีความหนาสม่ำเสมอ เป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous) วัสดุมีคุณสมบัติเป็นแบบออโธทรอปิก (orthotropic) และยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) โดยคุณสมบัติต่างๆ ไม่แปรเปลี่ยนตามอุณหภูมิ

2. การกระจายของอุณหภูมิอยู่ในระนาบ 2 มิติ คือ ระนาบตัดขวาง $(r-\theta)$ เท่านั้น โดยความร้อนที่เกิดขึ้นไม่เปลี่ยนแปลงตามความยาว นั่นคือ เป็นปัญหาแบบความเครียดระนาบ (plane strain)

3. เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวนอกและผิวในของทรงกระบอก ได้แก่ การกำหนดอุณหภูมิ ฟลักซ์ความร้อน หรือมีการพาความร้อนเกิดขึ้น ทั้งนี้ ไม่มีแหล่งกำเนิดความร้อนภายในเนื้อวัสดุ

4. ไม่มีหน่วยแรงที่เกิดจากแรงภายนอกมากระทำที่ผิว (traction free) ไม่คิดแรงวัตถุ (body force) และผลของความเฉื่อย (inertia effect) เนื่องจากสมมติว่าอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ และสมมติว่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของทรงกระบอกไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

การวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิ และหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิของทรงกระบอกกลวงที่ยาวมากในวิทยานิพนธ์นี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโครงสร้างที่มีลักษณะเป็นทรงกระบอกกลวงซึ่งมีความยาวมากเมื่อเทียบกับขนาดของพื้นที่หน้าตัด โดยมีความร้อนเกิดขึ้นคงที่ตลอดแนวความยาวได้ ซึ่งสามารถวิเคราะห์ได้ทั้งปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนและไม่สมมาตรรอบแกน เช่น เสากลมกลวงที่อยู่ภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในขณะเกิดไฟไหม้ ท่อส่งน้ำที่ได้รับความร้อนจากแสงแดด ท่อบรรจุของเหลวในระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์ เป็นต้น ซึ่งเมื่อสามารถวิเคราะห์หาหน่วยแรงที่เกิดขึ้นได้แล้ว ก็จะทราบได้ว่าโครงสร้างทรงกระบอกที่อยู่ภายใต้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมินี้จะเกิดการวิบัติหรือไม่ หรือมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเป็นอย่างไร ในทางกลับกัน ก็จะสามารถออกแบบโครงสร้างให้สามารถทนต่อความร้อนที่เกิดขึ้นได้ นอกจากนี้ ยังมีประโยชน์สำหรับปัญหาที่ต้องการทราบการกระจายอุณหภูมิ หรือต้องการทราบการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นอีกด้วย

บทที่ 2

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงนั้น ได้มีผู้ทำการศึกษาวิจัยไว้เป็นจำนวนมาก ในที่นี้จะกล่าวถึงงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้อง โดยแบ่งเป็นการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในทรงกระบอกกลวง และหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวง ดังต่อไปนี้

2.1 การนำความร้อนในทรงกระบอกกลวง

ปัญหาการนำความร้อนในทรงกระบอกกลวง ได้มีผู้ทำการศึกษาวิจัยทั้งใน 1 มิติ 2 มิติ และ 3 มิติ ในภาวะอยู่ตัว (steady state) และภาวะชั่วครู่ (transient) โดยการนำความร้อนใน 1 มิตินั้น จะมีเฉพาะในทิศทางรัศมี (r) เพียงอย่างเดียว ส่วนการนำความร้อนใน 2 มิติ จะมีทั้งในระนาบตัดตามยาว $(r-z)$ และระนาบตัดขวาง $(r-\theta)$ โดยรายละเอียดของแบบต่างๆ มีดังต่อไปนี้

ปัญหาการนำความร้อนใน 1 มิติ ในภาวะอยู่ตัว Jabbari และคณะ (2002) ได้วิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ของการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่มีคุณสมบัติของวัสดุไม่สม่ำเสมอ (functionally graded material) หรือ FGM โดยที่คุณสมบัติมีการเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี การวิเคราะห์ทำได้โดยการแก้สมการการนำความร้อนโดยตรง

สำหรับปัญหาการนำความร้อนใน 1 มิติ ในภาวะชั่วครู่นั้น Takeuti และ Tanigawa (1977) ได้ใช้วิธีการแปลงลาปลาซ (Laplace transformation) วิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 2 ชนิด แต่ละชนิดเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ (homogeneous) และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง หรือ ไอโซทรอปิก (isotropic) โดยมีการพาความร้อนเกิดขึ้นที่ผิวใน ส่วนที่ผิวนอกมีการกำหนดอุณหภูมิ Chen และ Chen (1989) ได้วิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 3 ชนิด แต่ละชนิดเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ มีการพาความร้อนเกิดขึ้นที่ผิว โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซ และใช้อนุกรมฟูเรียร์ประมาณค่าในการแปลงกลับ Goshima และ Miyao (1991a) ได้ใช้ฟังก์ชันของกรีน (Green 's function) วิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 2 ชนิด โดยมีการพาความร้อนเกิดขึ้นที่ผิวใน และมีการหุ้มฉนวนที่ผิวนอก ภายในทรงกระบอกมีแหล่งกำเนิดความร้อนที่เป็นระนาบและมีค่าเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมีกับเวลา ในปีเดียวกัน Goshima และ Miyao (1991b) ยังได้วิเคราะห์ปัญหาที่คล้ายๆ กันอีก ต่างกันที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุเพียงชนิดเดียว และมีการพาความร้อนเกิดขึ้นทั้งผิวในและผิวนอก ต่อมา Chen และคณะ (1992) ได้วิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 3 ชนิด แต่ละชนิดเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ และมีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซทรอปิก ที่ผิวมีการกำหนดอุณหภูมิที่เปลี่ยนค่าได้ตามเวลา ซึ่งในปัญหาดังกล่าวได้มีการพิจารณาว่า อุณหภูมิกับการกระจัด (displacement) มีผลต่อกันและกัน ดังนั้น การวิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิและการกระจัดจะทำไปพร้อมๆ กัน โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซ และใช้อนุกรมฟูเรียร์ประมาณค่าในการแปลงกลับ Lin และ Chen (1992) ได้วิเคราะห์หาคำตอบโดยประมาณของการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุหลายชนิดเป็นชั้นๆ แต่ละชั้นมีค่าการนำความร้อน (thermal conductivity)

เปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ โดยเงื่อนไขขอบเขตอาจเป็นการกำหนดอุณหภูมิ ฟลักซ์ความร้อน หรือมีการพาความร้อนเกิดขึ้นก็ได้ การวิเคราะห์แบ่งเป็น 2 วิธีคือ ใช้วิธีการแปลงลาปลาซร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) และใช้วิธีการแปลงลาปลาซร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite differece method) จากการเปรียบเทียบผลลัพธ์ระหว่าง 2 วิธี พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน จากนั้น Zhou (1995) ได้ใช้วิธีการแปลงลาปลาซ วิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่มีวัสดุเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ โดยมีการพาความร้อนเกิดขึ้นที่ผิวใน และมีการหุ้มฉนวนที่ผิวนอก Kandil และคณะ (1995) ได้ใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องวิเคราะห์หาคำตอบโดยประมาณของการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวง ซึ่งมีการกำหนดอุณหภูมิที่เปลี่ยนค่าได้ตามเวลาที่ผิวใน Vedula และคณะ (1998) ได้วิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวง โดยที่ผิวในของทรงกระบอกมีอุณหภูมิที่เปลี่ยนค่าได้ตามเวลาเป็นฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential) และผิวนอกมีการพาความร้อนเกิดขึ้น โดยใช้อินทิกรัลของดูฮัมเมล (Duhamel's integral) ในปีต่อมา Jane และ Lee (1999) ได้ใช้วิธีการแปลงลาปลาซร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง วิเคราะห์หาคำตอบโดยประมาณของการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุหลายชนิดเป็นชั้นๆ แต่ละชั้นอาจเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ หรือไม่เป็นเนื้อเดียวกัน (inhomogeneous) ก็ได้ ที่ผิวมีการกำหนดอุณหภูมิที่เปลี่ยนค่าได้ตามเวลา ซึ่งในปัญหาดังกล่าวจะพิจารณาว่า อุณหภูมิกับการกระจัดมีผลต่อกันและกัน นอกจากนี้ Sladek และคณะ (2003) ได้วิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่มีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี เงื่อนไขขอบเขตเป็นการกำหนดอุณหภูมิที่ผิวโดยที่สามารถเปลี่ยนค่าได้ตามเวลา การวิเคราะห์ใช้วิธีอินทิกรัลขอบ (boundary integral) ร่วมกับวิธีการแปลงลาปลาซ

สำหรับการนำความร้อนใน 2 มิติ ในระนาบตัดตามยาว $(r-z)$ นั้น Iyengar และ Chandrashekhara (1966) ได้วิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัวของทรงกระบอกกลวงที่มีวัสดุเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ และมีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซทรอปิก โดยใช้วิธีการแก้สมการหาผลเฉลยแม่นตรง Chen และ Chu (1989) ได้วิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 2 ชนิด แต่ละชนิดเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ และมีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซทรอปิก มีแหล่งความร้อนแบบสมมาตรรอบแกนเคลื่อนที่ตามแนวแกนของทรงกระบอก ทำให้มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าที่ผิวใน ส่วนผิวนอกมีการพาความร้อนเกิดขึ้น การวิเคราะห์ใช้การแปลงลาปลาซ และใช้อนุกรมฟูเรียร์ประมาณค่าในการแปลงกลับ ในปีต่อมา Chen และ Chu (1990) ได้วิเคราะห์ปัญหาเดิมอีกครั้งหนึ่งโดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แล้วใช้อนุกรมฟูเรียร์ประมาณค่าในการแปลงกลับเช่นเดิม ซึ่งคำตอบที่ได้เป็นคำตอบโดยประมาณ Ahmed และ Zeiden (2002) ได้ใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องวิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก วัสดุมีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซทรอปิก แต่ไม่เป็นเนื้อเดียวกัน กล่าวคือ มีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี โดยที่ผิวในมีการกำหนดอุณหภูมิ ส่วนผิวนอกมีการพาความร้อนเกิดขึ้น นอกจากนี้ Lee (2003) ได้หาคำตอบโดยประมาณของการกระจายอุณหภูมิทั้งในภาวะอยู่ตัวและภาวะชั่วครู่ ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุหลายชนิดเป็นชั้นๆ โดยวัสดุแต่ละชั้นอาจเป็นเนื้อเดียวกันหรือไม่เป็นเนื้อเดียวกันก็ได้ และที่ผิวในมีการกำหนดอุณหภูมิที่เปลี่ยนค่าได้ตามเวลา ซึ่งในปัญหาดังกล่าวจะพิจารณาว่า อุณหภูมิกับการกระจัดมีผลต่อกันและกัน การวิเคราะห์ใช้วิธีการแปลงลาปลาซร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง

สำหรับการนำความร้อนใน 2 มิติ ในระนาบตัดขวาง $(r-\theta)$ นั้น Takeuti และ Tanigawa (1978) ได้ใช้วิธีการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 2 ชนิด แต่ละชนิดเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ และมีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซทรอปิก ที่ผิวในอุณหภูมิมีค่าเป็นศูนย์ ส่วนที่ผิวนอกมีการกำหนดอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงตามทิศทางของเส้นรอบวง Tarn (2001) ได้วิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัวของทรงกระบอกกลวงที่มีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี (FGM) และไม่เหมือนกันทุกทิศทาง (anisotropic) เงื่อนไขขอบเขตอาจเป็นการกำหนดอุณหภูมิ ฟลักซ์ความร้อน หรือเป็นการ พาความร้อนก็ได้ นอกจากนั้น Liew และคณะ (2003) ได้ใช้วิธีการแบบใหม่วิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัวของทรงกระบอกกลวงที่มีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี (FGM) โดยวิธีการดังกล่าวจะแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ และสมมติว่าวัสดุแต่ละชั้นมีคุณสมบัติเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ ซึ่งหากแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ความหนาของแต่ละชั้นก็จะลดลง ทำให้การสมมติว่าแต่ละชั้นเป็นเนื้อเดียวกันนั้น ใกล้เคียงความจริงยิ่งขึ้น และหากแบ่งไปจนกระทั่งจำนวนชั้นมีค่าเป็นอนันต์ ความหนาของแต่ละชั้นก็จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ทำให้การสมมติดังกล่าวมีความถูกต้อง วิธีการนี้จะหาคำตอบของแต่ละชั้นที่เป็นเนื้อเดียวกัน แล้วจึงนำผลมารวมกัน โดยไม่ต้องอาศัยสมการของวัสดุแบบไม่เป็นเนื้อเดียวกันเลย

ส่วนปัญหาการนำความร้อนใน 3 มิตินั้น Kim และ Noda (2000) ได้วิเคราะห์หาคำตอบโดยประมาณของการกระจายอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่เป็นแบบ FGM ซึ่งมีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี โดยใช้ฟังก์ชันของกรีน และวิธีของกาเลอร์คิน (Galerkin method)

2.2 หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวง

การวิเคราะห์หาหน่วยแรงที่เกิดจากอุณหภูมินั้น จะต้องใช้ความรู้ทั้งทางด้านการถ่ายเทความร้อนเพื่อหาการกระจายของอุณหภูมิ และทางด้านกลศาสตร์ของแข็งเพื่อหาหน่วยแรงและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดขึ้น จากงานวิจัยที่ผ่านมา มีทั้งการทำควบคู่กันไปทั้งสองอย่าง และมีทั้งการวิเคราะห์เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงที่เกิดขึ้น ส่วนใหญ่จะไม่นำผลของความเฉื่อย(inertia effect) มาคิด เนื่องจากสมมติว่าการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเป็นไปอย่างช้าๆ ทำให้ผลของความเฉื่อยมีน้อยมาก นอกจากนี้ การวิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงที่เกิดขึ้น ส่วนใหญ่จะแยกคิดเป็นอิสระจากกัน แต่ในบางงานวิจัยก็ได้มีการพิจารณาว่า หน่วยแรงและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ดังนั้น การวิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงที่เกิดขึ้นจะต้องทำไปพร้อมๆ กัน จากงานวิจัยที่ผ่านมา ได้มีการวิเคราะห์หาหน่วยแรงที่เกิดจากการกระจายของอุณหภูมิใน 1 มิติ และ 2 มิติ ดังต่อไปนี้

ในปัญหาหน่วยแรงที่เกิดจากการกระจายอุณหภูมิใน 1 มิติ (r) ในภาวะอยู่ตัวนั้น Jabbari และคณะ (2002) ได้วิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรงของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่มีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี (FGM) ซึ่งที่ผิวอาจมีแรงภายนอกมากระทำหรือไม่มีก็ได้

สำหรับปัญหาหน่วยแรงที่เกิดจากการกระจายอุณหภูมิใน 1 มิติ ในภาวะชั่วครู่นั้น Takeuti และ Tanigawa (1977) ได้วิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรงของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 2 ชนิด แต่ละชนิดเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ และมีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซทรอปิก Chen

และคณะ (1992) ได้วิเคราะห์หาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 3 ชนิด แต่ละชนิดเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ และมีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซทรอปิก ซึ่งในปัญหาดังกล่าวจะมีการพิจารณาว่า อุณหภูมิกับการกระจัดมีผลต่อกันและกัน ดังนั้น การวิเคราะห์หาการกระจัดและการกระจายอุณหภูมิ จะทำไปพร้อมๆ กัน โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซ และใช้อนุกรมฟูเรียร์ประมาณค่าในการแปลงกลับ Wang (1995) ได้ใช้วิธีการแปลงลาปลาซวิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรงของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก มีความร้อนเกิดขึ้นทันทีทันใด ดังนั้น จึงนำผลของความเฉื่อยมาคิดด้วย ซึ่งปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาความเครียดระนาบ Kandil และคณะ (1995) ได้ใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องวิเคราะห์หาคำตอบโดยประมาณของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่เป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ ซึ่งเป็นปัญหาความเครียดระนาบ นอกจากนั้น Jane และ Lee (1999) ได้วิเคราะห์หาคำตอบโดยประมาณของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุหลายชนิดเป็นชั้นๆ โดยมีการพิจารณาว่าอุณหภูมิกับการกระจัดมีผลต่อกันและกัน การวิเคราะห์ใช้วิธีการแปลงลาปลาซและระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง

สำหรับการวิเคราะห์หน่วยแรงที่เกิดจากการกระจายอุณหภูมิใน 2 มิติ ในระนาบตัดตามยาว $(r-z)$ ซึ่งเป็นปัญหาสมมาตรรอบแกน (axisymmetric) นั้น Iyengar และ Chandrashekhara (1966) ได้วิเคราะห์หาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัวของทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก มีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซทรอปิก การวิเคราะห์ใช้วิธีการแก้สมการหาผลเฉลยแม่นตรง Chen และ Chu (1989) ได้วิเคราะห์หาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 2 ชนิด แต่ละชนิดมีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซทรอปิก มีแหล่งความร้อนเคลื่อนที่ตามแนวแกนของทรงกระบอก โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซและใช้อนุกรมฟูเรียร์ประมาณค่าในการแปลงกลับ ต่อมา Chen และ Chu (1990) ได้วิเคราะห์ปัญหาเดิมอีกครั้งหนึ่ง โดยใช้วิธีการแปลงลาปลาซร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และใช้อนุกรมฟูเรียร์ประมาณค่าในการแปลงกลับเช่นเดิม ซึ่งคำตอบที่ได้เป็นคำตอบโดยประมาณ Goshima และ Miyao (1991a) ได้ใช้ฟังก์ชันของกรีนวิเคราะห์หาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 2 ชนิด ภายในทรงกระบอกมีแหล่งกำเนิดความร้อนที่เป็นระนาบและมีค่าเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมีกับเวลา ที่ผิวในมีการพาความร้อนเกิดขึ้น ส่วนที่ผิวนอกมีการหุ้มฉนวน นอกจากปัญหาดังกล่าวแล้ว Goshima และ Miyao (1991b) ยังได้วิเคราะห์ปัญหาคล้ายๆ กันอีก ต่างกันที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุเพียงชนิดเดียว และมีการพาความร้อนเกิดขึ้นทั้งผิวในและผิวนอก Ahmed และ Zeiden (2002) ได้ใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องวิเคราะห์หาคำตอบโดยประมาณของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก มีคุณสมบัติของวัสดุเหมือนกันทุกทิศทางเฉพาะในระนาบหน้าตัดขวางเท่านั้น (Transversely isotropic) และมีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวเป็นการกำหนดการกระจัด โดยปัญหาดังกล่าวจะคำนึงถึงผลของความเฉื่อยด้วย นอกจากนี้ Lee (2003) ได้วิเคราะห์หาคำตอบโดยประมาณของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุหลายชนิดเป็นชั้นๆ ที่ผิวในมีแรงภายนอกที่เปลี่ยนค่าได้ตามเวลามากระทำ ส่วนผิวอื่นๆ ไม่มีแรงมากระทำ ซึ่งปัญหาดังกล่าวได้พิจารณาว่าอุณหภูมิกับการกระจัดมีผลต่อกันและกัน การวิเคราะห์ใช้วิธีการแปลงลาปลาซร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง

สำหรับการวิเคราะห์หน่วยแรงที่เกิดจากการกระจายอุณหภูมิใน 2 มิติ ในระนาบตัดขวาง $(r-\theta)$ นั้น Takeuti และ Tanigawa (1978) ได้วิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรงของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่

ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 2 ชนิด แต่ละชนิดเป็นเนื้อเดียวกันสม่ำเสมอ และมีคุณสมบัติเป็นแบบไอโซทรอปิก ซึ่งปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาความเครียดระนาบ Tarn (2001) ได้วิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรงของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัวของทรงกระบอกกลวงที่มีคุณสมบัติไม่เหมือนกันทุกทิศทาง และเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี (FGM) โดยมีแรงภายนอกแบบต่างๆ มากระทำ ได้แก่ แรงตามแนวแกน แรงบิด แรงเฉือน และแรงดัน นอกจากนี้ Liew และคณะ (2003) ได้วิเคราะห์หาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัวของทรงกระบอกกลวงที่มีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี (FGM) โดยการวิเคราะห์จะแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ แล้วสมมติว่าแต่ละชั้นเป็นเนื้อเดียวกัน แล้วหาคำตอบของแต่ละชั้น และนำผลมารวมกัน เมื่อแบ่งไปถึงอนันต์ ก็จะได้ผลเฉลยแม่นตรง

บทที่ 3

การวิเคราะห์การนำความร้อน

3.1 บทนำ

การแก้ปัญหาของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและหน่วยแรงภายในวัตถุเนื่องจากอุณหภูมิ ประกอบไปด้วยสองส่วนหลักๆ คือ การแก้ปัญหาของการนำความร้อนเพื่อหาการกระจายของอุณหภูมิ และการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็ง เพื่อหาหน่วยแรงภายในและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดขึ้น

จุดประสงค์หลักของวิทยานิพนธ์นี้ก็คือ การวิเคราะห์หาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ ในทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก ประกอบด้วยวัสดุเป็นชั้นๆ โดยมีการนำความร้อนเกิดขึ้นเฉพาะในระนาบตัดขวาง ซึ่งการที่จะวิเคราะห์หาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิได้นั้น จะต้องทราบการกระจายของอุณหภูมิก่อน เพื่อนำไปวิเคราะห์หาหน่วยแรงที่เกิดขึ้นต่อไป ในบทนี้ จะกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานของการนำความร้อนเพื่อใช้วิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิ อันประกอบไปด้วยกฎการนำความร้อนของฟูเรียร์ สมการการนำความร้อน รวมถึงเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ โดยจะเริ่มอธิบายในระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinates) ก่อนเพื่อให้สามารถเข้าใจได้ง่าย จากนั้น จึงจะอธิบายในระบบพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinates) อันเป็นระบบที่สอดคล้องกับปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้ สุดท้าย จึงจะอธิบายถึงรายละเอียดเกี่ยวกับวิธีการและขั้นตอนในการวิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิ ส่วนทฤษฎีทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง และวิธีการวิเคราะห์หาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ จะอธิบายต่อไปในบทที่ 4

3.2 ทฤษฎีพื้นฐานของการนำความร้อน

การนำความร้อน (heat conduction) คือ การที่ความร้อนถ่ายเทจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำภายในตัวกลางเดียวกัน หรือเป็นการถ่ายเทความร้อนระหว่างตัวกลางที่ติดกันแต่มีอุณหภูมิต่างกัน ซึ่งความร้อนจะถ่ายเทผ่านโมเลกุลของสารโดยที่โมเลกุลไม่เคลื่อนที่ การนำความร้อนจะเกิดขึ้นได้ดีในตัวกลางที่เป็นของแข็ง และจะเกิดขึ้นได้บ้างในตัวกลางที่เป็นของเหลวและก๊าซ ในปัญหาของการนำความร้อนนี้ จะมีสมการที่สำคัญอยู่ 2 สมการ คือ สมการของฟูเรียร์หรือกฎของฟูเรียร์ (Fourier 's law) และสมการการนำความร้อน (heat conduction equation) การวิเคราะห์หาการกระจายของอุณหภูมินั้น สามารถทำได้โดยการแก้สมการการนำความร้อน ร่วมกับการพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งเมื่อรู้อุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆ แล้ว ก็จะสามารถหาค่าอัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำที่ตำแหน่งใดๆ ได้ โดยใช้กฎของฟูเรียร์

เมื่อมีความร้อนที่ไม่สม่ำเสมอเกิดขึ้นภายในวัตถุ จะมีการถ่ายเทความร้อนจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำ ความสัมพันธ์ระหว่างการถ่ายเทความร้อน (heat flow) กับอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิต่อระยะทางหรือความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) จะเป็นไปตามกฎการนำความร้อนของฟูเรียร์ (Fourier 's law) กล่าวคือ อัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำต่อหน่วยพื้นที่ หรือฟลักซ์ความร้อน (heat flux) แปรผันโดยตรงกับค่าการนำความร้อน และอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิต่อระยะทาง สำหรับวัตถุ

ที่เป็นเนื้อเดียว (homogeneous) และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง หรือ ไอโซทรอปิก (isotropic) จะได้กฎของฟูเรียร์ ดังนี้ (Ozisik,1993)

$$q_n = -k\frac{dT}{dn} \tag{3.1}$$

สมการที่ (3.1) นี้ เรียกว่า กฎของฟูเรียร์ โดยที่ q_n คือ ฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง n มีหน่วยเป็น W/m^2, k คือ ค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) ของวัสดุ มีหน่วยเป็น W/m$^\circ$C และ dT/dn เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิต่อระยะทางในทิศทาง n มีหน่วยเป็น $^\circ$C/m ทั้งนี้ เครื่องหมายลบแสดงว่าความร้อนจะเคลื่อนที่ไปในทิศทางที่อุณหภูมิต่ำกว่าเสมอ

อัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำต่อหน่วยพื้นที่หรือฟลักซ์ความร้อนนั้น เป็นปริมาณเวคเตอร์ที่มีทั้งขนาดและทิศทาง ในระบบพิกัดฉาก ฟลักซ์ความร้อนที่จุดใดๆ มีค่าเท่ากับผลรวมแบบเวคเตอร์ของฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง x, y และ z ที่จุดนั้น ดังนี้

$$q = q_x\hat{i} + q_y\hat{j} + q_z\hat{k} \tag{3.2}$$

โดยที่ $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ

สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติไม่เหมือนกันในแต่ละทิศทาง หรือ แอไนโซทรอปิก (anisotropic) ซึ่งมีค่าการนำความร้อนในแต่ละทิศทางไม่เท่ากัน จะได้ฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง x, y และ z ดังนี้ (Ozisik,1993)

$$-q_x = k_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z} \tag{3.3ก}$$

$$-q_y = k_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{23}\frac{\partial T}{\partial z} \tag{3.3ข}$$

$$-q_z = k_{31}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{32}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{33}\frac{\partial T}{\partial z} \tag{3.3ค}$$

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$-\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \\ \partial T/\partial z \end{Bmatrix}$$

โดยค่าการนำความร้อน (k_{ij}) ทั้ง 9 ตัวในสมการดังกล่าวนี้ เรียกว่า ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (conductivity coefficients)

เมื่อวัสดุมีคุณสมบัติเป็นแบบออโธทรอปิก(orthotropic) ค่า k_{ij} จะเท่ากับศูนย์เมื่อ $i \neq j$ โดยที่ $k_{11} = k_x$, $k_{22} = k_y$ และ $k_{33} = k_z$ ซึ่งเป็นค่าการนำความร้อนในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ ดังนั้น จะได้

$$q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \;\; , \;\; q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \;\; \text{และ} \;\; q_z = -k_z \frac{\partial T}{\partial z} \tag{3.4}$$

สมการที่ (3.3) และ (3.4) นี้ เป็นกฎการนำความร้อนของฟูเรียร์ ใช้สำหรับหาฟลักซ์ความร้อนหลังจากที่ทราบการกระจายอุณหภูมิแล้ว ส่วนสมการการนำความร้อนที่ใช้สำหรับหาการกระจายอุณหภูมินั้น สามารถพิสูจน์ได้จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน (energy conservative law) ดังต่อไปนี้

จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน เมื่อพิจารณาอัตราการสะสมความร้อน อัตราการผลิตความร้อนภายในวัตถุ และอัตราการเคลื่อนที่ของความร้อนเข้าและออกจากวัตถุก้อนเล็กๆ ในทุกทิศทาง จะได้สมการที่อยู่ในรูป (Ozisik,1993)

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.5}$$

หรือ

$$-\nabla \cdot q + g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.5-1}$$

โดยที่ $\nabla \cdot q = \dfrac{\partial q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial q_y}{\partial y} + \dfrac{\partial q_z}{\partial z}$

เมื่อ g คือ อัตราการผลิตความร้อนต่อหน่วยปริมาตรภายในวัตถุ (W/m^3)

ρ คือ ความหนาแน่นของวัตถุ (kg/m^3)

c คือ ความร้อนจำเพาะของวัตถุ (J/kg $^\circ$C)

t คือ เวลา (วินาที)

เมื่อแทนค่าฟลักซ์ความร้อนเข้าไปในสมการที่ (3.5) จะทำให้สมการดังกล่าวอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ของอุณหภูมิ ซึ่งเรียกว่า สมการการนำความร้อน (heat conduction equation) ดังนั้น สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติเป็นแบบออโธทรอปิก เมื่อแทนค่าฟลักซ์ความร้อนในสมการที่ (3.4) ลงในสมการที่ (3.5) จะได้สมการการนำความร้อนในระบบพิกัดฉาก ดังนี้

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.6}$$

เมื่อ k_x , k_y และ k_z คือ ค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) ในทิศทาง x , y และ z ของวัสดุ ตามลำดับ

ในกรณีที่ไม่มีแหล่งพลังงานความร้อนภายในตัวกลาง จะเขียนสมการที่ (3.6) ได้เป็น

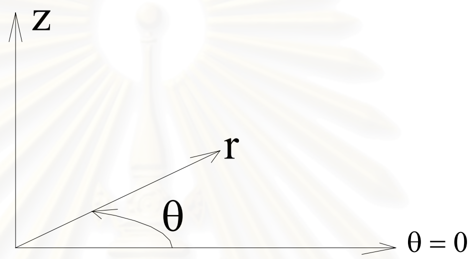
$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.7}$$

สมการที่ (3.6) และ (3.7) นี้ เป็นสมการการนำความร้อนในระบบพิกัดฉากของวัสดุที่มีคุณสมบัติเป็นแบบออโธทรอปิก ซึ่งเมื่อทำการแก้สมการร่วมกับการพิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขตแล้ว ก็จะ

สามารถหาคำตอบของการกระจายอุณหภูมิได้ ต่อไป จะกล่าวถึงทฤษฎีของการนำความร้อนในระบบพิกัดทรงกระบอก อันเป็นระบบที่จะนำมาใช้แก้ปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้

3.3 สมการการนำความร้อนในระบบพิกัดทรงกระบอก

เมื่อต้องการคำนวณการนำความร้อนในวัตถุที่มีรูปร่างเป็นทรงกระบอกกลม อย่างเช่นปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้ เราจะใช้ระบบพิกัดที่มีความเหมาะสมสำหรับวัตถุที่มีรูปร่างดังกล่าว นั่นคือ ระบบพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate system) โดยมีระบบแกนที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันในทิศทางรัศมี (r) ทิศทางเส้นรอบวง (θ) และทิศทางตามแนวแกน (z) ดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ระบบพิกัดทรงกระบอก

ในระบบพิกัดทรงกระบอก ฟลักซ์ความร้อนที่จุดใดๆ มีค่าเท่ากับ ผลรวมแบบเวคเตอร์ของฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง r ,θ และ z ที่จุดนั้น ดังนี้

$$q = q_r \hat{e}_r + q_\theta \hat{e}_\theta + q_z \hat{e}_z \tag{3.8}$$

โดยที่ $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ และ $\hat{e}_z$ คือ เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง r ,θ และ z ตามลำดับ

เมื่อวัสดุมีคุณสมบัติเป็นแบบออโธทรอปิก (orthotropic) จะได้ฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง r ,θ และ z เป็นดังนี้ (Ozisik,1993)

$$q_r = -k_r \frac{\partial T}{\partial r} \ , \ q_\theta = -\frac{k_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \ \text{และ} \ q_z = -k_z \frac{\partial T}{\partial z} \tag{3.9}$$

สำหรับสมการการนำความร้อนในพิกัดทรงกระบอก ก็จะสามารถพิสูจน์ได้จากกฎการอนุรักษ์พลังงานเช่นเดียวกับระบบพิกัดฉาก ซึ่งจากกฎการอนุรักษ์พลังงาน จะได้สมการที่อยู่ในรูป (Ozisik,1993)

$$-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rq_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.10}$$

หรือ

$$-\nabla \cdot q + g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.10-1}$$

เมื่อ $\nabla \cdot q = \frac{1}{r}\frac{\partial (rq_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$

สำหรับวัสดุที่เป็นแบบออโธทรอปิก เมื่อแทนค่าฟลักซ์ความร้อนในสมการที่ (3.9) ลงในสมการที่ (3.10) ก็จะได้สมการการนำความร้อนในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังนี้

$$\frac{k_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{k_\theta}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + k_z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + g = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.11}$$

เมื่อ k_r, k_θ และ k_z คือ ค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) ในทิศทาง r, θ และ z ของวัสดุตามลำดับ

ในกรณีที่ไม่มีแหล่งพลังงานความร้อนภายในตัวกลาง จะเขียนสมการที่ (3.11) ได้เป็น

$$\frac{k_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{k_\theta}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + k_z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.12}$$

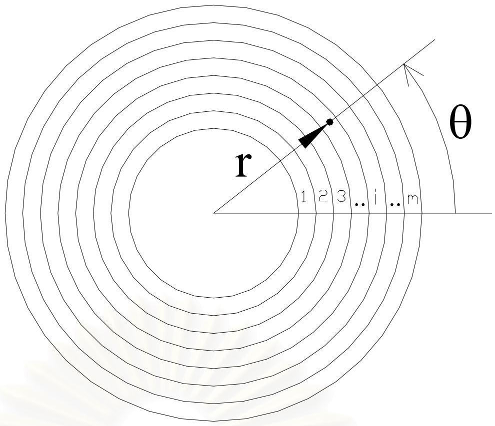
สมการที่ (3.11) และ (3.12) นี้ เป็นสมการการนำความร้อนใน 3 มิติ ในระบบพิกัดทรงกระบอก ของวัสดุที่มีคุณสมบัติเป็นแบบออโธทรอปิก ซึ่งเมื่อทำการแก้สมการร่วมกับการพิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตแล้ว ก็จะสามารถหาคำตอบของการกระจายอุณหภูมิได้ ต่อไป จะกล่าวถึงการนำความร้อนใน 2 มิติ ในระนาบตัดขวาง ซึ่งสอดคล้องกับปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้

3.4 สมการการนำความร้อนในระนาบตัดขวาง

เมื่อพิจารณาที่หน้าตัดใดหน้าตัดหนึ่งของทรงกระบอกที่ยาวมาก หรือ ทรงกระบอกที่มีความยาวจำกัด แต่มีการหุ้มฉนวนที่ปลายทั้งสองข้าง หากมีความร้อนเกิดขึ้นคงที่ตลอดความยาวแล้ว จะทำให้เกิดการนำความร้อนเฉพาะในระนาบตัดขวาง $(r-\theta)$ เท่านั้น และการกระจายของอุณหภูมิจะไม่ขึ้นกับระยะตามแนวความยาว (z) ดังนั้น จะได้สมการการนำความร้อนในระบบพิกัดทรงกระบอกแบบออโธทรอปิก ดังนี้

$$\frac{k_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + k_\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.13}$$

เนื่องจากปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้ เป็นทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก และมีความร้อนเกิดขึ้นคงที่ตลอดความยาว แต่เปลี่ยนแปลงตามทิศทางเส้นรอบวง (θ) ดังนั้น จะเป็นปัญหาการนำความร้อนใน 2 มิติ ในระนาบตัดขวาง $(r-\theta)$ โดยระนาบของการนำความร้อน แสดงได้ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ระนาบตัดขวางของทรงกระบอก $(r-\theta)$

ในการแก้ปัญหาการนำความร้อน จะต้องทราบเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้น โดยเงื่อนไขขอบเขตจะเป็นการกำหนดอุณหภูมิหรือฟลักซ์ความร้อนที่ผิว หรือมีการพาความร้อนเกิดขึ้นที่ผิว ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้น จะเป็นการกำหนดอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆ ในขณะที่เริ่มพิจารณา (t=0) ซึ่งเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นของการนำความร้อนในระนาบ $r-\theta$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก มีดังนี้

1) เงื่อนไขขอบเขตแบบที่หนึ่ง คือ กรณีที่รู้ค่าอุณหภูมิที่ผิวของวัตถุ (boundary surface) ดังนี้

$$T_s = T_1(r,\theta,t) \qquad \text{ที่ผิว } S_1 \qquad (3.14\text{ก})$$

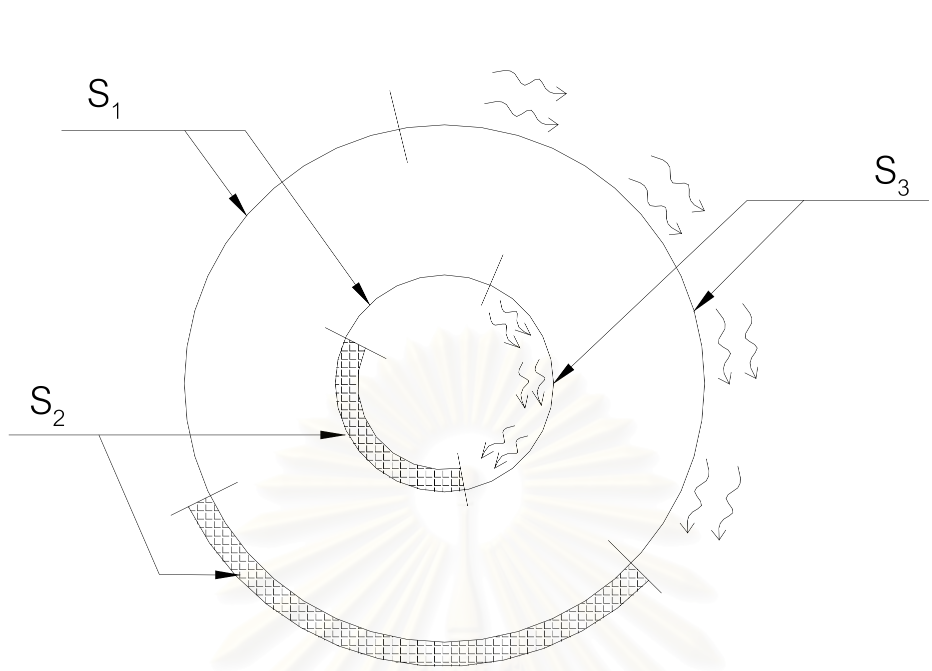
2) เงื่อนไขขอบเขตแบบที่สอง เป็นกรณีที่รู้อัตราการนำความร้อนต่อหน่วยพื้นที่ หรือฟลักซ์ความร้อน ที่ผิวของวัตถุ ดังนี้

$$q_r n_r + q_\theta n_\theta = -q_s \qquad \text{ที่ผิว } S_2 \qquad (3.14\text{ข})$$

3) เงื่อนไขขอบเขตแบบที่สาม เป็นกรณีที่มีการถ่ายเทความร้อนโดยการพาความร้อน (convection) ที่ผิวไปสู่ตัวกลางที่รู้อุณหภูมิ ดังนี้

$$q_r n_r + q_\theta n_\theta = h(T_s - T_\infty) \qquad \text{ที่ผิว } S_3 \qquad (3.14\text{ค})$$

โดยที่ q_s คือฟลักซ์ความร้อนที่พุ่งเข้าสู่วัตถุ (กำหนดให้เป็นค่าบวก) n_r, n_θ คือ โคไซน์ทิศทางของเวคเตอร์ $\hat{n}$ ซึ่งมีทิศทางพุ่งออกจากผิวของวัตถุและตั้งฉากกับผิวนั้น h คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน (convective heat transfer coefficient) มีหน่วยเป็น W/m^2 $^\circ$C, T_s คืออุณหภูมิที่ผิว และ T_∞ คือ อุณหภูมิของอากาศรอบๆ ผิว ทั้งนี้ เงื่อนไขขอบเขตอาจจะประกอบด้วยแบบใดแบบหนึ่งเพียงอย่างเดียว หรืออาจจะประกอบด้วยหลายแบบรวมกันก็ได้ ลักษณะของเงื่อนไขขอบเขตแสดงได้ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 เงื่อนไขขอบเขตของอุณหภูมิ

ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้น จะเป็นฟังก์ชันของการกระจายอุณหภูมิตลอดทั้งเนื้อวัตถุ ดังนี้

$$T(r,\theta,0) = T_0(r,\theta) \tag{3.15}$$

3.5 การวิเคราะห์การนำความร้อน

การวิเคราะห์หาการกระจายของอุณหภูมิ สามารถทำได้โดยการแก้สมการการนำความร้อนร่วมกับการพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งหลังจากที่หาอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆ ได้แล้ว ก็จะสามารถหาค่าอัตราการถ่ายเทความร้อนที่ตำแหน่งใดๆ ได้ โดยใช้สมการของฟูเรียร์ ในวิทยานิพนธ์นี้ จะทำการวิเคราะห์หาคำตอบโดยประมาณของการกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอก โดยเริ่มจากการแปลงสมการการนำความร้อนให้อยู่ในรูปแบบอ่อน (weak form) โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residuals) ของกาเลอร์คิน (Galerkin) จากนั้น จึงทำการสมมติคำตอบของการกระจายอุณหภูมิขึ้น แล้วนำไปแทนในสมการการนำความร้อนรูปแบบอ่อนดังกล่าว จะทำให้เกิดระบบสมการขึ้น และเมื่อทำการแก้สมการ ก็จะได้คำตอบของการกระจายอุณหภูมิ ซึ่งรายละเอียดของขั้นตอนต่างๆ มีดังนี้

3.5.1 สมการรูปแบบอ่อน

สมการการนำความร้อนที่ (3.13) จะสามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบอ่อนได้ โดยเริ่มจากสมมติให้

$$R = \frac{k_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + k_\theta \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.16}$$

เราเรียก R ว่าเศษตกค้าง ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากการสมมติคำตอบโดยประมาณขึ้นแล้วนำมาแทนในสมการการนำความร้อน ทำให้เศษตกค้างไม่เท่ากับศูนย์ ในวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง(weighted residual) นั้น จะทำการคูณเศษตกค้างด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W จากนั้นอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมน แล้วกำหนดค่าที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ เพื่อให้เศษตกค้างมีค่าต่ำที่สุด นั่นคือ

$$\int_{\Omega}\left(R(r,\theta,t)W\right)d\Omega = 0 \tag{3.17}$$

แทนค่า R จากสมการที่ (3.16) ลงในสมการที่ (3.17) จะได้

$$\int_{\Omega} W\left(\frac{k_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + k_\theta \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \rho c\frac{\partial T}{\partial t}\right)d\Omega = 0 \tag{3.18}$$

หรืออาจเขียนได้เป็น

$$\int_{\Omega} W\left(\nabla\cdot q + \rho c\frac{\partial T}{\partial t}\right)d\Omega = 0 \tag{3.19}$$

โดยที่ $\nabla\cdot q = \frac{1}{r}\frac{\partial(rq_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta}$

$$q = -(k_r\frac{\partial T}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{k_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{e}_\theta)$$

$$q_r = -k_r\frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q_\theta = -\frac{k_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ คือ เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง r และ θ ตามลำดับ

จากสมการที่ (3.19) อินทิเกรตกระจายเข้าไปในแต่ละเทอม จะได้

$$\int_{\Omega} W(\nabla\cdot q)d\Omega + \int_{\Omega} W\rho c\frac{\partial T}{\partial t}d\Omega = 0 \tag{3.20}$$

ทำการอินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts) ในพจน์แรกของสมการที่ (3.20) ซึ่งในปัญหา 2 มิติ จะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss 's theorem) จะได้ (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2542)

$$\int_{\Gamma} W(q\cdot\hat{n})d\Gamma - \int_{\Omega}(\nabla W\cdot q)d\Omega + \int_{\Omega} W\rho c\frac{\partial T}{\partial t}d\Omega = 0 \tag{3.21}$$

เมื่อ $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{e}_\theta$

$\hat{n} = n_r\hat{e}_r + n_\theta \hat{e}_\theta$ ซึ่ง n_r และ n_θ เป็นโคไซน์ทิศทาง (direction cosine) ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ซึ่งตั้งฉากกับผิว

เมื่อแทนค่าต่างๆ ลงในสมการที่ (3.21) จะได้

$$-\int_\Gamma W\left(k_r\frac{\partial T}{\partial r}n_r + \frac{k_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}n_\theta\right)d\Gamma + \int_\Omega\left(k_r\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{k_\theta}{r^2}\frac{\partial W}{\partial \theta}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)d\Omega + \int_\Omega W\rho c\frac{\partial T}{\partial t}d\Omega = 0 \quad (3.22)$$

เนื่องจาก $\hat{n}$ เป็นเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิว และในปัญหานี้ การนำความร้อนอยู่ในระนาบของหน้าตัดที่เป็นวงกลมดังรูปที่ 3.2 ดังนั้น ที่ผิวในจะได้ n_r = -1, $n_\theta = 0$ ส่วนที่ผิวนอกจะได้ n_r = 1, $n_\theta = 0$ ดังนั้น สมการที่ (3.22) จะกลายเป็น

$$\int_{\Gamma_{in}} W\left(k_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)d\Gamma - \int_{\Gamma_{out}} W\left(k_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)d\Gamma + \int_\Omega\left(k_r\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{k_\theta}{r^2}\frac{\partial W}{\partial \theta}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)d\Omega + \int_\Omega W\rho c\frac{\partial T}{\partial t}d\Omega = 0 \quad (3.23)$$

ค่า $k_r\frac{\partial T}{\partial r}$ ในสองเทอมแรกของสมการที่ (3.23) นี้ คือค่าฟลักซ์ความร้อนที่ไหลเข้า-ออก บริเวณผิวในทิศทางรัศมี ดังนั้น จึงเป็นค่าเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งเราจะย้ายเทอมที่เป็นเงื่อนไขขอบเขต มาอยู่ด้านขวาของสมการ ดังนี้

$$\int_\Omega\left(k_r\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{k_\theta}{r^2}\frac{\partial W}{\partial \theta}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)d\Omega + \int_\Omega W\rho c\frac{\partial T}{\partial t}d\Omega = \int_{\Gamma_{out}} W\left(k_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)d\Gamma - \int_{\Gamma_{in}} W\left(k_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)d\Gamma \quad (3.24)$$

โดยค่าฟลักซ์ความร้อนดังกล่าว อาจเป็นฟลักซ์ความร้อนที่ไหลเข้าที่ผิวโดยตรง หรืออาจเป็นฟลักซ์ความร้อนที่เกิดจากการพาความร้อนเนื่องจากความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิที่ผิวกับอุณหภูมิของอากาศรอบๆ ผิวก็ได้

สำหรับฟลักซ์ความร้อนเนื่องจากการพาความร้อนนั้น หากพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตแบบที่ 3 ในสมการที่ (3.14ค) โดยที่ n_r = -1 ที่ผิวใน และ n_r = 1 ที่ผิวนอก ส่วน n_θ = 0 ทั้งผิวนอกและผิวใน และเมื่อ $q_r = -k_r\frac{\partial T}{\partial r}$ ดังนั้น

$$\int_{\Gamma_{out}} W\left(k_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)d\Gamma - \int_{\Gamma_{in}} W\left(k_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)d\Gamma = \int_{\Gamma_{out}} WhT_\infty d\Gamma - \int_{\Gamma_{out}} WhT_s d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} WhT_\infty d\Gamma - \int_{\Gamma_{in}} WhT_s d\Gamma \quad (3.25)$$

เมื่อแทนสมการที่ (3.25) ลงในสมการที่ (3.24) ก็จะได้สมการการนำความร้อนในรูปแบบอ่อน ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(k_r\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{k_\theta}{r^2}\frac{\partial W}{\partial \theta}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)d\Omega+\int_{\Gamma_{out}} WhT_s d\Gamma+\int_{\Gamma_{in}} WhT_s d\Gamma+\int_{\Omega} W\rho c\frac{\partial T}{\partial t}d\Omega \\
&=\int_{\Gamma_{out}} Wq_r d\Gamma+\int_{\Gamma_{out}} WhT_\infty d\Gamma-\int_{\Gamma_{in}} Wq_r d\Gamma+\int_{\Gamma_{in}} WhT_\infty d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.26}$$

โดยที่ q_r เป็นฟลักซ์ที่ไหลเข้าโดยตรงในทิศทางรัศมี เนื่องจากมีความร้อนกระทำจากภายนอก

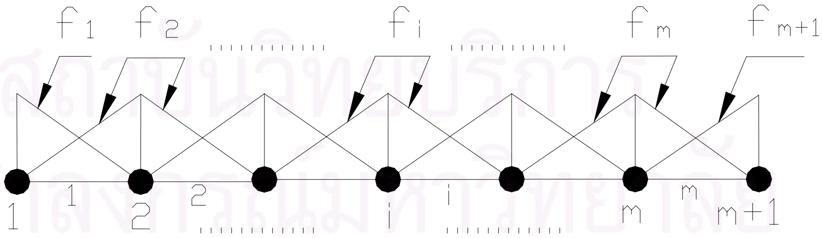
เมื่อได้สมการการนำความร้อนที่อยู่ในรูปแบบอ่อนดังสมการที่ (3.26) ตามที่ต้องการแล้ว ในขั้นตอนต่อไป จะทำการสมมติคำตอบโดยประมาณเพื่อนำไปแทนในสมการดังกล่าว ซึ่งจะทำให้เกิดเป็นระบบสมการขึ้น ดังจะอธิบายในหัวข้อต่อไป

3.5.2 แบบจำลองแยกชั้น

การวิเคราะห์หาค่าการกระจายอุณหภูมิภายในทรงกระบอกกลวงในงานวิจัยนี้ จะอาศัยหลักการของทฤษฎีตามชั้น (layerwise theory) ซึ่งจะทำการแบ่งทรงกระบอกในทิศทางรัศมีออกเป็นชั้นๆ โดยในแต่ละชั้น จะสมมติการกระจายของอุณหภูมิในทิศทางรัศมีเป็นแบบเส้นตรง นั่นคือ ใช้ฟังก์ชันการประมาณหรือฟังก์ชันสัณฐาน (shape function) แบบลากรางจ์เชิงเส้น ส่วนการกระจายของอุณหภูมิในทิศทางเส้นรอบวงนั้น จะสมมติเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ ดังนี้

$$T(r,\theta,t)=\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{l=1}^{n} f_k(r)\left(a_{0k}(t)+a_{lk}(t)\cos(l\theta)+b_{lk}(t)\sin(l\theta)\right) \tag{3.27}$$

โดยที่ $f_k(r)$ เป็นฟังก์ชันสัณฐานแบบลากรางจ์เชิงเส้น ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ฟังก์ชันสัณฐานแบบลากรางจ์เชิงเส้นในทิศทางรัศมี

ซึ่งมีค่าดังต่อไปนี้

$$f_1=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{r_2-r}{r_2-r_1} & ; r_1\le r\le r_2 \\ 0 & ; r_2\le r\le r_{m+1} \end{array}\right\}$$

$$f_{m+1} = \begin{cases} 0 & ; r_1 \le r \le r_m \\ \dfrac{r - r_m}{r_{m+1} - r_m} & ; r_m \le r \le r_{m+1} \end{cases}$$

$$f_i = \begin{cases} 0 & ; \ r_1 \le r \le r_{i-1} \\ \dfrac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} & ; \ r_{i-1} \le r \le r_i \\ \dfrac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i} & ; \ r_i \le r \le r_{i+1} \\ 0 & ; \ r_{i+1} \le r \le r_{m+1} \end{cases} \quad i = 2,3,4,...,m \tag{3.28}$$

เราสามารถเขียนสมการที่ (3.27) ให้อยู่ในรูปอนุกรมของค่าคงที่คูณกับฟังก์ชันสัณฐาน (shape function / N) ได้ดังนี้

$$T = \sum_{j=1}^{p} T_j(t) N_j(r,\theta) \tag{3.29}$$

หรืออาจเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$T = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad .... \quad N_p \rfloor \lfloor T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad .... \quad T_p \rfloor^T = \lfloor N \rfloor \{T\} \tag{3.29-1}$$

เมื่อ

$$N = \lfloor f_1 \quad f_1\cos\theta \quad f_1\sin\theta \quad f_1\cos 2\theta \quad f_1\sin 2\theta \quad ..... \quad f_1\cos n\theta \quad f_1\sin n\theta \quad .....$$

$$f_{m+1} \quad f_{m+1}\cos\theta \quad f_{m+1}\sin\theta \quad ...... \quad f_{m+1}\cos n\theta \quad f_{m+1}\sin n\theta \rfloor$$

$$= \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad .... \quad N_p \rfloor \tag{3.30}$$

โดยที่ $p = (m+1)(2n+1)$ และ $\{T\}$ เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่
ดังนั้น

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial N_j}{\partial r} T_j = \frac{\partial \lfloor N \rfloor}{\partial r}\{T\} \tag{3.31ก}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} T_j = \frac{\partial \lfloor N \rfloor}{\partial \theta}\{T\} \tag{3.31ข}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{j=1}^{p} N_j \frac{\partial T_j}{\partial t} = \lfloor N \rfloor \frac{\partial \{T\}}{\partial t} \tag{3.31ค}$$

ในวิธีของกาเลอร์คิน จะกำหนดฟังก์ชันสัณฐาน (shape function) ให้เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก นั่นคือ $W = N$ ดังนั้น จะเขียนสมการที่ (3.26) ในรูปเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$\int_{\Omega}\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_2}{\partial \theta} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_p}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_p}{\partial \theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial N_p}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial N_1}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\frac{\partial N_2}{\partial \theta} & \cdots & \frac{1}{r}\frac{\partial N_p}{\partial \theta} \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_p \end{Bmatrix}$$

$$+\int_{\Gamma_{out}} h \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_p \end{Bmatrix} \lfloor N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_p \rfloor d\Gamma \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_p \end{Bmatrix} + \int_{\Gamma_{in}} h \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_p \end{Bmatrix} \lfloor N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_p \rfloor d\Gamma \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_p \end{Bmatrix}$$

$$+\int_{\Omega} \rho c \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_p \end{Bmatrix} \lfloor N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_p \rfloor d\Omega \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \vdots \\ \dot{T}_p \end{Bmatrix}$$

$$= \int_{\Gamma_{out}} q_r \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_p \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{out}} hT_\infty \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_p \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma_{in}} q_r \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_p \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} hT_\infty \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_p \end{Bmatrix} d\Gamma$$

ซึ่งเขียนสั้นๆ ได้เป็น

$$\int_{\Omega} [B]^T [k][B] d\Omega \{T\} + \int_{\Gamma_{out}} h \lfloor N \rfloor^T \lfloor N \rfloor d\Gamma \{T\} + \int_{\Gamma_{in}} h \lfloor N \rfloor^T \lfloor N \rfloor d\Gamma \{T\}$$

$$+\int_{\Omega} \rho c \lfloor N \rfloor^T \lfloor N \rfloor d\Omega \{\dot{T}\}$$

$$= \int_{\Gamma_{out}} \lfloor N \rfloor^T q_r d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} hT_\infty \lfloor N \rfloor^T d\Gamma - \int_{\Gamma_{out}} \lfloor N \rfloor^T q_r d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} hT_\infty \lfloor N \rfloor^T d\Gamma \tag{3.32}$$

โดยที่ $$[B]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & \dfrac{\partial N_3}{\partial r} & .... & \dfrac{\partial N_p}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_1}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_2}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_3}{\partial \theta} & .... & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_p}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$[k]=\begin{bmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix}$$

สุดท้าย จะได้ระบบสมการในรูป

$$[C]\{\dot{T}\}+\left([K_c]+[K_h]\right)\{T\}=\{Q_q\}+\{Q_h\}$$

หรือ $$[C]\{\dot{T}\}+[K]\{T\}=\{Q\} \tag{3.33}$$

โดยที่ $$[C]=\int_\Omega \rho c\lfloor N\rfloor^T\lfloor N\rfloor d\Omega$$

$$[K]=[K_c]+[K_h]$$

$$[Q]=\left[Q_q\right]+[Q_h]$$

ซึ่ง $$[K_c]=\int_\Omega [B]^T[k][B]d\Omega$$

$$[K_h]=\int_{\Gamma_{out}} h\lfloor N\rfloor^T\lfloor N\rfloor d\Gamma+\int_{\Gamma_{in}} h\lfloor N\rfloor^T\lfloor N\rfloor d\Gamma$$

$$\{Q_q\}=\int_{\Gamma_{out}} \lfloor N\rfloor^T q_r d\Gamma-\int_{\Gamma_{in}} \lfloor N\rfloor^T q_r d\Gamma$$

$$\{Q_h\}=\int_{\Gamma_{out}} hT_\infty\lfloor N\rfloor^T d\Gamma+\int_{\Gamma_{in}} hT_\infty\lfloor N\rfloor^T d\Gamma$$

สมการที่ (3.33) นี้ จะมีตัวแปรของเวลาเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งการวิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ นั้น สามารถทำได้โดยใช้วิธีการประมาณที่เรียกว่า วิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) รายละเอียดจะกล่าวไว้ในภาคผนวก

เมื่อทำการแก้สมการที่ (3.33) แล้ว ก็จะสามารถรู้คำตอบของการกระจายอุณหภูมิภายในทรงกระบอกได้ และต่อจากนี้ จะนำคำตอบของการกระจายอุณหภูมิไปวิเคราะห์หาหน่วยแรงและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากอุณหภูมิต่อไป โดยมีรายละเอียดดังแสดงในบทที่ 4

บทที่ 4

การหาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ

4.1 บทนำ

ในวิทยานิพนธ์นี้ จะวิเคราะห์หาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก ประกอบด้วยวัสดุเป็นชั้นๆ โดยมีการนำความร้อนเกิดขึ้นเฉพาะในระนาบตัดขวาง $(r-\theta)$ เท่านั้น ซึ่งเป็นปัญหาในสภาวะความเครียดระนาบ (plane strain)

หลังจากที่ได้วิเคราะห์หาการกระจายของอุณหภูมิตามวิธีการที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 3 แล้ว ก็จะสามารถวิเคราะห์หาหน่วยแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากอุณหภูมิดังกล่าวได้ ในบทนี้ จะกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานทางด้านกลศาสตร์ของแข็งในระบบพิกัดทรงกระบอก อันประกอบไปด้วยสมการควบคุม (governing equation) และเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ ของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ จากนั้น จะอธิบายถึงวิธีการและขั้นตอนในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิต่อไป

4.2 สมการควบคุมในระบบพิกัดทรงกระบอก

สมการควบคุม (governing equation) ที่ใช้สำหรับอธิบายถึงพฤติกรรมทางกลของวัตถุ ประกอบด้วยสมการสมดุลของของแข็ง สมการความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง – ความเครียด – อุณหภูมิ ในของแข็ง และสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด ดังต่อไปนี้

4.2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง-ความเครียด-อุณหภูมิ

หน่วยแรงและความเครียดภายในวัตถุ จะเกิดขึ้นได้เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำ เช่น แรงดัน แรงดึง แรงบิด เป็นต้น นอกจากนี้ อาจเกิดขึ้นได้เนื่องจากแรงวัตถุ (body force) แต่บางครั้ง อาจมีความเครียดชั้นต้น (prestrain) เกิดขึ้นอยู่ก่อน ทั้งที่ยังไม่มีแรงมากระทำ โดยความเครียดชั้นต้นนี้ อาจเกิดได้จากหลายสาเหตุ ซึ่งสาเหตุที่สำคัญอย่างหนึ่งก็คือ การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในวัตถุ หรืออุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆ ภายในวัตถุ มีค่าไม่เท่ากัน

โดยทั่วไป สสารจะเกิดการขยายตัวเมื่อมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น และจะหดตัวเมื่ออุณหภูมิลดลง ซึ่งการขยายตัวและหดตัวนี้ จะเป็นสัดส่วนกับอุณหภูมิที่เปลี่ยนไป และหากสัดส่วนดังกล่าวเป็นแบบเส้นตรงแล้ว เมื่อพิจารณาแท่งวัตถุแท่งหนึ่งที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนไปอย่างสม่ำเสมอ จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างการขยายตัว-หดตัว กับอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปของแท่งวัตถุดังกล่าว ได้ดังนี้

$$\Delta L = \alpha L \Delta T \qquad (4.1)$$

เมื่อ ΔL คือ ความยาวของแท่งวัตถุที่เปลี่ยนไป (m)

L คือ ความยาวเดิมของแท่งวัตถุ (m)

α คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ(coefficient of thermal expansion) มีหน่วยเป็น 1/ $^{\circ}$C

ΔT คือ อุณหภูมิที่เปลี่ยนไป ($^{\circ}$C)

เมื่อวัตถุที่เป็นเนื้อเดียว(homogeneous) มีอุณหภูมิเปลี่ยนไปอย่างสม่ำเสมอทั่วทั้งก้อน และสามารถขยายตัวหรือหดตัวได้อย่างอิสระ จะไม่เกิดหน่วยแรงหรือความเค้น (stress) ขึ้นภายในวัตถุ แต่หากมีการยึดรั้งไว้ไม่ให้วัตถุขยายตัวหรือหดตัวได้อย่างอิสระ หรือแม้ว่าไม่มีการยึดรั้ง แต่ถ้าอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปเกิดขึ้นไม่สม่ำเสมอทั่วทั้งก้อน ก็จะเกิดหน่วยแรงขึ้นได้ และหน่วยแรงที่เกิดขึ้นนี้จะเรียกว่า หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ (thermal stress) นอกจากนี้ ในโครงสร้างที่ประกอบด้วยวัสดุหลายชนิด แม้ว่าจะปล่อยให้เกิดการขยายตัวหรือหดตัวได้อย่างอิสระ และอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปเกิดขึ้นอย่างสม่ำเสมอก็ตาม ก็อาจมีหน่วยแรงเกิดขึ้นได้เช่นกัน

ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง-ความเครียด-อุณหภูมิ ของวัสดุแบบออโธทรอปิก ในระบบพิกัด 1, 2 และ 3 คือ (Kollar และ Springer, 2003)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 \Delta T \\ \alpha_2 \Delta T \\ \alpha_3 \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

หรืออาจเขียนสั้นๆ ได้เป็น

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} + \{\varepsilon^T\}$$

เมื่อ $\{\varepsilon\}$ คือ ความเครียดทั้งหมดที่เกิดขึ้น (total strain) โดย $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ เป็นความเครียดตั้งฉาก (normal strain) และ $\gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}$ เป็นความเครียดเฉือน (shear strain)

$\{\varepsilon^T\}$ คือ ความเครียดที่เกิดจากอุณหภูมิ (thermal strain)

$[S]$ คือ เมตริกซ์ความยืดหยุ่น (compliance matrix)

$\{\sigma\}$ คือ หน่วยแรง โดย $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ เป็นหน่วยแรงตั้งฉาก (normal stress) และ $\tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}$ เป็นหน่วยแรงเฉือน (shear stress)

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิในทิศทาง 1 , 2 และ 3 ตามลำดับ มีหน่วยเป็น 1/ $^{\circ}$C

เมื่อหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ความยืดหยุ่น จะได้เมตริกซ์ที่เรียกว่า เมตริกซ์สติฟเนส (stiffness matrix) และความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง-ความเครียด-อุณหภูมิ จะเป็นดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

หรือเขียนสั้นๆ ได้เป็น

$$\{\sigma\} = [C]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^T\}\right)$$

เมื่อ $[C]$ คือ เมตริกซ์สติฟเนส โดยที่ $[C] = [S]^{-1}$

ในระบบพิกัดทรงกระบอก ทิศทาง 1, 2 และ 3 ก็คือ r, θ และ z ตามลำดับ ดังนั้น จะได้ สมการที่ (4.2) และ (4.3) ตามลำดับ ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_r \Delta T \\ \alpha_\theta \Delta T \\ \alpha_z \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r - \alpha_r \Delta T \\ \varepsilon_\theta - \alpha_\theta \Delta T \\ \varepsilon_z - \alpha_z \Delta T \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

4.2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด(strain-displacement relations) ในระบบพิกัดทรงกระบอก คือ

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \;\; ; \; \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \;\; ; \;\; \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad ; \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad ; \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \tag{4.6}$$

เมื่อ u_r, u_θ, u_z คือ การกระจัดในทิศทาง r, θ และ z ตามลำดับ

4.2.3 สมการสมดุล

สมการสมดุล (equilibrium equations) ในระบบพิกัดทรงกระบอก คือ

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r = 0 \tag{4.7ก}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0 \tag{4.7ข}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + f_z = 0 \tag{4.7ค}$$

เมื่อ f_r, f_θ, f_z คือ แรงวัตถุ (body force) ต่อหน่วยปริมาตรของวัตถุ

4.3 เงื่อนไขขอบเขต

การวิเคราะห์หาหน่วยแรงและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากอุณหภูมินั้น นอกจากจะต้องอาศัยสมการควบคุมต่างๆ ดังที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว จะต้องนำเงื่อนไขขอบเขตมาร่วมในการพิจารณาด้วย โดยเงื่อนไขขอบเขตอาจเป็นการกำหนดการกระจัดหรือกำหนดหน่วยแรงที่ผิว (surface traction) ซึ่งในระบบพิกัดทรงกระบอกสามารถเขียนหน่วยแรงที่ผิวได้ดังนี้

$$\mathfrak{T} = T_r \hat{e}_r + T_\theta \hat{e}_\theta + T_z \hat{e}_z \tag{4.8}$$

โดยที่ $\mathfrak{T}$ คือ หน่วยแรงที่ผิว และ T_r, T_θ, T_z คือหน่วยแรงที่ผิวในทิศทาง r, θ, z ตามลำดับ ซึ่ง

$$\begin{Bmatrix} T_r \\ T_\theta \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_z \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

โดย n_r, n_θ, n_z เป็นทิศทางโคไซน์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิว นั่นคือ

$$\hat{n} = n_r \hat{e}_r + n_\theta \hat{e}_\theta + n_z \hat{e}_z$$

4.4 ปัญหาความเครียดระนาบ

สภาวะความเครียดระนาบ (plane strain) คือ สภาวะที่ค่าต่างๆ อันได้แก่ หน่วยแรง ความเครียด และการกระจัด ไม่ขึ้นกับระยะในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง ซึ่งในที่นี้กำหนดให้เป็นทิศทาง z นอกจากนี้ การกระจัดในทิศทางดังกล่าว นั่นคือ ทิศทาง z มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น ในระบบพิกัดทรงกระบอก เมื่อการกระจัดในทิศทาง z เป็นศูนย์ และการกระจัดในทิศทางอื่นๆ ไม่ขึ้นกับระยะ z จะได้ว่า

$$u_r = u_r(r,\theta)\ ;\ u_\theta = u_\theta(r,\theta)\ ;\ u_z = 0$$

สภาวะความเครียดระนาบ อาจเกิดขึ้นได้ในวัตถุที่มีความยาวมากๆ เมื่อเทียบกับขนาดของพื้นที่หน้าตัด และจะเกิดขึ้นในบริเวณที่ห่างจากปลายของวัตถุนั้น โดยแรงที่มากระทำหรืออุณหภูมิที่เกิดขึ้น มีค่าคงที่ตลอดความยาว นอกจากนี้ คุณสมบัติของวัสดุจะต้องไม่เปลี่ยนแปลงตามทิศทางของความยาว และแรงวัตถุ (body force) ในทิศทางตามยาวต้องเป็นศูนย์ด้วย (D.J. Johns,1965) ซึ่งเมื่อเกิดสภาวะความเครียดระนาบแล้ว จะทำให้สมการต่างๆ ใน 3 มิติ ดังที่ได้กล่าวมาข้างต้น ลดรูปลง และการวิเคราะห์จะสามารถทำได้ง่ายขึ้น

เนื่องจากปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้ เป็นทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก และมีความร้อนเกิดขึ้นคงที่ตลอดแนวความยาว ดังนั้น จึงเป็นปัญหาความเครียดระนาบ นั่นคือ $u_z = 0$ และค่าต่างๆ ไม่ขึ้นกับระยะ z นอกจากนี้ ε_z , $\tau_{\theta z}$, τ_{rz} , $\gamma_{\theta z}$ และ γ_{rz} จะมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะทำให้สมการที่ (4.5) ลดรูปลงเป็นดังนี้ (Burnett, 1987)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r - \bar{\alpha}_r \Delta T \\ \varepsilon_\theta - \bar{\alpha}_\theta \Delta T \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix}$$

หรือเขียนสั้นๆ ได้เป็น

$$\{\sigma\} = [\bar{C}]\left(\{\varepsilon\} - \{\bar{\alpha}\}\Delta T\right) \qquad (4.10)$$

โดยที่ $\bar{C}_{11} = C_{11}$; $\bar{C}_{12} = C_{12}$; $\bar{C}_{22} = C_{22}$ และ $\bar{C}_{66} = C_{66}$

$$\bar{\alpha}_r = \alpha_r + \left(\frac{C_{22}C_{13} - C_{12}C_{23}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}\right)\alpha_z$$

$$\bar{\alpha}_\theta = \alpha_\theta + \left(\frac{C_{11}C_{23} - C_{12}C_{13}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}\right)\alpha_z$$

ซึ่งค่า σ_z จะสามารถหาได้ในภายหลังเมื่อรู้ค่า ε_r และ ε_θ แล้ว ดังนี้

$$\sigma_z = C_{13}(\varepsilon_r - \alpha_r \Delta T) + C_{23}(\varepsilon_\theta - \alpha_\theta \Delta T) - C_{33}\alpha_z \Delta T \qquad (4.10\text{-}1)$$

สำหรับสมการสมดุล ก็จะเหลือเพียง 2 สมการ ที่ลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{4.11ก}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \tag{4.11ข}$$

และจะได้เงื่อนไขขอบเขต ในสมการที่ (4.8) และ (4.9) เป็น

$$\mathfrak{I} = T_r \hat{e}_r + T_\theta \hat{e}_\theta \tag{4.12}$$

$$\begin{Bmatrix} T_r \\ T_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_r \\ n_\theta \end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง-ความเครียด - อุณหภูมิ สมการสมดุล และเงื่อนไขขอบเขต ที่จะนำมาใช้แก้ปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้ จึงมีรูปแบบดังสมการที่ (4.6) , (4.10) , (4.11ก-ข) และ (4.13) ตามลำดับ

4.5 การหาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ

การวิเคราะห์หาคำตอบของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ จะใช้หลักการเดียวกับการวิเคราะห์หาการกระจายอุณหภูมิ นั่นคือ เริ่มต้นจากการแปลงสมการสมดุลให้อยู่ในรูปแบบอ่อน (weak form) โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residuals) ของกาเลอร์คิน (Galerkin) จากนั้น ทำการสมมติฟังก์ชันของการกระจัด (displacement) แล้วนำไปแทนในสมการสมดุลรูปแบบอ่อนดังกล่าว จะทำให้เกิดระบบสมการขึ้น ซึ่งเมื่อทำการแก้สมการแล้ว ก็จะสามารถหาคำตอบโดยประมาณของการกระจัดได้ จากนั้น ก็จะสามารถหาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ และความเครียดที่เกิดขึ้นได้

4.5.1 สมการสมดุลในรูปแบบอ่อน

จากสมการสมดุลที่ (4.11ก) และ (4.11ข) จะสามารถแปลงสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปแบบอ่อนได้โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ทำการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างสมการที่ (4.11ก) และ (4.11ข)

$$\int_\Omega W_1 \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \right) d\Omega = 0 \tag{4.14ก}$$

$$\int_\Omega W_2 \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \right) d\Omega = 0 \tag{4.14ข}$$

จัดรูปสมการที่ (4.14ก - ข) ใหม่ ดังนี้

$$\int_{\Omega} W_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \right) d\Omega - \int_{\Omega} W_1 \frac{\sigma_\theta}{r} d\Omega = 0 \tag{4.15ก}$$

$$\int_{\Omega} W_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right) d\Omega + \int_{\Omega} W_2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} d\Omega = 0 \tag{4.15ข}$$

ทำการอินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts) โดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss 's theorem) จะได้

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \sigma_r + \frac{1}{r} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} \tau_{r\theta} + W_1 \frac{\sigma_\theta}{r} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} W_1 \left(\sigma_r n_r + \tau_{r\theta} n_\theta \right) d\Gamma \tag{4.16ก}$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_2}{\partial r} \tau_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \sigma_\theta - W_2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} W_2 \left(\tau_{r\theta} n_r + \sigma_\theta n_\theta \right) d\Gamma \tag{4.16ข}$$

ค่าในวงเล็บทางด้านขวาของสมการที่ (4.16 ก - ข) นี้ เป็นค่าของเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งหากพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตดังสมการที่ (4.13) แล้ว จะพบว่า ค่าดังกล่าวเป็นหน่วยแรงที่ผิวนั่นเอง โดยที่ $\sigma_r n_r + \tau_{r\theta} n_\theta = T_r$ และ $\tau_{r\theta} n_r + \sigma_\theta n_\theta = T_\theta$ ดังนั้น จะเขียนสมการที่ (4.16 ก - ข) ได้เป็น

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \sigma_r + \frac{1}{r} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} \tau_{r\theta} + W_1 \frac{\sigma_\theta}{r} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} W_1 T_r d\Gamma \tag{4.17ก}$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_2}{\partial r} \tau_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \sigma_\theta - W_2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} W_2 T_\theta d\Gamma \tag{4.17ข}$$

เมื่อได้สมการสมดุลในรูปแบบอ่อนตามที่ต้องการแล้ว ขั้นตอนต่อไป จะทำการสมมติฟังก์ชันของการกระจัด แล้วนำมาแทนในสมการดังกล่าว เพื่อหาคำตอบโดยประมาณ ดังจะอธิบายในหัวข้อต่อไป

4.5.2 แบบจำลองแยกชั้น

การสมมติคำตอบโดยประมาณของการกระจัดทั้งในทิศทางรัศมีและทิศทางเส้นรอบวง สำหรับทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยชั้นวัสดุจำนวน m ชั้น ดังรูปที่ 3.2 จะใช้หลักการเดียวกับการสมมติการกระจายของอุณหภูมิ นั่นคือ จะใช้ฟังก์ชันการประมาณหรือฟังก์ชันสัณฐาน (shape function) แบบลากรางจ์เชิงเส้นในทิศทางรัศมีสำหรับแต่ละชั้นของวัสดุ และฟังก์ชันต่อเนื่องในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ในทิศทางเส้นรอบวง ดังนั้น การกระจัดที่สมมติขึ้น จะอยู่ในรูป

$$u_r(r,\theta) = \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{n} f_k(r) \left(a_{0k}^r + a_{lk}^r \cos(l\theta) + b_{lk}^r \sin(l\theta) \right) \tag{4.18ก}$$

$$u_\theta(r,\theta) = \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{n} f_k(r) \left(a_{0k}^\theta + a_{lk}^\theta \cos(l\theta) + b_{lk}^\theta \sin(l\theta) \right) \tag{4.18ข}$$

โดยที่ $f_k(r)$ เป็นฟังก์ชันสัณฐานแบบลากรางจ์เชิงเส้น ซึ่งอธิบายได้ดังรูปที่ 3.4 และมีรูปแบบดังสมการที่ (3.28)

ฟังก์ชันของการกระจัดในสมการที่(4.18 ก - ข) อาจเขียนให้อยู่ในรูปอนุกรมของค่าคงที่ คูณกับฟังก์ชันสัณฐาน (shape function) N ได้ดังนี้

$$u_r = \sum_{j=1}^{p} N_j(r,\theta) U_j^r = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad ...... \quad N_p \rfloor \lfloor U_1^r \quad U_2^r \quad ...... \quad U_p^r \rfloor^T = \lfloor N \rfloor \{U^r\} \quad (4.19ก)$$

$$u_\theta = \sum_{j=1}^{p} N_j(r,\theta) U_j^\theta = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad ...... \quad N_p \rfloor \lfloor U_1^\theta \quad U_2^\theta \quad ...... \quad U_p^\theta \rfloor^T = \lfloor N \rfloor \{U^\theta\} \quad (4.19ข)$$

เมื่อ

$$\lfloor N \rfloor = \lfloor f_1 \quad f_1\cos\theta \quad f_1\sin\theta \quad f_1\cos 2\theta \quad f_1\sin 2\theta \quad ..... \quad f_1\cos n\theta \quad f_1\sin n\theta \quad .....$$

$$f_{m+1} \quad f_{m+1}\cos\theta \quad f_{m+1}\sin\theta \quad ...... \quad f_{m+1}\cos n\theta \quad f_{m+1}\sin n\theta \rfloor$$

$$= \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad .... \quad N_p \rfloor \qquad (4.20)$$

โดยที่ $p = (m+1)(2n+1)$ และ $\{U^r\},\{U^\theta\}$ เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่ ซึ่งเป็นตัวไม่ทราบค่า

เมื่อแทนค่าลงในสมการที่ (4.6) จะได้ค่าความเครียดเป็นดังนี้

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial N_j}{\partial r} U_j^r$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{1}{r} N_j U_j^r + \frac{1}{r}\frac{\partial N_j}{\partial \theta} U_j^\theta \right)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial N_j}{\partial \theta} U_j^r + \frac{\partial N_j}{\partial r} U_j^\theta - \frac{1}{r} N_j U_j^\theta \right)$$

สมการที่ (4.19ก-ข) สามารถเขียนรวมกันได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & ...... & N_p & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & ...... & 0 & N_p \end{bmatrix} \lfloor U_1^r \quad U_1^\theta \quad U_2^r \quad U_2^\theta \quad ...... \quad U_p^r \quad U_p^\theta \rfloor^T$$

$$= [N]\{U\} \qquad (4.21)$$

ดังนั้น

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \ldots\ldots & \dfrac{\partial N_p}{\partial r} & 0 \\ \dfrac{N_1}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_1}{\partial \theta} & \dfrac{N_2}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_2}{\partial \theta} & \ldots\ldots & \dfrac{N_p}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_p}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_1}{\partial \theta} & \dfrac{\partial N_1}{\partial r} - \dfrac{N_1}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_2}{\partial \theta} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} - \dfrac{N_2}{r} & \ldots\ldots & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_p}{\partial \theta} & \dfrac{\partial N_p}{\partial r} - \dfrac{N_p}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^r \\ U_1^\theta \\ U_2^r \\ U_2^\theta \\ \vdots \\ U_p^r \\ U_p^\theta \end{Bmatrix}$$

$$= [B]\{U\} \tag{4.22}$$

ในวิธีของกาเลอร์คิน จะกำหนดฟังก์ชันสัณฐาน (shape function) ให้เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก นั่นคือ $W_1 = W_2 = N$ ดังนั้น เราสามารถเขียนเทอมในอินทิกรัลทางด้านซ้ายของสมการที่ (4.17ก-ข) ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{N_1}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_1}{\partial \theta} \\ 0 & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_1}{\partial \theta} & \dfrac{\partial N_1}{\partial r} - \dfrac{N_1}{r} \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & \dfrac{N_2}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_2}{\partial \theta} \\ 0 & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_2}{\partial \theta} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} - \dfrac{N_2}{r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial N_p}{\partial r} & \dfrac{N_p}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_p}{\partial \theta} \\ 0 & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N_p}{\partial \theta} & \dfrac{\partial N_p}{\partial r} - \dfrac{N_p}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = [B]^T \{\sigma\} \tag{4.23}$$

ส่วนเทอมทางด้านขวามือของสมการที่ (4.17ก-ข) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_p & 0 \\ 0 & N_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_r \\ T_\theta \end{Bmatrix} = [N]^T \{\mathfrak{T}\} \tag{4.24}$$

แทนค่าจากสมการที่ (4.23) และ (4.24) ลงในสมการ (4.17ก-ข) จะได้

$$\int_{\Omega}[B]^{T}\{\sigma\}\,d\Omega=\int_{\Gamma}[N]^{T}\{\Im\}\,d\Gamma \tag{4.25}$$

โดยที่เมตริกซ์ $\{\sigma\}$ นี้ จะมีรูปแบบดังสมการที่ (4.10) ดังนั้น เมื่อแทนค่าความเครียดในสมการที่ (4.22) ลงในสมการที่ (4.10) จะได้เมตริกซ์ $\{\sigma\}$ ดังนี้

$$\{\sigma\}=[\bar{C}]\big(\{\varepsilon\}-\{\bar{\alpha}\}\Delta T\big)=[\bar{C}]\big([B]\{U\}-\{\bar{\alpha}\}\Delta T\big) \tag{4.26}$$

เมื่อ $\{\bar{\alpha}\}=\begin{Bmatrix}\bar{\alpha}_r\\ \bar{\alpha}_\theta\\ 0\end{Bmatrix}$

สุดท้าย เมื่อแทนค่า $\{\sigma\}$ จากสมการที่ (4.26) ลงในสมการที่ (4.25) จะได้

$$\int_{\Omega}[B]^{T}[\bar{C}][B]\{U\}d\Omega=\int_{\Gamma}[N]^{T}\{\Im\}d\Gamma+\int_{\Omega}[B]^{T}[\bar{C}]\{\bar{\alpha}\}\Delta T d\Omega \tag{4.27}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการได้ดังนี้

$$[K]\{U\}=\{F\} \tag{4.28}$$

เมื่อ $[K]=\int_{\Omega}[B]^{T}[\bar{C}][B]d\Omega$

$\{F\}=\{F_T\}+\{F_0\}$

โดยที่ $\{F_T\}=\int_{\Gamma}[N]^{T}\{\Im\}d\Gamma$

$\{F_0\}=\int_{\Omega}[B]^{T}[\bar{C}]\{\bar{\alpha}\}\Delta T d\Omega$

ระบบสมการในสมการที่(4.28) จะมีจำนวนสมการและตัวไม่ทราบค่าเป็นจำนวน $2(m+1)(2n+1)$ ซึ่งหลังจากแก้สมการดังกล่าวเพื่อหาตัวไม่ทราบค่าแล้ว ก็จะได้คำตอบโดยประมาณของการกระจัดในทิศทางรัศมี u_r และทิศทางเส้นรอบวง u_θ และสามารถนำไปคำนวณหาหน่วยแรงและความเครียดต่อไปได้

บทที่ 5

กรณีศึกษาเปรียบเทียบ

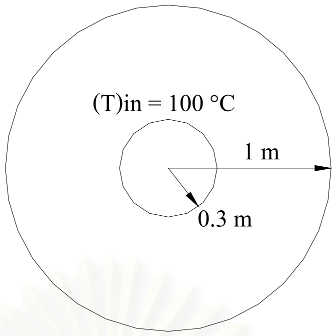
ในบทนี้ จะกล่าวถึงการวิเคราะห์การนำความร้อนและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิของทรงกระบอกกลวงในกรณีต่างๆ ที่มีลักษณะของปัญหาแตกต่างกันออกไป โดยอาศัยวิธีการที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 และบทที่ 4 ซึ่งใช้แบบจำลองแยกชั้น (discrete layer model / DLM) ทั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้นสำหรับวิเคราะห์ปัญหาว่ามีความถูกต้องหรือไม่ และผลการวิเคราะห์มีความถูกต้องแม่นยำมากน้อยเพียงใด ซึ่งการตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของโปรแกรมนี้ สามารถทำได้โดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงซึ่งอ้างอิงได้จากตำรา และงานวิจัยในอดีตที่มีผู้ได้ทำมาแล้ว กรณีที่จะวิเคราะห์ประกอบด้วยปัญหา 1 มิติ 5 กรณี และ ปัญหา 2 มิติ 2 กรณี โดยลักษณะของทรงกระบอก คุณสมบัติของวัสดุ และเงื่อนไขขอบเขต ก็จะแตกต่างกันออกไปในแต่ละกรณี ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

5.1 ปัญหา 1 มิติ

ปัญหาตัวอย่างในที่นี้เป็นปัญหา 1 มิติ ในทิศทางรัศมี เนื่องจากที่ผิวในและผิวนอกของทรงกระบอกมีความร้อนเกิดขึ้นสม่ำเสมอตลอดทั้งผิว ทำให้ปัญหาดังกล่าวมีความสมมาตรรอบแกน การนำความร้อนจึงเกิดขึ้นเฉพาะในทิศทางรัศมีเท่านั้น และการกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิจะไม่ขึ้นกับทิศทางเส้นรอบวง ปัญหา 1 มิตินี้ จะมีทั้งภาวะอยู่ตัวและภาวะชั่วครู่ โดยบางปัญหาจะวิเคราะห์เฉพาะการกระจายอุณหภูมิเพียงอย่างเดียว แต่บางปัญหาจะวิเคราะห์หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิที่เกิดขึ้นด้วย ทรงกระบอกมีทั้งแบบที่ประกอบด้วยวัสดุ 1 ชั้น 2 ชั้น และ 3 ชั้น เงื่อนไขขอบเขตมีทั้งการกำหนดอุณหภูมิ การพาความร้อน อย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่างรวมกัน ซึ่งมีทั้งหมด 5 กรณี ดังต่อไปนี้

5.1.1 ทรงกระบอกชั้นเดียวกำหนดอุณหภูมิที่ผิว

กรณีศึกษานี้ จะทำการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัวของทรงกระบอกที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงชนิดเดียว และเงื่อนไขขอบเขตเป็นการกำหนดอุณหภูมิ โดยปัญหานี้เป็นทรงกระบอกกลวงรัศมีภายใน 0.3 ม. รัศมีภายนอก 1 ม. อุณหภูมิภายในและภายนอกเท่ากับ 100 $^{\circ}$C และ 0 $^{\circ}$C ตามลำดับ ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุที่เป็นเนื้อเดียวกัน โดยมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน(k) เท่ากับ 43 W/m$^{\circ}$C , ค่ามอดูลัสยืดหยุ่น(E) เท่ากับ 200 Gpa , อัตราส่วนปัวซง(ν) เท่ากับ 0.25 และสัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงเส้น(α) เท่ากับ 11.7 μ / $^{\circ}$C ลักษณะของปัญหาแสดงดังรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 ทรงกระบอกชั้นเดียวกำหนดอุณหภูมิที่ผิว

การวิเคราะห์จะแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ แต่ละชั้นมีความหนาเท่ากัน และเนื่องจากปัญหานี้เป็นปัญหา 1 มิติที่มีความสมมาตรรอบแกน ค่าอุณหภูมิและหน่วยแรงจะไม่ขึ้นกับทิศทางเส้นรอบวง ดังนั้น ฟังก์ชันการประมาณในทิศทางเส้นรอบวงที่เป็นอนุกรมฟูเรียร์จึงเป็นค่าคงที่ นั่นคือ ไม่มีเทอมของไซน์และโคไซน์ในฟังก์ชันการประมาณ ก่อนเริ่มวิเคราะห์ จะทำการหาการลู่เข้าของคำตอบเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้น ซึ่งในการหาการลู่เข้าของคำตอบเมื่อแบ่งโดเมนให้ละเอียดขึ้นทั้งในกรณีนี้และกรณีต่อๆ ไป ไม่ว่าจะเป็นการแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้น การใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้น (ปัญหา 2 มิติ) หรือการแบ่งช่วงเวลา (time step) ให้ละเอียดขึ้น (ปัญหาในภาวะชั่วครู่) จะพิจารณาจากสัดส่วนระหว่างค่ายูคลิเดียนนอร์ม (Euclidean-norm) ยกกำลังสองต่อค่าผลรวมของคำตอบยกกำลังสอง ดังต่อไปนี้

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i')^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$$

โดยที่ ε คือ สัดส่วนระหว่างค่ายูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองต่อค่าผลรวมของคำตอบยกกำลังสอง

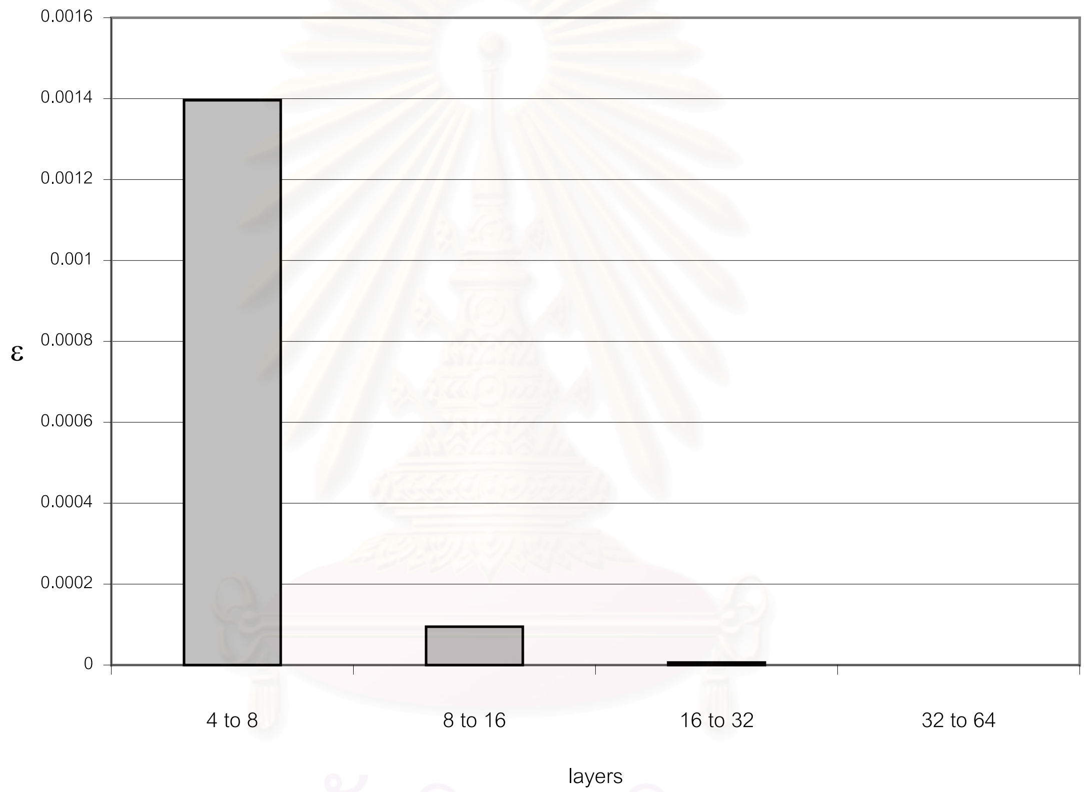
x_i คือ ค่าคำตอบที่จุด i เมื่อมีการแบ่งโดเมนเพิ่มขึ้น

จากสมการข้างบนสามารถอธิบายได้ว่า ค่าในวงเล็บของตัวเศษก็คือผลต่างระหว่างคำตอบ (อุณหภูมิหรือการกระจัด) 2 ชุด ที่ตำแหน่ง i เมื่อมีการแบ่งโดเมนแตกต่างกัน เช่น สมมติแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มจาก 2 ชั้น เป็น 4 ชั้น ค่า x_i ก็คือคำตอบที่ตำแหน่ง i เมื่อแบ่งทรงกระบอกเป็น 4 ชั้น ส่วนค่า x_i' ก็คือคำตอบที่ตำแหน่ง i เมื่อแบ่งทรงกระบอกเป็น 2 ชั้น สัดส่วนระหว่างค่ายูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองต่อค่าผลรวมของคำตอบยกกำลังสอง (ε) นี้ จะเป็นตัวบ่งบอกว่าคำตอบที่เปลี่ยนไปเมื่อแบ่งโดเมนให้ละเอียดขึ้นมีค่ามากหรือน้อยเพียงใด ซึ่งหากสัดส่วนดังกล่าวมีค่าน้อยก็แสดงว่าคำตอบมีค่าเปลี่ยนไปเพียงเล็กน้อย นั่นคือ คำตอบมีการลู่เข้าแล้วนั่นเอง

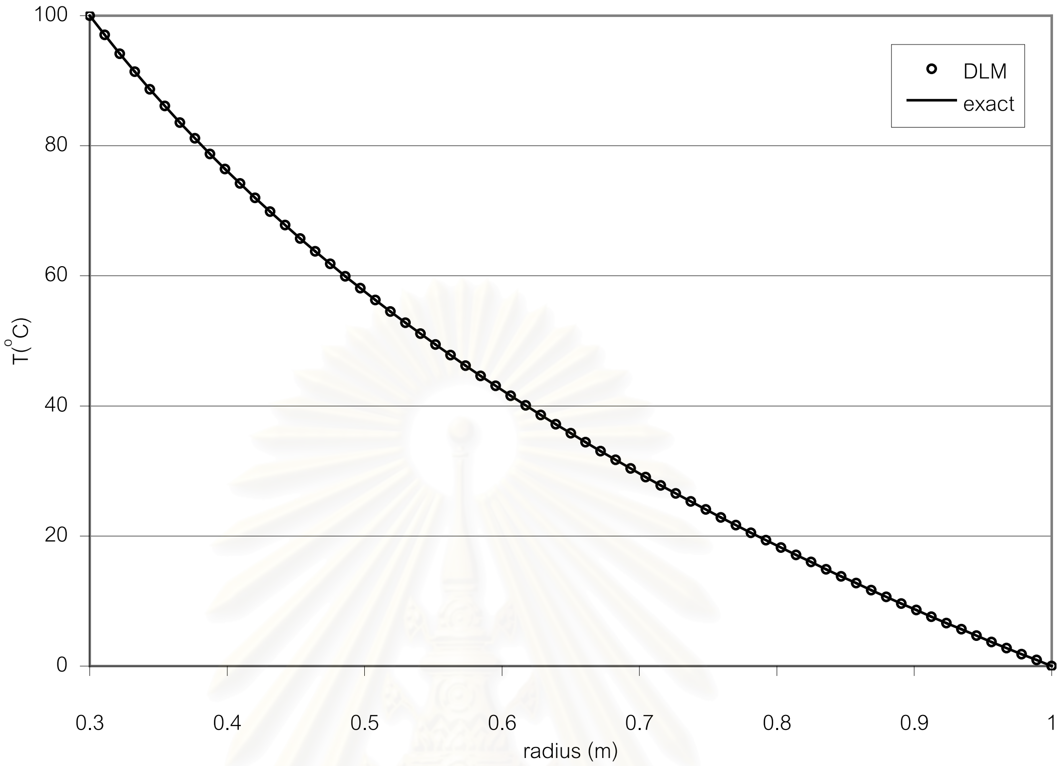
ในกรณีนี้ จะหาการลู่เข้าของการกระจัดทิศทางรัศมี (U_r) เมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้น โดยแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 4, 8, 16, 32 และ 64 ชั้น การลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้นแสดงได้ดังรูปที่ 5.2 ซึ่งเมื่อแบ่งชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้นจาก 32 ชั้นเป็น 64 ชั้นแล้ว จะได้ ε = 3.72×10^{-7} ซึ่งมีค่าน้อยมาก แสดงว่าเมื่อแบ่ง

ทรงกระบอกออกเป็น 64 ชั้น คำตอบก็มีการลู่เข้าแล้ว ดังนั้น ในการวิเคราะห์ปัญหานี้จึงทำการแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 64 ชั้น

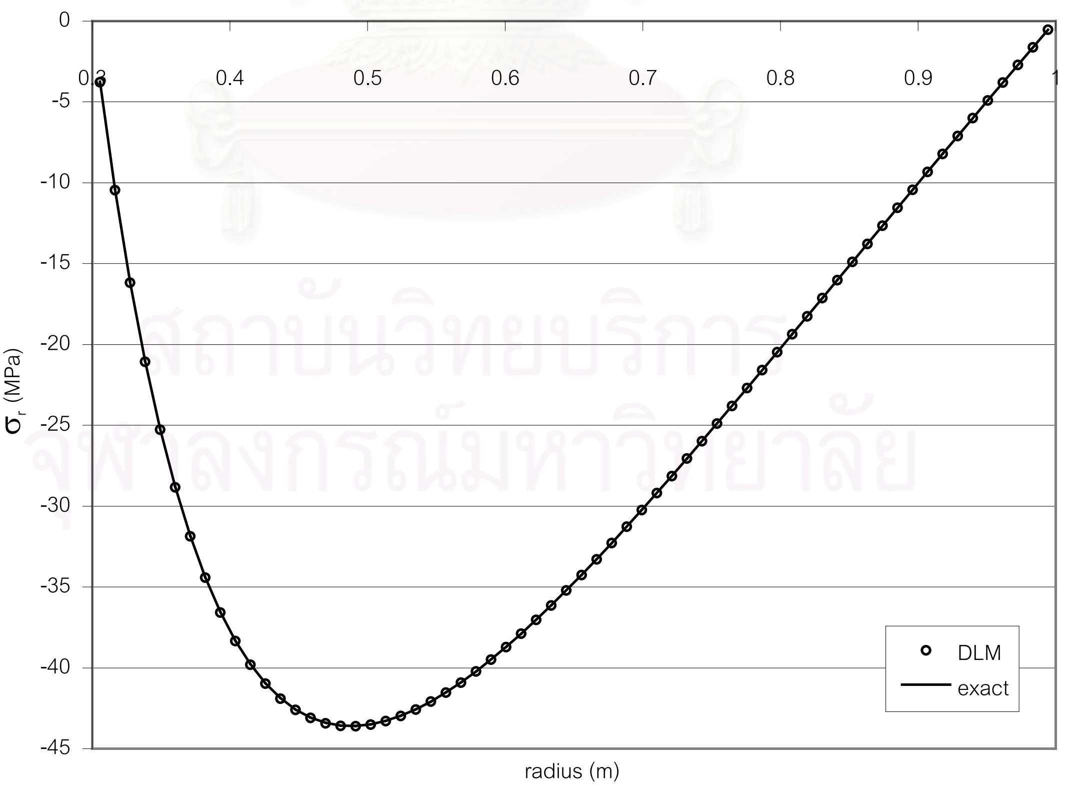
ผลการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองแยกชั้นเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง (Wang,1953) แสดงดังรูปที่ 5.3 - 5.6 จากกราฟจะเห็นว่า ผลการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองแยกชั้นมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมาก โดยค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดของการกระจายอุณหภูมิมีค่าน้อยกว่า 0.005% ส่วนค่าคลาดเคลื่อนของหน่วยแรงทิศทางรัศมี ทิศทางเส้นรอบวง และทิศทางตามยาว ณ จุดที่มีค่าหน่วยแรงเกิดขึ้นสูงสุด มีค่าประมาณ -0.0522% , -0.0382% และ -0.0108% ตามลำดับ



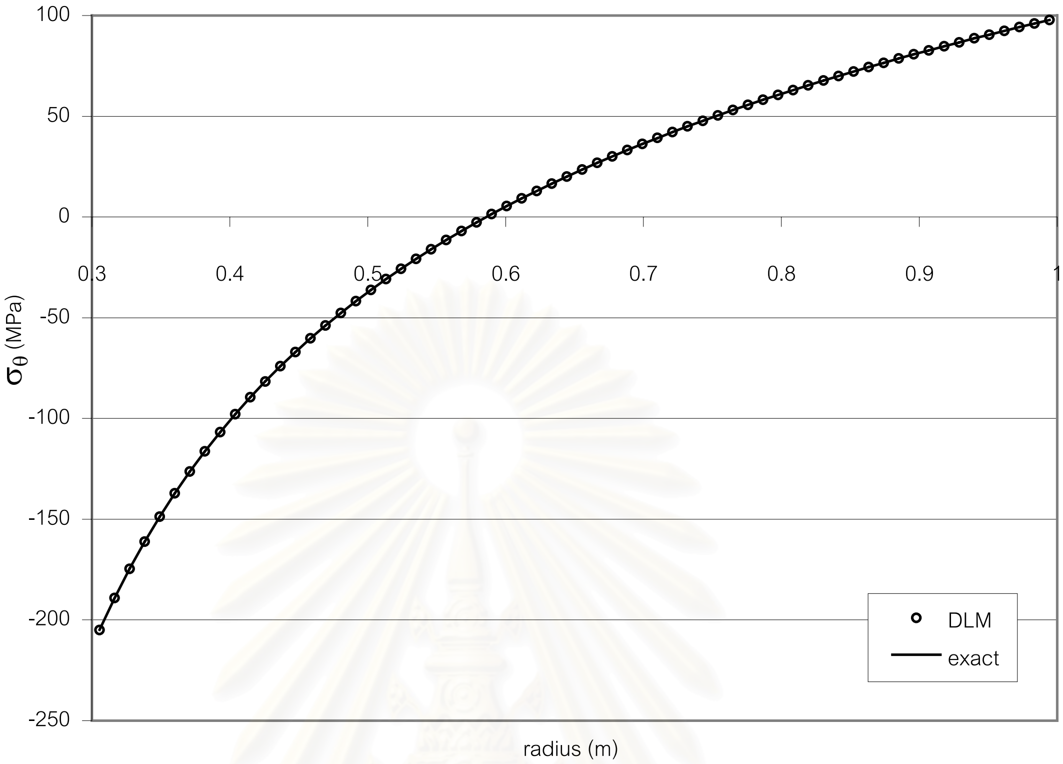
รูปที่ 5.2 ค่า ε ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น



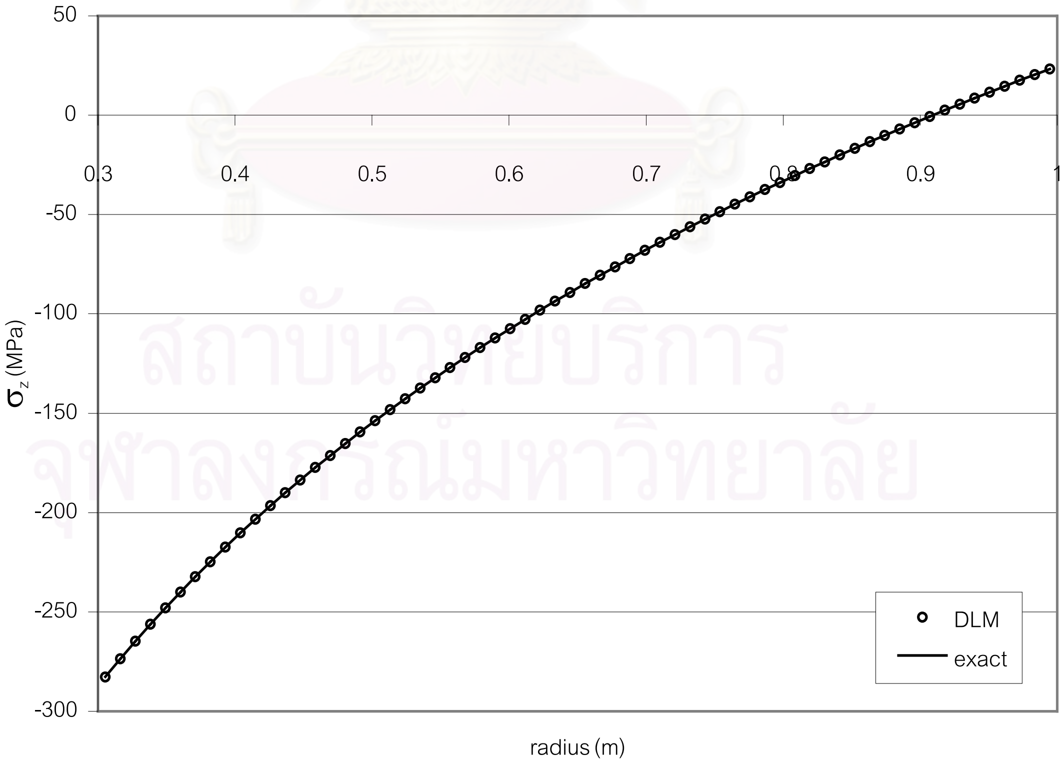
รูปที่ 5.3 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 5.4 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางรัศมีระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 5.5 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง



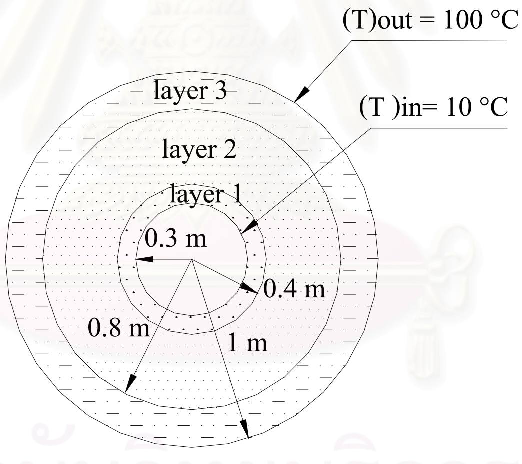
รูปที่ 5.6 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางตามยาวระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง

5.1.2 ทรงกระบอกสามชั้นกำหนดอุณหภูมิที่ผิว

กรณีศึกษานี้ จะทำการวิเคราะห์และเปรียบเทียบเฉพาะการกระจายของอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัวของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 3 ชนิด และเงื่อนไขขอบเขตเป็นการกำหนดอุณหภูมิ โดยจะพิจารณาทรงกระบอกกลวงรัศมีภายใน 0.3 ม. รัศมีภายนอก 1 ม. อุณหภูมิภายในและภายนอกเท่ากับ 0 $^{\circ}$C และ 100 $^{\circ}$C ตามลำดับ ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยมีคุณสมบัติของวัสดุดังแสดงในตารางที่ 5.1 และลักษณะของทรงกระบอกแสดงได้ดังรูปที่ 5.7

ตารางที่ 5.1 คุณสมบัติของวัสดุแต่ละชั้น กรณีทรงกระบอกสามชั้นกำหนดอุณหภูมิที่ผิว

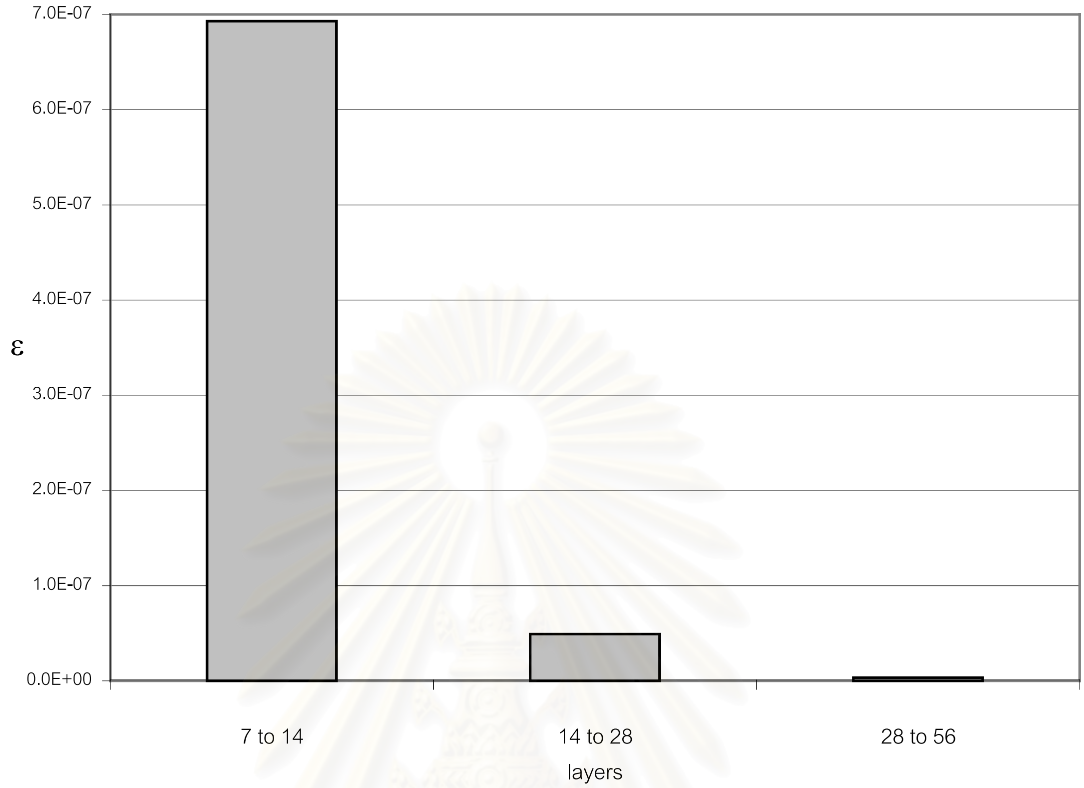
วัสดุ	ความหนา (m)	k (W/m$^{\circ}$C)
ชั้นที่ 1 (เหล็ก)	0.1	43
ชั้นที่ 2 (อลูมิเนียม)	0.4	164
ชั้นที่ 3 (ทองแดง)	0.2	83



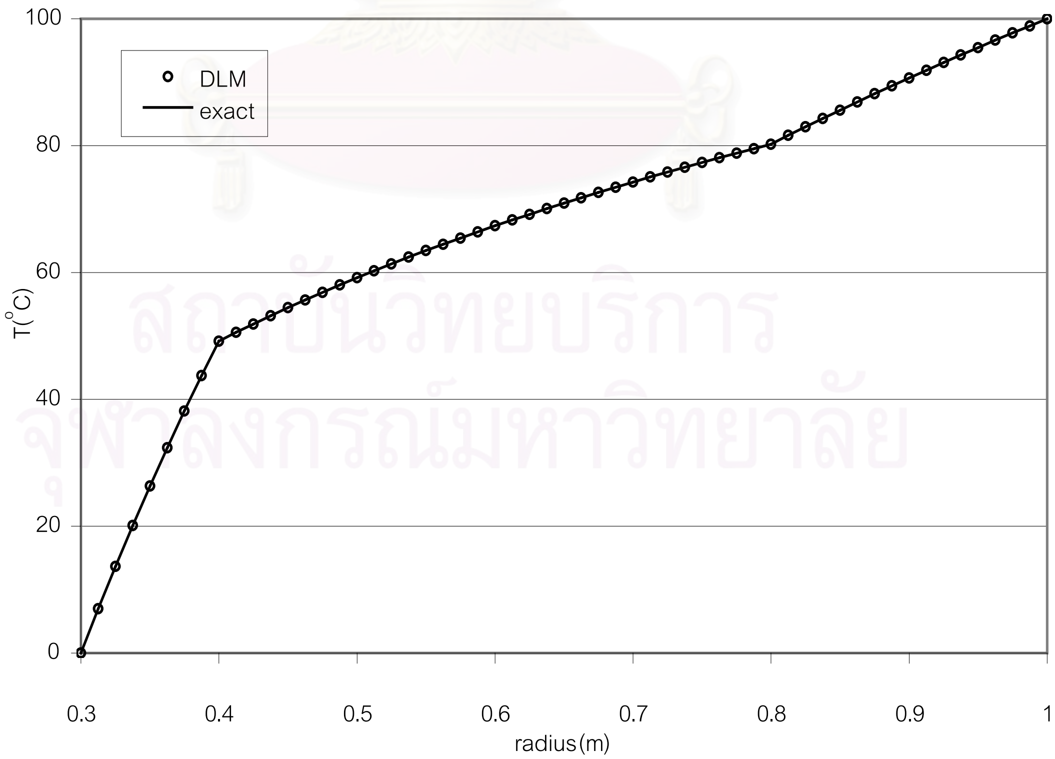
รูปที่ 5.7 ทรงกระบอกสามชั้นกำหนดอุณหภูมิที่ผิว

ในการวิเคราะห์ จะแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ แต่ละชั้นหนาเท่ากัน เริ่มต้น จะหาการลู่เข้าของอุณหภูมิโดยพิจารณาจากค่า ε ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในกรณีที่ 1 โดยแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 7,14, 28 และ 56 ชั้น ผลการลู่เข้าแสดงดังรูปที่ 5.8 ซึ่งเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มจาก 28 ชั้นเป็น 56 ชั้นแล้ว จะได้ ε = 3.23 $\times 10^{-9}$ ซึ่งมีค่าน้อยมาก ดังนั้น ในการวิเคราะห์ปัญหาจะทำการแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 56 ชั้น

จากการเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง (นักสิทธิ์ คูวัฒนาชัย, 2533) ดังแสดงในรูปที่ 5.9 จะเห็นว่า ผลการวิเคราะห์ปัญหาของทรงกระบอกที่ประกอบด้วยชั้นวัสดุ 3 ชนิด ยังคงมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมาก โดยที่ค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดที่เกิดขึ้นมีค่าไม่เกิน +0.007%



รูปที่ 5.8 ค่า ε ของอุณหภูมิเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น



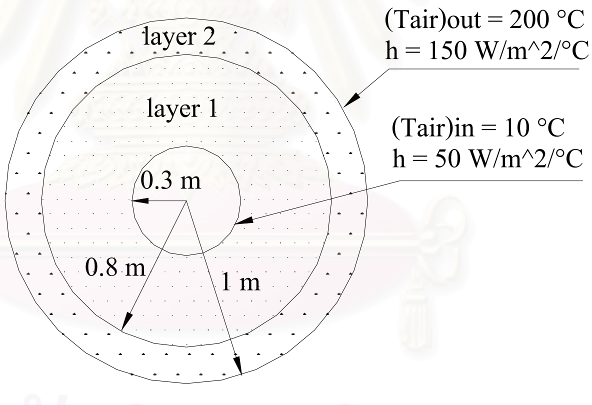
รูปที่ 5.9 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง

5.1.3 ทรงกระบอกสองชั้นมีการพาความร้อนที่ผิว

สำหรับปัญหาในกรณีนี้ จะทำการวิเคราะห์และเปรียบเทียบเฉพาะการกระจายของอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัวเช่นเดียวกับกรณีที่แล้ว แต่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชนิด และเงื่อนไขขอบเขตเป็นการพาความร้อน โดยทรงกระบอกมีรัศมีภายใน 0.3 ม. รัศมีภายนอก 1 ม. ที่ผิวทั้งสองมีการพาความร้อนเกิดขึ้น อุณหภูมิของตัวกลางการพาความร้อนภายในและภายนอกเท่ากับ 10 $^{\circ}$C และ 200 $^{\circ}$C ตามลำดับ และมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h) เท่ากับ 50 W/m^2 $^{\circ}$C และ 150 W/m^2 $^{\circ}$C ตามลำดับ ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น ซึ่งแต่ละชั้นมีคุณสมบัติของวัสดุดังตารางที่ 5.2 ลักษณะของทรงกระบอกแสดงได้ดังรูปที่ 5.10

ตารางที่ 5.2 คุณสมบัติของวัสดุแต่ละชั้น กรณีทรงกระบอกสองชั้นมีการพาความร้อนที่ผิว

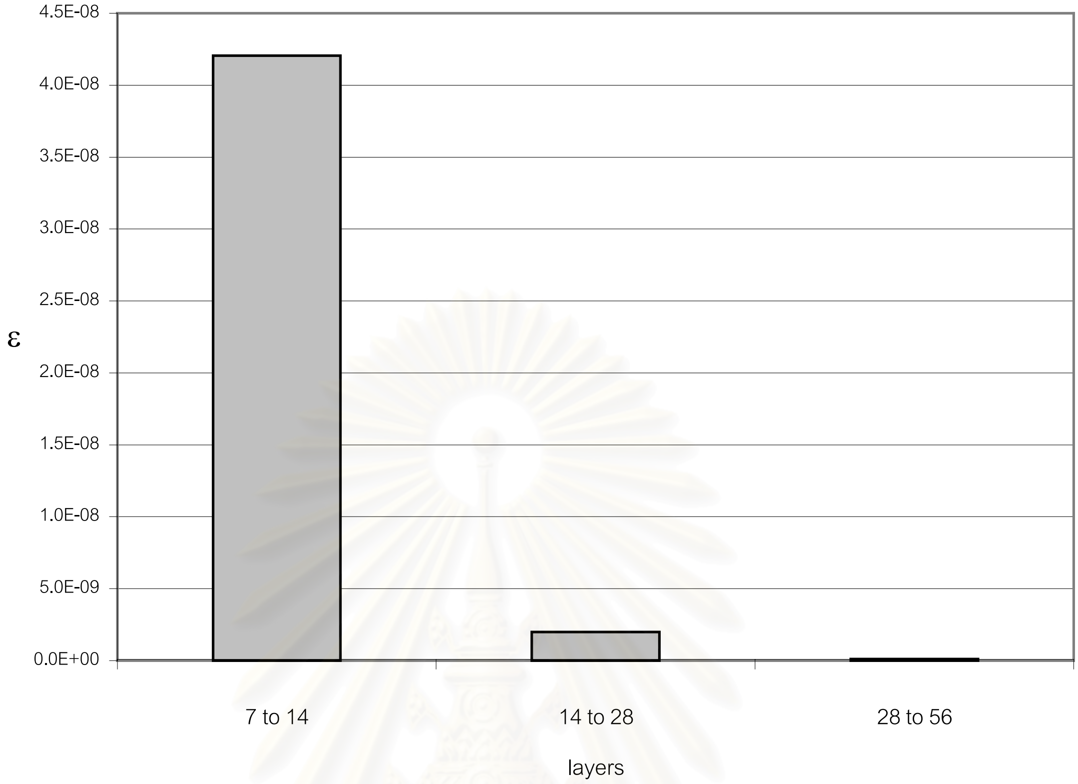
วัสดุ	ความหนา (m)	k (W/m^{o}C)
ชั้นที่ 1	0.5	43
ชั้นที่ 2	0.2	83



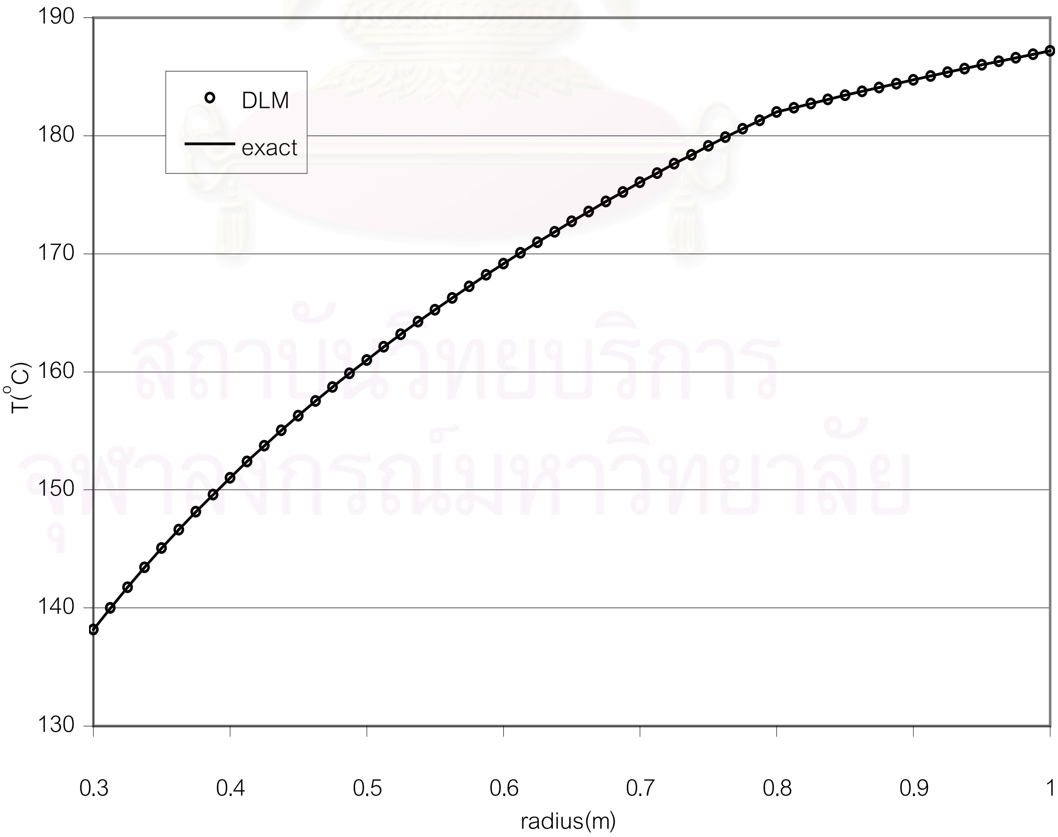
รูปที่ 5.10 ทรงกระบอกสองชั้นมีการพาความร้อนที่ผิว

การวิเคราะห์ในกรณีนี้ จะแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ แต่ละชั้นหนาเท่ากัน ส่วนการหาการลู่เข้าโดยพิจารณาจากค่า ε จะแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 7,14, 28 และ 56 ชั้น ผลการลู่เข้าแสดงดังรูปที่ 5.11 ซึ่งเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มจาก 28 ชั้นเป็น 56 ชั้นแล้ว จะได้ ε = 1.1×10^{-10} ซึ่งมีค่าน้อยมาก ดังนั้นในการวิเคราะห์และเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงจะทำการแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 56 ชั้น

จากการเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง (มนตรี อึ่งเจริญ) ดังแสดงในรูปที่ 5.12 จะเห็นว่า ในกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตเป็นการพาความร้อนนี้ ผลการวิเคราะห์ยังมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากเช่นเดียวกับสองกรณีแรก โดยค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดของการกระจายอุณหภูมิมีค่าประมาณ 0.0016% เท่านั้น



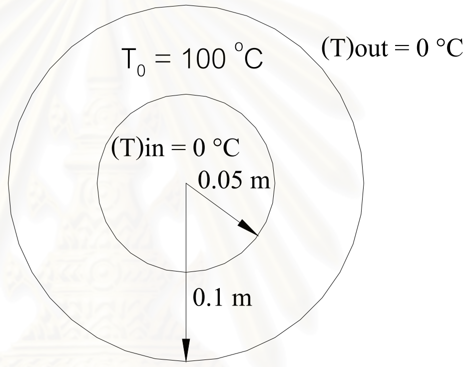
รูปที่ 5.11 ค่า ε ของอุณหภูมิเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น



รูปที่ 5.12 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง

5.1.4 ทรงกระบอกชั้นเดียวกำหนดอุณหภูมิที่ผิวในภาวะชั่วครู่

เมื่อได้เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ระหว่างแบบจำลองแยกชั้น กับผลเฉลยแม่นตรงจากทั้งสามกรณีแรกซึ่งเป็นปัญหาในภาวะอยู่ตัวและพบว่ามีความใกล้เคียงกันแล้ว ในกรณีนี้ จะทำการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงชนิดเดียว โดยเงื่อนไขขอบเขตเป็นการกำหนดอุณหภูมิ ซึ่งปัญหานี้เป็นทรงกระบอกกลวงรัศมีภายในและภายนอกเท่ากับ 0.05 ม. และ 0.1 ม. ตามลำดับ ประกอบด้วยวัสดุเพียงชนิดเดียว โดยมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน(k) เท่ากับ 43 $W/m^{o}C$, ความหนาแน่น(ρ) เท่ากับ 7801 kg/m^3 และความจุความร้อนจำเพาะ (c) เท่ากับ 473 $J/kg^{o}C$ ทรงกระบอกมีอุณหภูมิเริ่มต้นเท่ากับ 100 ^{o}C เมื่อเวลาผ่านไปอุณหภูมิที่ผิวในและผิวนอกมีค่าเป็นศูนย์ ลักษณะของทรงกระบอกแสดงได้ดังรูปที่ 5.13

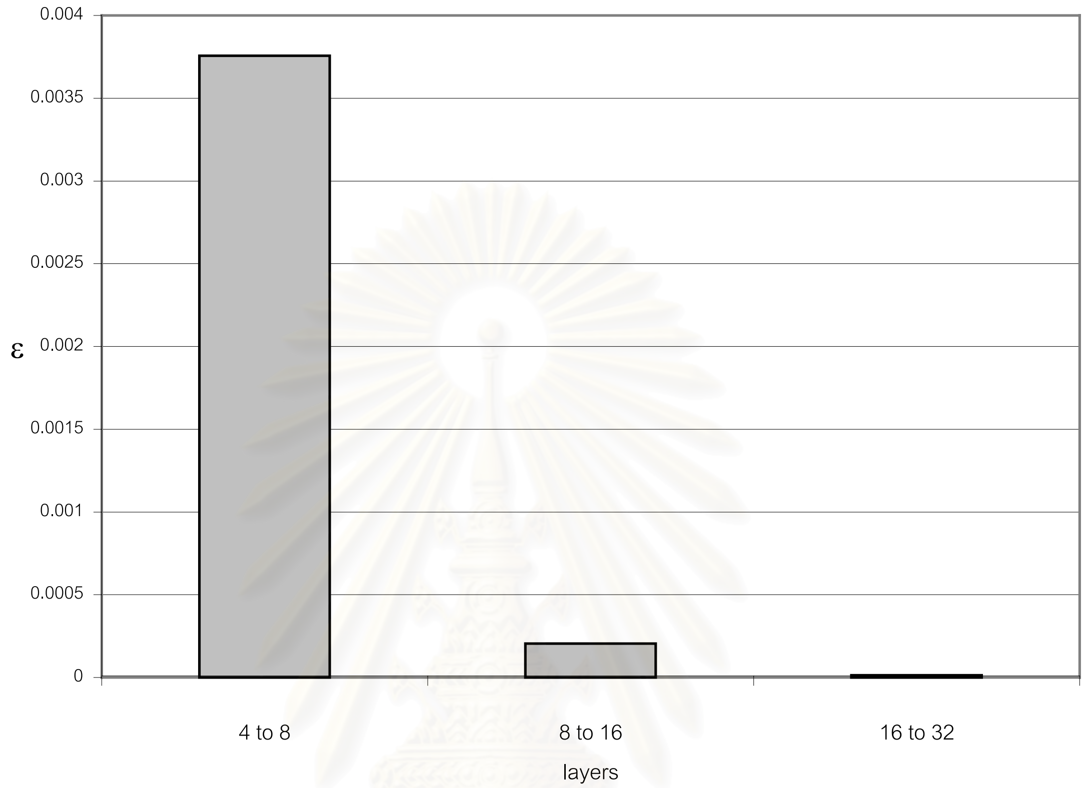


รูปที่ 5.13 ทรงกระบอกชั้นเดียวกำหนดอุณหภูมิที่ผิวในภาวะชั่วครู่

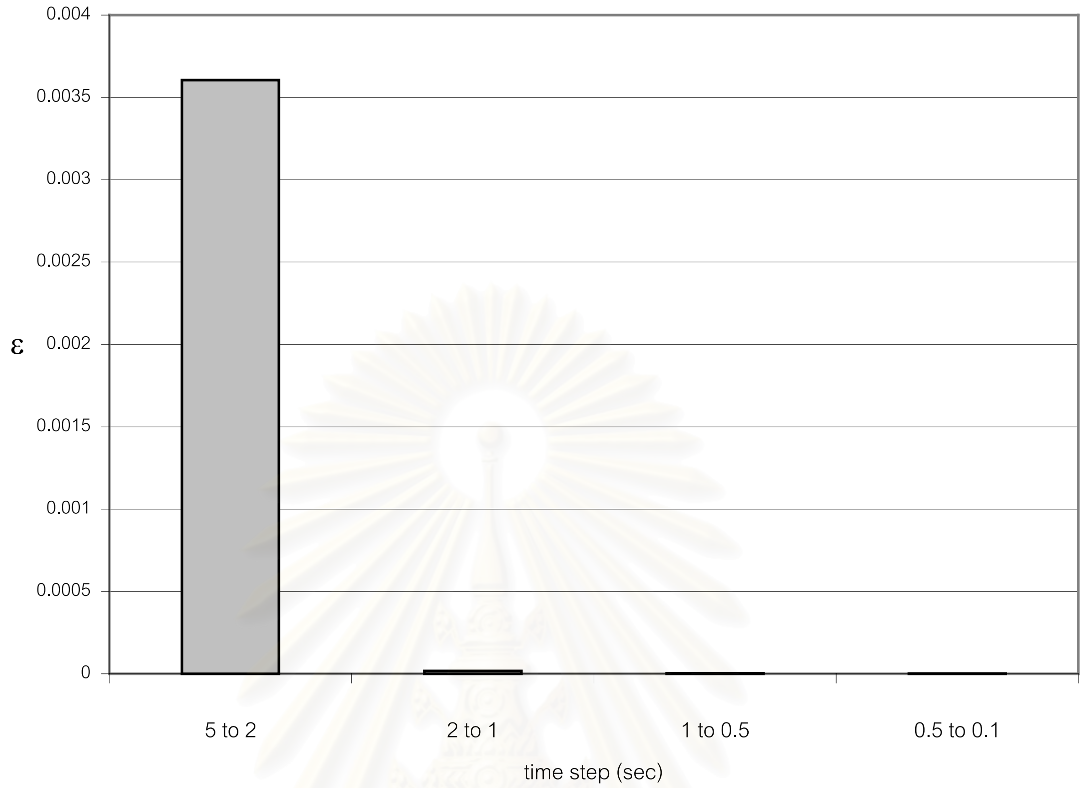
การหาการลู่เข้าในกรณีนี้จะแบ่งออกเป็นสองส่วน นั่นคือ การลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น และการลู่เข้าเมื่อแบ่งช่วงเวลา (time step) ให้ละเอียดขึ้น ซึ่งทั้งสองส่วนจะพิจารณาการลู่เข้าของอุณหภูมิที่เวลา 10 วินาที เริ่มต้นจะหาการลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้นโดยแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 4, 8, 16 และ 32 ชั้น และใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 0.1 วินาที จากนั้นจะหาการลู่เข้าเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้น โดยใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 5, 2, 1, 0.5 และ 0.1 วินาที และแบ่งชั้นของทรงกระบอกเท่ากับ 32 ชั้น ผลการลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้นและเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้นแสดงดังรูปที่ 5.14 และ 5.15 ตามลำดับ ซึ่งเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มจาก 16 ชั้นเป็น 32 ชั้น จะได้ $\varepsilon = 1.31 \times 10^{-5}$ และเมื่อใช้ช่วงเวลาลดลงจาก 0.5 วินาทีเป็น 0.1 วินาที จะได้ $\varepsilon = 2.58 \times 10^{-6}$ ซึ่งมีค่าน้อยมาก ดังนั้น ในการวิเคราะห์ปัญหาจะแบ่งทรงกระบอกเป็น 32 ชั้น และใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 0.1 วินาที

ผลการเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง (Ozisik ,1993) แสดงดังรูปที่ 5.16 และรูปที่ 5.17 โดยรูปที่ 5.16 แสดงค่าอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางชั้น (r = 0.075 m) เมื่อเวลาต่างๆ ส่วนรูปที่ 5.17 แสดงการกระจายอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ ซึ่งจะเห็นว่า ผลการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองแยกชั้นมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง จากกราฟรูปที่ 5.16 ค่าอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางชั้นที่เวลาต่างๆ จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมาก โดยมีค่าคลาดเคลื่อนสูงสุด (ที่เวลา 100 วินาที) ไม่เกิน +0.12% ส่วนกราฟรูปที่ 5.17 ซึ่งเป็นการ

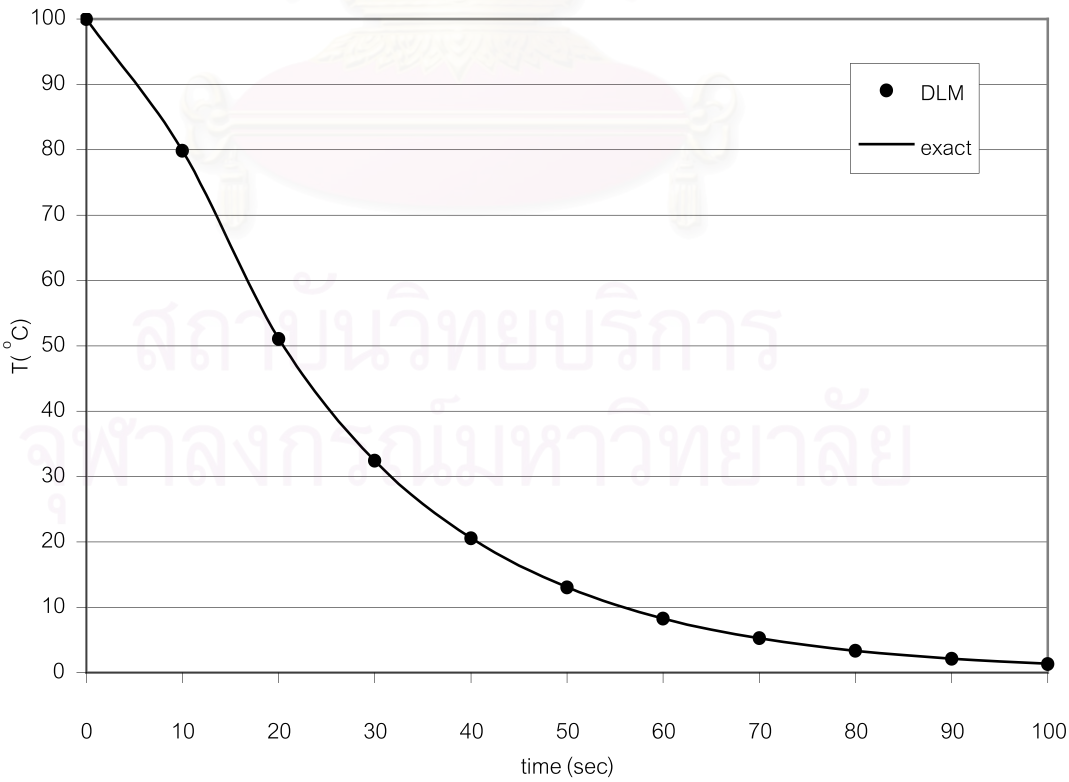
กระจายอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ พบว่ามีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงเช่นเดียวกัน โดยค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดมีค่าประมาณ +0.205% เท่านั้น



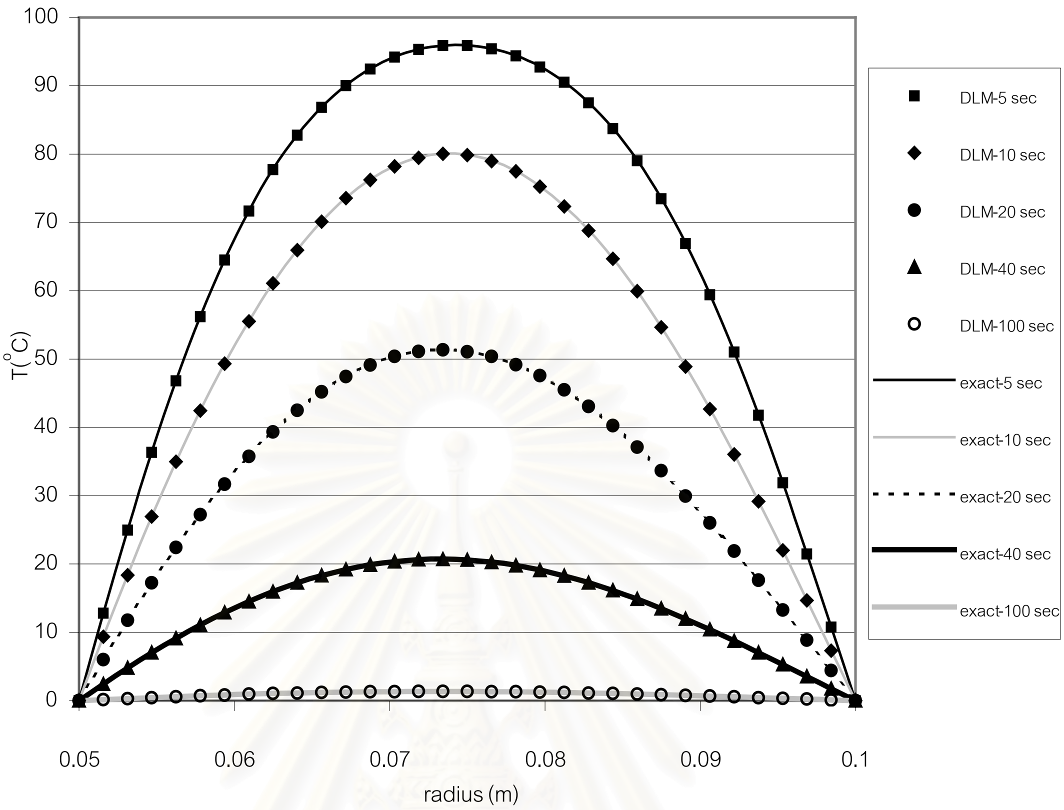
รูปที่ 5.14 ค่า ε ของอุณหภูมิเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น



รูปที่ 5.15 ค่า ε ของอุณหภูมิเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้น



รูปที่ 5.16 เปรียบเทียบอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางชั้นที่เวลาต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง



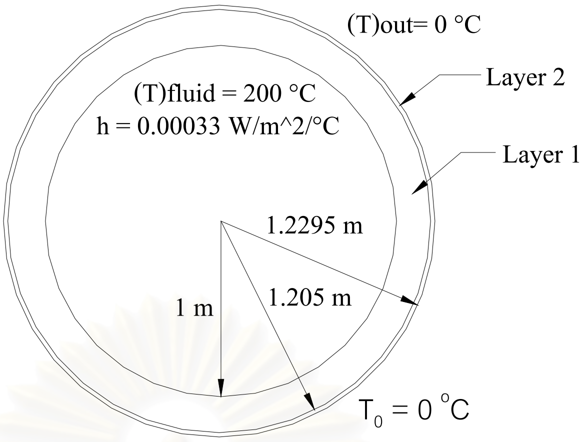
รูปที่ 5.17 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง

5.1.5 ทรงกระบอกสองชั้นกำหนดอุณหภูมิและการพาความร้อนที่ผิวในภาวะชั่วครู่

สำหรับปัญหาในกรณีนี้ เป็นปัญหาในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุ 2 ชนิด เงื่อนไขขอบเขตมีทั้งการกำหนดอุณหภูมิและการพาความร้อน โดยจะพิจารณาทรงกระบอกกลวง รัศมีภายในและภายนอกเท่ากับ 1 และ 1.2295 ม. ตามลำดับ ประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยมีผิวสัมผัสอยู่ที่ระยะรัศมีเท่ากับ 1.205 ม. วัสดุมีคุณสมบัติดังตารางที่ 5.3 เริ่มต้นทรงกระบอกมีอุณหภูมิเท่ากับศูนย์องศาเซลเซียส เมื่อเริ่มจับเวลา ผิวนอกของทรงกระบอกยังคงมีอุณหภูมิเป็นศูนย์ ส่วนผิวในมีการพาความร้อนเกิดขึ้น โดยอุณหภูมิของของเหลวเท่ากับ 200 $^{\circ}$C และค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h) เท่ากับ 0.00033 W/m^{2} $^{\circ}$C ลักษณะของทรงกระบอกแสดงได้ดังรูปที่ 5.18

ตารางที่ 5.3 คุณสมบัติของวัสดุแต่ละชั้น กรณีทรงกระบอกสองชั้นกำหนดอุณหภูมิและการพาความร้อนที่ผิวในภาวะชั่วครู่

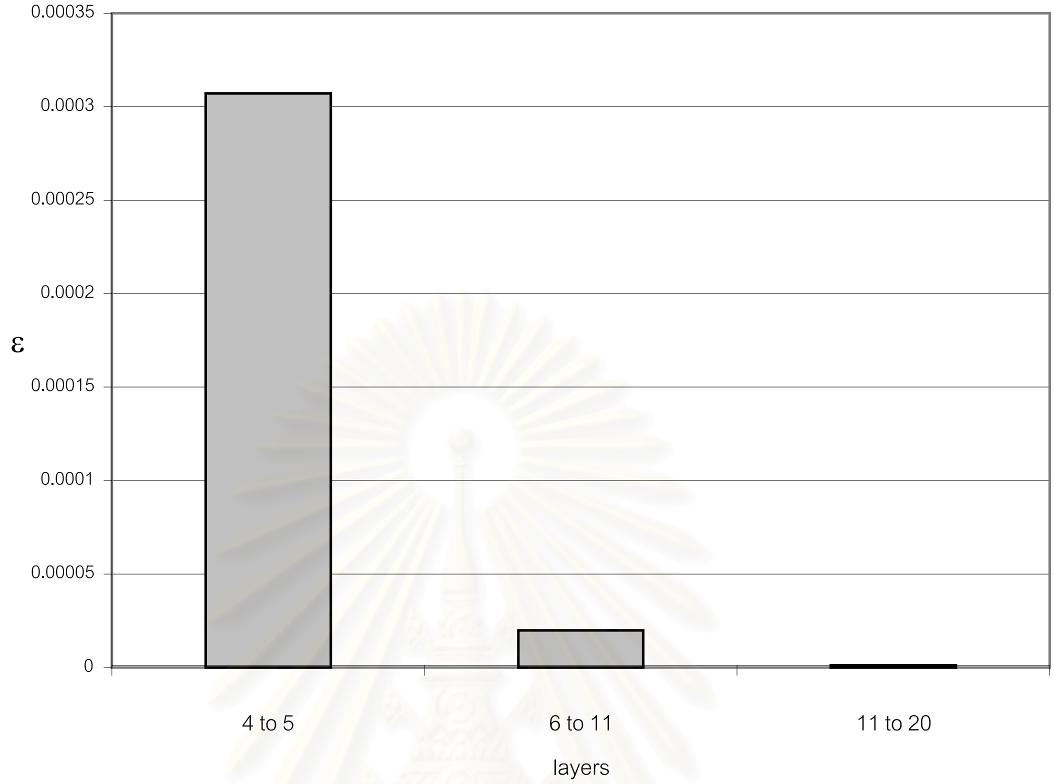
ชั้นที่	k(W/m$^{\circ}$C)	ρ(kg/m^{3})	c(J/kg$^{\circ}$C)	E(GPa)	ν	α(μ/$^{\circ}$C)
1	0.11	1000	9.1667	210	0.3	11
2	0.48	1000	5.5801	71	0.33	23.5



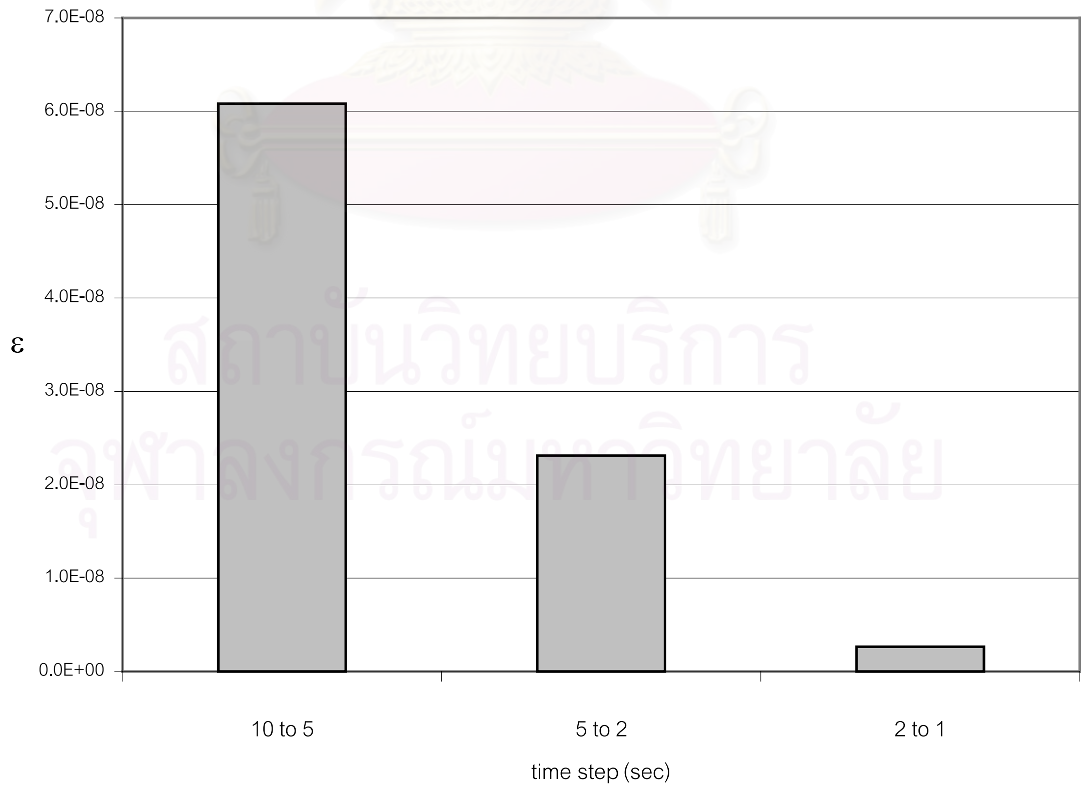
รูปที่ 5.18 ทรงกระบอกสองชั้นกำหนดอุณหภูมิและการพาความร้อนที่ผิวในภาวะชั่วครู่

ในการวิเคราะห์ปัญหานี้ จะแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ โดยมีความหนาไม่เท่ากันเพื่อให้สอดคล้องกับลักษณะของทรงกระบอก การหาการลู่เข้าจะแบ่งเป็นสองส่วนเช่นเดียวกับกรณีที่แล้ว นั่นคือ การลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น และการลู่เข้าเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้น ในการหาการลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้นจะทำการแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 4 , 6 , 11 และ 20 ชั้น และพิจารณาการลู่เข้าที่ภาวะอยู่ตัว สำหรับการหาการลู่เข้าเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้นจะใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 10 , 5 , 2 และ 1 วินาที และพิจารณาการลู่เข้าที่เวลา 100 วินาที ผลการลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้น และเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้นแสดงดังรูปที่ 5.19 และ 5.20 ตามลำดับ จากการพิจารณาการลู่เข้าพบว่า เมื่อแบ่งทรงกระบอกเพิ่มจาก 11 ชั้น เป็น 20 ชั้น จะได้ $\varepsilon = 1.26\times10^{-6}$ และเมื่อใช้ช่วงเวลาลดลงจาก 2 วินาทีเป็น 1 วินาที จะได้ $\varepsilon = 2.66\times10^{-9}$ ซึ่งมีค่าน้อยมาก ดังนั้น ในการวิเคราะห์ปัญหานี้จะแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 20 ชั้น และใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 1 วินาที ซึ่งในการแบ่งทรงกระบอกเป็น 20 ชั้นนี้ จากผิวในจนถึงระยะรัศมี 1.2 ม. จะแบ่งเป็น 16 ชั้นเท่าๆ กัน และจากระยะ 1.2 ม. จนถึงผิวสัมผัส (r = 1.205 m) จะมีเพียงชั้นเดียว และจากผิวสัมผัสไปจนถึงผิวนอกจะแบ่งเป็น 3 ชั้นที่ไม่เท่ากันคือ 1.205 - 1.2125 ม. , 1.2125 - 1.225 ม. และ 1.225 - 1.2295 ม.

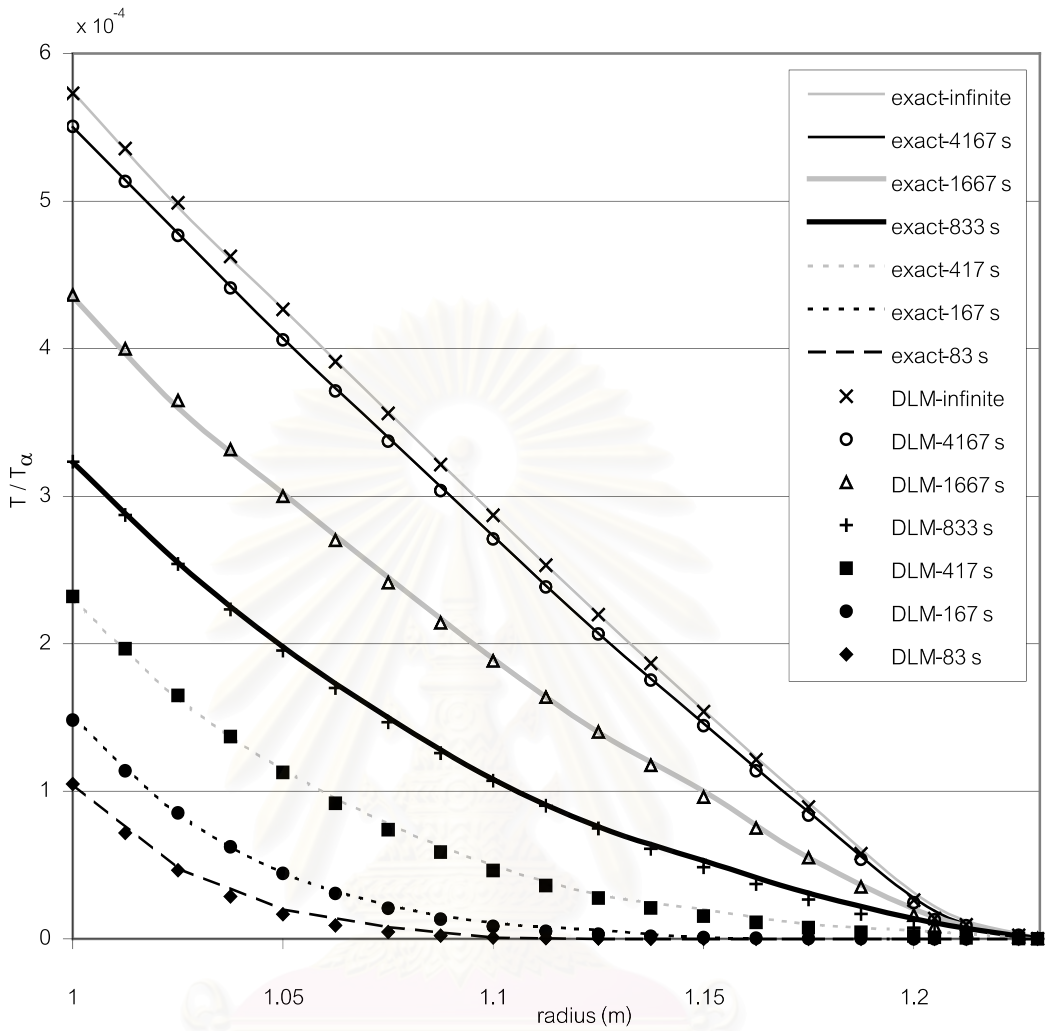
ผลการเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง (Takeuti และ Tanigawa , 1977) แสดงดังกราฟรูปที่ 5.21 - 5.24 ซึ่งสัญลักษณ์ $T_{\square}$, $\square_1$ และ E_1 ในกราฟก็คือ อุณหภูมิของของเหลวภายในทรงกระบอก ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงเส้นของวัสดุชั้นที่ 1 และค่ายังโมดูลัสของวัสดุชั้นใน ตามลำดับ จากกราฟจะเห็นว่าผลการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองแยกชั้น จะใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง โดยที่ค่าในช่วงกลางๆ ของความหนา ระหว่างแบบจำลองกับผลเฉลยแม่นตรงจะใกล้เคียงกันมาก ส่วนค่าบริเวณขอบจะแตกต่างกันเล็กน้อย ในกรณีนี้ไม่สามารถหาค่าคลาดเคลื่อนออกมาได้เนื่องจากผลเฉลยแม่นตรงได้มาโดยการอ่านค่าจากกราฟ ซึ่งอาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริงบ้างเล็กน้อย



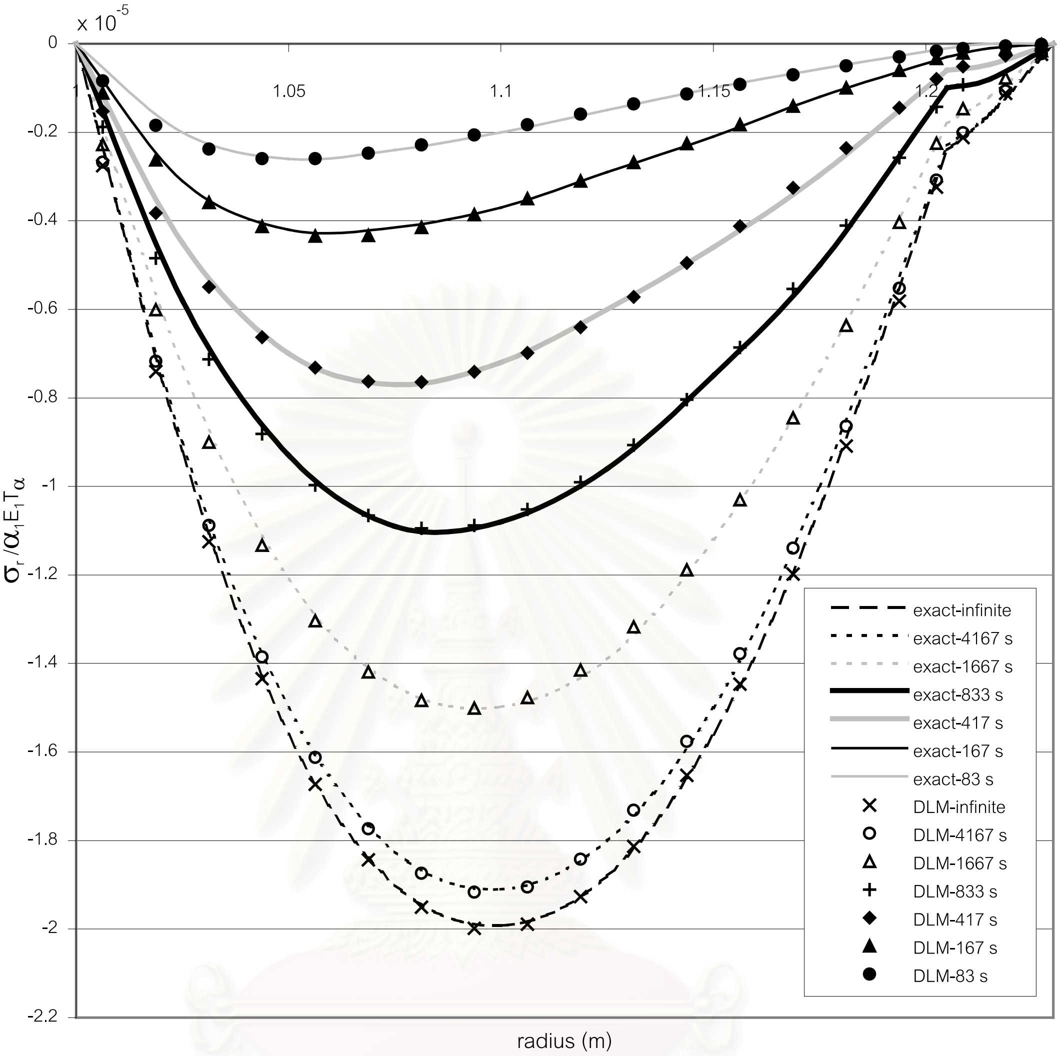
รูปที่ 5.19 ค่า ε ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น



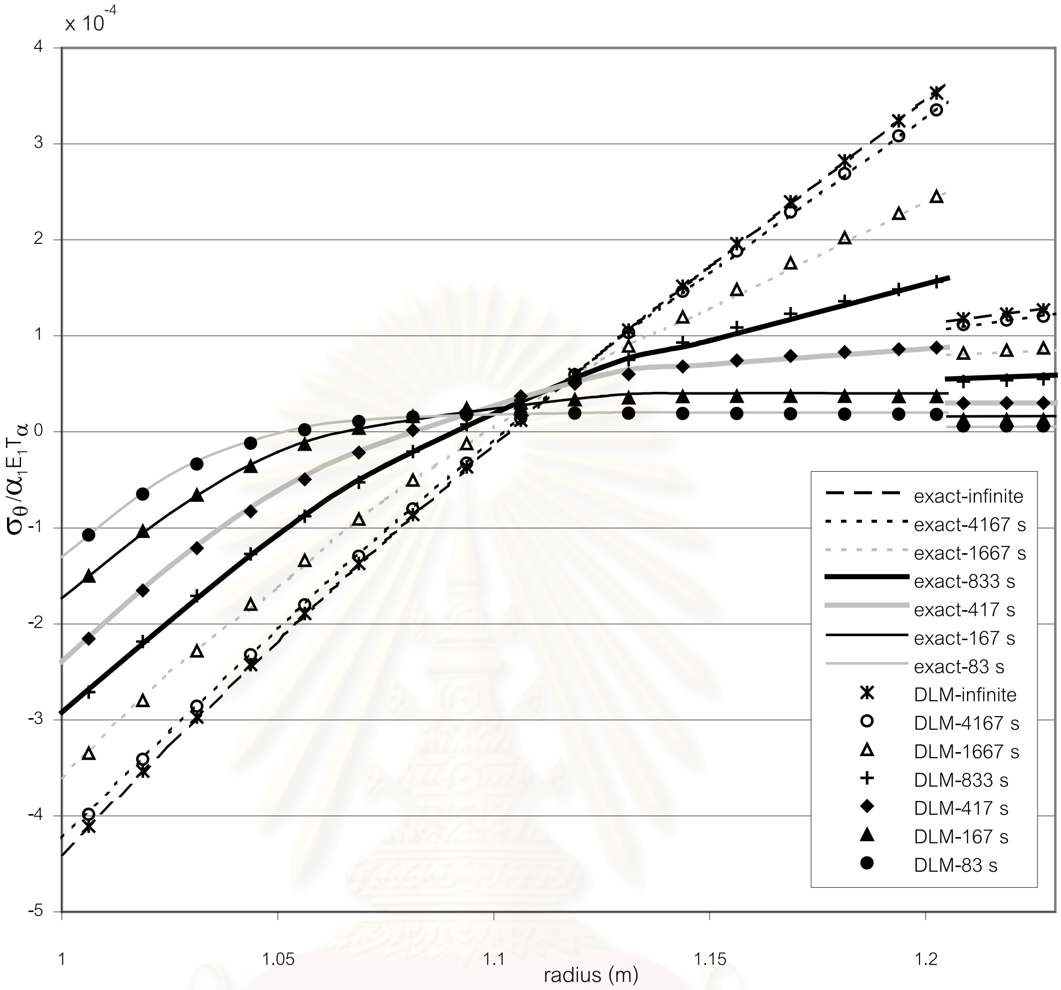
รูปที่ 5.20 ค่า ε ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้น



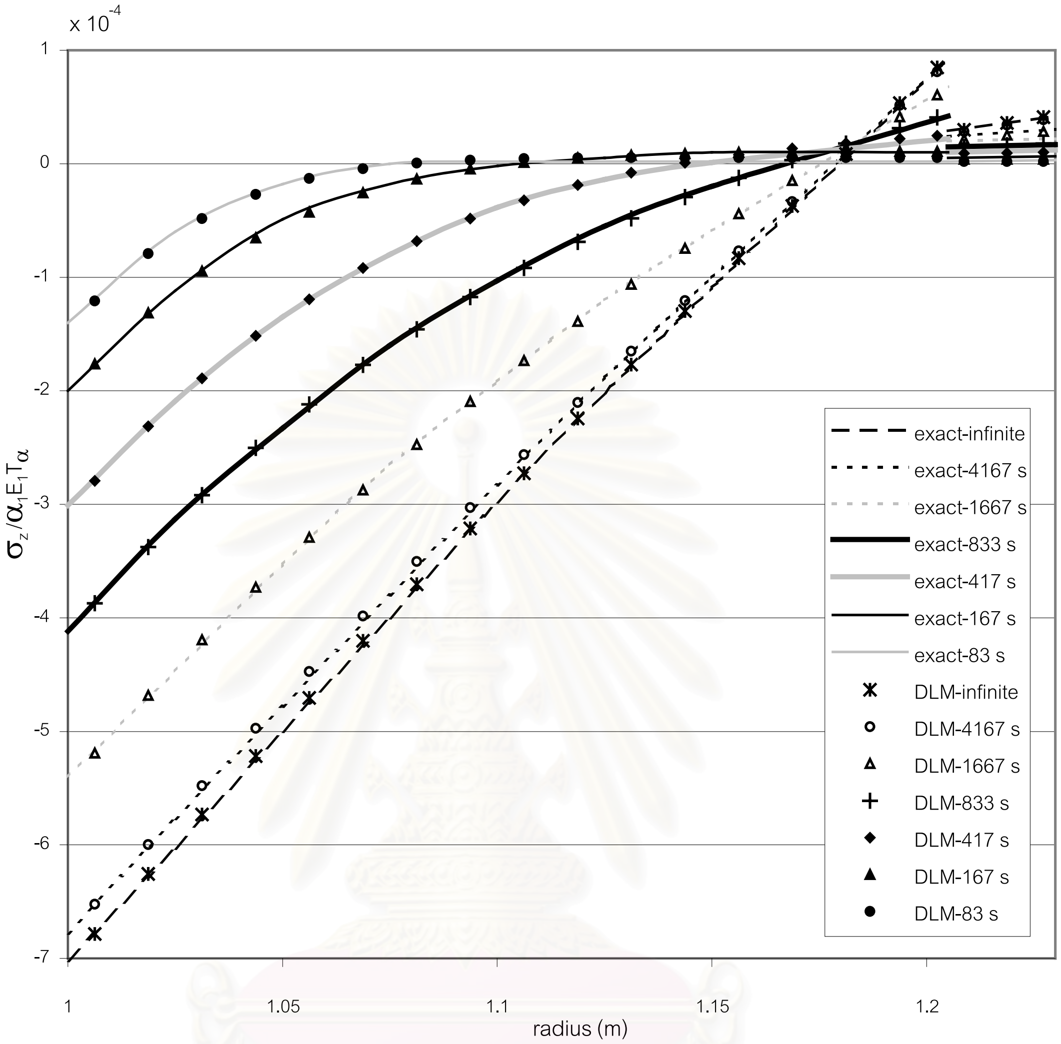
รูปที่ 5.21 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 5.22 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางรัศมีที่เวลาต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 5.23 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงที่เวลาต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 5.24 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางตามยาวที่เวลาต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง

5.2 ปัญหา 2 มิติ

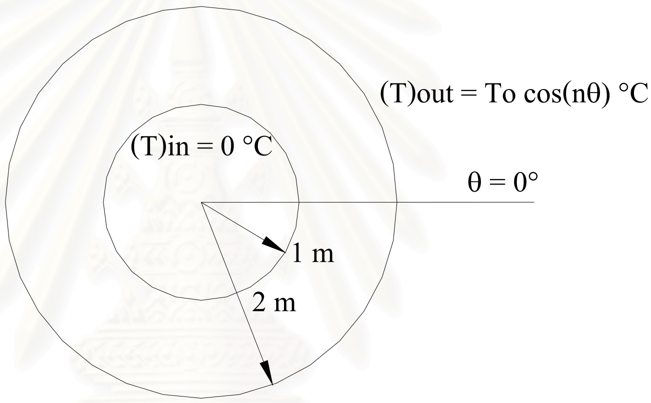
ในกรณีปัญหา 2 มิตินี้ เกิดขึ้นเนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวมีการเปลี่ยนแปลงตามทิศทางเส้นรอบวง ทำให้ปัญหาไม่มีความสมมาตรรอบแกน ปัญหา 2 มิติที่จะทำการวิเคราะห์มีอยู่ 2 กรณี ซึ่งมีทั้งปัญหาในภาวะอยู่ตัวและปัญหาในภาวะชั่วครู่ ทรงกระบอกมีทั้งแบบสองชั้น และแบบชั้นเดียวที่ไม่เป็นเนื้อเดียวกัน โดยมีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามทิศทางรัศมี(FGM) เงื่อนไขขอบเขตมีเฉพาะการกำหนดอุณหภูมิ ปัญหาใน 2 มิติ มีดังต่อไปนี้

5.2.1 ทรงกระบอกคุณสมบัติเปลี่ยนตามทิศทางรัศมีกำหนดอุณหภูมิที่ผิว

กรณีนี้จะวิเคราะห์หน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัว คุณสมบัติของวัสดุไม่เป็นเนื้อเดียวกัน เงื่อนไขขอบเขตเป็นการกำหนดอุณหภูมิ โดยปัญหาดังกล่าวเป็นทรงกระบอกกลวงรัศมีภายในและภายนอกเท่ากับ 1 ม. และ 2 ม. ตามลำดับ อุณหภูมิที่ผิวในเท่ากับ 0 °C ผิวนอกมีอุณหภูมิกระจายตัวเป็นฟังก์ชัน $T = 100\cos(n\theta)$ °C ทรงกระบอกมีคุณสมบัติของวัสดุที่เปลี่ยนแปลงตามทิศทางรัศมี (Functionally Graded Material) โดยที่ค่าต่างๆ มีความสัมพันธ์กับระยะรัศมีดังต่อไปนี้

$$\alpha(r) = \alpha_0 e^{(qr)} \ , \ k(r) = k_0 e^{(0.5r)} \ , \ G(r) = G_0 e^{(0.5r)}$$

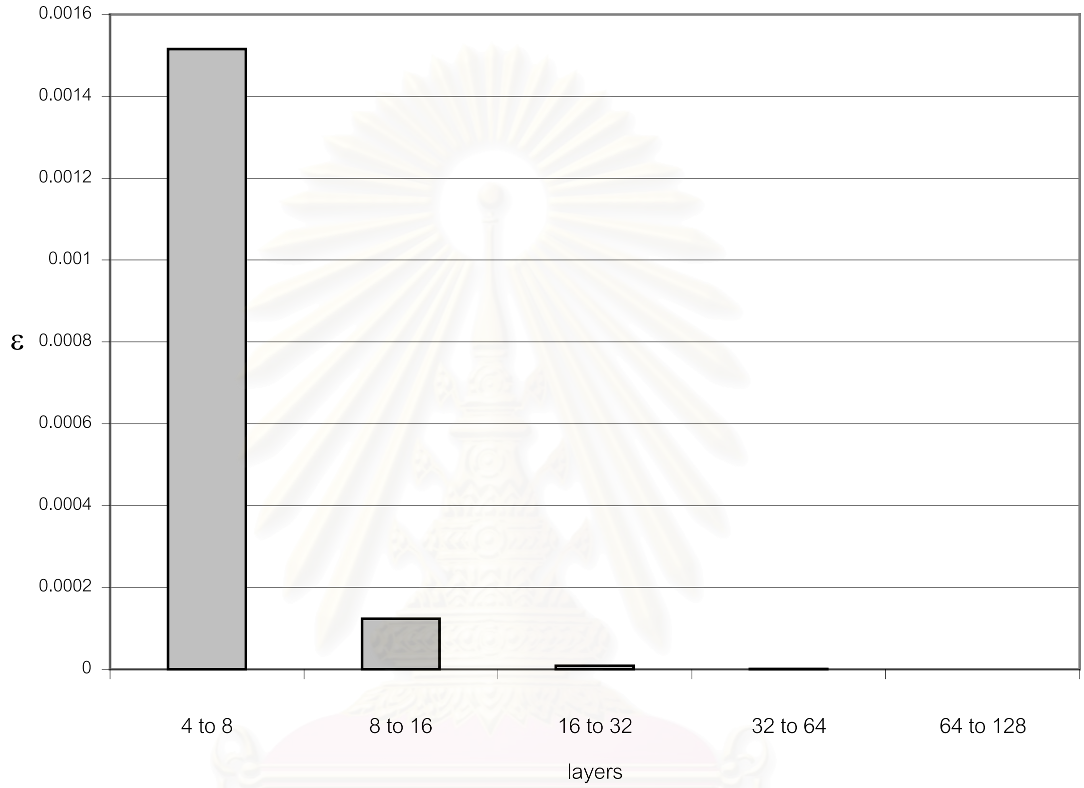
โดยที่ α_0 = 12 μ / °C , k_0 = 20 W/m °C , G_0 = 80 GPa , ν = 1/3



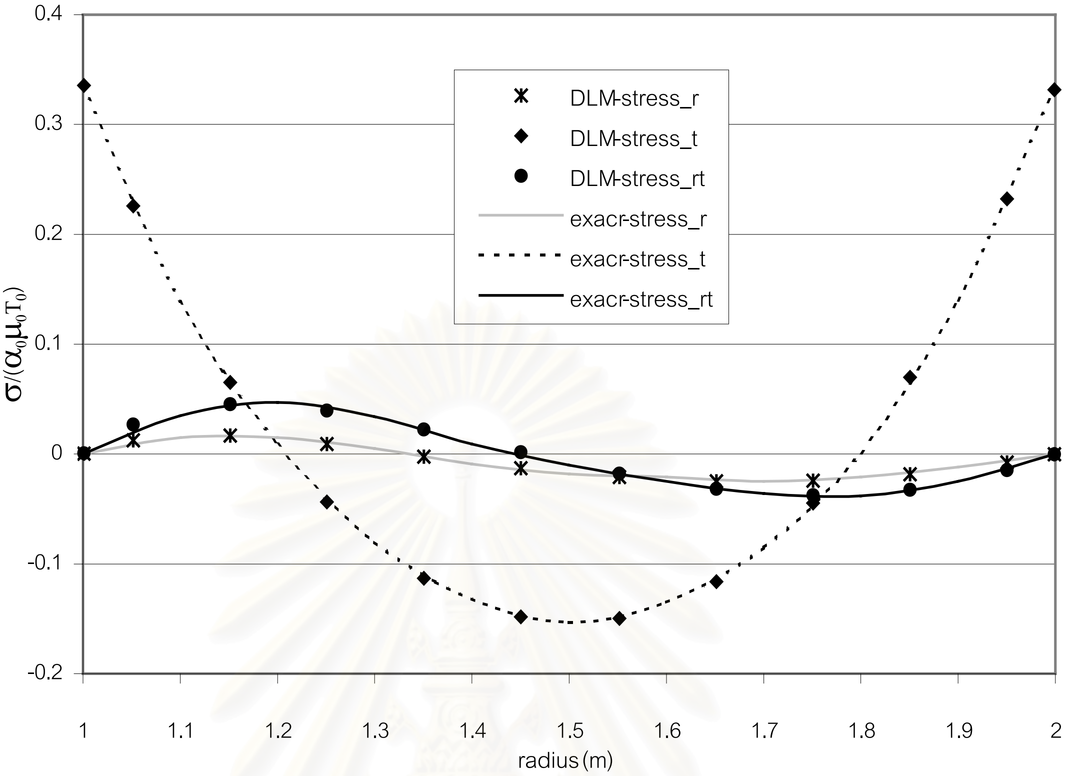
รูปที่ 5.25 ทรงกระบอกคุณสมบัติเปลี่ยนตามทิศทางรัศมีกำหนดอุณหภูมิที่ผิว

ในการวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองแยกชั้นในวิทยานิพนธ์นี้จะแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ โดยแต่ละชั้นต้องเป็นเนื้อเดียวกัน ดังนั้น การวิเคราะห์ปัญหานี้ซึ่งเป็นทรงกระบอกที่มีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมีสามารถทำได้โดยการแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ และคุณสมบัติของวัสดุแต่ละชั้นจะคำนวณได้จากความสัมพันธ์ข้างต้นโดยการแทนค่ารัศมี (r) ลงไปในสมการ ซึ่งยิ่งแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ มากเท่าใด ก็จะได้คุณสมบัติของทรงกระบอกใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้นเท่านั้น และคำตอบก็จะมีความแม่นยำขึ้นด้วย ในการหาการลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้นโดยพิจารณาจากค่า ε จะแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 4 , 8 , 16 , 32 , 64 และ 128 ชั้น การลู่เข้าของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้นแสดงดังรูปที่ 5.26 ซึ่งเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มจาก 64 ชั้น เป็น 128 ชั้นแล้ว จะได้ ε = 3.45×10^{-8} ซึ่งมีค่าน้อยมาก ดังนั้น ในการวิเคราะห์จะแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 128 ชั้น สำหรับการลู่เข้าของคำตอบเมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้นนั้นพบว่า คำตอบมีการลู่เข้าเมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เท่ากับ n ซึ่งแม้จะใช้จำนวนเทอมของโคไซน์มากกว่านี้คำตอบก็จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง หน่วยแรงทั้งสามทิศทางที่ค่า n และ q ต่างๆ แสดงดังกราฟรูปที่ 5.27 – 5.29 โดยหน่วยแรงทิศทางรัศมีและทิศทางเส้นรอบวงจะพิจารณาที่มุม 0 องศา ส่วนหน่วยแรงเฉือนจะพิจารณาที่มุมเท่ากับ 180/2n องศา

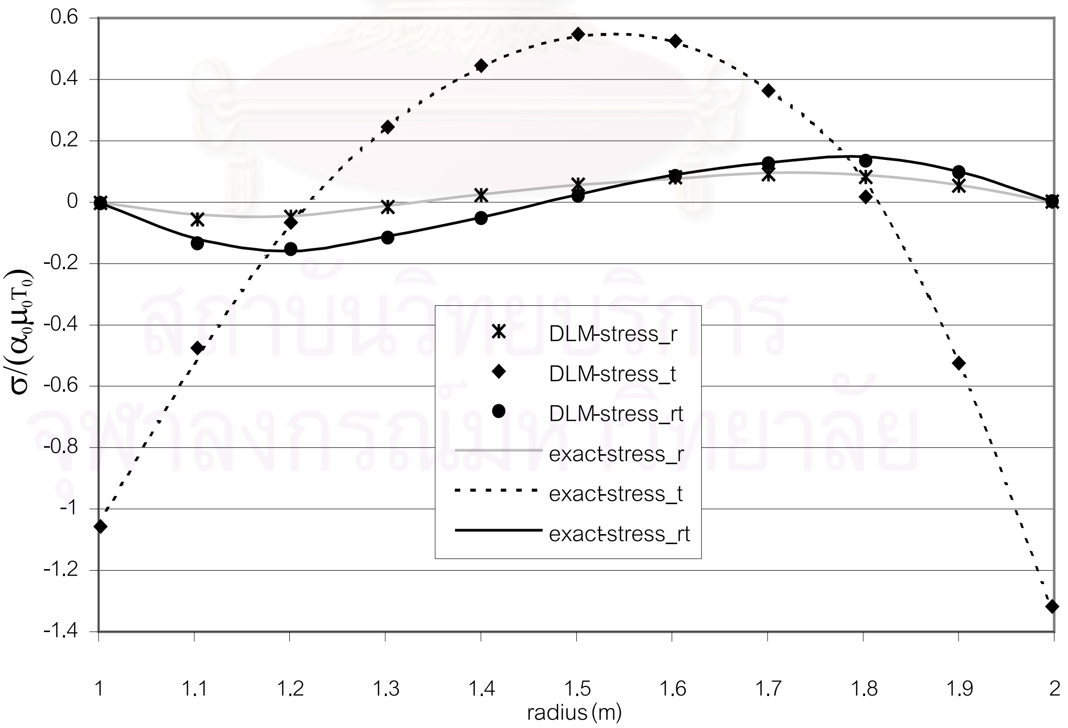
เมื่อพิจารณาจากกราฟ จะเห็นว่าผลการวิเคราะห์โดยแบบจำลองแยกชั้นนี้มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง (Liew และคณะ , 2003) ซึ่งบริเวณที่เกิดความคลาดเคลื่อนมากจะเป็นบริเวณใกล้กับผิวใน ทั้งนี้ ค่าคลาดเคลื่อนอาจเกิดจากการอ่านค่าจากกราฟของผลเฉลยแม่นตรง เพราะค่าของผลเฉลยแม่นตรงนี้ได้มาโดยการอ่านค่าจากกราฟซึ่งอาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนไปบ้างเล็กน้อย



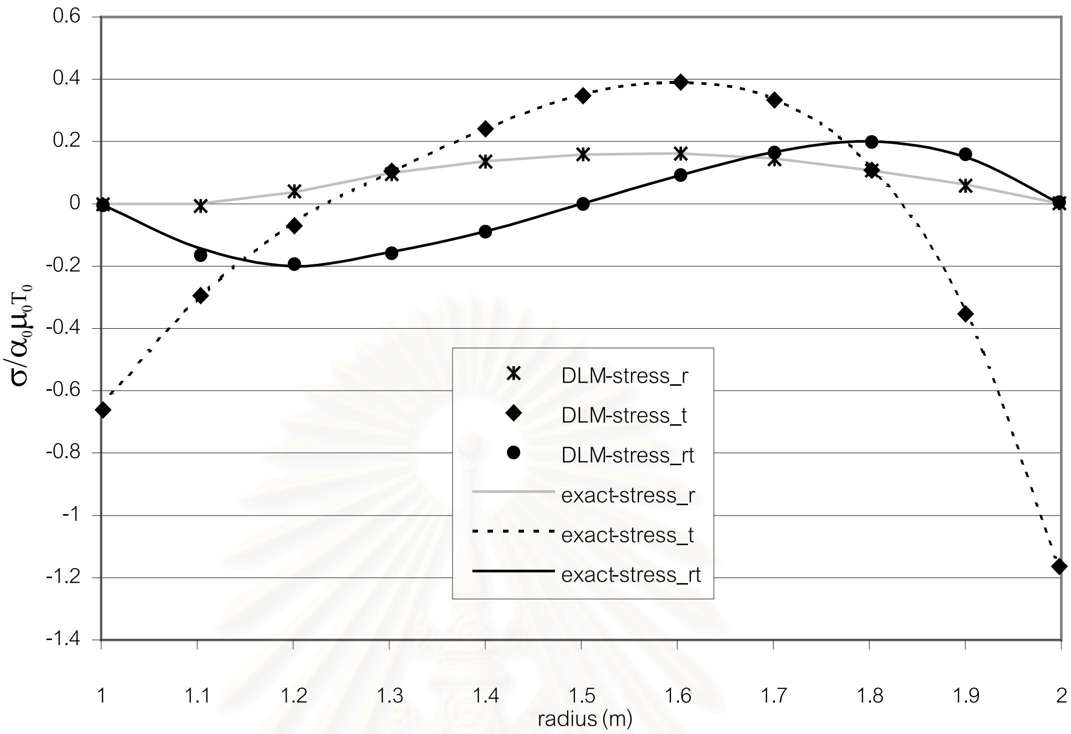
รูปที่ 5.26 ค่า ε ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น



รูปที่ 5.27 เปรียบเทียบหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงเมื่อใช้ค่า n = 2 , q = 0



รูปที่ 5.28 เปรียบเทียบหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงเมื่อใช้ค่า n = 2 , q = 0.5



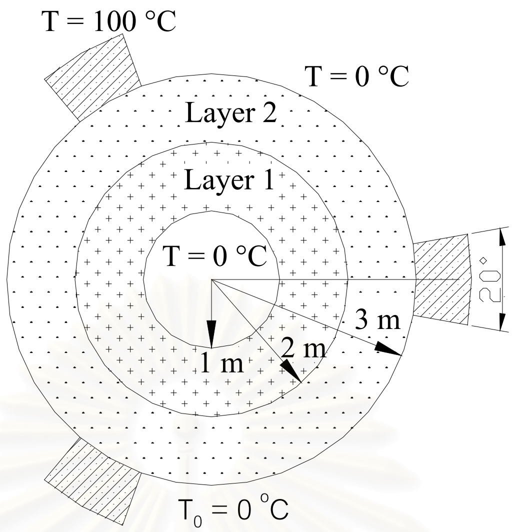
รูปที่ 5.29 เปรียบเทียบหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงเมื่อใช้ค่า n = 4 , q = 0.5

5.2.2 ทรงกระบอกสองชั้นกำหนดอุณหภูมิที่ผิวในภาวะชั่วครู่

สำหรับกรณีศึกษานี้ จะทำการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ประกอบด้วยวัสดุ 2 ชนิด เงื่อนไขขอบเขตเป็นการกำหนดอุณหภูมิ โดยปัญหาเป็นทรงกระบอกกลวงประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น รัศมีภายใน 1 ม. รัศมีภายนอก 3 ม. และผิวสัมผัสอยู่ที่ระยะ 2 ม. เริ่มต้นทรงกระบอกมีอุณหภูมิเท่ากับศูนย์องศาเซลเซียส เมื่อเริ่มจับเวลา ผิวในมีอุณหภูมิเป็นศูนย์ ผิวนอกมีอุณหภูมิเท่ากับ 100 ^{o}C ใน 3 ช่วงคือ -10 -10 องศา , 110 –130 องศา และ 230 - 250 องศา นอกช่วงดังกล่าวอุณหภูมิเป็นศูนย์ ลักษณะของทรงกระบอกแสดงได้ดังรูปที่ 5.30 และคุณสมบัติของวัสดุทั้งสองชั้นแสดงดังตารางที่ 5.4 (Takeuti และ Tanigawa,1978)

ตารางที่ 5.4 คุณสมบัติของวัสดุแต่ละชั้น กรณีทรงกระบอกสองชั้นกำหนดอุณหภูมิที่ผิวในภาวะชั่วครู่

ชั้นที่	k(W/m^{o}C)	ρ(kg/m^{3})	c(J/kg^{o}C)	E(GPa)	ν	α(μ/^{o}C)
1	11	7000	135.468	220	0.3	12
2	54	8000	71.81	72	0.34	23.1



รูปที่ 5.30 ทรงกระบอกสองชั้นกำหนดอุณหภูมิที่ผิวในภาวะชั่วครู่

ในการแทนเงื่อนไขขอบเขตซึ่งเป็นการกำหนดอุณหภูมิที่เป็นช่วงบริเวณผิวนอกของทรงกระบอกดังรูปที่ 5.30 นั้น จะทำการแทนการกระจายอุณหภูมิด้วยอนุกรมฟูเรียร์ ซึ่งการแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์จะใกล้เคียงกับความเป็นจริงแค่ไหนนั้น ก็ขึ้นอยู่กับจำนวนเทอมของโคไซน์ที่ใช้ โดยยิ่งใช้จำนวนเทอมมากขึ้นก็จะยิ่งได้การกระจายอุณหภูมิที่ผิวใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น รูปที่ 5.23(ก) - (ง) แสดงการแทนอุณหภูมิที่ผิวด้วยอนุกรมฟูเรียร์เมื่อใช้จำนวนเทอมของโคไซน์เท่ากับ 21, 27, 33 และ 39 เทอม ตามลำดับ ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่ายิ่งใช้จำนวนเทอมมากก็จะได้การกระจายอุณหภูมิที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น

สำหรับการพิจารณาการลู่เข้าจะแบ่งออกเป็นสามส่วน ได้แก่ การลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้น การลู่เข้าเมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้น และการลู่เข้าเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้น การหาการลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้นจะแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 2, 4, 8 และ 16 ชั้น ใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เท่ากับ 45 เทอม ส่วนการหาการลู่เข้าเมื่อใช้จำนวนเทอมเพิ่มขึ้นจะใช้จำนวนเทอม 21, 27, 33 และ 39 เทอม โดยแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 32 ชั้น สำหรับการหาการลู่เข้าเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้นจะใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 10, 5, 3 และ 2 วินาที โดยพิจารณาที่เวลา 90 วินาที และแบ่งทรงกระบอกเป็น 20 ชั้น จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์ที่ใช้เท่ากับ 33 เทอม การลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้น เมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้น และเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้นแสดงดังรูปที่ 5.32, 5.33 และ 5.34 ตามลำดับ ซึ่งเมื่อแบ่งทรงกระบอกเพิ่มจาก 8 ชั้น เป็น 16 ชั้น ใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มจาก 27 เทอม เป็น 33 เทอมและใช้ช่วงเวลาลดลงจาก 5 วินาทีเป็น 3 วินาทีแล้ว ε จะมีค่าเป็น 2.46×10^{-5}, 2.0×10^{-5} และ 1.37×10^{-6} ตามลำดับ ซึ่งมีค่าน้อยมาก ดังนั้นในการวิเคราะห์ปัญหาจะแบ่งทรงกระบอกเป็น 20 ชั้น ใช้จำนวนเทอมเท่ากับ 33 เทอม และใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 5 วินาที ผลการเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิ หน่วยแรงทิศทางรัศมี หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง และหน่วยแรงทิศทางตามยาว ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงแสดงดังกราฟรูปที่ 5.35 – 5.46 สัญลักษณ์ k_1 และ T' ที่แสดงในกราฟ คือ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุชั้นที่ 1 และอุณหภูมิทั้งสามช่วงที่ผิวซึ่งมีค่าเท่ากับ 100 $^\circ$C ตามลำดับ

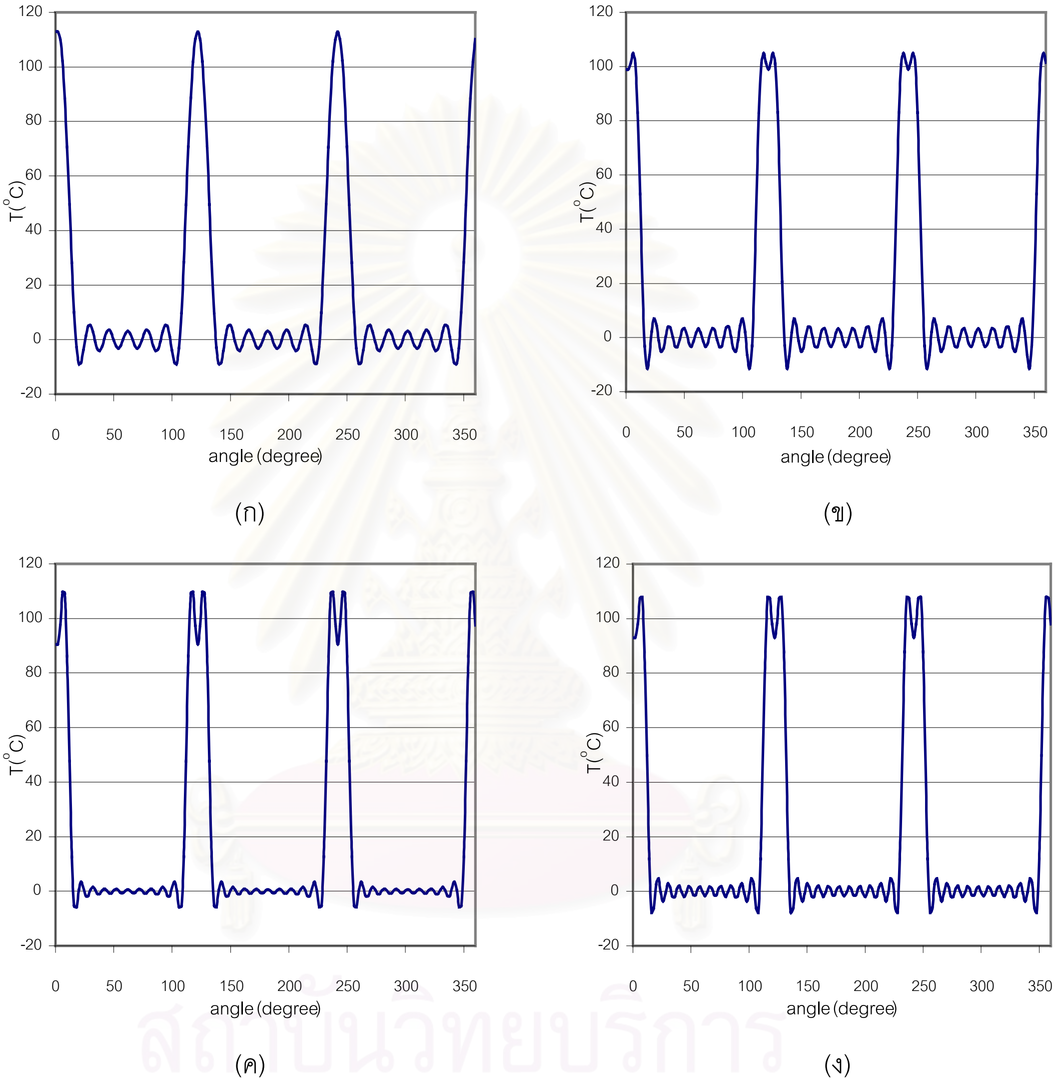
จากกราฟแสดงการเปรียบเทียบจะเห็นว่า ผลการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองแยกชั้นมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง โดยค่าอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิที่ขอบนอกและบริเวณใกล้เคียงจะมีความคลาดเคลื่อนสูงกว่าบริเวณอื่น ทั้งนี้เนื่องจากการแทนอุณหภูมิที่เป็นช่วงที่ผิวนอกด้วยอนุกรมฟูเรียร์ ซึ่งไม่สามารถแทนให้ถูกต้องตามความจริงได้ โดยเป็นเพียงการประมาณเท่านั้น ดังนั้น เงื่อนไขขอบเขตจึงไม่ตรงตามความเป็นจริง ทำให้การกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิที่เกิดขึ้นภายในทรงกระบอกมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น นอกจากนี้ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นอาจเกิดจากการอ่านค่าจากกราฟที่เป็นผลเฉลยแม่นตรงที่ไม่สามารถอ่านค่าได้ละเอียดเพียงพอ อย่างไรก็ตาม หากต้องการคำตอบที่มีความแม่นยำมากขึ้นก็สามารถทำได้โดยการแบ่งจำนวนชั้นและใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้น แต่ในขณะเดียวกันก็จะเสียเวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้นด้วย

5.3 สรุปผล

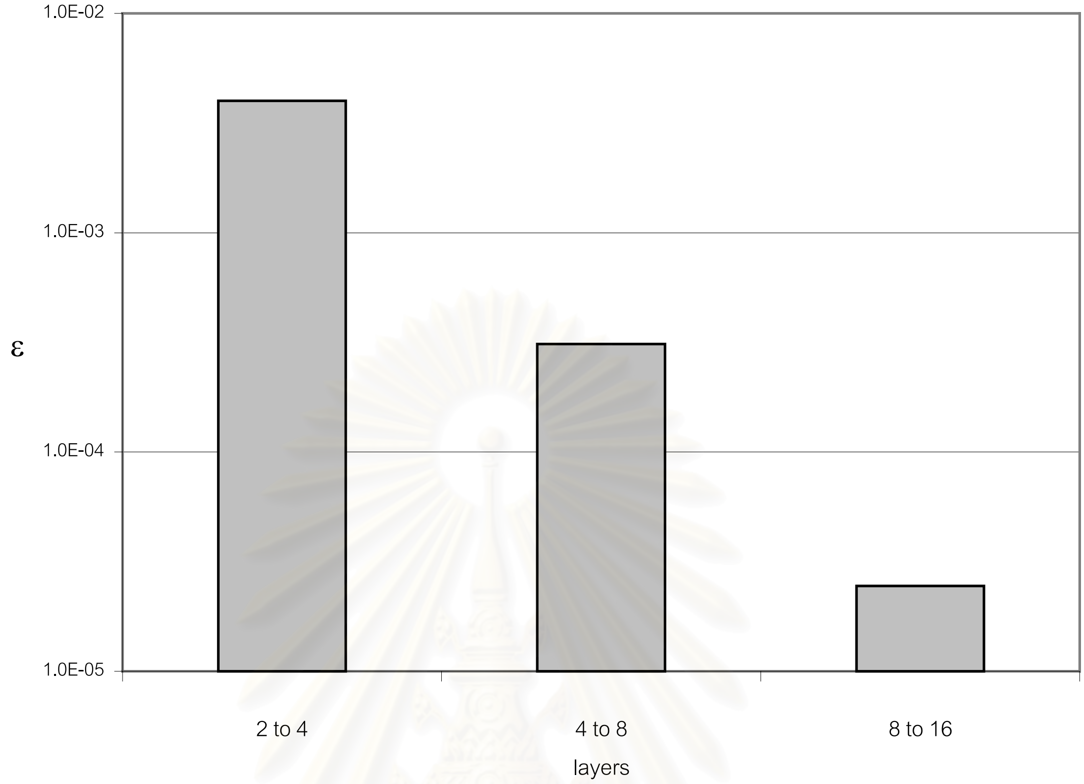
จากการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงจะเห็นว่า ในกรณีปัญหา 1 มิติ วิธีแบบจำลองแยกชั้นสามารถวิเคราะห์ปัญหาได้อย่างถูกต้องแม่นยำเป็นอย่างมาก ไม่ว่าทรงกระบอกจะประกอบด้วยวัสดุเพียงชั้นเดียวหรือหลายชั้น และเงื่อนไขขอบเขตจะเป็นแบบใดก็ตาม โดยมีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.5 % ทั้งนี้ ความถูกต้องแม่นยำจะขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นของทรงกระบอกที่แบ่ง โดยยิ่งแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้น ก็จะยิ่งมีความถูกต้องมากขึ้น สำหรับปัญหา 2 มิตินั้น ความถูกต้องก็อาจจะมากบ้างน้อยบ้างแตกต่างกันไปในแต่ละกรณี ขึ้นอยู่กับว่าลักษณะเงื่อนไขขอบเขตของปัญหานั้นเป็นอย่างไร ซึ่งจะเห็นว่า กรณีที่เงื่อนไขขอบเขตเป็นการกำหนดอุณหภูมิเป็นช่วงที่ผิว ซึ่งต้องใช้อนุกรมฟูเรียร์มาแทนการกระจายอุณหภูมินั้น ความถูกต้องแม่นยำอาจจะมีไม่มากเท่าใดนัก เนื่องจากเราไม่สามารถแทนอุณหภูมิที่เป็นช่วงด้วยอนุกรมฟูเรียร์ได้อย่างถูกต้อง แต่สำหรับกรณีที่การกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผิวเป็นฟังก์ชันของไซน์และโคไซน์อยู่แล้ว เราสามารถแทนการกระจายอุณหภูมิที่ผิวด้วยอนุกรมฟูเรียร์ได้อย่างถูกต้อง ดังนั้น จึงมีความถูกต้องแม่นยำสูง ทั้งนี้ ความถูกต้องแม่นยำในปัญหา 2 มิติ จะขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นที่แบ่งและจำนวนเทอมของไซน์หรือโคไซน์ที่ใช้ในอนุกรมฟูเรียร์ โดยเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้น ก็จะมีความถูกต้องมากขึ้นด้วย สำหรับจำนวนเทอมของไซน์หรือโคไซน์นั้น ความถูกต้องจะสูงขึ้นเมื่อใช้จำนวนเทอมมากขึ้น แต่ในบางกรณี ความถูกต้องแม่นยำจะมากที่สุดเมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์หรือโคไซน์ค่าหนึ่ง ซึ่งแม้ว่าเราจะใช้จำนวนเทอมเพิ่มขึ้นจากค่าดังกล่าว คำตอบก็จะไม่เปลี่ยนแปลง นั่นคือ ความถูกต้องแม่นยำก็ยังมีเท่าเดิม ดังเช่นในกรณีศึกษาที่ 5.2.3 สำหรับปัญหาในภาวะชั่วครู่ ความถูกต้องแม่นยำยังขึ้นอยู่กับช่วงเวลา(time step) ที่ใช้อีกด้วย โดยยิ่งใช้ช่วงเวลาที่มีค่าน้อยก็จะยิ่งทำให้คำตอบมีความถูกต้องแม่นยำสูงขึ้น หากเปรียบเทียบระหว่างปัญหา 1 มิติ กับ 2 มิติแล้ว จะเห็นว่า ผลการวิเคราะห์ปัญหา 1 มิติ จะมีความถูกต้องแม่นยำสูงกว่าปัญหา 2 มิติ

ความถูกต้องแม่นยำของผลการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองแยกชั้นจะมากหรือน้อยเพียงใดนั้น เราสามารถกำหนดได้โดยการกำหนดจำนวนชั้นของทรงกระบอกที่แบ่ง จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์ และช่วงเวลาที่ใช้ในปัญหาภาวะชั่วครู่ ซึ่งความถูกต้องแม่นยำจะสูงขึ้นเมื่อแบ่งทรงกระบอกให้มีจำนวนชั้นเพิ่มขึ้น ใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้น และใช้ช่วงเวลาลดลง แต่ในขณะเดียวกัน ก็จะเสียเวลาในการวิเคราะห์

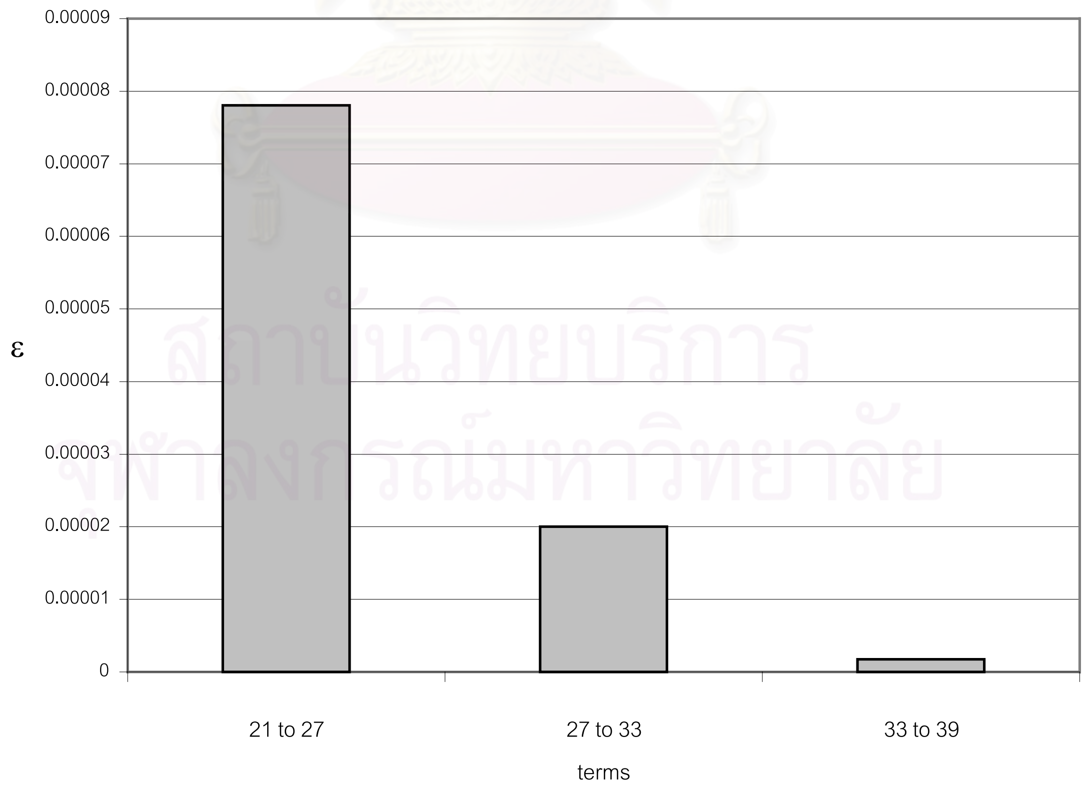
และใช้หน่วยความจำของคอมพิวเตอร์มากขึ้นด้วย ดังนั้น ในการวิเคราะห์ปัญหาใดๆ เราจะต้องคำนึงทั้งความถูกต้องแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์ควบคู่กันไปด้วย



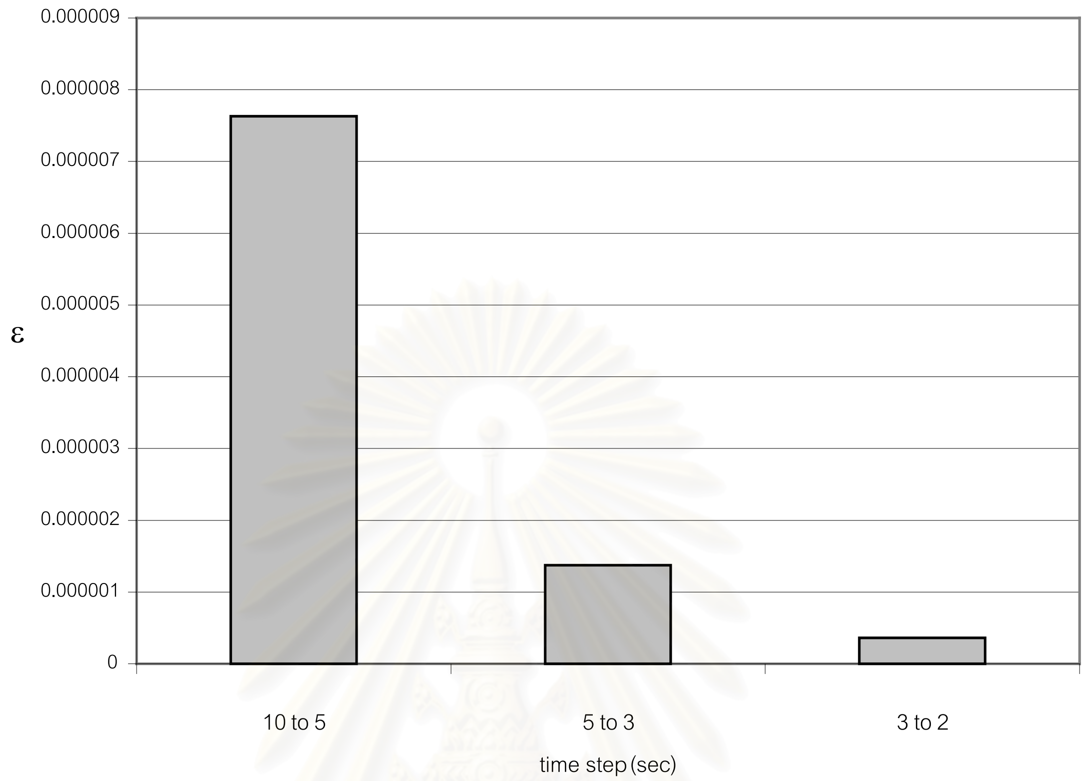
รูปที่ 5.31 การแทนอุณหภูมิที่เป็นช่วงด้วยอนุกรมฟูเรียร์โดยใช้จำนวนเทอมต่างๆ กัน (ก) 21 เทอม (ข) 27 เทอม (ค) 33 เทอม (ง) 39 เทอม



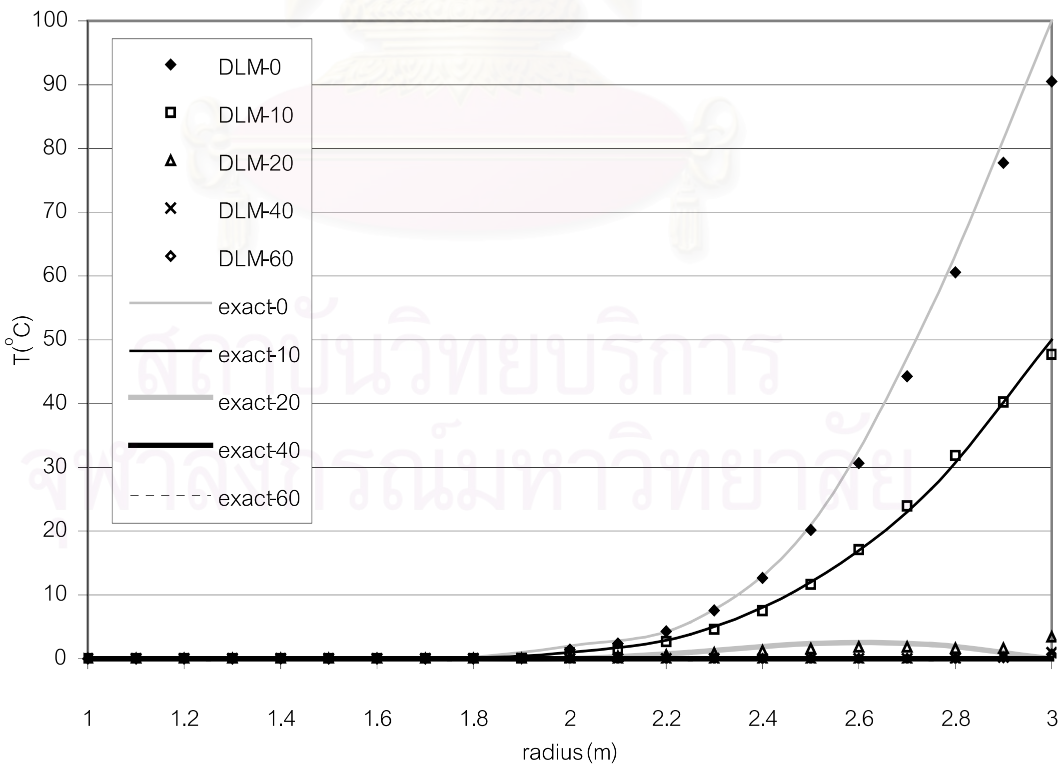
รูปที่ 5.32 ค่า ε ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น



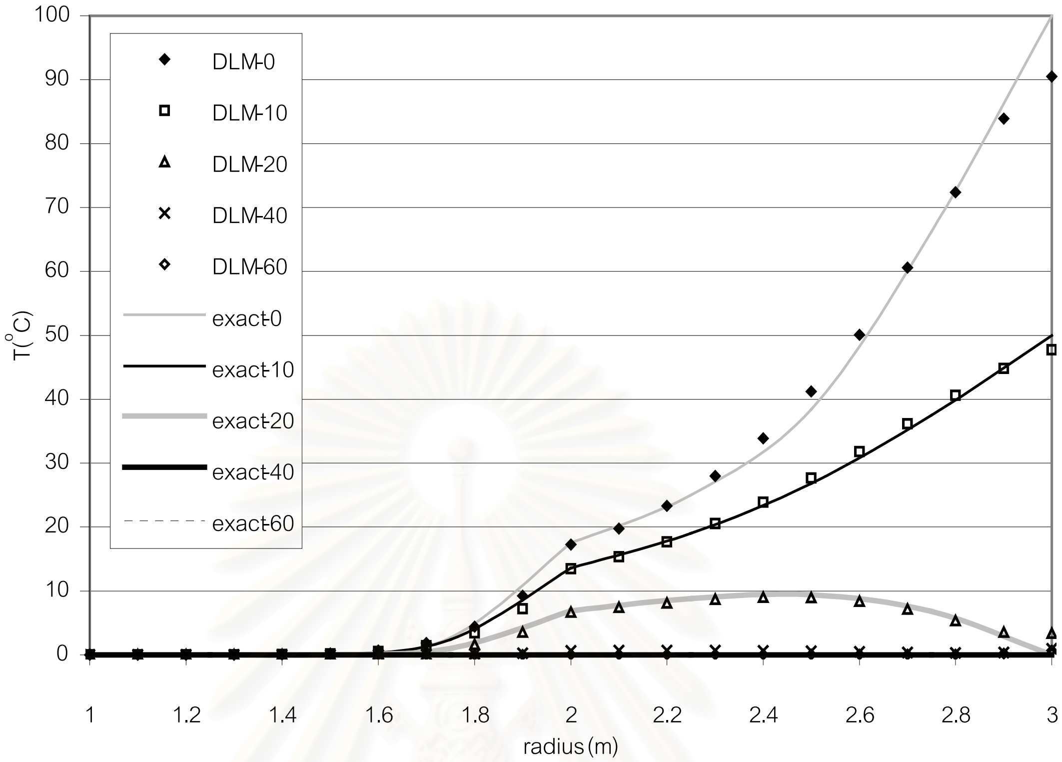
รูปที่ 5.33 ค่า ε ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้น



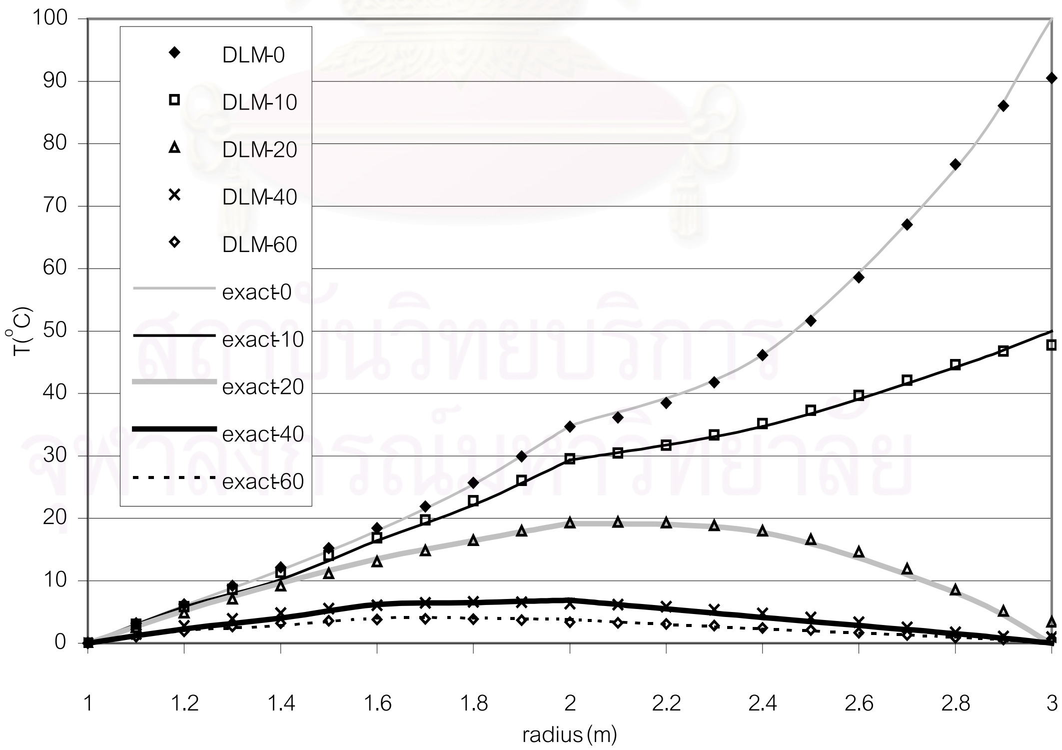
รูปที่ 5.34 ค่า ε ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้น



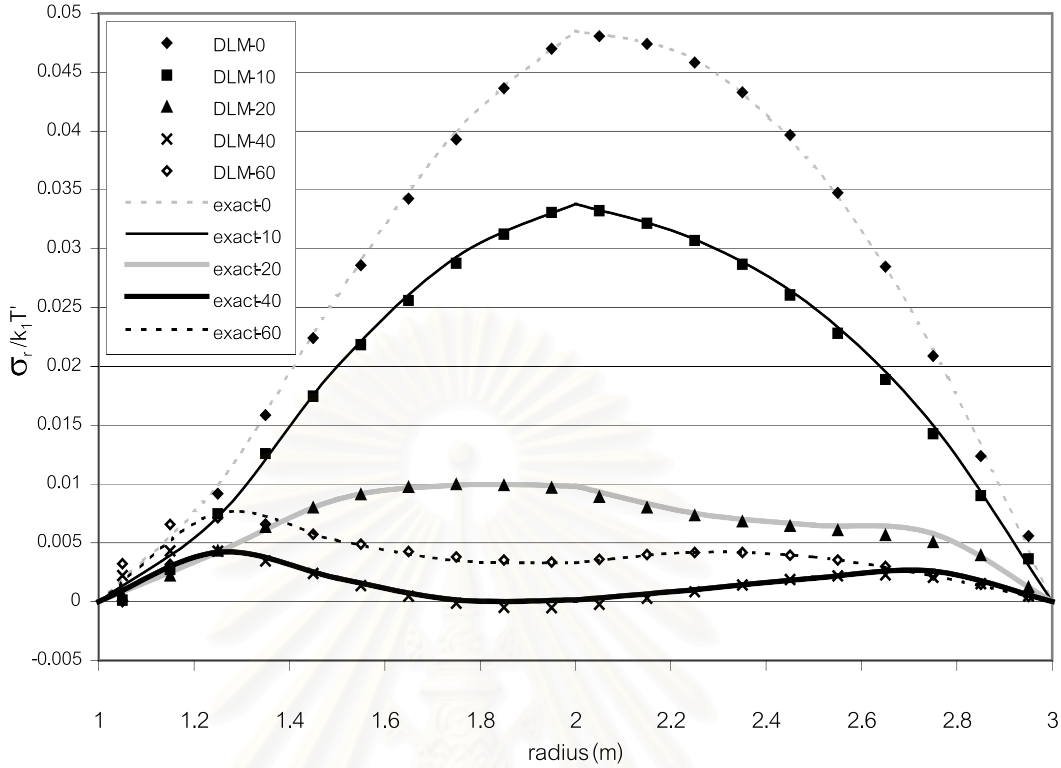
รูปที่ 5.35 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง ที่เวลา 86 วินาที



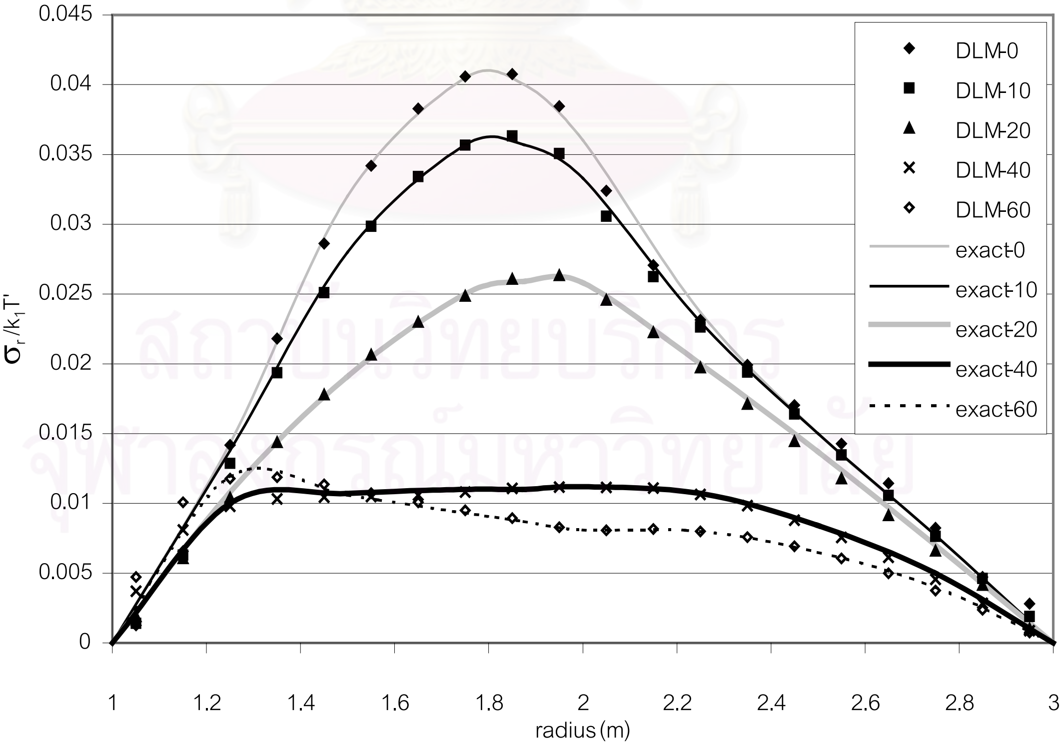
รูปที่ 5.36 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง ที่เวลา 345 วินาที



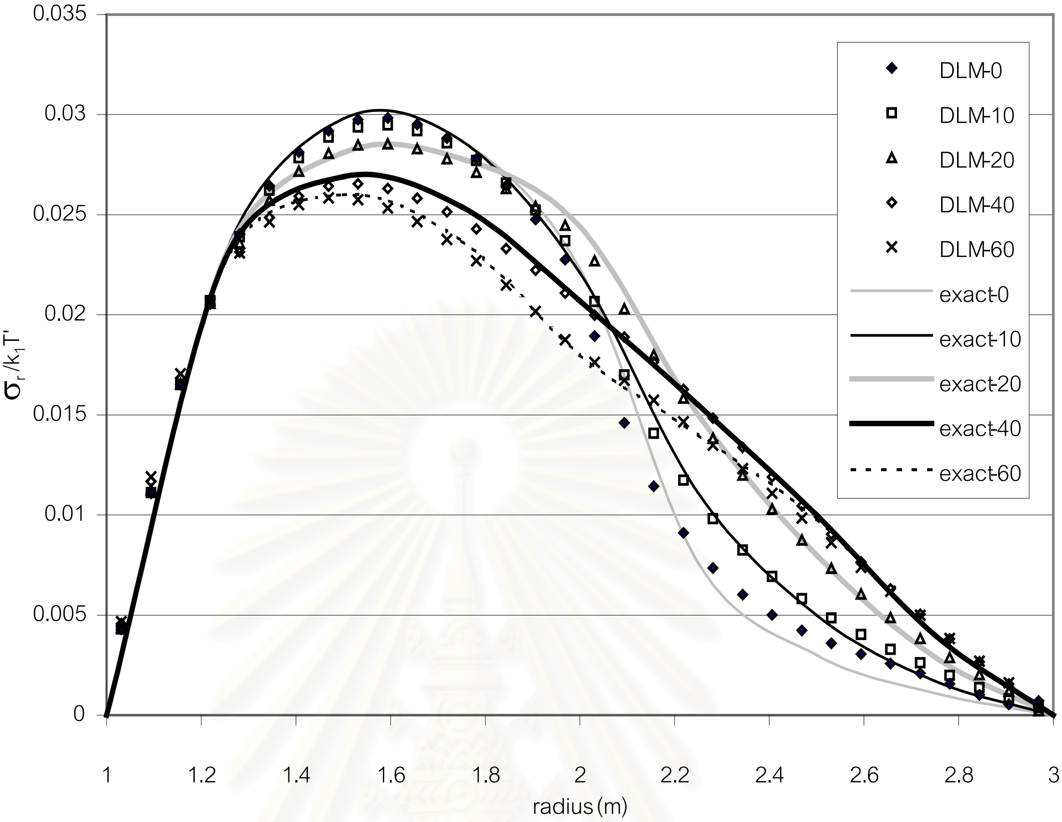
รูปที่ 5.37 เปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง ที่ภาวะอยู่ตัว



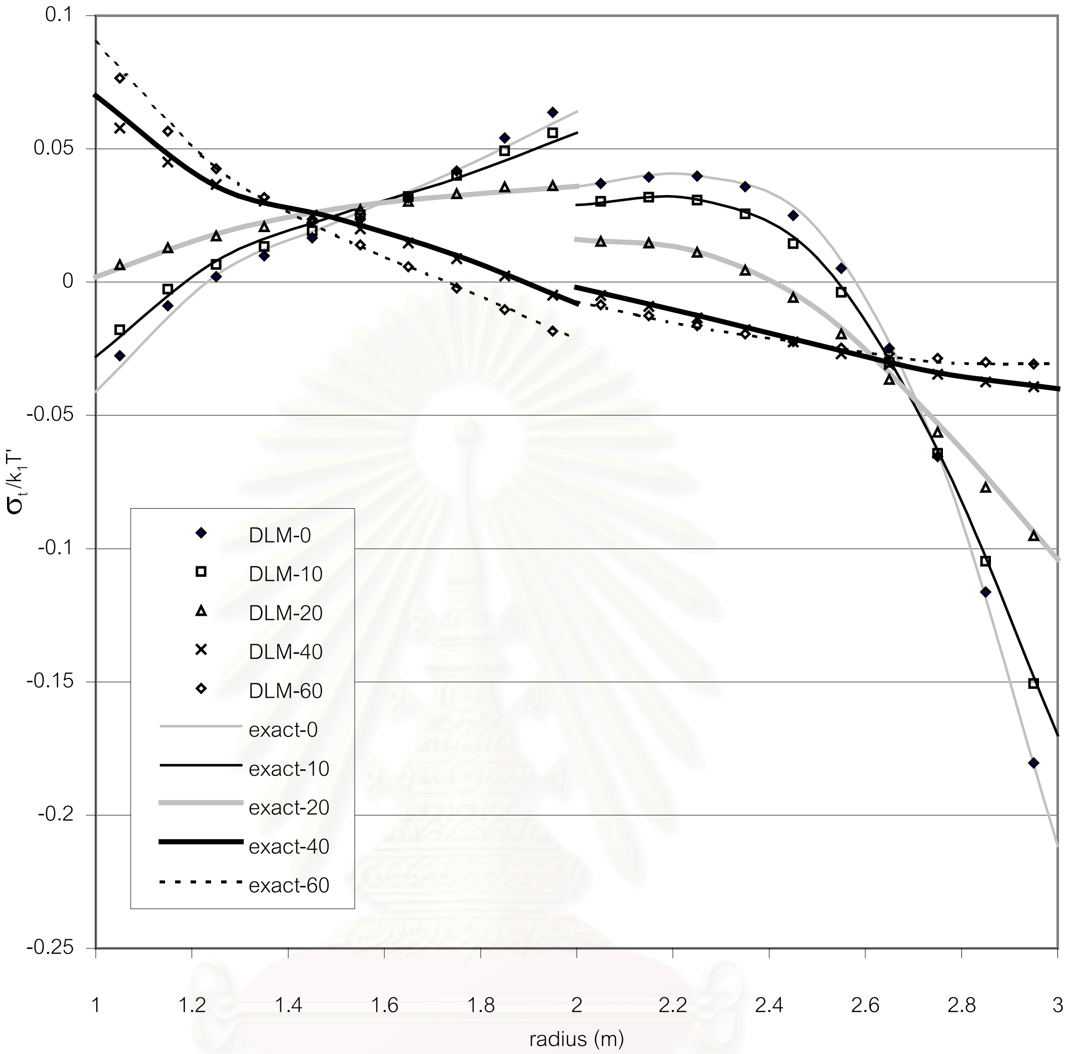
รูปที่ 5.38 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางรัศมีที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงที่เวลา 86 วินาที



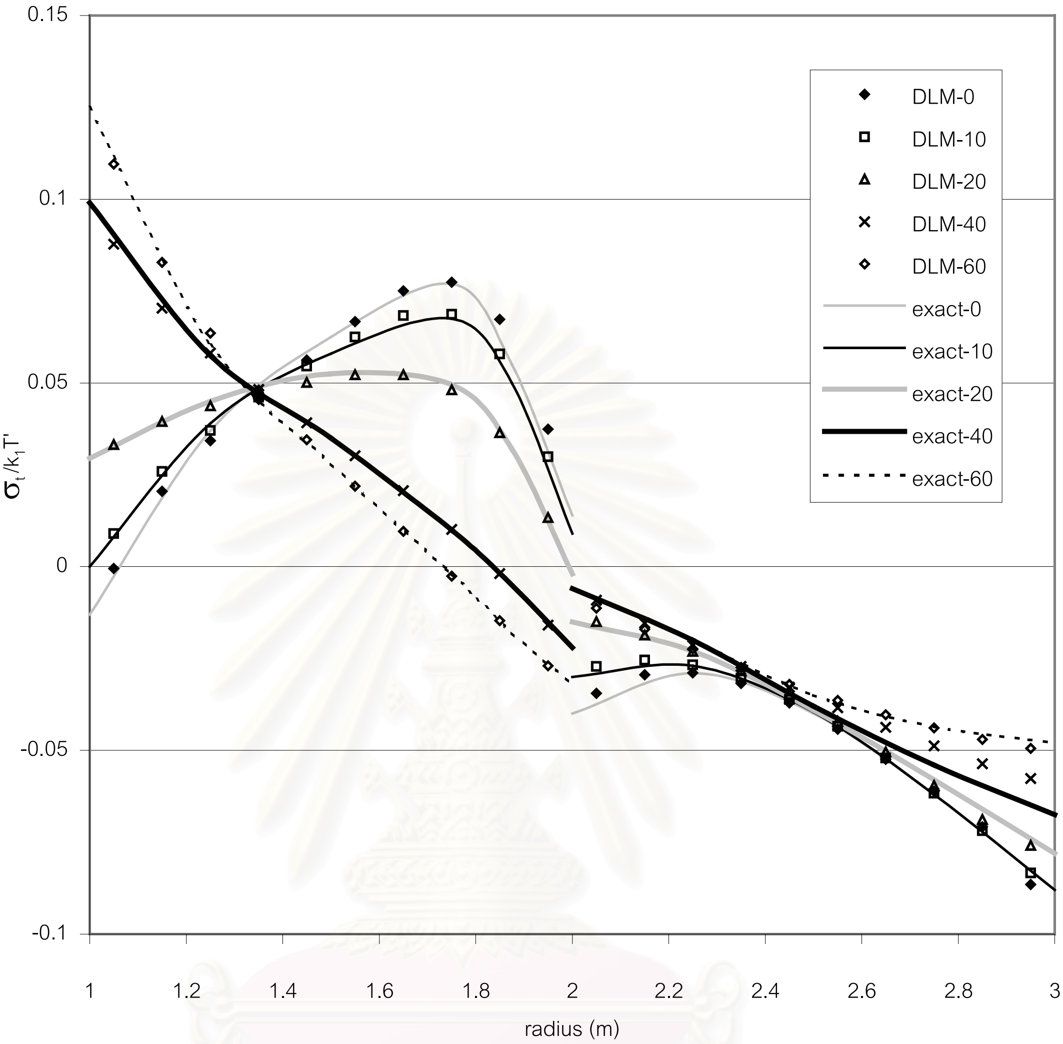
รูปที่ 5.39 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางรัศมีที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงที่เวลา 345 วินาที



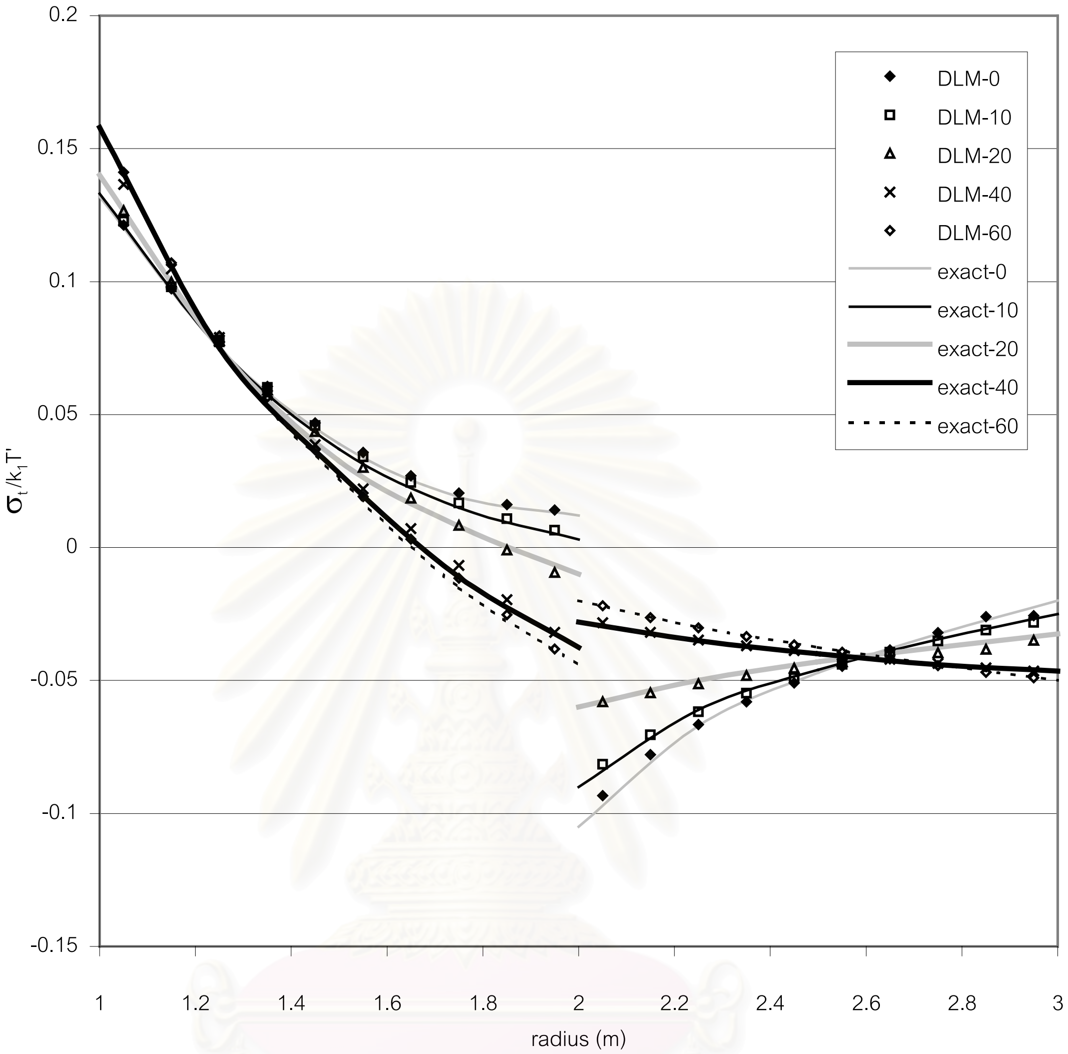
รูปที่ 5.40 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางรัศมีที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง ที่ภาวะอยู่ตัว



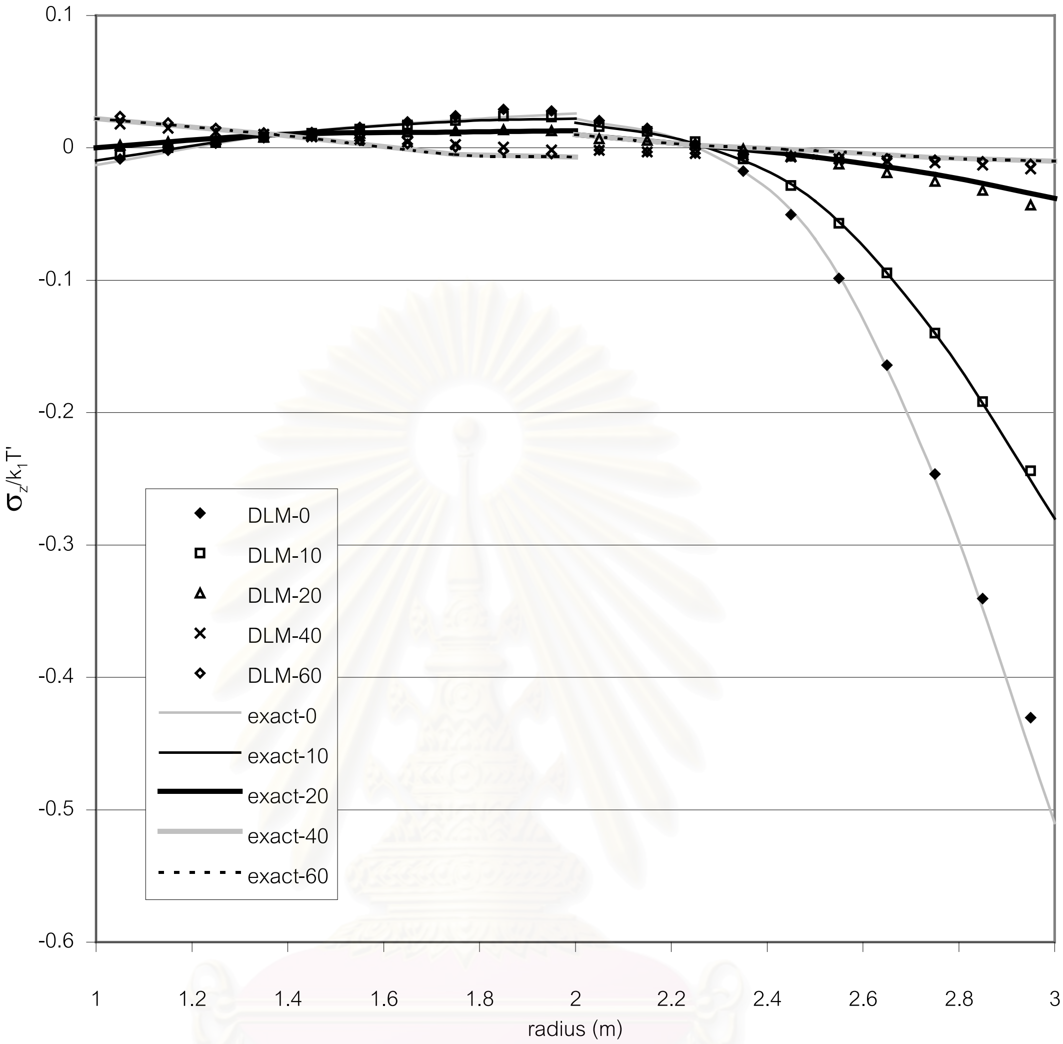
รูปที่ 5.41 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงที่เวลา 86 วินาที



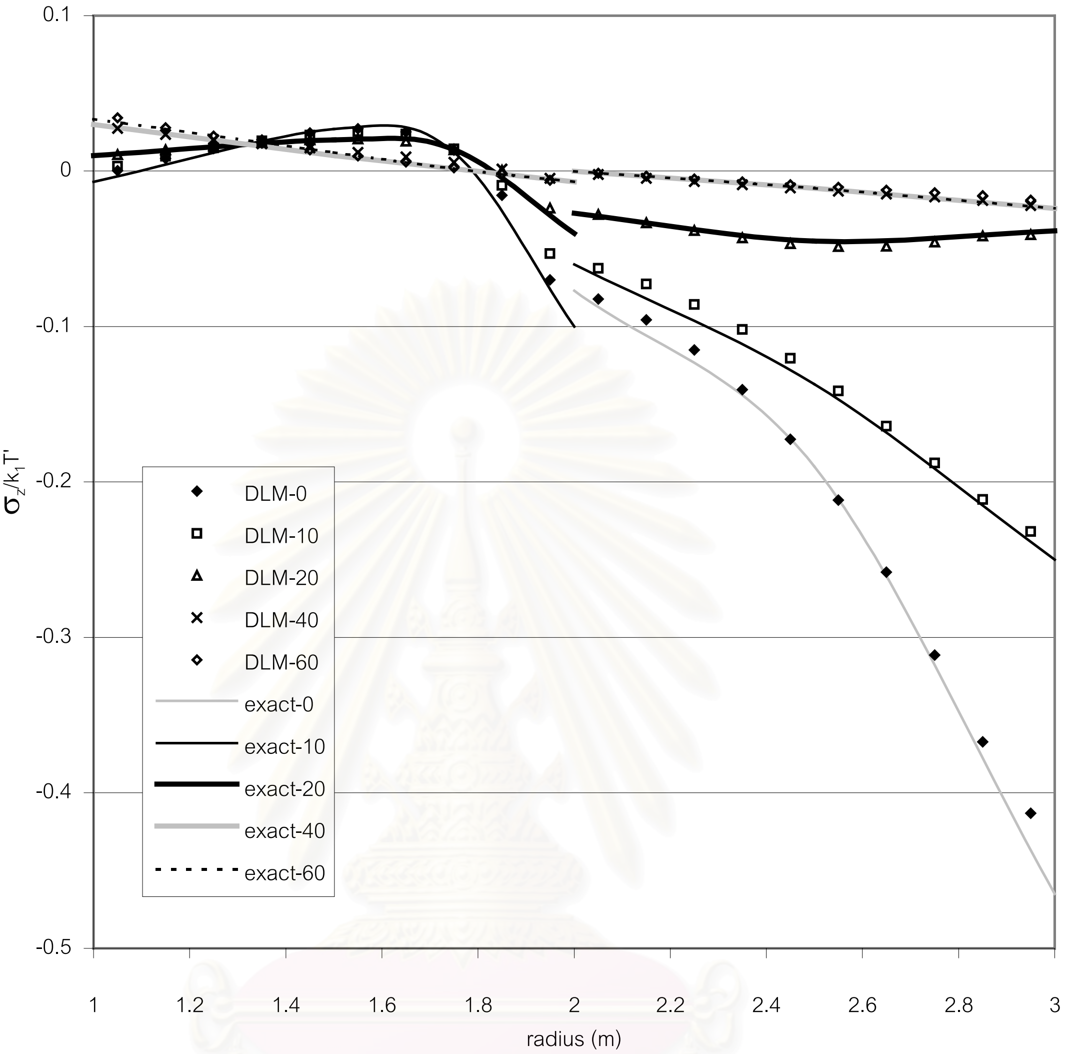
รูปที่ 5.42 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงที่เวลา 345 วินาที



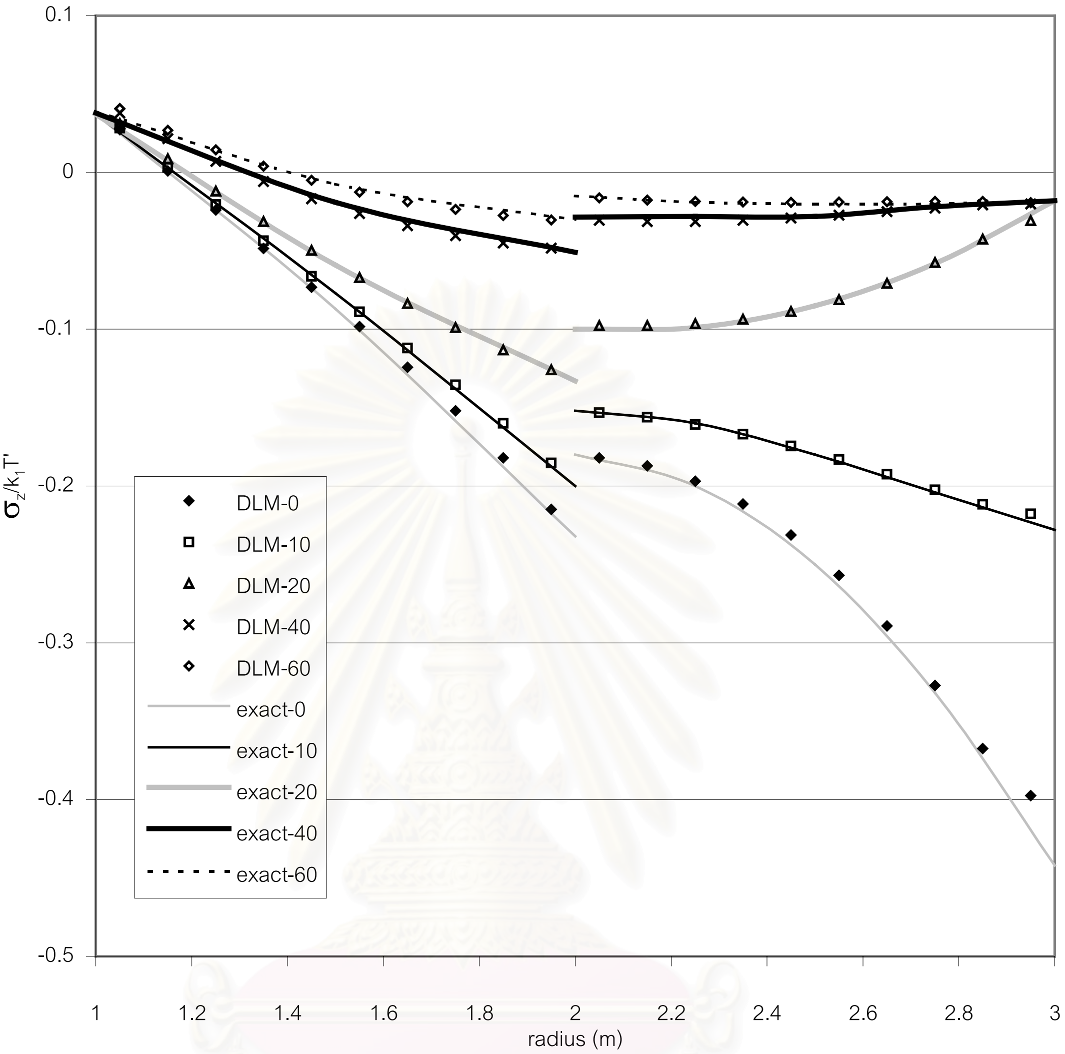
รูปที่ 5.43 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงที่ภาวะอยู่ตัว



รูปที่ 5.44 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางตามยาวที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง ที่เวลา 86 วินาที



รูปที่ 5.45 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางตามยาวที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรง ที่เวลา 345 วินาที



รูปที่ 5.46 เปรียบเทียบหน่วยแรงทิศทางตามยาวที่มุมต่างๆ ระหว่างแบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงที่ภาวะอยู่ตัว

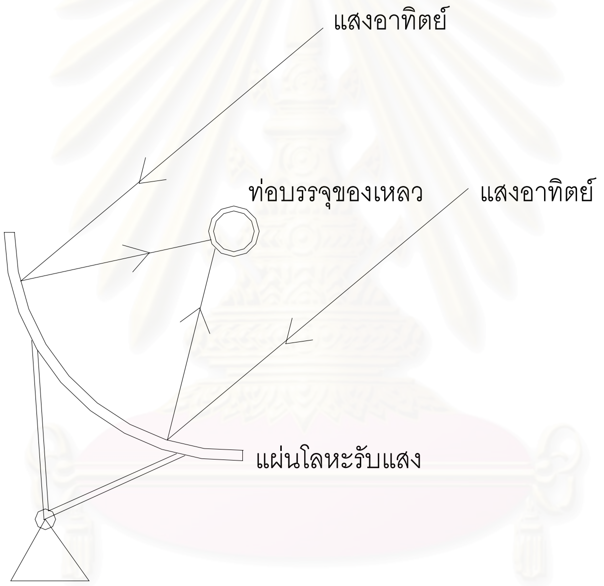
เมื่อได้ตรวจสอบโปรแกรมจนพบว่ามีความถูกต้องแล้ว ลำดับต่อไป จะใช้แบบจำลองแยกชั้นไปวิเคราะห์ปัญหาที่มีอยู่จริง นั่นคือ ท่อบรรจุของเหลวในระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์ ทั้งนี้ เพื่อแสดงให้เห็นถึงขอบเขตความสามารถ และประโยชน์ของงานวิจัย ดังจะกล่าวต่อไปในบทที่ 6

บทที่ 6

กรณีศึกษาระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์

6.1 บทนำ

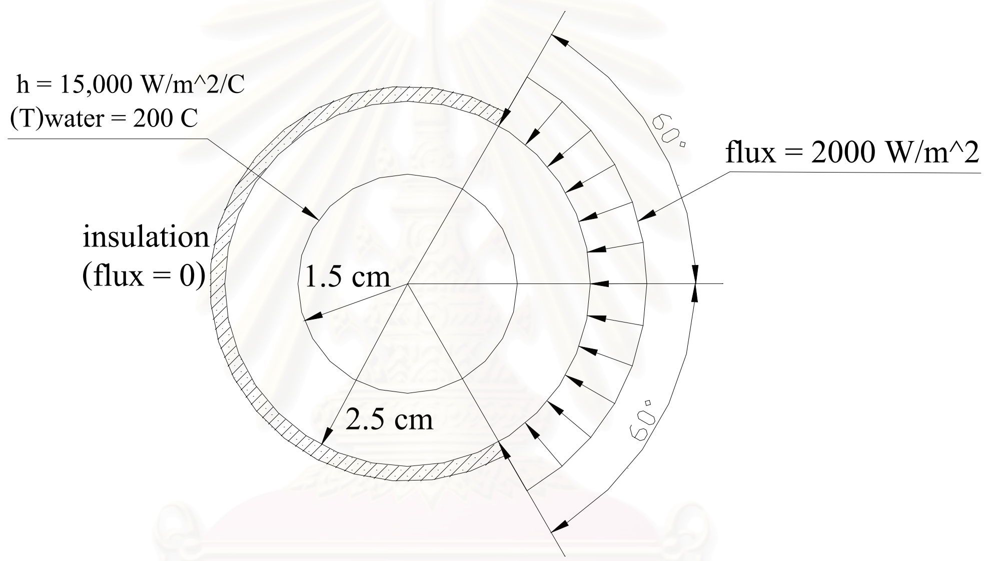
หลังจากที่ได้ตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของแบบจำลองแยกชั้น (discrete - layer model) ที่ได้พัฒนาขึ้นในวิทยานิพนธ์นี้ (บทที่ 5) แล้ว ในบทนี้จะนำแบบจำลองแยกชั้นมาวิเคราะห์ปัญหาที่สามารถพบเห็นได้จริง โดยปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์นี้เป็นท่อบรรจุของเหลวในระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์ (trough) ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 ระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์

ระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์นี้ประกอบไปด้วยส่วนรับแสง (receiver) ที่เป็นแผ่นโลหะดัดโค้งเป็นแนวยาว และส่วนที่เป็นท่อเพื่อใช้บรรจุของเหลว หลักการของเครื่องปั่นไฟฟ้านี้ก็คือ เมื่อแสงอาทิตย์ส่องมากระทบกับแผ่นโลหะรับแสง ก็จะสะท้อนไปยังท่อบรรจุของเหลวซึ่งวางอยู่ที่จุดโฟกัสของแผ่นรับแสง ทำให้ของเหลวในท่อซึ่งอาจจะเป็นน้ำมันหรือของเหลวที่สามารถทำให้ร้อนได้ง่ายมีอุณหภูมิสูงขึ้นได้ถึง 400 องศาเซลเซียส และสามารถนำไปผลิตกระแสไฟฟ้าได้ ในปัญหาดังกล่าวนี้ จะเห็นว่าแสงอาทิตย์ที่สะท้อนมายังท่อบรรจุของเหลวจะตกกระทบที่ด้านใดด้านหนึ่งของท่อ ดังนั้น ที่ผิวของท่อจะมีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าไม่สม่ำเสมอในทิศทางเส้นรอบวง ทำให้การนำความร้อนที่เกิดขึ้นภายในท่อไม่มีความสมมาตรรอบแกน โดยเกิดขึ้นใน 2 มิติ ในระนาบตัดขวาง และเนื่องจากท่อบรรจุของเหลวมีความยาวมากเมื่อเทียบกับขนาดของพื้นที่หน้าตัด ดังนั้น จึงสามารถพิจารณาปัญหานี้ให้เป็นปัญหาความเครียดระนาบได้

ปัญหาที่จะวิเคราะห์เป็นท่อบรรจุของเหลวในระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์ โดยกำหนดให้มีรัศมีภายใน 1.5 ซ.ม. รัศมีภายนอก 2.5 ซ.ม. ผิวในมีการพาความร้อนเกิดขึ้น ซึ่งขณะระบบทำงานของเหลวในท่อมีอุณหภูมิ 200 องศาเซลเซียส ส่วนค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน(h) เท่ากับ 15,000 $W/m^2/\ ^oC$ แสงอาทิตย์ที่สะท้อนจากแผ่นโลหะรับแสงจะตกกระทบที่ผิวนอกของท่อเป็นมุมรอบจุดศูนย์กลาง 120 องศา ทำให้มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าเท่ากับ 2,000 W/m^2 ส่วนบริเวณที่เหลือที่แสงไม่ได้ตกกระทบจะพิจารณาเป็นฉนวน นั่นคือ ฟลักซ์ความร้อนเป็นศูนย์ ลักษณะของปัญหาเป็นดังรูปที่ 6.2 ทั้งนี้ ข้อมูลต่างๆ ที่กล่าวมาได้อ้างอิงจาก Sukhatme(1996)



รูปที่ 6.2 ท่อบรรจุของเหลวในระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์

โดยทั่วไป วัสดุที่นำมาทำเป็นท่อบรรจุของเหลวในระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์นี้ส่วนใหญ่จะเป็นเหล็กหรือทองแดงอย่างใดอย่างหนึ่ง แต่ในที่นี้ จะพิจารณาท่อที่มีเหล็กและทองแดงประกอบกันเป็นชั้นๆ หลายๆ ลักษณะ จากนั้น จะทำการวิเคราะห์พฤติกรรมและเปรียบเทียบกันว่ามีความแตกต่างกันอย่างไร แบบใดที่ได้ผลดีที่สุด รูปแบบของท่อที่จะทำการวิเคราะห์แบ่งเป็น 6 กรณีดังต่อไปนี้

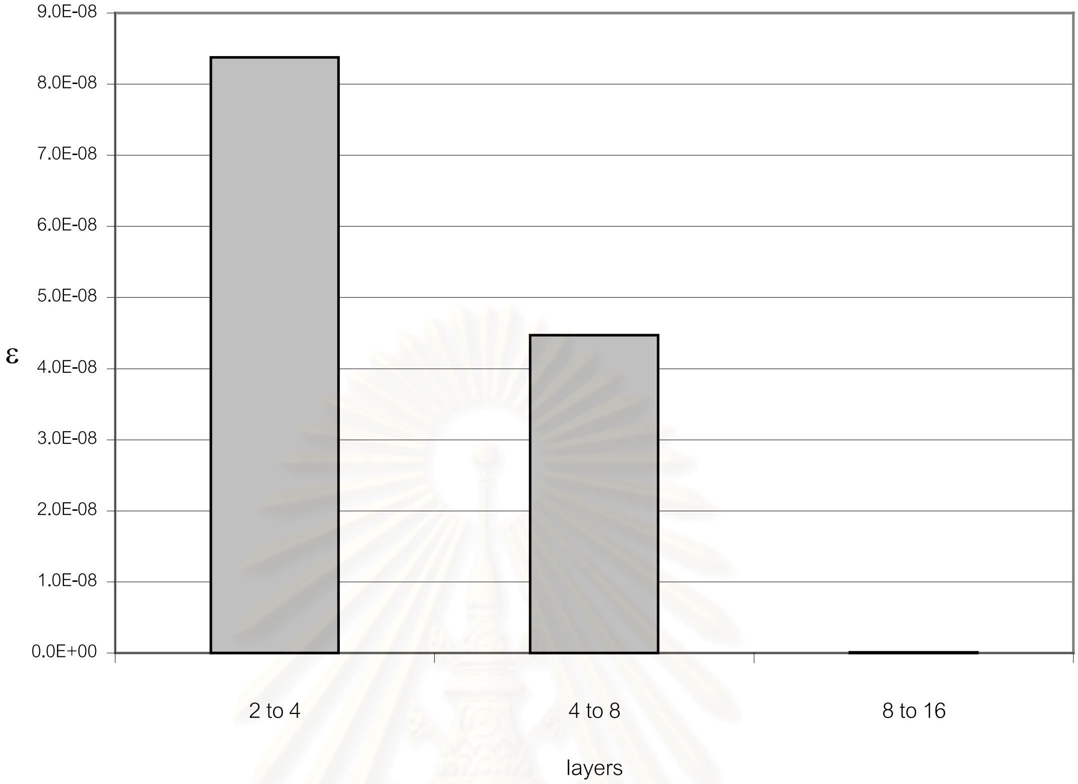
1) ประกอบด้วยเหล็กเพียงอย่างเดียว
2) ประกอบด้วยทองแดงเพียงอย่างเดียว
3) ประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นเหล็ก ส่วนชั้นนอกเป็นทองแดง แต่ละชั้นหนาเท่ากัน
4) ประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นทองแดง ส่วนชั้นนอกเป็นเหล็ก แต่ละชั้นหนาเท่ากัน
5) ประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นเหล็กหนา 0.375 ซ.ม. ส่วนชั้นกลางเป็นทองแดงหนา 0.25 ซ.ม.
6) ประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดงหนา 0.375 ซ.ม. ส่วนชั้นกลางเป็นเหล็กหนา 0.25 ซ.ม.

ทั้ง 6 กรณีนี้ จะวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัว (steady state) ก่อน แล้วทำการเปรียบเทียบผลที่เกิดขึ้น จากนั้นจึงจะทำการวิเคราะห์ในภาวะชั่วครู่ (transient) ต่อไป คุณสมบัติต่างๆ ของเหล็กและทองแดงแสดงดังตารางที่ 6.1 (David,1996 ; Frank และ Mark,1986)

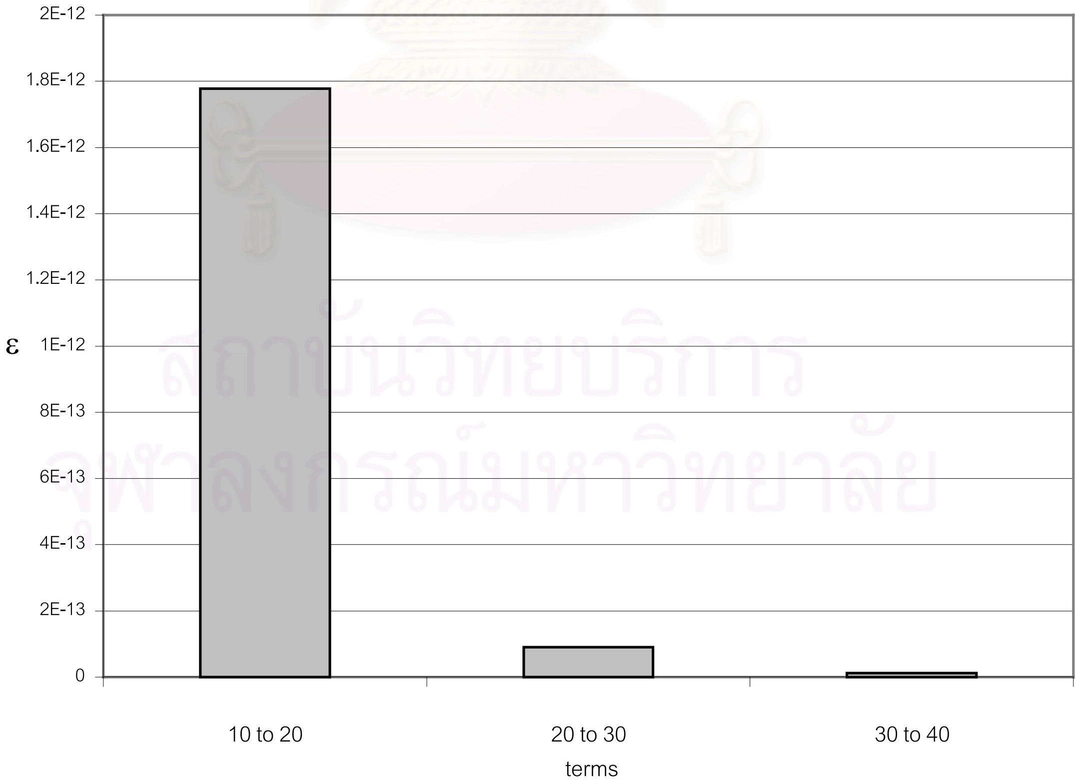
ตารางที่ 6.1 คุณสมบัติของเหล็กและทองแดง

วัสดุ	k(W/m°C)	ρ(kg/m^3)	c(J/kg°C)	E(GPa)	G(GPa)	ν	α(μ/°C)	σ_y (MPa)
เหล็ก	43	7801	473	210	76	0.29	13.5	590
ทองแดง	83	8666	410	138	50	0.35	18.4	510

ในการวิเคราะห์ปัญหานี้ จะทำการแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ แต่ละชั้นหนาเท่ากัน โดยก่อนที่จะเริ่มวิเคราะห์ จะทำการหาการลู่เข้าของการกระจัดทิศทางรัศมีโดยพิจารณาจากสัดส่วนระหว่างค่ายูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองต่อค่าผลรวมของคำตอบยกกำลังสอง (ε) ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 5 เพื่อดูว่าคำตอบมีการลู่เข้าเมื่อแบ่งทรงกระบอกเป็นจำนวนกี่ชั้น และใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เป็นเท่าใด โดยกรณีที่นำมาหาการลู่เข้าคือกรณีท่อเหล็กชั้นเดียว การหาการลู่เข้าเมื่อแบ่งจำนวนชั้นเพิ่มขึ้นจะแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 2, 4, 8 และ 16 ชั้น จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์ที่ใช้เท่ากับ 30 เทอม ส่วนการหาการลู่เข้าเมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้นจะใช้จำนวนเทอมเท่ากับ 10 , 20 , 30 และ 40 เทอม โดยพิจารณาแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 16 ชั้น การลู่เข้าของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น และเมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้นแสดงดังรูปที่ 6.3 และ 6.4 ตามลำดับ จากกราฟจะเห็นว่า เมื่อแบ่งชั้นของทรงกระบอกเพิ่มจาก 8 ชั้น เป็น 16 ชั้น และเมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มจาก 20 เทอม เป็น 30 เทอม แล้ว ε มีค่าเท่ากับ 9.44×10^{-11} และ 9.06×10^{-14} ซึ่งมีค่าน้อยมาก ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า เมื่อแบ่งทรงกระบอกเป็น 8 ชั้น และใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เท่ากับ 20 เทอม คำตอบก็มีการลู่เข้าแล้ว แต่เพื่อความถูกต้องแม่นยำยิ่งขึ้น ในการวิเคราะห์จะทำการแบ่งทรงกระบอกออกเป็น 32 ชั้น และใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เท่ากับ 30 เทอม สำหรับการหาการลู่เข้าเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้นจะทำต่อไปในส่วนของการวิเคราะห์ปัญหาในภาวะชั่วครู่



รูปที่ 6.3 ค่า ε ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น



รูปที่ 6.4 ค่า ε ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้น

เริ่มต้น จะทำการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะอยู่ตัว (steady state) ก่อน แล้วทำการเปรียบเทียบผลที่เกิดขึ้น จากนั้นจึงจะวิเคราะห์ในภาวะชั่วครู่ (transient) ต่อไป ผลการวิเคราะห์ในภาวะอยู่ตัวมีดังนี้

6.2 ภาวะอยู่ตัว

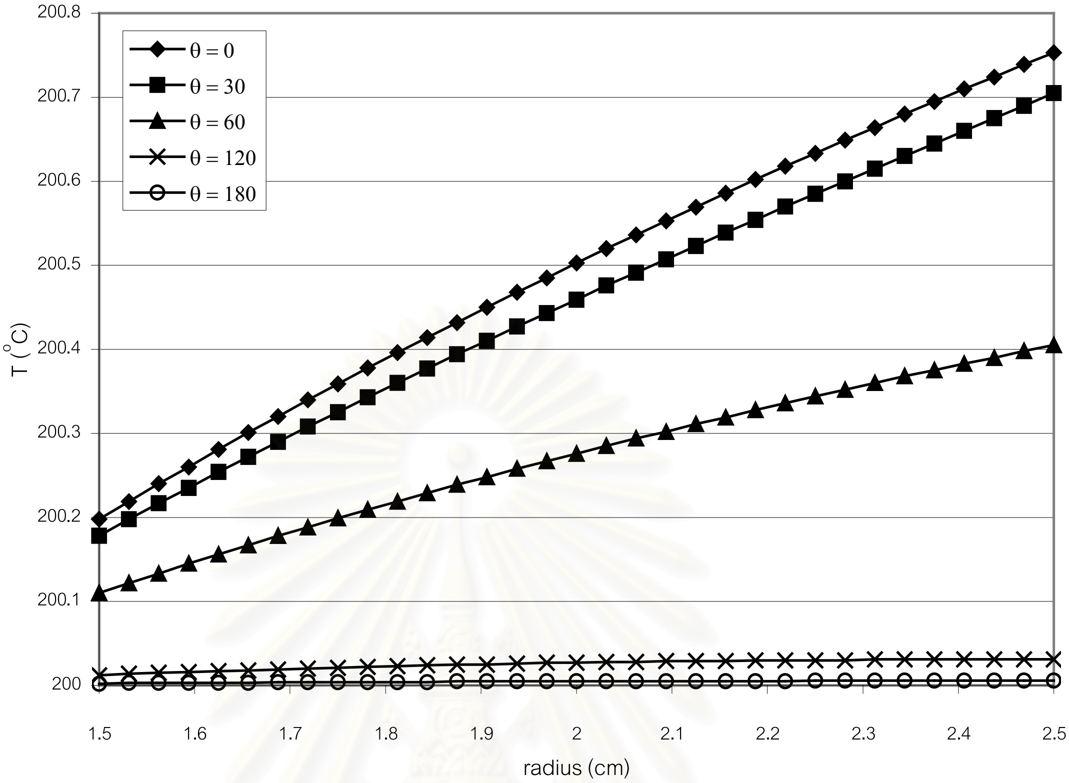
ผลการวิเคราะห์ในภาวะอยู่ตัวจะแสดงการกระจายอุณหภูมิ หน่วยแรงทิศทางรัศมี หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง และหน่วยแรงเฉือน ซึ่งการกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงที่เกิดขึ้นนี้ จะแสดงค่าเทียบกับระยะในแนวรัศมีที่มุมต่างๆ ได้แก่ มุม 0, 30, 60, 120 และ 180 องศา ยกเว้นหน่วยแรงเฉือน จะแสดงค่าที่มุม 30, 60, 90 และ 120 องศา ผลการวิเคราะห์ทั้ง 6 กรณี มีดังต่อไปนี้

6.2.1 ทรงกระบอกเหล็กชั้นเดียว

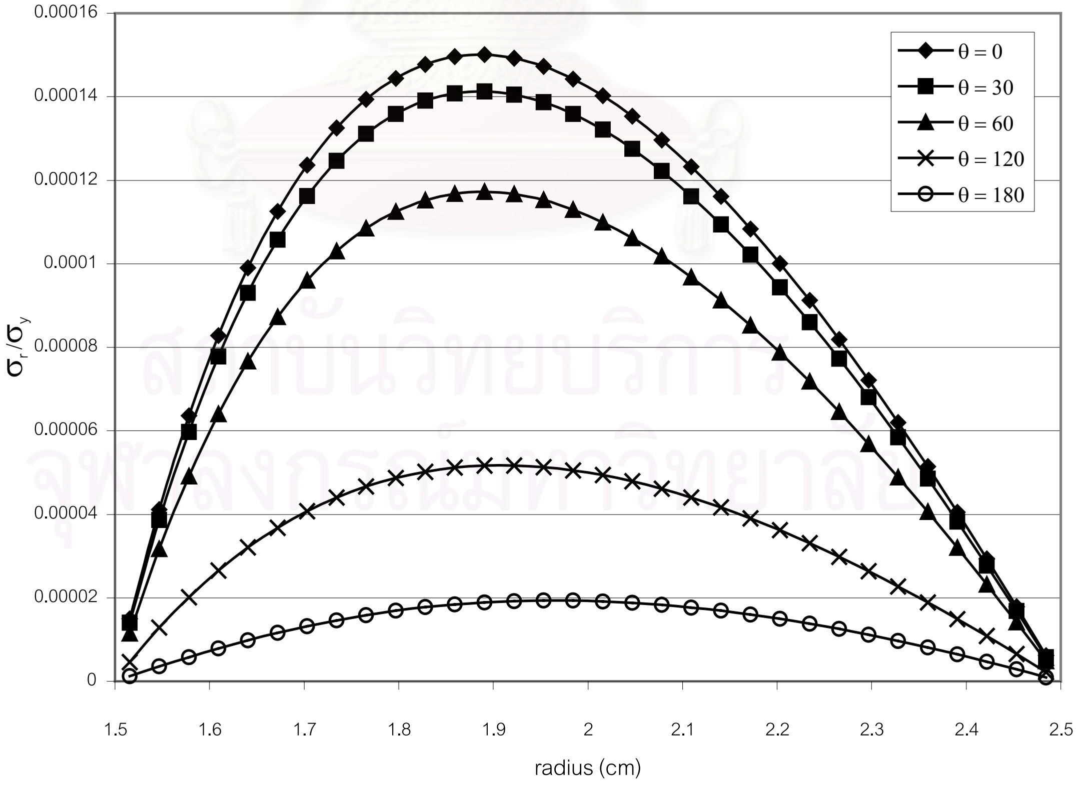
จากกราฟแสดงการกระจายอุณหภูมิในกรณีของทรงกระบอกเหล็กเพียงอย่างเดียวดังรูปที่ 6.5 เมื่อพิจารณาในแนวรัศมีจะเห็นว่า ที่มุมใดๆ อุณหภูมิที่ผิวในจะมีค่าต่ำสุด และจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามระยะรัศมีจนมีค่าสูงสุดที่ผิวนอก (สำหรับมุม 120 และ 180 องศา อุณหภูมิเกือบจะคงที่ตลอดความหนา) การกระจายอุณหภูมิในทิศทางรัศมีเกือบจะเป็นเส้นตรง และเมื่อพิจารณาในทิศทางเส้นรอบวง พบว่าช่วงที่มีอุณหภูมิสูงได้แก่ช่วงที่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้า นั่นคือ ช่วงตั้งแต่มุม 0 องศา จนถึง 60 องศา จะมีอุณหภูมิสูงกว่าช่วงที่ไม่มีฟลักซ์ไหลเข้า โดยเฉพาะที่มุม 0 องศา บริเวณผิวนอกจะเป็นจุดที่มีอุณหภูมิสูงสุด ส่วนจุดที่มีอุณหภูมิต่ำที่สุดคือที่มุม 180 องศาบริเวณผิวใน อย่างไรก็ตามอุณหภูมิสูงสุดและอุณหภูมิต่ำสุดมีค่าแตกต่างกันไม่เกิน 1 องศาเซลเซียส

ในส่วนของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิดังแสดงในรูปที่ 6.6 - 6.8 จะเห็นว่า หน่วยแรงทิศทางรัศมีจะเป็นหน่วยแรงดึงเนื่องจากอุณหภูมิที่ผิวนอกมีค่าสูงกว่าอุณหภูมิที่ผิวใน ทำให้บริเวณผิวนอกเกิดการขยายตัวมากกว่าและเกิดการดึงรั้งซึ่งกันและกัน ที่มุมใดๆ หน่วยแรงทิศทางรัศมีจะมีค่าสูงบริเวณกึ่งกลางความหนา และจะลดลงเรื่อยๆ เมื่อห่างจากบริเวณกึ่งกลางจนเป็นศูนย์ที่ผิวทั้งสอง ในช่วงที่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าหน่วยแรงทิศทางรัศมีจะมีค่าสูงกว่าช่วงที่ไม่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้า ในส่วนของหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงนั้น ที่มุมใดๆ จะเกิดทั้งหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงอัด โดยจะเกิดหน่วยแรงดึงในช่วงตั้งแต่ผิวในไปจนถึงประมาณกึ่งกลางความหนา และเกิดหน่วยแรงอัดจากประมาณกึ่งกลางความหนาไปจนถึงผิวนอก ซึ่งหน่วยแรงดึงจะเกิดสูงสุดที่ผิวในส่วนหน่วยแรงอัดจะเกิดสูงสุดที่ผิวนอก หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงนี้จะมีค่าสูงในช่วงที่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าเช่นเดียวกับหน่วยแรงทิศทางรัศมี สำหรับหน่วยแรงจะมีค่าสูงบริเวณกึ่งกลางความหนาและลดลงเรื่อยๆ เมื่อห่างจากบริเวณกึ่งกลางความหนาจนเป็นศูนย์ที่ผิวทั้งสอง หน่วยแรงเฉือนจะมีความแตกต่างจากหน่วยแรงทิศทางอื่นๆ คือ จะมีค่าสูงที่มุมประมาณ 90 องศา ซึ่งเป็นช่วงที่ไม่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้า

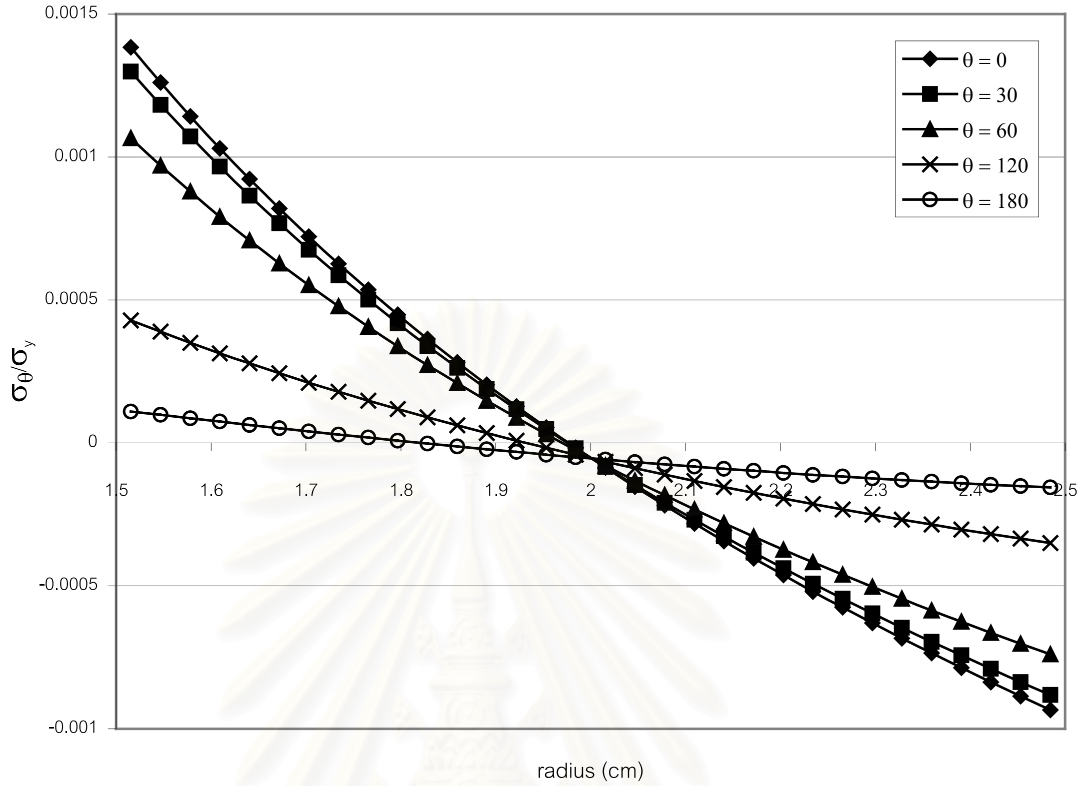
จากกรณีของทรงกระบอกประกอบด้วยเหล็กเพียงอย่างเดียวนี้ สรุปได้ว่า อุณหภูมิสูงสุดเกิดขึ้นที่ผิวนอกที่มุม 0 องศา ซึ่งมีค่าเท่ากับ 200.75 องศาเซลเซียส ส่วนค่าสูงสุดของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นหารด้วยหน่วยแรงครากของเหล็ก เป็นค่าหน่วยแรงในทิศทางเส้นรอบวง มีค่าเท่ากับ 0.00121 ซึ่งถือว่าเป็นสัดส่วนที่ต่ำมาก และแสดงให้เห็นว่า ทรงกระบอกเหล็กยังสามารถรับแรงที่เกิดจากความร้อนได้เพิ่มขึ้นอีกมาก



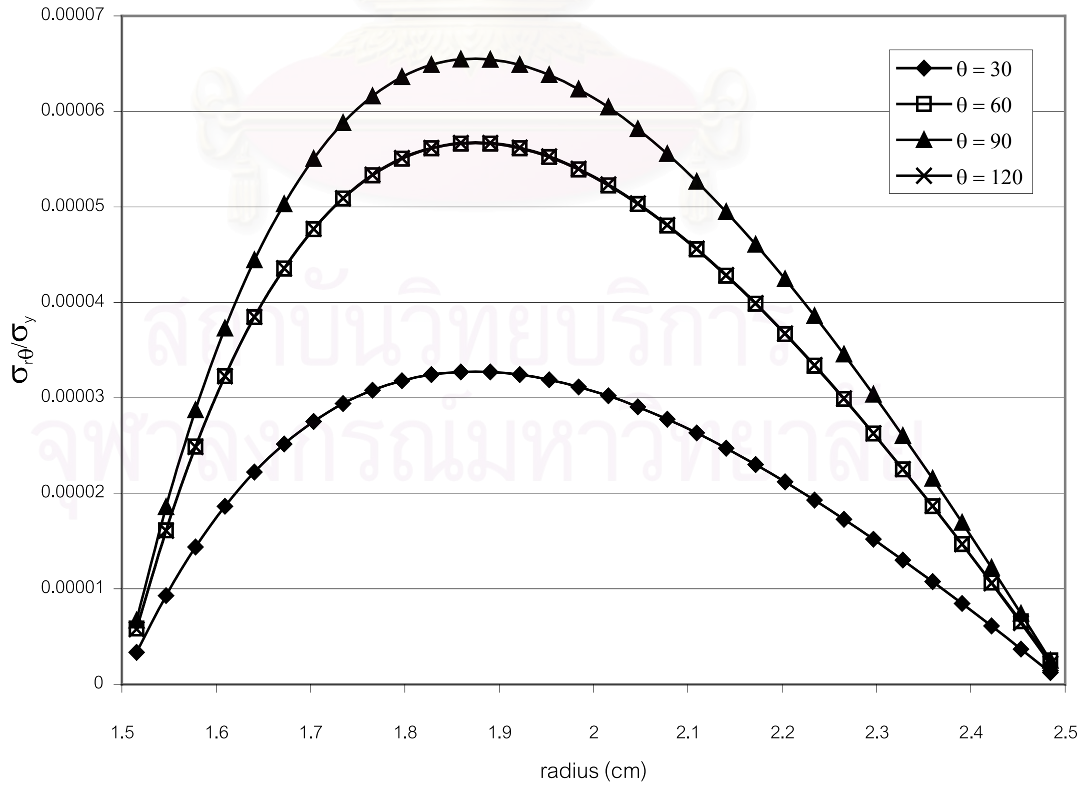
รูปที่ 6.5 การกระจายอุณหภูมิที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยเหล็กเพียงอย่างเดียว



รูปที่ 6.6 หน่วยแรงทิศทางรัศมีที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยเหล็กเพียงอย่างเดียว



รูปที่ 6.7 หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยเหล็กเพียงอย่างเดียว

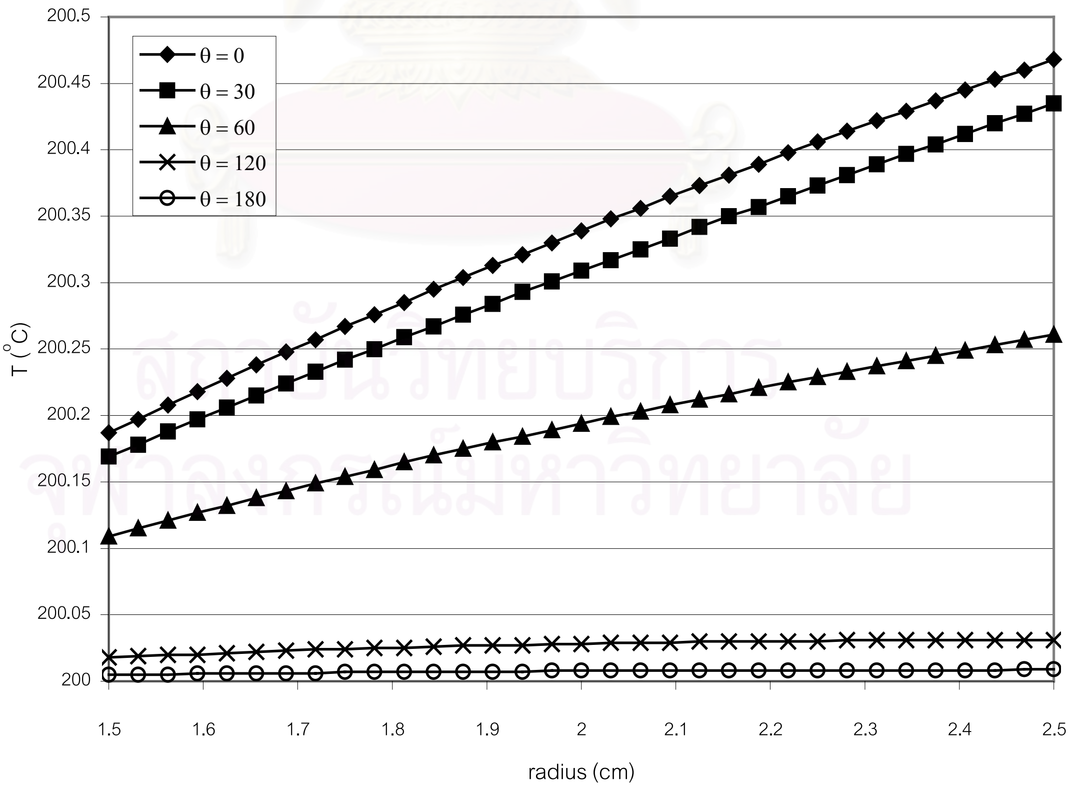


รูปที่ 6.8 หน่วยแรงเฉือนที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยเหล็กเพียงอย่างเดียว

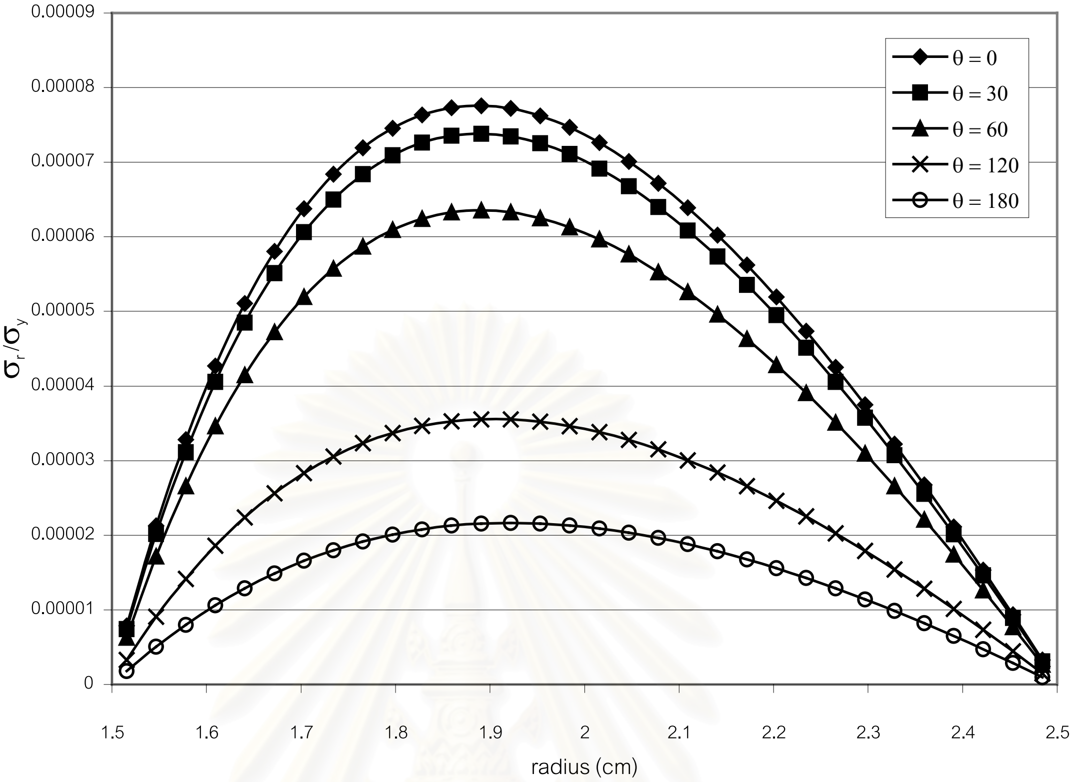
6.2.2 ทรงกระบอกทองแดงชั้นเดียว

เมื่อพิจารณากราฟการกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ ในกรณีของทรงกระบอกทองแดงชั้นเดียวดังรูปที่ 6.9 – 6.12 จะเห็นว่า ลักษณะของการกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิที่เกิดขึ้นจะเหมือนกับกรณีของทรงกระบอกเหล็กชั้นเดียว แตกต่างกันที่ขนาดเท่านั้น โดยอุณหภูมิสูงสุดมีค่าประมาณ 200.47 องศาเซลเซียส และค่าสูงสุดของสัดส่วนระหว่างหน่วยแรงที่เกิดขึ้นต่อหน่วยแรงครากของทองแดงมีค่าประมาณ 0.000618 ซึ่งจะเห็นว่ามีค่าน้อยมาก และยังมีค่าต่ำกว่ากรณีของทรงกระบอกเหล็กอีกด้วย

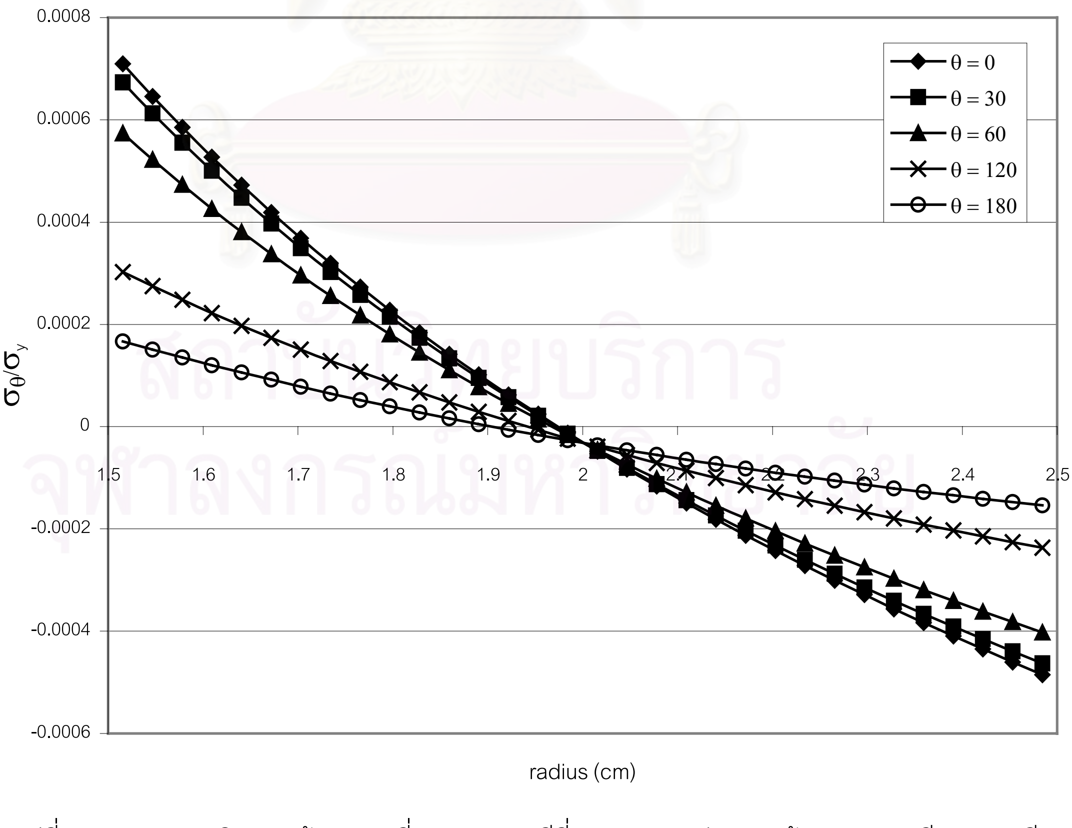
สรุปได้ว่า สำหรับทรงกระบอกที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงชนิดเดียวดังในสองกรณีข้างต้น บริเวณที่อุณหภูมิและหน่วยแรงมีค่าสูงได้แก่ ช่วงที่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้า นั่นคือ ช่วง 0 - 60 ยกเว้นหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าสูงที่มุม 90 องศา และถ้าพิจารณาในแนวรัศมี หน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าสูงบริเวณกึ่งกลางความหนา อุณหภูมิมีค่าสูงบริเวณผิวนอก ส่วนหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงมีค่าสูงที่ผิวนอกและผิวในโดยเป็นหน่วยแรงดึงตั้งแต่ผิวในจนถึงประมาณกึ่งกลางความหนา และเป็นหน่วยแรงอัดตั้งแต่ประมาณกึ่งกลางความหนาจนถึงผิวนอก ซึ่งเมื่อนำกรณีทั้งสองมาเปรียบเทียบกันจะพบว่า สัดส่วนระหว่างหน่วยแรงที่เกิดขึ้นต่อหน่วยแรงครากของวัสดุในกรณีทรงกระบอกทองแดงชั้นเดียว จะมีค่าต่ำกว่ากรณีของทรงกระบอกเหล็กชั้นเดียว อย่างไรก็ตาม ก็ยังถือได้ว่าเป็นสัดส่วนที่ต่ำมากทั้งสองกรณี ซึ่งแสดงว่า ทั้งทรงกระบอกเหล็กชั้นเดียวและทรงกระบอกทองแดงชั้นเดียวยังสามารถรับแรงที่เกิดจากความร้อนได้เพิ่มขึ้นอีกเป็นอย่างมาก



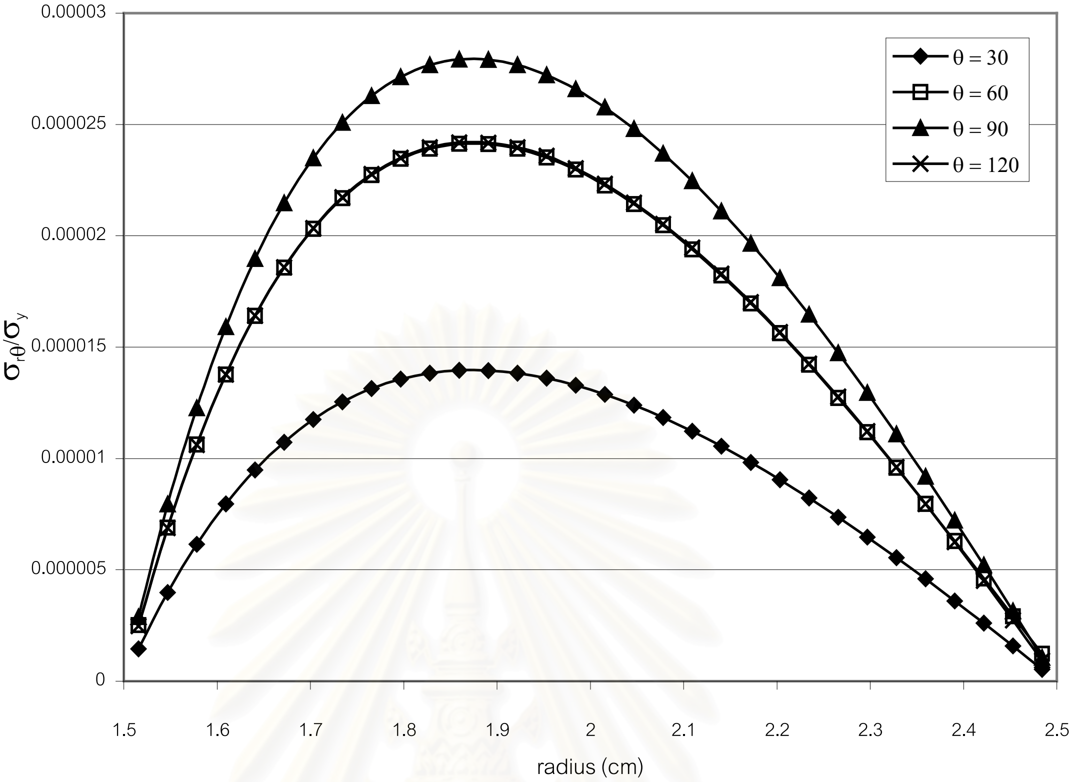
รูปที่ 6.9 การกระจายอุณหภูมิที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยทองแดงเพียงอย่างเดียว



รูปที่ 6.10 หน่วยแรงทิศทางรัศมีที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยทองแดงเพียงอย่างเดียว



รูปที่ 6.11 หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยทองแดงเพียงอย่างเดียว



รูปที่ 6.12 หน่วยแรงเฉือนที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยทองแดงเพียงอย่างเดียว

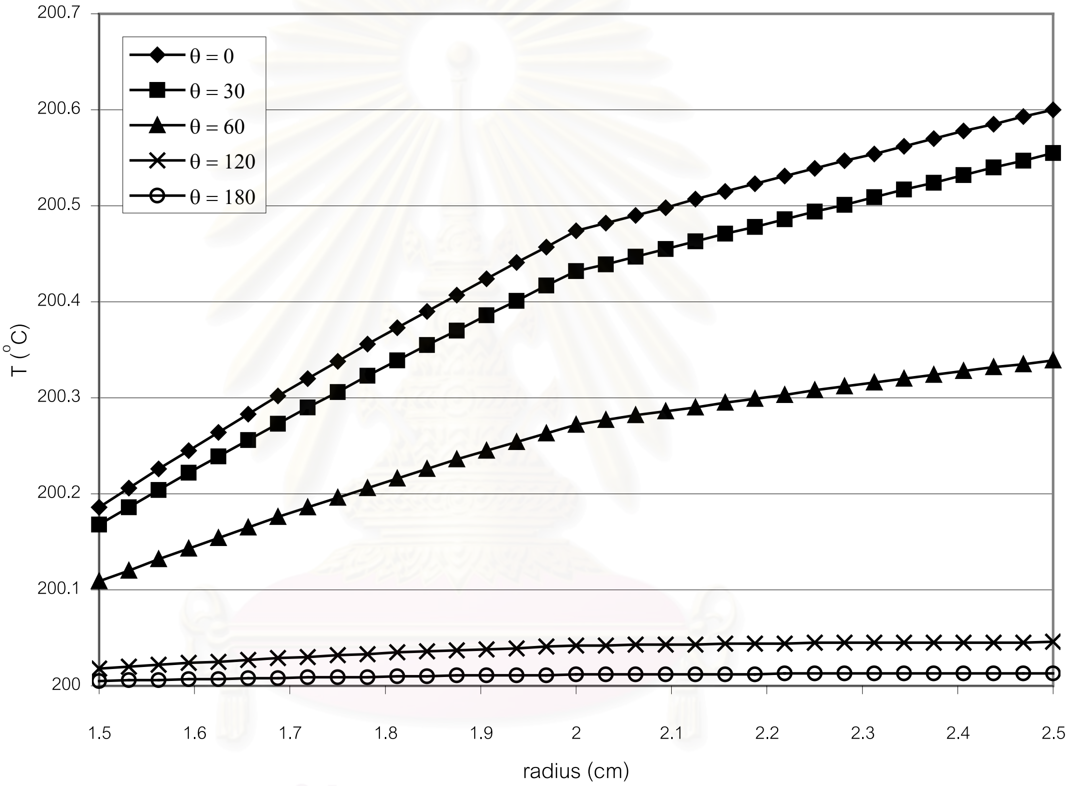
6.2.3 ทรงกระบอก 2 ชั้น ชั้นในเป็นเหล็ก ชั้นนอกเป็นทองแดง

ในกรณีนี้ กราฟแสดงการกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงที่เกิดขึ้นหารด้วยหน่วยแรงครากของวัสดุแต่ละชั้นจะมีความไม่ต่อเนื่องในแนวรัศมี โดยแบ่งเป็น 2 ช่วง ทั้งนี้เนื่องจากทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชนิดที่มีคุณสมบัติแตกต่างกัน เมื่อพิจารณากราฟแสดงการกระจายอุณหภูมิดังรูปที่ 6.13 จะเห็นว่า กราฟในช่วงที่เป็นชั้นของเหล็กจะมีความชันมากกว่าช่วงที่เป็นชั้นของทองแดง ส่วนลักษณะการกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมีจะยังคงคล้ายกับกรณีที่มีวัสดุเพียงชนิดเดียว กล่าวคือ ที่มุมใดๆ อุณหภูมิที่ผิวในจะมีค่าต่ำสุด และจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามระยะรัศมีจนมีค่าสูงสุดที่ผิวนอก (ที่มุม 120 และ 180 องศา อุณหภูมิจะมีค่าเกือบคงที่ตลอดความหนา) การกระจายอุณหภูมิในทิศทางรัศมีเกือบจะเป็นเส้นตรงในแต่ละช่วงของกราฟ และเมื่อพิจารณาในแนวเส้นรอบวงก็จะเห็นว่า ในช่วงที่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าอุณหภูมิจะมีค่าสูงกว่าช่วงที่ไม่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าเช่นเดียวกับกรณีที่มีวัสดุเพียงชนิดเดียวเช่นกัน

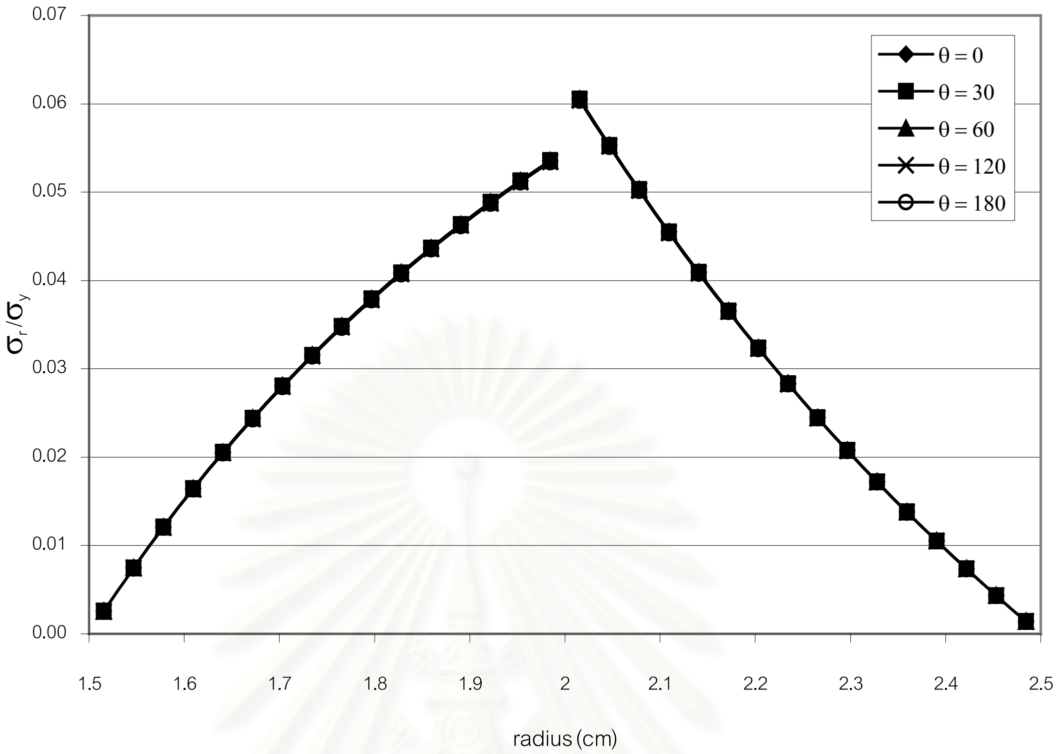
เมื่อพิจารณากราฟของหน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงดังรูปที่ 6.14 – 6.15 จะเห็นว่า เส้นกราฟทั้งหมดเกือบจะทับกันสนิท นั่นหมายความว่า ที่ทุกๆ มุม การกระจายตัวในแนวรัศมีของหน่วยแรงทั้งสองทิศทางเกือบจะเหมือนกันทั้งหมด โดยหน่วยแรงทิศทางรัศมีเป็นหน่วยแรงดึง มีค่าสูงบริเวณกึ่งกลางความหนาและลดลงเรื่อยๆ เมื่อห่างจากบริเวณกึ่งกลางออกไปจนเป็นศูนย์ที่ผิวทั้งสอง ส่วนหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงจะเป็นหน่วยแรงดึงในชั้นของเหล็ก และเป็นหน่วยแรงอัดในชั้นของทองแดง ซึ่งหน่วยแรงดึงสูงสุดเกิดขึ้นที่ผิวในและหน่วยแรงอัดสูงสุดเกิดขึ้นที่ผิวสัมผัสในเนื้อทองแดง ส่วนหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าแตกต่างกันไปในแต่ละ

มุม โดยที่มุมใดๆ หน่วยแรงเฉือนจะมีค่าสูงบริเวณกึ่งกลางความหนาและจะมีค่าลดลงเรื่อยๆ เมื่อห่างจากบริเวณกึ่งกลางจนเป็นศูนย์ที่ผิวทั้งสอง และหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าสูงที่มุมประมาณ 90 องศา ซึ่งเป็นช่วงที่ไม่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้า

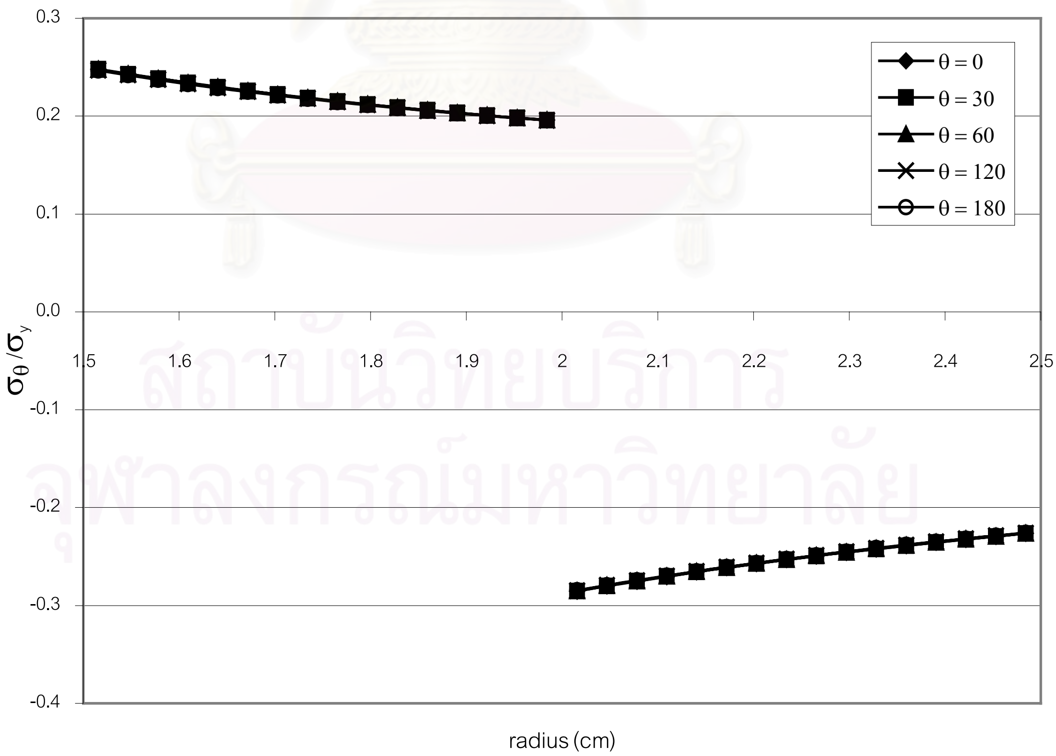
สรุปได้ว่า ในกรณีที่วัสดุชั้นในเป็นเหล็กและชั้นนอกเป็นทองแดงนี้ อุณหภูมิสูงสุดเกิดขึ้นที่ผิวนอกที่มุม 0 องศา มีค่าประมาณ 200.6 องศาเซลเซียส ค่าสูงสุดของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นหารด้วยหน่วยแรงครากเป็นค่าหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง โดยเกิดขึ้นในชั้นทองแดงและมีค่าประมาณ –0.278 ซึ่งสูงกว่าสองกรณีแรกที่เป็นทรงกระบอกชั้นเดียวค่อนข้างมาก



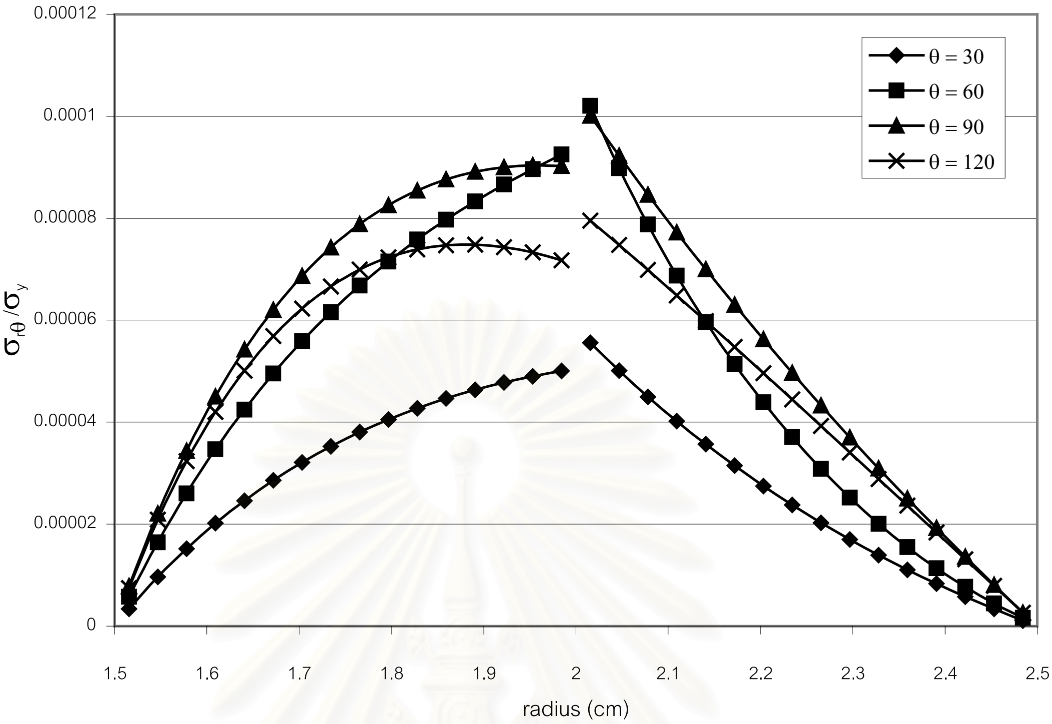
รูปที่ 6.13 การกระจายอุณหภูมิที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นเหล็ก ส่วนชั้นนอกเป็นทองแดง



รูปที่ 6.14 หน่วยแรงทิศทางรัศมีที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นเหล็ก ส่วนชั้นนอกเป็นทองแดง



รูปที่ 6.15 หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นเหล็ก ส่วนชั้นนอกเป็นทองแดง



รูปที่ 6.16 หน่วยแรงเฉือนที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นเหล็ก ส่วนชั้นนอกเป็นทองแดง

6.2.4 ทรงกระบอก 2 ชั้น ชั้นในเป็นทองแดง ชั้นนอกเป็นเหล็ก

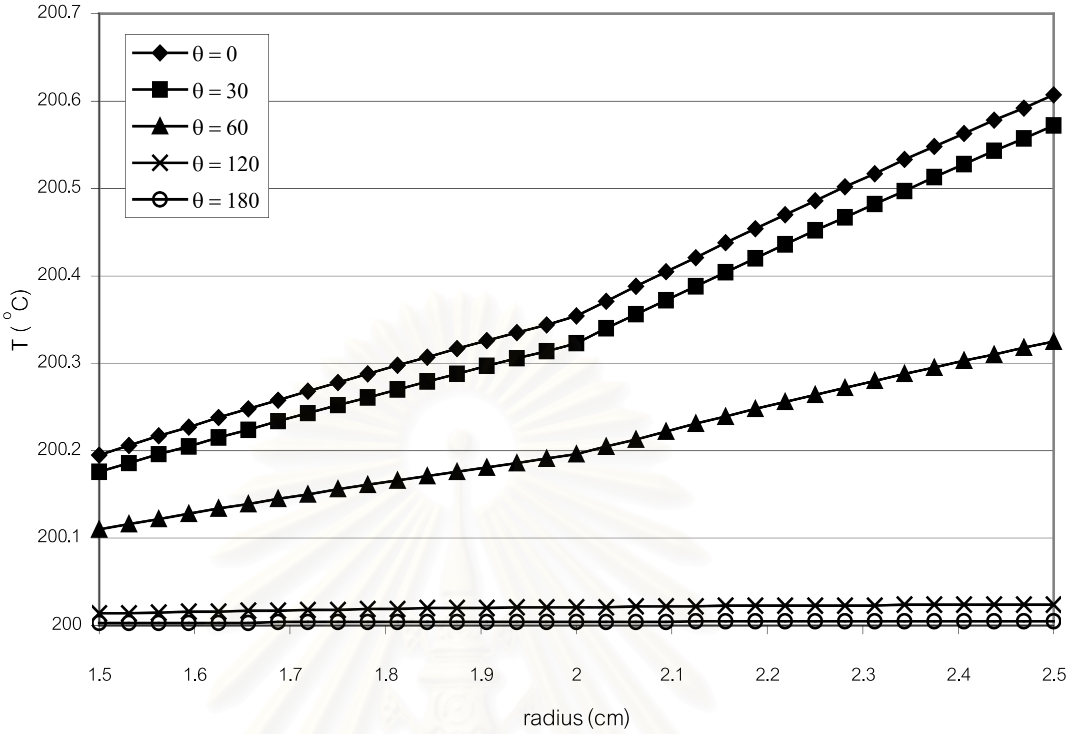
ในกรณีนี้กราฟจะเกิดความไม่ต่อเนื่องเช่นเดียวกับกรณีที่แล้ว คือ จะแบ่งเป็น 2 ช่วง ทั้งนี้เนื่องจากทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชนิดที่แตกต่างกัน จากรูปที่ 6.17 เมื่อพิจารณาการกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมีจะเห็นว่า กราฟในช่วงที่เป็นชั้นของเหล็กก็จะมีความชันมากกว่าช่วงที่เป็นชั้นของทองแดงเช่นเดียวกัน นั่นแสดงให้เห็นว่า วัสดุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (k) ต่ำ จะมีความชันของกราฟมากกว่าวัสดุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนสูง ส่วนลักษณะการกระจายของอุณหภูมิทั้งในแนวรัศมีและในแนวเส้นรอบวงก็ยังคงเหมือนกับกรณีที่ผ่านๆ มา

เมื่อพิจารณากราฟของหน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงดังรูปที่ 6.18 – 6.19 จะเห็นว่ามีความคล้ายคลึงกับกรณีที่แล้ว กล่าวคือ ที่ทุกๆ มุม การกระจายตัวในแนวรัศมีของหน่วยแรงทั้งสองทิศทางเกือบจะเหมือนกันทั้งหมด โดยที่หน่วยแรงทิศทางรัศมีจะมีค่าสูงบริเวณกึ่งกลางความหนาและมีค่าลดลงเรื่อยๆ เมื่อห่างจากบริเวณกึ่งกลางจนเป็นศูนย์ที่ปลายทั้งสอง ในกรณีนี้ หน่วยแรงทิศทางรัศมีเป็นหน่วยแรงอัด ในขณะที่กรณีที่แล้วเป็นหน่วยแรงดึง ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่า ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงเส้น (α) ของทองแดงมากกว่าเหล็ก ทำให้ทองแดงมีการขยายตัวมากกว่าเหล็กเมื่อมีอุณหภูมิสูงขึ้น ดังนั้น เมื่อเหล็กอยู่ชั้นในและทองแดงอยู่ชั้นนอก ทองแดงกับเหล็กจะเกิดการดึงรั้งซึ่งกันและกัน ทำให้เกิดหน่วยแรงดึง แต่ถ้าเหล็กอยู่ชั้นนอกและทองแดงอยู่ชั้นใน ทองแดงกับเหล็กจะเกิดการดันซึ่งกันและกัน ทำให้เกิดหน่วยแรงอัด ส่วนหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง จะเกิดหน่วยแรงดึงที่ชั้นของเหล็ก และเกิดหน่วยแรงอัดที่ชั้นของทองแดง เช่นเดียวกับกรณีที่แล้ว

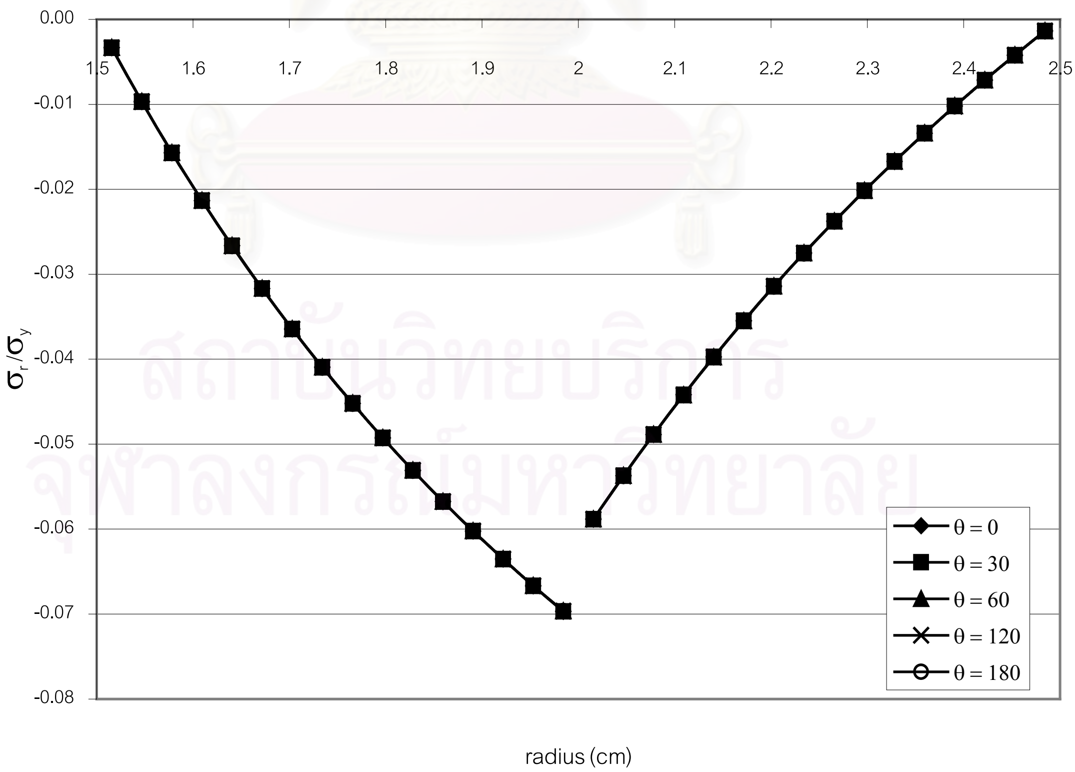
โดยหน่วยแรงอัดสูงสุดเกิดขึ้นที่ผิวใน ส่วนหน่วยแรงดึงสูงสุดเกิดขึ้นที่ผิวสัมผัสในเนื้อของเหล็ก สำหรับหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าสูงสุดที่มุมประมาณ 60 องศา ต่างกับกรณีที่ผ่านๆ ที่จะมีค่าสูงสุดที่มุมประมาณ 90 องศา ซึ่งที่มุม 60 องศานี้ จะเกิดทั้งหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงอัด โดยเกิดหน่วยแรงอัดที่ระยะประมาณ 1.8 – 2.06 ซ.ม. นอกช่วงดังกล่าวจะเกิดหน่วยแรงดึง

สรุปได้ว่า ในกรณีนี้อุณหภูมิสูงสุดมีค่าประมาณ 200.61 องศาเซลเซียส ส่วนค่าสูงสุดของหน่วยแรงหารด้วยหน่วยแรงครากของวัสดุ ยังเป็นหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงเหมือนกรณีที่แล้ว และเกิดในชั้นทองแดงเช่นเดียวกัน โดยมีค่าประมาณ –0.313 ซึ่งเมื่อนำทั้งสองกรณีนี้มาเปรียบเทียบกันแล้วจะเห็นว่า ค่าสัดส่วนระหว่างหน่วยแรงต่อหน่วยแรงครากของวัสดุในกรณีนี้จะสูงกว่ากรณีที่แล้วเล็กน้อย

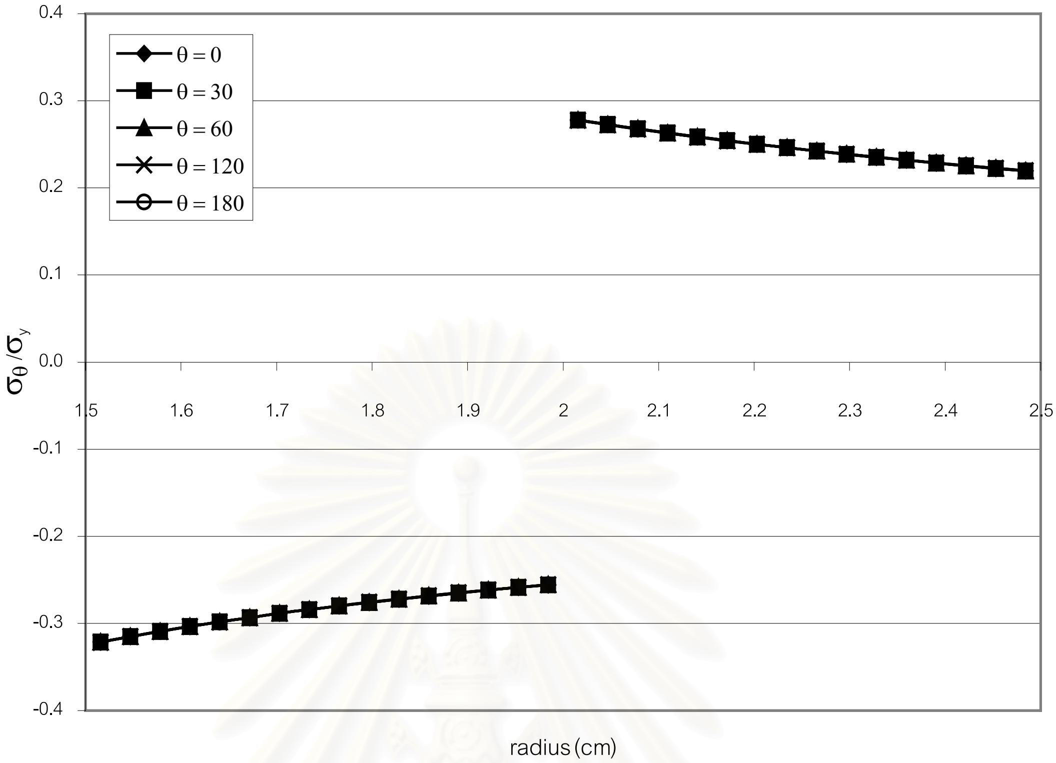
จากทั้งสี่กรณีที่ผ่านมาจะเห็นว่า พฤติกรรมการนำความร้อนของทรงกระบอกชั้นเดียว กับทรงกระบอก 2 ชั้น จะแตกต่างกันไม่มากเท่าใดนัก แต่สำหรับพฤติกรรมของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิที่เกิดขึ้นนั้นจะแตกต่างกันค่อนข้างมาก อีกทั้งพฤติกรรมของทรงกระบอกที่ประกอบด้วยวัสดุ 2 ชนิด เมื่อมีการสลับชั้นของวัสดุก็แตกต่างกันค่อนข้างมากเช่นกัน เมื่อเปรียบเทียบสัดส่วนระหว่างหน่วยแรงที่เกิดขึ้นต่อหน่วยแรงครากของวัสดุระหว่างกรณีของวัสดุชั้นเดียวกับวัสดุ 2 ชั้นแล้ว พบว่า กรณีของวัสดุชั้นเดียวจะมีสัดส่วนต่ำกว่ากรณีวัสดุ 2 ชั้นมาก ทั้งนี้ เนื่องจากหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในทรงกระบอกชั้นเดียวจะเกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ไม่สม่ำเสมอตลอดทั้งเนื้อวัสดุเท่านั้น แต่ในกรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุที่แตกต่างกันมากกว่า 1 ชั้น นอกจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ไม่สม่ำเสมอจะเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดหน่วยแรงขึ้นแล้ว การดึงรั้งระหว่างวัสดุแต่ละชั้นเนื่องจากการขยายตัวที่แตกต่างกัน ยังเป็นอีกสาเหตุหนึ่งที่ทำให้เกิดหน่วยแรงขึ้นได้ ดังนั้น ผลจากทั้งสองสาเหตุนี้ จะทำให้หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในกรณีของทรงกระบอก 2 ชั้น มีค่าสูงกว่ากรณีทรงกระบอกชั้นเดียว



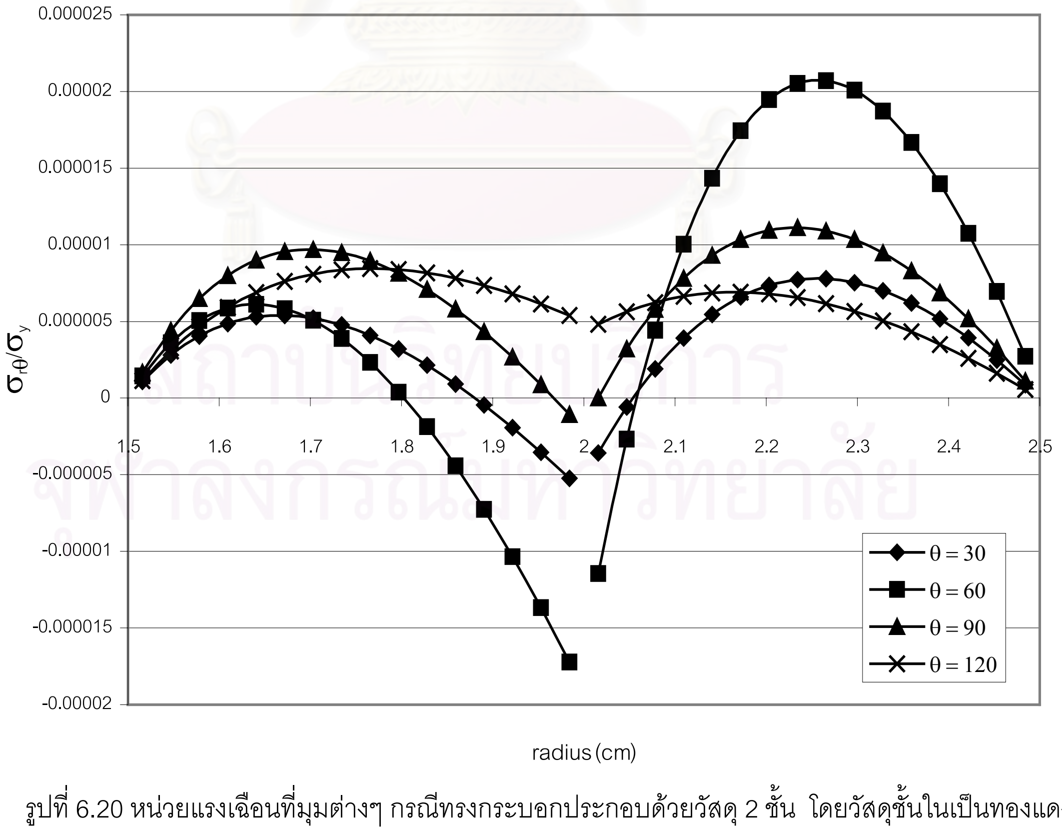
รูปที่ 6.17 การกระจายอุณหภูมิที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นทองแดง ส่วนชั้นนอกเป็นเหล็ก



รูปที่ 6.18 หน่วยแรงทิศทางรัศมีที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นทองแดง ส่วนชั้นนอกเป็นเหล็ก



รูปที่ 6.19 หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นทองแดง ส่วนชั้นนอกเป็นเหล็ก



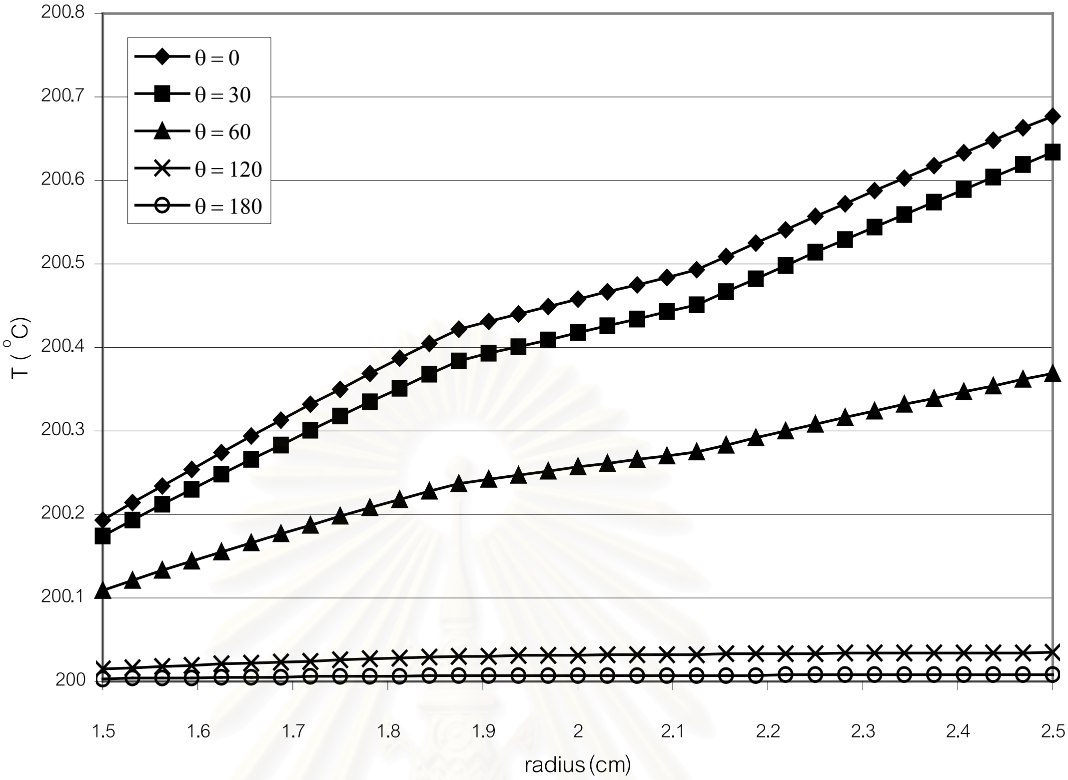
รูปที่ 6.20 หน่วยแรงเฉือนที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นทองแดง ส่วนชั้นนอกเป็นเหล็ก

6.2.5 ทรงกระบอก 3 ชั้น ชั้นในและชั้นนอกเป็นเหล็ก ชั้นกลางเป็นทองแดง

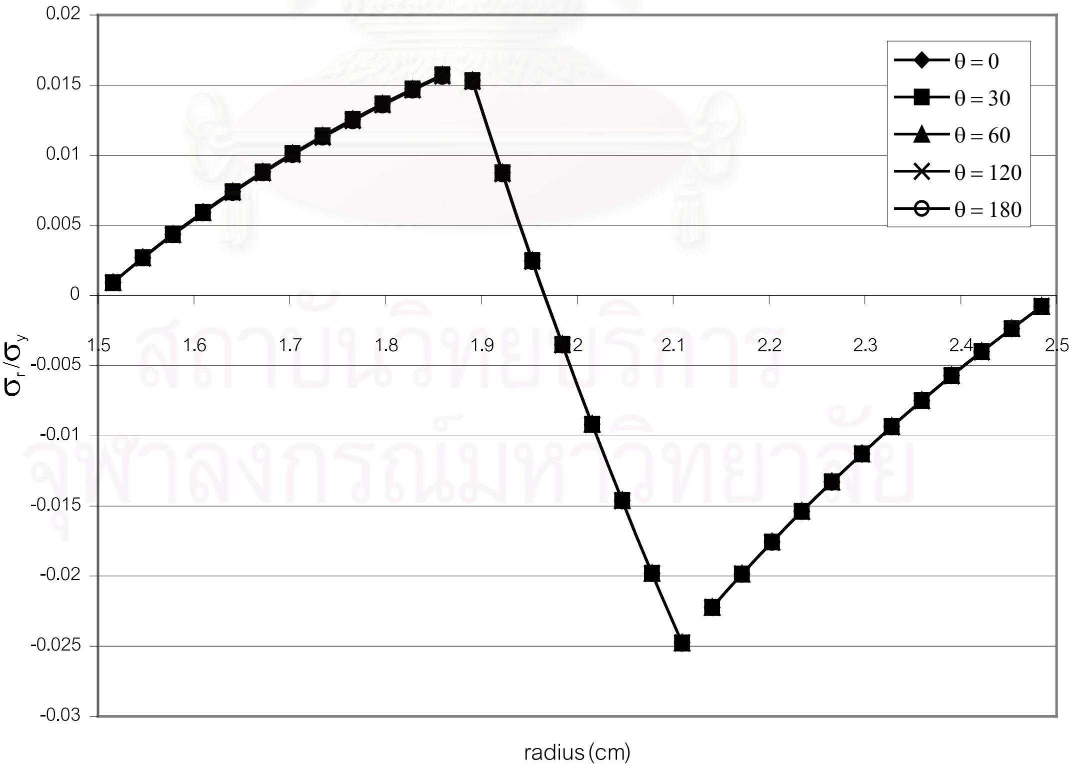
เมื่อพิจารณากราฟการกระจายอุณหภูมิดังรูปที่ 6.21 จะเห็นว่า การกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมีจะไม่ต่อเนื่องกัน โดยแบ่งเป็น 3 ช่วง ตามชั้นของวัสดุ จะสังเกตได้ว่า กราฟในช่วงที่เป็นเหล็กซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนต่ำกว่าทองแดงจะมีความชันมากกว่า ลักษณะการกระจายยังคงคล้ายกับกรณีอื่นๆ กล่าวคือ ที่มุมใดๆ อุณหภูมิจะมีค่าต่ำสุดที่ผิวใน และเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามระยะรัศมีจนมีค่าสูงสุดที่ผิวนอก ช่วงที่มีอุณหภูมิสูงก็ยังเป็นช่วงที่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าเช่นเดิม

ในส่วนของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิที่เกิดขึ้น เมื่อพิจารณากราฟรูปที่ 6.22 – 6.23 จะเห็นว่า หน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงมีการกระจายตัวในแนวรัศมีที่ใกล้เคียงกันในแต่ละมุม เนื่องจากกราฟแต่ละเส้นเกือบจะทับกันสนิท พฤติกรรมของหน่วยแรงทิศทางรัศมีในกรณีที่ท่อประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้นนี้จะแตกต่างจากกรณีที่ท่อประกอบด้วยวัสดุ 1 ชั้น และ 2 ชั้น กล่าวคือ ที่มุมใดๆ หน่วยแรงทิศทางรัศมีจะเกิดทั้งหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงอัด โดยตั้งแต่ผิวในจนถึงระยะประมาณกึ่งกลางความหนาจะเป็นหน่วยแรงดึง ส่วนระยะที่เลยจากนี้ไปจนถึงผิวนอกจะเป็นหน่วยแรงอัด สำหรับหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง หากพิจารณาในแนวรัศมี เส้นกราฟจะแยกเป็น 3 ช่วงตามชั้นวัสดุ โดยเป็นหน่วยแรงดึงในชั้นของเหล็กและเป็นหน่วยแรงอัดในชั้นทองแดง ซึ่งหน่วยแรงดึงที่เหล็กชั้นนอกจะมีค่ามากกว่าหน่วยแรงดึงที่เหล็กชั้นใน ส่วนหน่วยแรงเฉือนมีค่าสูงที่ระยะประมาณ 1.88 ซ.ม. ซึ่งอยู่ในชั้นของทองแดง และหน่วยแรงเฉือนสูงสุดจะเกิดที่มุมประมาณ 60 องศา

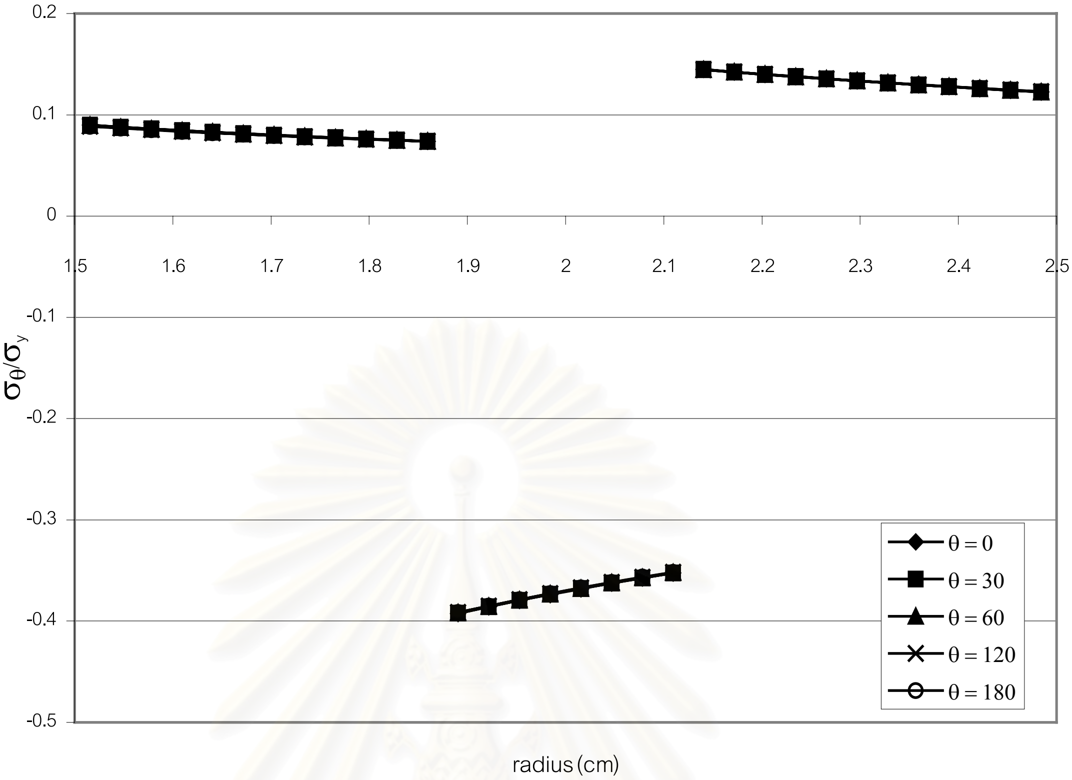
สรุปได้ว่า อุณหภูมิสูงสุดมีค่าประมาณ 200.68 องศาเซลเซียส ค่าสูงสุดของสัดส่วนระหว่างหน่วยแรงที่เกิดขึ้นต่อหน่วยแรงครากของวัสดุเป็นหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง เกิดขึ้นในชั้นของทองแดงโดยมีค่าประมาณ –0.382 ซึ่งสูงกว่ากรณีของทรงกระบอกชั้นเดียว และทรงกระบอก 2 ชั้น อย่างไรก็ตาม ก็ยังถือได้ว่าเป็นสัดส่วนที่ต่ำพอสมควร



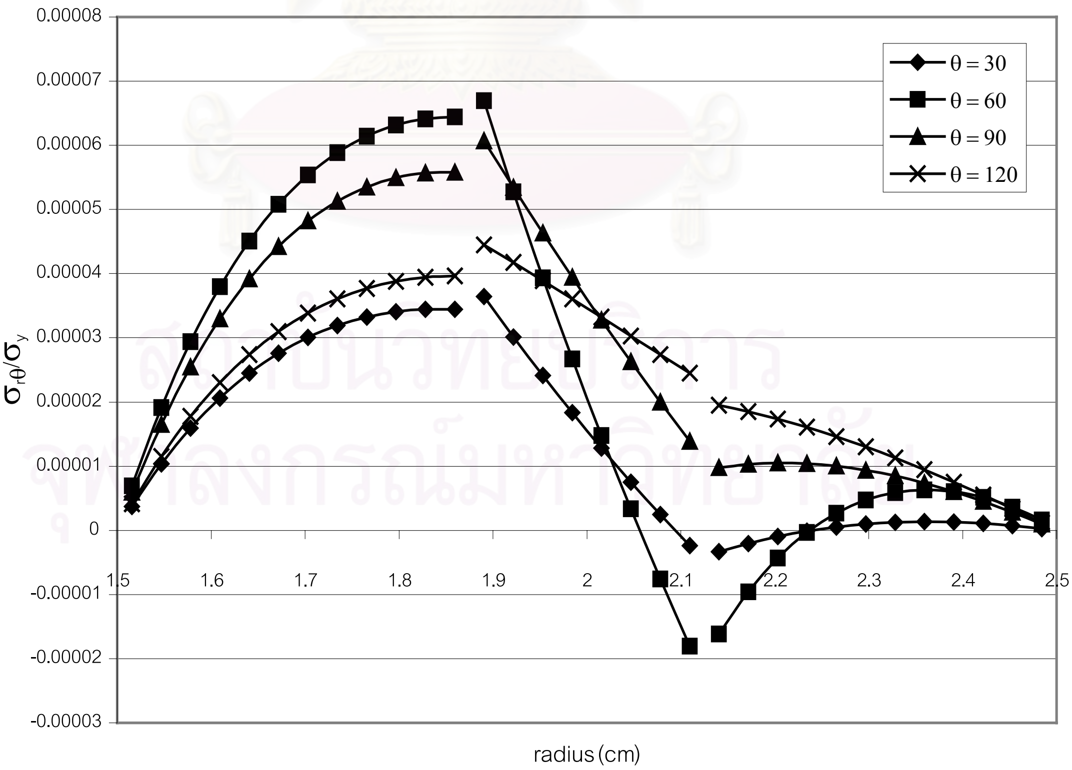
รูปที่ 6.21 การกระจายอุณหภูมิที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นเหล็ก ส่วนชั้นกลางเป็นทองแดง



รูปที่ 6.22 หน่วยแรงทิศทางรัศมีที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วย 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นเหล็ก ส่วนชั้นกลางเป็นทองแดง



รูปที่ 6.23 หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นเหล็ก ส่วนชั้นกลางเป็นทองแดง



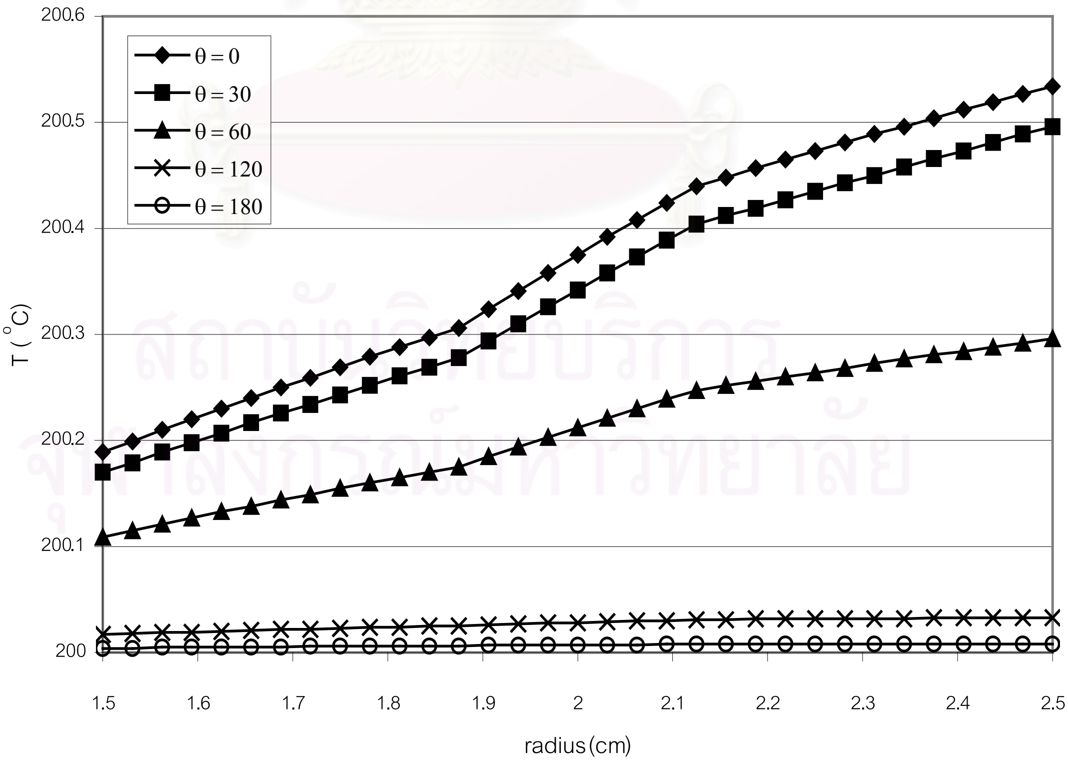
รูปที่ 6.24 หน่วยแรงเฉือนที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้นโดยวัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นเหล็ก ส่วนชั้นกลางเป็นทองแดง

6.2.6 ทรงกระบอก 3 ชั้น ชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดง ชั้นกลางเป็นเหล็ก

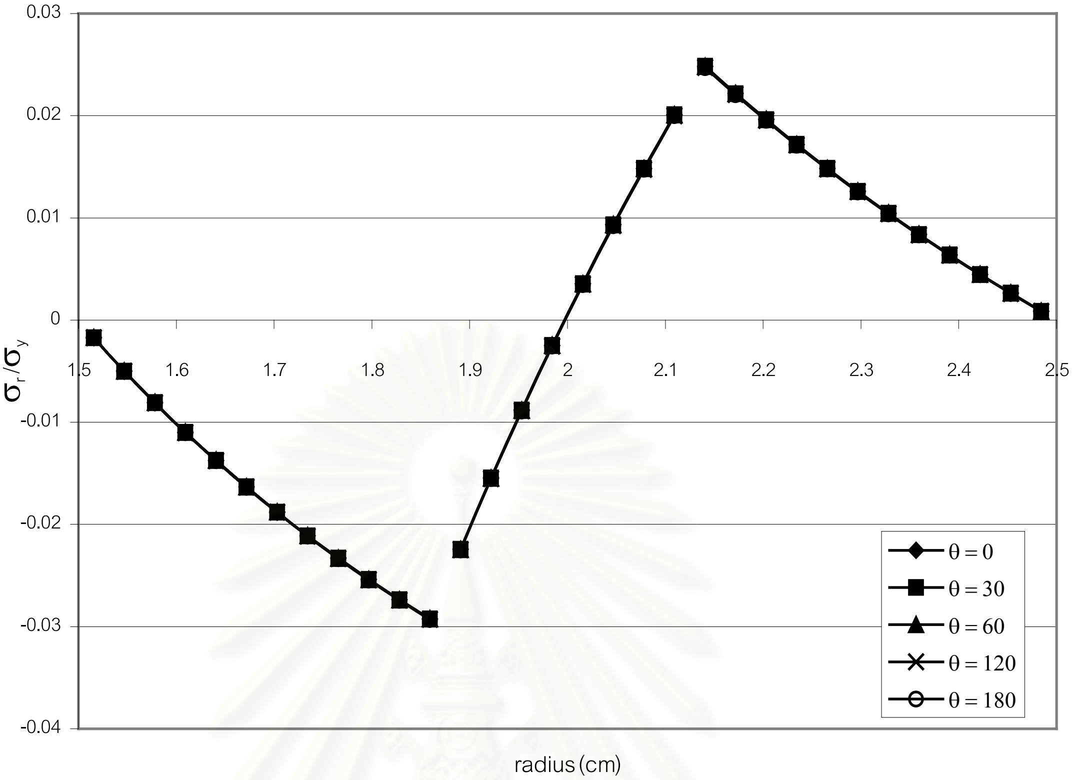
ในกรณีนี้ การกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมีมีลักษณะคล้ายกับกรณีที่แล้ว นั่นคือ กราฟแบ่งเป็น 3 ช่วง และความชันของกราฟในช่วงที่เป็นเหล็กจะมากกว่าในช่วงที่เป็นทองแดง จากกราฟรูปที่ 6.25 จะเห็นว่า ลักษณะการกระจายยังคงคล้ายกับกรณีอื่นๆ กล่าวคือ ที่มุมใดๆ อุณหภูมิจะมีค่าต่ำสุดที่ผิวใน และเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามระยะรัศมีจนมีค่าสูงสุดที่ผิวนอก ช่วงที่มีอุณหภูมิสูงก็ยังเป็นช่วงที่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าเช่นเดิม

เมื่อพิจารณาหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิที่เกิดขึ้นหารด้วยหน่วยแรงครากของวัสดุดังรูปที่ 6.26 – 6.28 แล้วจะพบว่า กราฟแต่ละเส้นของหน่วยแรงทิศทางรัศมีกับหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงเกือบจะทับกันสนิท ซึ่งแสดงว่า หน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงมีการกระจายตัวในแนวรัศมีใกล้เคียงกันในแต่ละมุมเช่นเดียวกับกรณีที่แล้ว โดยหน่วยแรงทิศทางรัศมีจะมีทั้งหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงอัดเหมือนกรณีที่แล้ว แต่จะเกิดในลักษณะตรงกันข้าม กล่าวคือ จะเกิดหน่วยแรงอัดตั้งแต่ผิวในจนถึงระยะประมาณกึ่งกลางความหนา ส่วนระยะที่เลยจากนี้ไปจนถึงผิวนอกจะเกิดหน่วยแรงดึง ส่วนหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง จะเป็นหน่วยแรงดึงในชั้นของเหล็กและเป็นหน่วยแรงอัดในชั้นของทองแดงเช่นเดียวกับกรณีที่แล้ว โดยหน่วยแรงดึงจะมีค่าสูงกว่าหน่วยแรงอัด สำหรับหน่วยแรงเฉือน จะมีค่าสูงที่ระยะประมาณ 2.12 ซ.ม. ซึ่งจะมีค่าสูงสุดที่มุมประมาณ 60 องศา

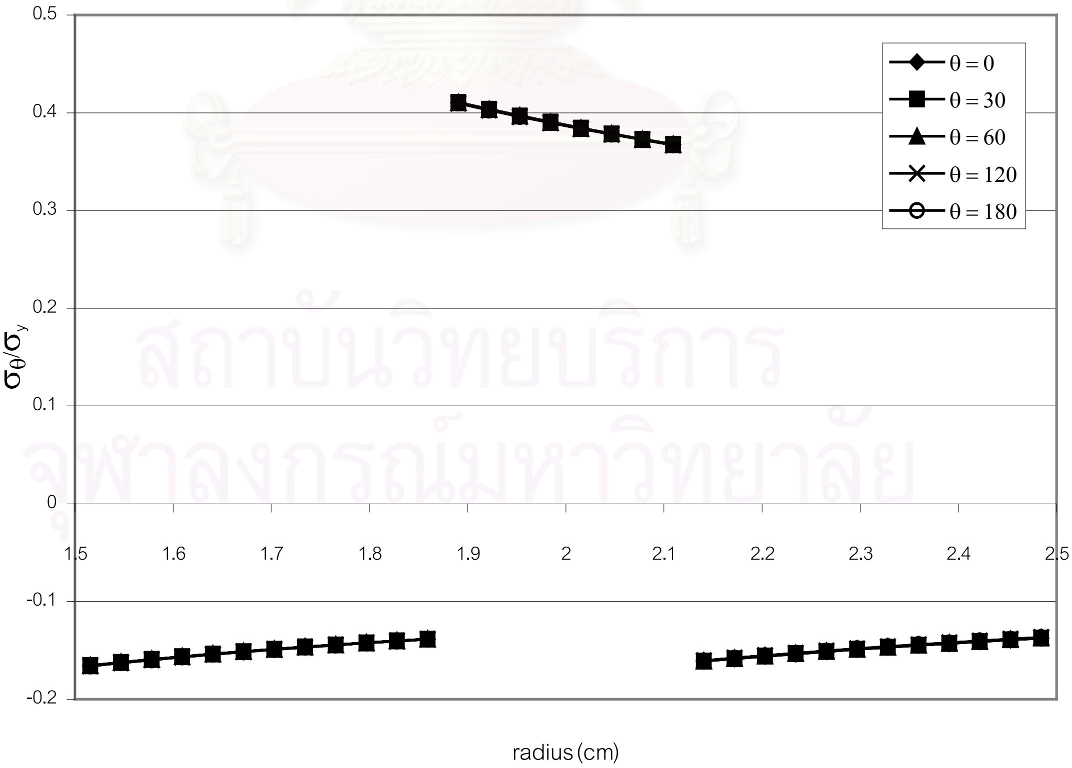
ในกรณีนี้ อุณหภูมิสูงสุดมีค่าประมาณ 200.53 องศาเซลเซียส ส่วนค่าสูงสุดของสัดส่วนระหว่างหน่วยแรงที่เกิดขึ้นต่อหน่วยแรงครากของวัสดุเป็นหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง โดยเกิดขึ้นในชั้นของเหล็กและมีค่าประมาณ 0.4 ซึ่งสูงกว่าทุกๆ กรณีที่ผ่านมา



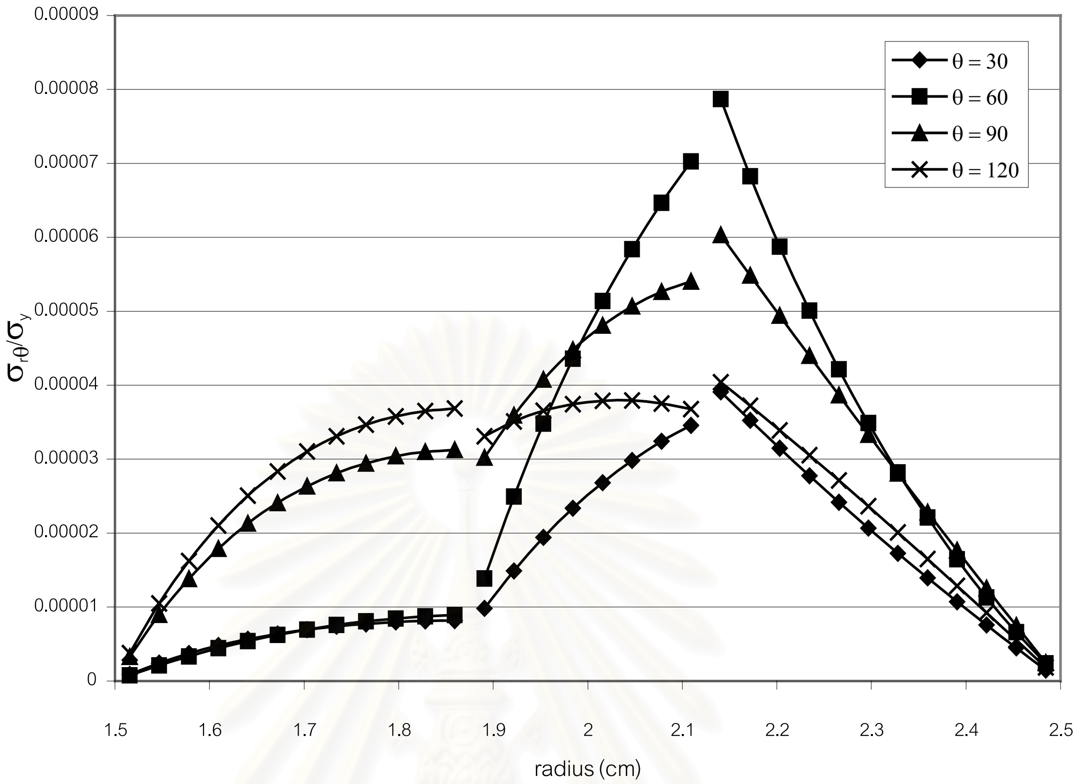
รูปที่ 6.25 การกระจายอุณหภูมิที่มุมต่างๆ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดง ส่วนชั้นกลางเป็นเหล็ก



รูปที่ 6.26 หน่วยแรงทิศทางรัศมีที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นและชั้นนอกเป็นทองแดง ส่วนชั้นกลางเป็นเหล็ก



รูปที่ 6.27 หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นและชั้นนอกเป็นทองแดง ชั้นกลางเป็นเหล็ก



รูปที่ 6.28 หน่วยแรงเฉือนที่มุมต่างๆ กรณีทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นและชั้นนอกเป็นทองแดง ส่วนชั้นกลางเป็นเหล็ก

จากทั้ง 6 กรณี สรุปได้ว่า อุณหภูมิภายในทรงกระบอกที่แต่ละจุดจะมีค่าแตกต่างกันน้อยมาก โดยอุณหภูมิสูงสุดกับอุณหภูมิต่ำสุดมีค่าแตกต่างกันไม่เกิน 1 องศาเซลเซียส ทั้งนี้เนื่องจากทรงกระบอกมีผนังค่อนข้างบางและมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางน้อย ทำให้ฟลักซ์ความร้อนที่ไหลเข้าที่ผิวถ่ายเทไปได้อย่างทั่วถึง อุณหภูมิที่แต่ละตำแหน่งจึงมีค่าใกล้เคียงกัน อย่างไรก็ตาม บริเวณใกล้ๆ กับผิวนอกในช่วงที่มีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้า จะมีอุณหภูมิสูงกว่าบริเวณอื่นๆ และที่มุมใดๆ อุณหภูมิที่ผิวในจะมีค่าต่ำที่สุด และจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามระยะรัศมีจนมีค่าสูงสุดที่ผิวนอก ซึ่งพฤติกรรมการกระจายของอุณหภูมิทั้ง 6 กรณี จะไม่แตกต่างกันเท่าใดนัก

ในส่วนของหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ จะเห็นว่าหน่วยแรงที่มีค่าสูงได้แก่ หน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง และหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับหน่วยแรงทิศทางอื่นๆ นอกจากนี้ ทรงกระบอก 2 ชั้นและ 3 ชั้น จะมีหน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงมากกว่าทรงกระบอกชั้นเดียว ทั้งนี้เนื่องจากทรงกระบอกที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงชั้นเดียวจะเกิดหน่วยแรงขึ้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ไม่สม่ำเสมอเท่านั้น ในขณะที่หน่วยแรงในทรงกระบอกที่ประกอบด้วยวัสดุหลายชั้นนั้นนอกจากจะเกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ไม่สม่ำเสมอแล้ว ยังเกิดขึ้นได้จากการดึงรั้งระหว่างวัสดุแต่ละชั้นเนื่องจากการขยายตัวที่แตกต่างกันอีกด้วย ดังนั้น เมื่อรวมผลจากทั้งสองสาเหตุแล้ว จะทำให้ทรงกระบอก 2 ชั้นและ 3 ชั้น มีหน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงเกิดขึ้นสูงกว่าทรงกระบอกชั้นเดียว แต่การที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุมากกว่า 1 ชั้น จะไม่ทำให้หน่วยแรงเฉือนมีค่าเพิ่มขึ้นจากทรงกระบอกชั้นเดียวมากนัก ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่า การเพิ่มจำนวนชั้นจะไม่ก่อให้เกิดการยึดรั้งในทิศทางของการเฉือน สำหรับค่า

อุณหภูมิสูงสุดและค่าสูงสุดของหน่วยแรงในแต่ละทิศทางหารด้วยหน่วยแรงครากของวัสดุในกรณีต่างๆ สรุปได้ดังตารางที่ 6.2

ตารางที่ 6.2 ค่าอุณหภูมิสูงสุดและค่าสูงสุดของหน่วยแรงหารด้วยหน่วยแรงครากของวัสดุในแต่ละกรณี

กรณีที่	อุณหภูมิสูงสุด (°C)	$\left(\dfrac{\sigma_r}{\sigma_y}\right)_{\max}$	$\left(\dfrac{\sigma_\theta}{\sigma_y}\right)_{\max}$	$\left(\dfrac{\sigma_{r\theta}}{\sigma_y}\right)_{\max}$
1	200.75	0.000153	0.00121	0.0000649
2	200.47	0.0000804	0.000618	0.000028
3	200.60	0.0528	-0.278	0.000091
4	200.61	-0.0652	-0.313	0.0000187
5	200.68	-0.0187	-0.382	0.0000634
6	200.53	-0.0265	0.4	0.0000632
Max	200.75	-0.0652	0.4	0.000091
Min	200.47	0.0000804	0.000618	0.0000187

จากตารางข้างบนจะเห็นว่า หน่วยแรงเฉือนมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับหน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงซึ่งเป็นหน่วยแรงตั้งฉาก ดังนั้น อาจกล่าวได้ว่า หน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงเป็นหน่วยแรงหลัก (principle stress) ที่เกิดขึ้น และเนื่องจากหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงมีค่าสูงกว่าหน่วยแรงทิศทางรัศมีในทุกกรณี ดังนั้น หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงจึงเป็นหน่วยแรงตั้งฉากสูงสุด ส่วนหน่วยแรงทิศทางรัศมีเป็นหน่วยแรงตั้งฉากต่ำสุด เมื่อเปรียบเทียบสัดส่วนระหว่างหน่วยแรงที่เกิดขึ้นต่อหน่วยแรงครากของวัสดุทั้ง 6 กรณีแล้ว พบว่า กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุเพียงชนิดเดียวไม่ว่าจะเป็นเหล็กหรือทองแดงจะมีค่าสัดส่วนต่ำกว่ากรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น และ 3 ชั้น เป็นอย่างมาก โดยหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในทรงกระบอก 2 ชั้นและ 3 ชั้น จะมีค่ามากกว่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในทรงกระบอกชั้นเดียวประมาณ 120 - 800 เท่าสำหรับหน่วยแรงทิศทางรัศมี และประมาณ 230 – 650 เท่าสำหรับหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง ส่วนหน่วยแรงระหว่างกรณีทรงกระบอก 2 ชั้น กับกรณีทรงกระบอก 3 ชั้น จะมีค่าแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยเท่านั้น ดังนั้น เมื่อพิจารณาถึงหน่วยแรงที่เกิดขึ้นและกำลังของวัสดุแล้ว อาจกล่าวได้ว่า กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุเพียงชนิดเดียวน่าจะดีกว่ากรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุหลายชนิด และเมื่อเปรียบเทียบในกรณีที่เป็นวัสดุเพียงชนิดเดียวนี้จะเห็นว่า กรณีที่วัสดุเป็นทองแดงจะมีค่าสัดส่วนระหว่างหน่วยแรงสูงสุดต่อหน่วยแรงครากต่ำกว่ากรณีที่วัสดุเป็นเหล็ก ดังนั้น กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยทองแดงเพียงอย่างเดียวนี้จึงน่าจะเป็นกรณีที่ดีที่สุดในแง่ของหน่วยแรงที่เกิดขึ้น แต่หากเราพิจารณาถึงราคาของวัสดุด้วยแล้วจะเห็นว่า เหล็กมีราคาถูกกว่าทองแดงค่อนข้างมาก นอกจากนี้ ค่าสูงสุดของสัดส่วนระหว่างหน่วยแรงต่อหน่วยแรงครากในกรณีที่วัสดุเป็น

เหล็กนี้ก็ยังมีค่าน้อยมาก นั่นหมายความว่า เหล็กยังสามารถรับแรงที่เกิดจากความร้อนได้เพิ่มขึ้นอีกมาก ดังนั้น กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยเหล็กเพียงอย่างเดียวจึงน่าจะเป็นกรณีที่ดีที่สุด อย่างไรก็ตาม ทั้ง 6 กรณีนี้มีค่าหน่วยแรงสูงสุดไม่เกินหน่วยแรงคราก และหากพิจารณาสัดส่วนของหน่วยแรงสูงสุดต่อหน่วยแรงครากแล้วก็จะเห็นว่าหน่วยแรงที่เกิดมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับหน่วยแรงคราก ดังนั้น ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดเราก็สามารถนำไปใช้ได้ทั้งหมด

ที่กล่าวมาข้างต้นเราได้สรุปว่าการใช้เหล็กมาทำเป็นท่อน่าจะมีความเหมาะสมที่สุด ทั้งนี้ข้อสรุปดังกล่าวเราได้พิจารณาในแง่ของหน่วยแรงภายในที่เกิดขึ้น ความสามารถในการรับแรงและราคาของวัสดุเท่านั้น อย่างไรก็ตาม สิ่งสำคัญอีกอย่างหนึ่งที่จะต้องคำนึงถึงก็คือ ความรวดเร็วในการแพร่กระจายของความร้อนในวัสดุนั้น เพราะประสิทธิภาพของระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์จะขึ้นอยู่กับความสามารถในการนำความร้อนของท่อด้วย ดังนั้น ในขั้นตอนต่อไป จะทำการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ เพื่อพิจารณาถึงการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเทียบกับเวลาว่าแต่ละกรณีมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นรวดเร็วเพียงใดเมื่อมีฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าที่ผิวนอก ดังจะกล่าวต่อไปนี้

6.3 ภาวะชั่วครู่

ในการวิเคราะห์ปัญหาภาวะชั่วครู่ จะกำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของทรงกระบอกและอุณหภูมิของของเหลวภายในเท่ากับ 30 องศาเซลเซียส เมื่อเริ่มจับเวลาจึงมีฟลักซ์ขนาดคงที่ไหลเข้าที่ผิวนอกดังที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น ก่อนที่จะเริ่มวิเคราะห์ จะทำการหาการลู่ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้น โดยแบ่งช่วงเวลาเป็น 5, 2, 1 และ 0.5 วินาที เวลาที่พิจารณาการลู่เข้าคือที่เวลา 20 วินาที ผลการลู่เข้าโดยพิจารณาจากสัดส่วนระหว่างค่ายูคลิเดียนนอร์มยกกำลังสองต่อค่าผลรวมของคำตอบยกกำลังสอง(ε) แสดงดังกราฟรูปที่ 6.29 ซึ่งเมื่อใช้ช่วงเวลาลดลงจาก 2 วินาที เป็น 1 วินาทีแล้ว จะได้ $\varepsilon = 2.46 \times 10^{-5}$ ซึ่งมีค่าน้อยมาก ดังนั้น ในการวิเคราะห์ปัญหาภาวะชั่วครู่ จะเลือกใช้ช่วงเวลาเท่ากับ 1 วินาที

ผลการวิเคราะห์จะแสดงการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่จุดต่างๆ เทียบกับเวลาทั้ง 6 กรณี โดยในกรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 1 ชั้น และ 2 ชั้น จะแสดงค่าอุณหภูมิที่มุม 0 องศา บริเวณผิวนอก ผิวใน และกึ่งกลางความหนา ส่วนกรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น จะแสดงค่าอุณหภูมิที่มุม 0 องศา บริเวณผิวนอก ผิวใน และผิวสัมผัสทั้งสอง ผลการวิเคราะห์แสดงดังรูปที่ 6.30 – 6.35 สำหรับผลการวิเคราะห์ลำดับต่อไปจะทำการเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในเมื่อเวลาผ่านไปของทั้ง 6 กรณี เพราะการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในของท่อจะมีผลต่ออุณหภูมิของของเหลวที่บรรจุอยู่ภายใน การเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่ผิวในนี้ เราจะพิจารณาที่มุม 0 องศา และ 180 องศา โดยจะทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ๆ นั่นคือ เปรียบเทียบกันเองระหว่างวัสดุชั้นเดียว ระหว่างวัสดุ 2 ชั้น และระหว่างวัสดุ 3 ชั้น ดังแสดงในรูปที่ 6.36 – 6.41 เมื่อเปรียบเทียบแต่ละคู่แล้ว ก็จะเลือกกรณีที่มีการถ่ายเทความร้อนดีกว่าในแต่ละคู่มาเปรียบเทียบกันอีกครั้งหนึ่ง ดังแสดงในรูปที่ 6.42 - 6.43

จากกราฟรูปที่ 6.30 – 6.35 ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่จุดต่างๆ เทียบกับเวลาทั้ง 6 กรณี จะเห็นว่า อุณหภูมิที่ทุกๆ จุดมีค่าเพิ่มขึ้นตามเวลา และเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วในช่วงแรก จากนั้นอัตราการเพิ่มของอุณหภูมิก็จะลดลงเรื่อยๆ โดยที่เวลาประมาณ 30 วินาที อุณหภูมิมีการเปลี่ยนแปลงช้ามาก ดังนั้น อาจกล่าวได้

ว่า ที่เวลา 30 วินาที การนำความร้อนบริเวณมุม 0 องศา เกือบจะเข้าสู่ภาวะอยู่ตัวแล้ว เมื่อเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในสำหรับทรงกระบอกที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงชั้นเดียว พบว่า กรณีที่วัสดุเป็นทองแดงจะมีการนำความร้อนได้ดีกว่ากรณีที่วัสดุเป็นเหล็กเพราะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นรวดเร็วกว่าทั้งที่มุม 0 องศา และ 180 องศา โดยอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 180 องศาของทรงกระบอกทองแดงจะมีค่าเป็น 90% ของภาวะอยู่ตัว เมื่อเวลาผ่านไปเพียง 25 วินาที ในขณะที่ทรงกระบอกเหล็กต้องใช้เวลาถึง 39 วินาที ทั้งนี้ การที่ทองแดงสามารถนำความร้อนได้ดีกว่าเหล็กก็เนื่องจากว่าทองแดงมีค่าสัมประสิทธิ์การแผ่กระจายความร้อน (thermal diffusivity) สูงกว่าเหล็ก โดยค่าสัมประสิทธิ์การแผ่กระจายความร้อนมีค่าเท่ากับ $\frac{k}{\rho c}$ มีหน่วยเป็น m^2/sec โดยที่ k คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) มีหน่วยเป็น w/m $^{\circ}$C

ρ คือ ความหนาแน่นของวัสดุ มีหน่วยเป็น kg/m^3

c คือ ความจุความร้อนจำเพาะของวัสดุ มีหน่วยเป็น J/kg $^{\circ}$C

ค่าสัมประสิทธิ์การแผ่กระจายความร้อนนี้ เป็นคุณสมบัติของวัสดุตัวกลางการถ่ายเทความร้อนที่บ่งบอกถึงความรวดเร็วในการแพร่กระจายความร้อนภายในเนื้อวัสดุ โดยวัสดุชนิดใดมีค่าสัมประสิทธิ์การแผ่กระจายความร้อนสูง ก็แสดงว่าความร้อนจะสามารถแพร่กระจายได้อย่างรวดเร็วในวัสดุชนิดนั้น ดังนั้น การที่ทองแดงมีค่าสัมประสิทธิ์การแผ่กระจายความร้อนมากกว่าเหล็กจึงทำให้ความร้อนแพร่กระจายได้เร็วกว่า ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์การแผ่กระจายความร้อนของทองแดงประมาณ 23.4×10^{-6} m^2/sec ส่วนเหล็กมีค่าประมาณ 11.7×10^{-6} m^2/sec จะเห็นว่าทองแดงมีค่าสัมประสิทธิ์การแผ่กระจายความร้อนมากกว่าเหล็กถึงสองเท่า

สำหรับทรงกระบอกที่ประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น เมื่อเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในเทียบกับเวลาระหว่างกรณีทั้งสองแล้ว พบว่า กรณีที่วัสดุชั้นในเป็นทองแดงจะมีอุณหภูมิที่มุม 0 องศาเพิ่มขึ้นเร็วกว่ากรณีที่วัสดุชั้นในเป็นเหล็ก แต่ที่มุม 180 องศา อุณหภูมิจะเพิ่มขึ้นได้ช้ากว่า ทำให้เราไม่สามารถบอกได้ว่ากรณีใดมีการถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่า และอาจกล่าวได้ว่ากรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้นนี้ มีการถ่ายเทความร้อนที่ไม่ดี เพราะเกิดขึ้นได้ไม่ทั่วถึง ส่วนการเปรียบเทียบในกรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น พบว่า กรณีที่วัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดงจะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นเร็วกว่ากรณีที่วัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นเหล็กทั้งที่มุม 0 องศา และ 180 องศา ดังนั้น กรณีที่วัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดงจึงมีการถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่า

สรุปได้ว่า กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุเพียงชั้นเดียว การใช้ทองแดงเป็นวัสดุจะทำให้มีการถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่าการใช้เหล็ก และกรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น การใช้ทองแดงเป็นวัสดุชั้นในและชั้นนอก จะทำให้มีการถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่าการใช้เหล็กเป็นวัสดุชั้นในและชั้นนอก ส่วนกรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น เราไม่สามารถบอกได้ว่ากรณีใดถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่า เพราะในแต่ละกรณีจะมีการนำความร้อนที่ดีในบางบริเวณเท่านั้น และเมื่อเปรียบเทียบการถ่ายเทความร้อนระหว่างกรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 1 ชั้น 2 ชั้น และ 3 ชั้นแล้ว พบว่า กรณีวัสดุ 1 ชั้น จะมีการถ่ายเทความร้อนได้ดีที่สุด รองลงมาเป็นกรณีของวัสดุ 3 ชั้น สุดท้ายเป็นกรณีวัสดุ 2 ชั้น

อย่างไรก็ตาม แม้กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยทองแดงอย่างเดียวจะเป็นกรณีที่มีการนำความร้อนได้ดีที่สุด แต่ก็จะมีทองแดงซึ่งเป็นวัสดุที่มีราคาสูงในปริมาณที่มากกว่ากรณีอื่นๆ ด้วยเช่นกัน ดังนั้น หากเรา

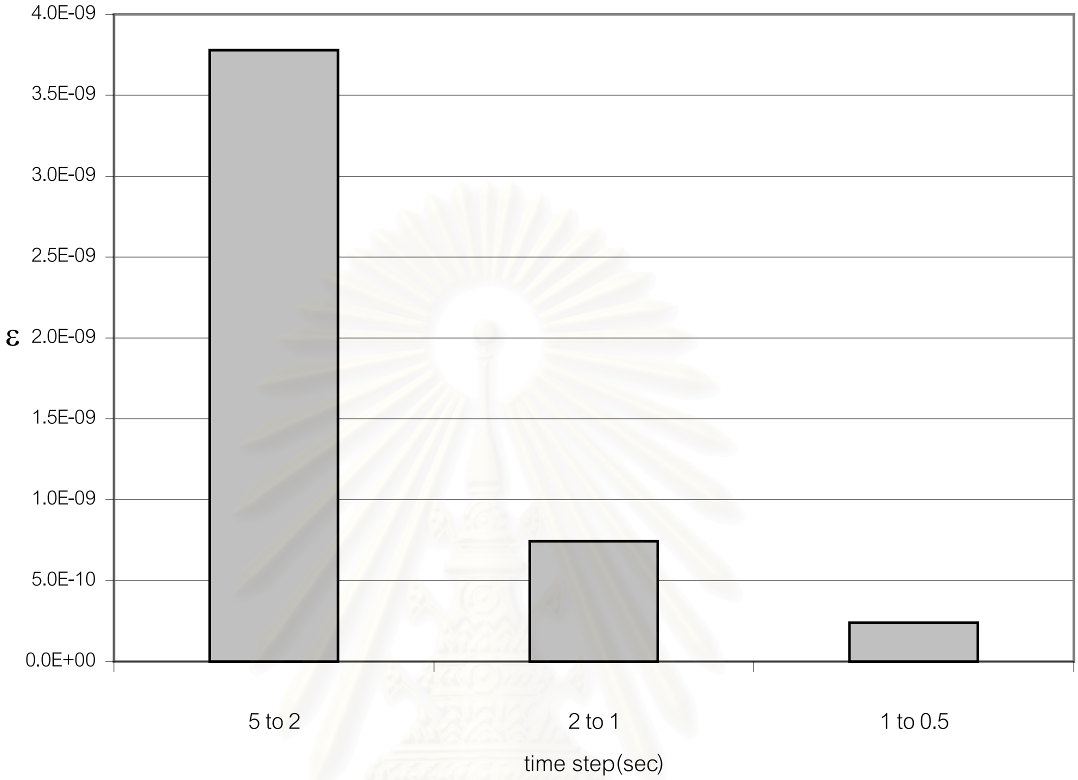
ต้องการใช้ทองแดงในปริมาณที่น้อยลงโดยยังมีการถ่ายเทความร้อนได้ดี กรณีวัสดุ 3 ชั้น โดยชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดง ก็จะเป็นกรณีที่น่าสนใจอีกกรณีหนึ่ง ดังนั้น ในขั้นตอนต่อไป เราจะวิเคราะห์ปัญหากรณีที่ 7 ซึ่งเป็นทรงกระบอกที่ประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดงเหมือนกับกรณีที่ 6 แต่จะลดความหนาของชั้นทองแดงลง เพื่อต้องการลดปริมาณทองแดงลงไปอีก โดยกรณีที่ 7 นี้ เป็นทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น ชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดงหนา 0.25 ซ.ม. ชั้นกลางเป็นเหล็กหนา 0.5 ซ.ม. ผลการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเทียบกับเวลาในกรณีที่ 7 นี้ จะเปรียบเทียบกับกรณีที่ 2 ซึ่งวัสดุเป็นทองแดงเพียงอย่างเดียว และกรณีที่ 6 ซึ่งเป็นวัสดุ 3 ชั้นเหมือนกัน แต่ความหนาของแต่ละชั้นแตกต่างกัน โดยเปรียบเทียบที่มุม 0 องศา และ 180 องศา ดังแสดงในรูปที่ 6.44 – 6.45

จากการเปรียบเทียบความสามารถในการถ่ายเทความร้อน โดยพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเทียบกับเวลาระหว่างกรณีที่ 2 กรณีที่ 6 และกรณีที่ 7 ดังรูปที่ 6.44-6.45 จะเห็นว่า กรณีที่ 2 มีการถ่ายเทความร้อนได้ดีที่สุด รองลงมาเป็นกรณีที่ 6 และสุดท้ายเป็นกรณีที่ 7 จะสังเกตได้ว่ากรณีที่มีทองแดงในปริมาณมากกว่าก็จะมีการถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่า แต่ในขณะเดียวกันก็จะมีราคาแพงกว่าด้วย สรุปก็คือ ยิ่งมีความสามารถในการถ่ายเทความร้อนได้ดีก็จะยิ่งมีราคาแพง ดังนั้น การจะเลือกใช้กรณีใดมาทำเป็นท่อ จะต้องพิจารณาถึงสัดส่วนระหว่างความสามารถในการถ่ายเทความร้อนกับราคาของวัสดุด้วยว่าเราต้องการสัดส่วนเป็นอย่างไร กล่าวคือ ถ้าต้องการให้ท่อมีความสามารถในการถ่ายเทความร้อนที่ดีมากๆ โดยไม่เน้นเรื่องราคา เราก็อาจจะเลือกใช้กรณีที่วัสดุเป็นทองแดงเพียงอย่างเดียว แต่ถ้าเราอยากได้ท่อที่มีราคาถูกลง ก็จำเป็นจะต้องยอมเสียความสามารถในการถ่ายเทความร้อนของท่อไปบ้าง โดยการเลือกใช้กรณีที่ 6 หรือกรณีที่ 7 ขึ้นอยู่กับว่าเราต้องการสัดส่วนระหว่างความสามารถในการถ่ายเทความร้อนกับราคามากน้อยเพียงใด

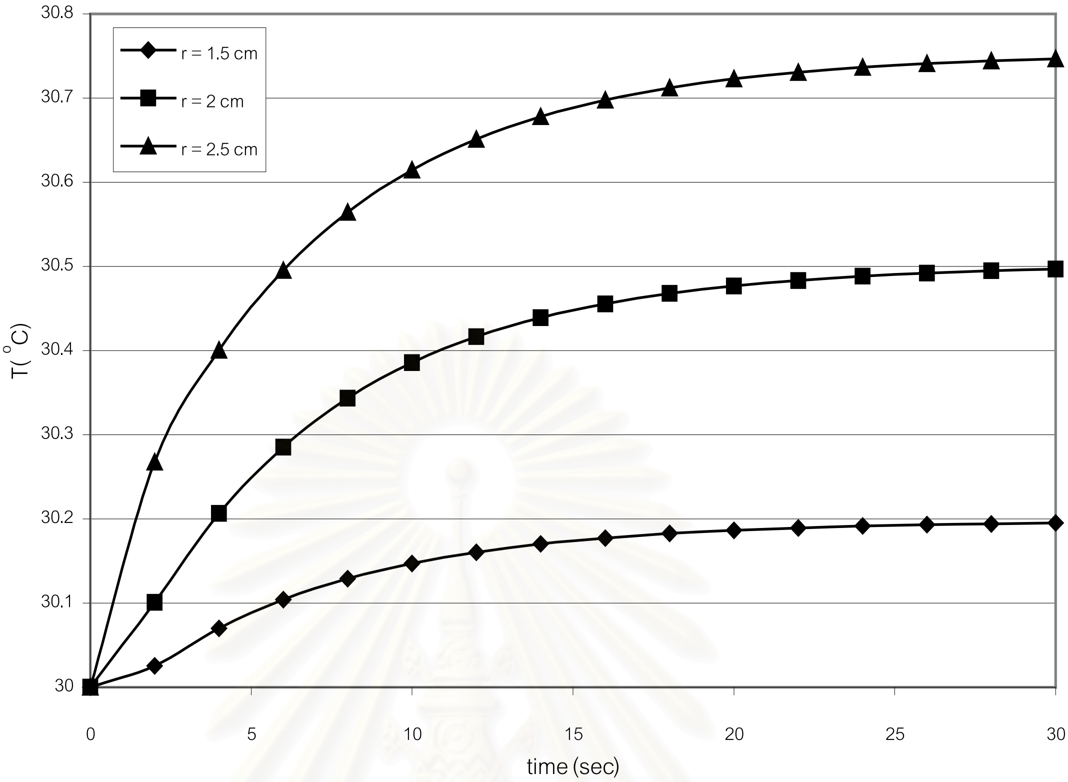
6.4 สรุปผล

จากการวิเคราะห์ปัญหาในภาวะอยู่ตัว 6 กรณี และปัญหาในภาวะชั่วครู่ 7 กรณี ที่ผ่านมา เราได้เปรียบเทียบทั้งหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในวัสดุ และความสามารถในการถ่ายเทความร้อนของท่อ ซึ่งในส่วนของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นพบว่า กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุเพียงชั้นเดียว ไม่ว่าจะเป็นเหล็กหรือทองแดงก็ตาม สัดส่วนระหว่างหน่วยแรงที่เกิดขึ้นต่อหน่วยแรงครากของวัสดุจะมีค่าต่ำกว่ากรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น หรือ 3 ชั้น ค่อนข้างมาก โดยหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในทรงกระบอก 2 ชั้นและ 3 ชั้น จะมีค่ามากกว่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในทรงกระบอกชั้นเดียวประมาณ 120 - 800 เท่าสำหรับหน่วยแรงทิศทางรัศมี และประมาณ 230 – 650 เท่าสำหรับหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง ซึ่งในทุกๆ กรณี หน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวงจะมีค่าสูงสุด และหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าต่ำสุด อย่างไรก็ตาม หน่วยแรงทุกๆ ทิศทางในแต่ละกรณีก็มีค่าต่ำกว่าหน่วยแรงครากของวัสดุมาก ดังนั้น ทรงกระบอกทุกๆ กรณีสามารถทนต่อความร้อนได้ สำหรับความสามารถในการถ่ายเทความร้อนนั้น เมื่อเปรียบเทียบกันทั้ง 7 กรณีแล้ว พบว่า กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยทองแดงเพียงอย่างเดียวจะมีการถ่ายเทความร้อนได้ดีที่สุด รองลงมาเป็นกรณีวัสดุ 3 ชั้น โดยชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดง ชั้นกลางเป็นเหล็ก ส่วนกรณีที่มีความสามารถในการถ่ายเทความร้อนได้ต่ำที่สุดคือ กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยเหล็กเพียงอย่างเดียว โดยทั้งสามกรณีนี้จะมีอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 180 องศาเป็น 90% ของภาวะอยู่ตัวเมื่อเวลาผ่านไป 25, 27

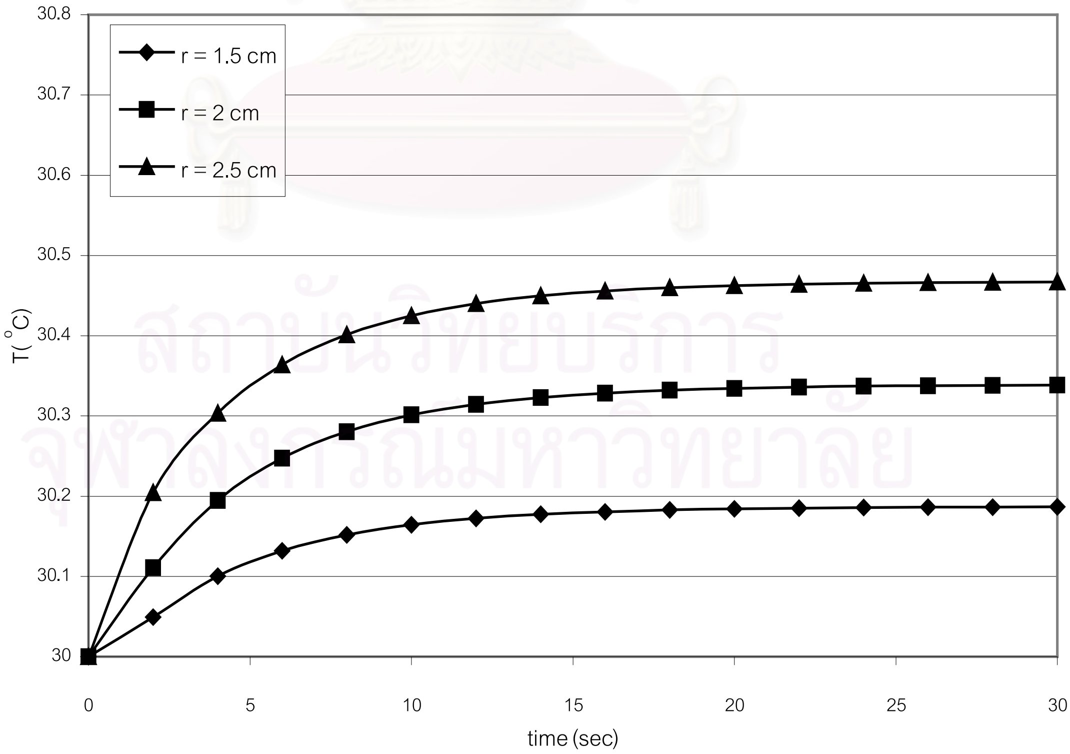
และ 39 วินาที ตามลำดับ จะสังเกตได้ว่า ยิ่งทรงกระบอกมีทองแดงในปริมาณมากก็จะยิ่งมีการถ่ายเทความร้อนได้ดี อย่างไรก็ตาม การใช้ทองแดงในปริมาณมากขึ้น ก็จะทำให้ทรงกระบอกมีราคาสูงขึ้นด้วย



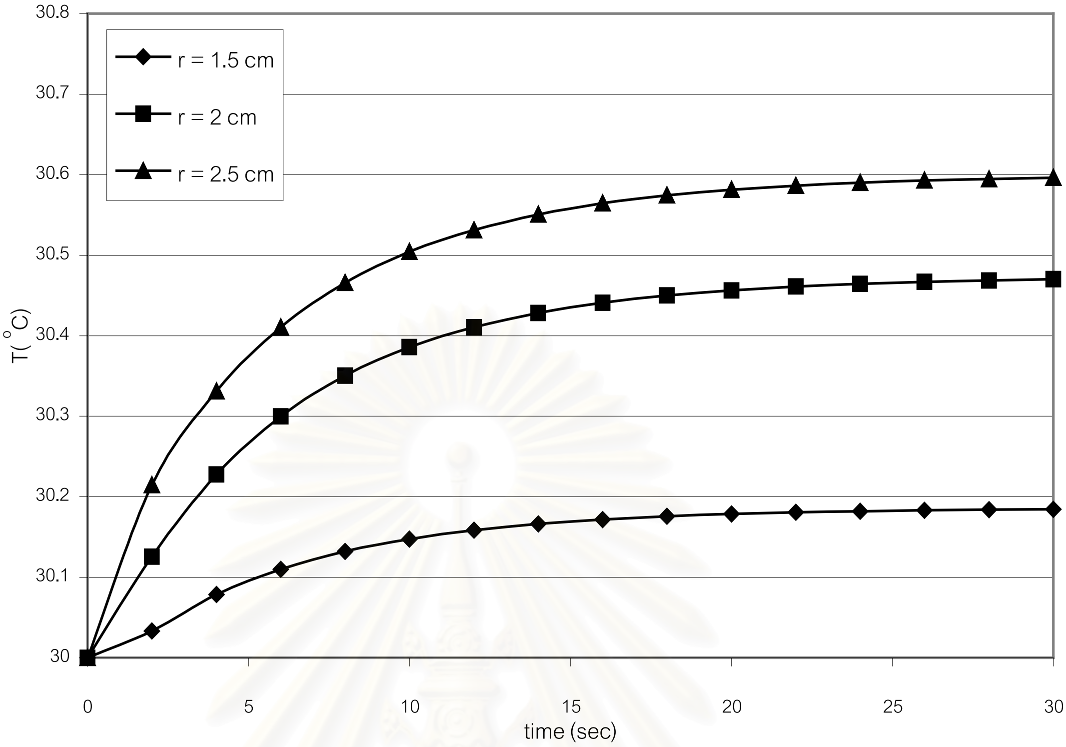
รูปที่ 6.29 ค่า ε ของการกระจัดทิศทางรัศมีเมื่อแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดขึ้น



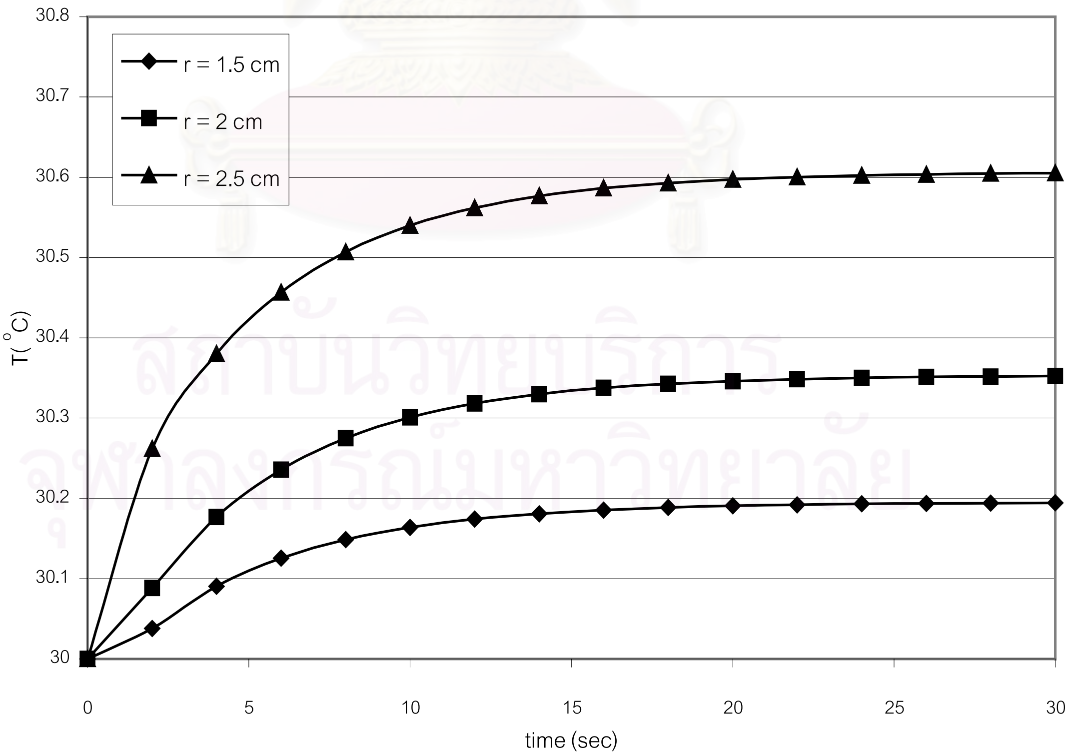
รูปที่ 6.30 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ระยะรัศมีต่างๆ เทียบกับเวลา กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยเหล็กเพียงอย่างเดียว



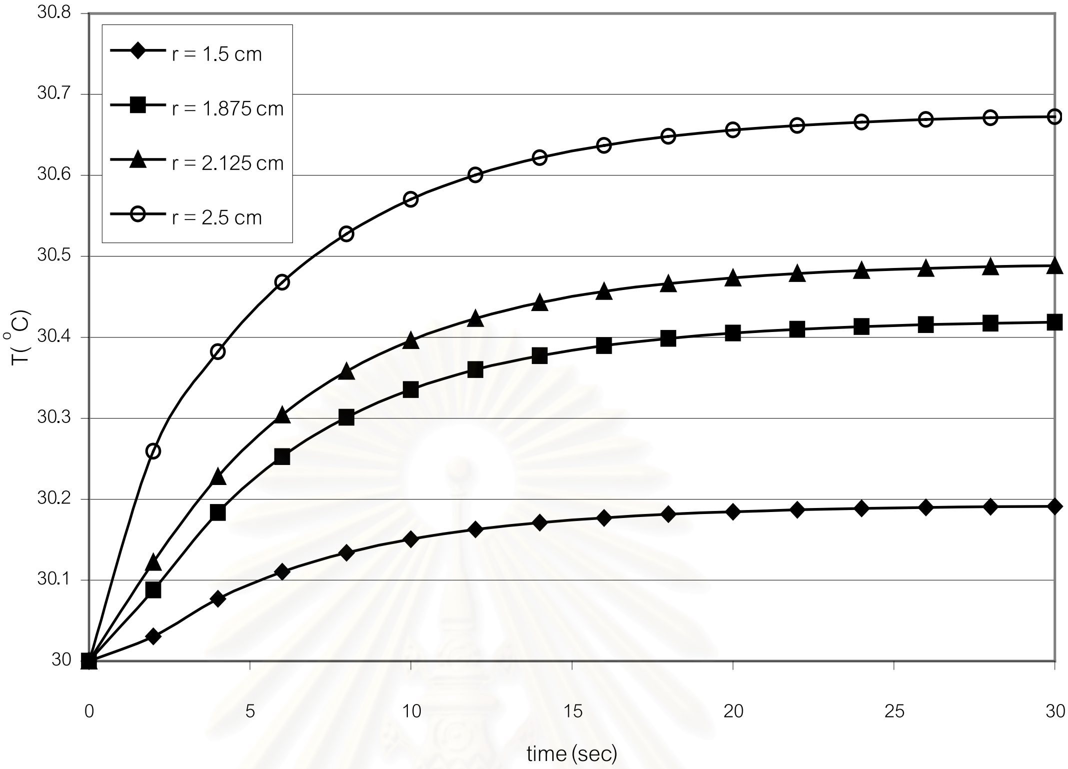
รูปที่ 6.31 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ระยะรัศมีต่างๆ เทียบกับเวลา กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยทองแดงเพียงอย่างเดียว



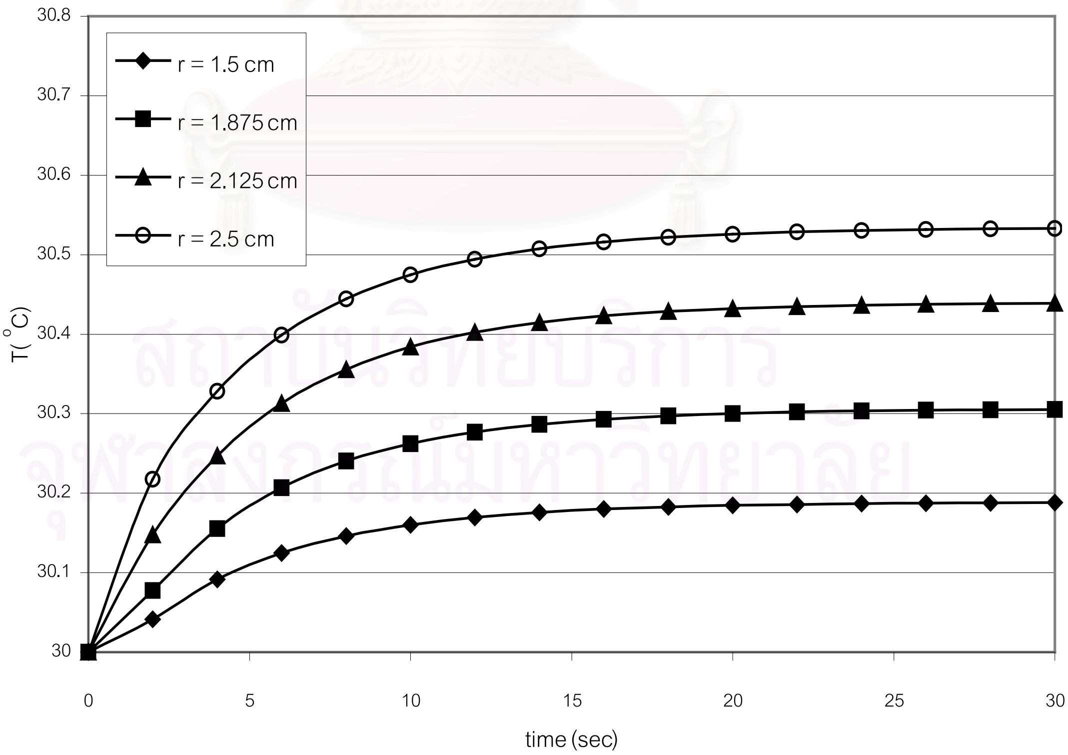
รูปที่ 6.32 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ระยะรัศมีต่างๆ เทียบกับเวลา กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นเหล็ก ส่วนชั้นนอกเป็นทองแดง



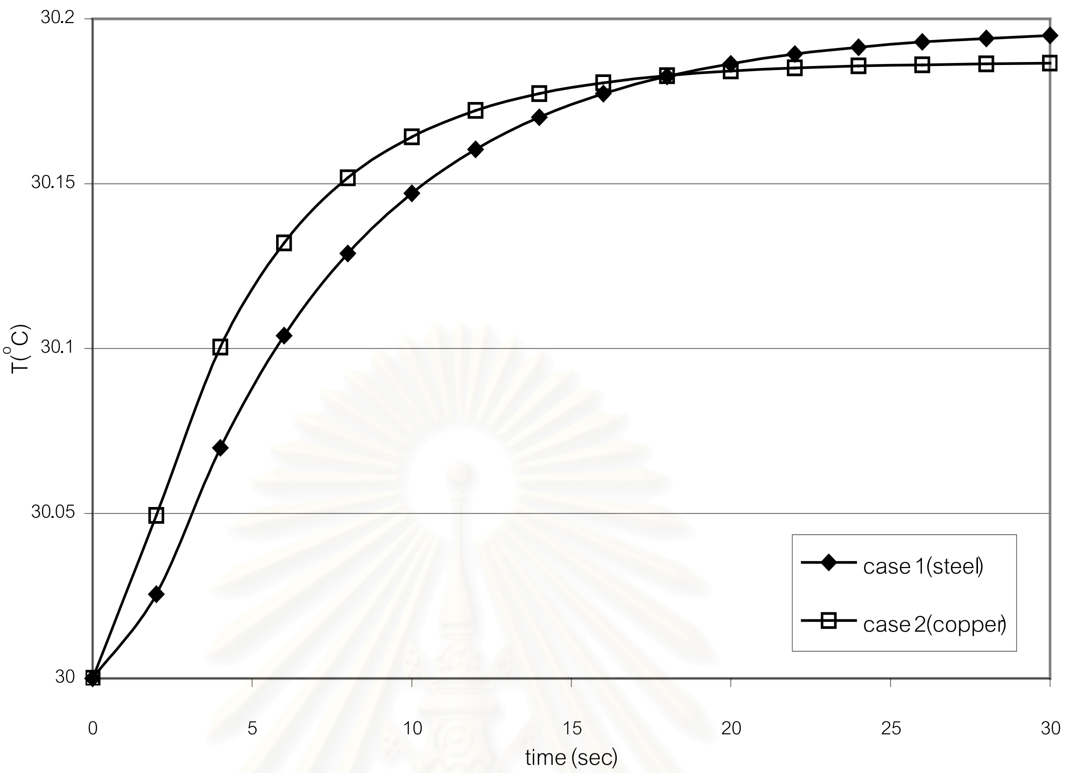
รูปที่ 6.33 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ระยะรัศมีต่างๆ เทียบกับเวลา กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น โดยวัสดุชั้นในเป็นทองแดง ส่วนชั้นนอกเป็นเหล็ก



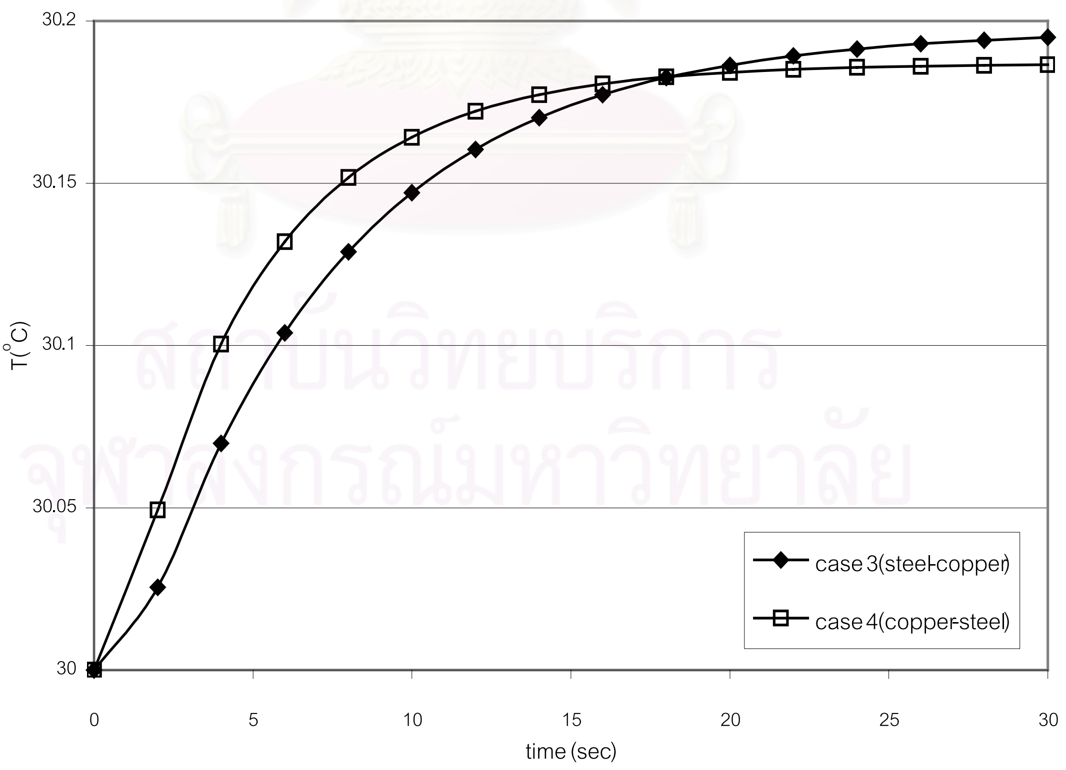
รูปที่ 6.34 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ระยะรัศมีต่างๆ เทียบกับเวลา กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นเหล็ก ส่วนชั้นกลางเป็นทองแดง



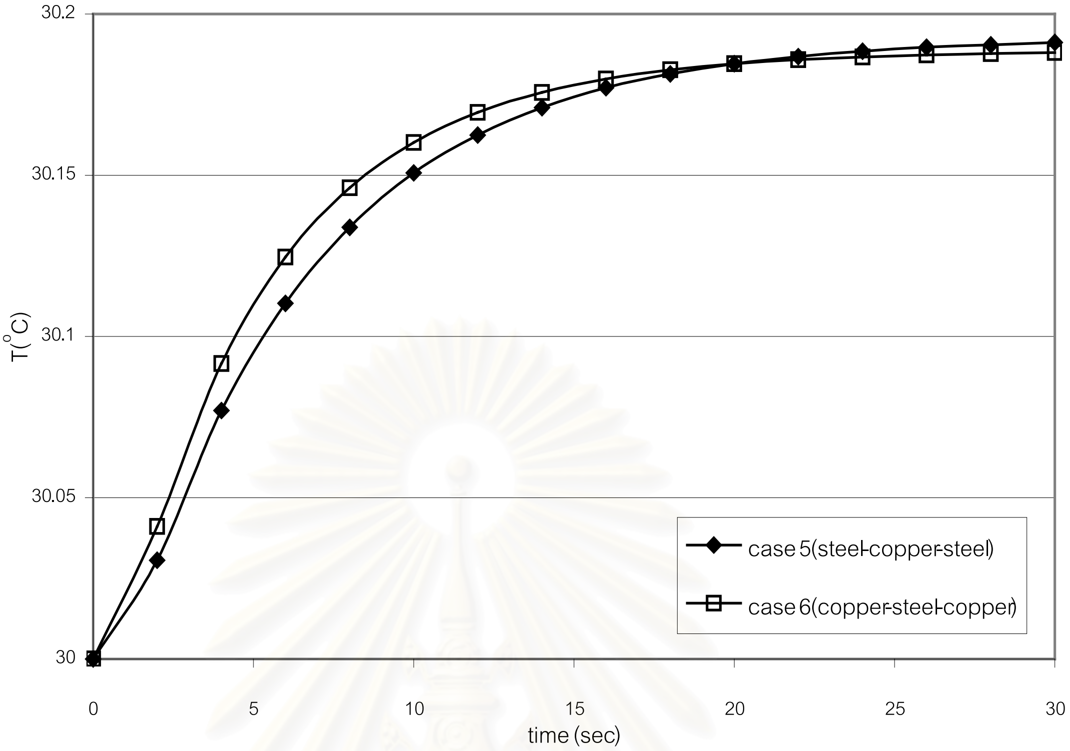
รูปที่ 6.35 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ระยะรัศมีต่างๆ เทียบกับเวลา กรณีที่ทรงกระบอกประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น โดยวัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดง ส่วนชั้นกลางเป็นเหล็ก



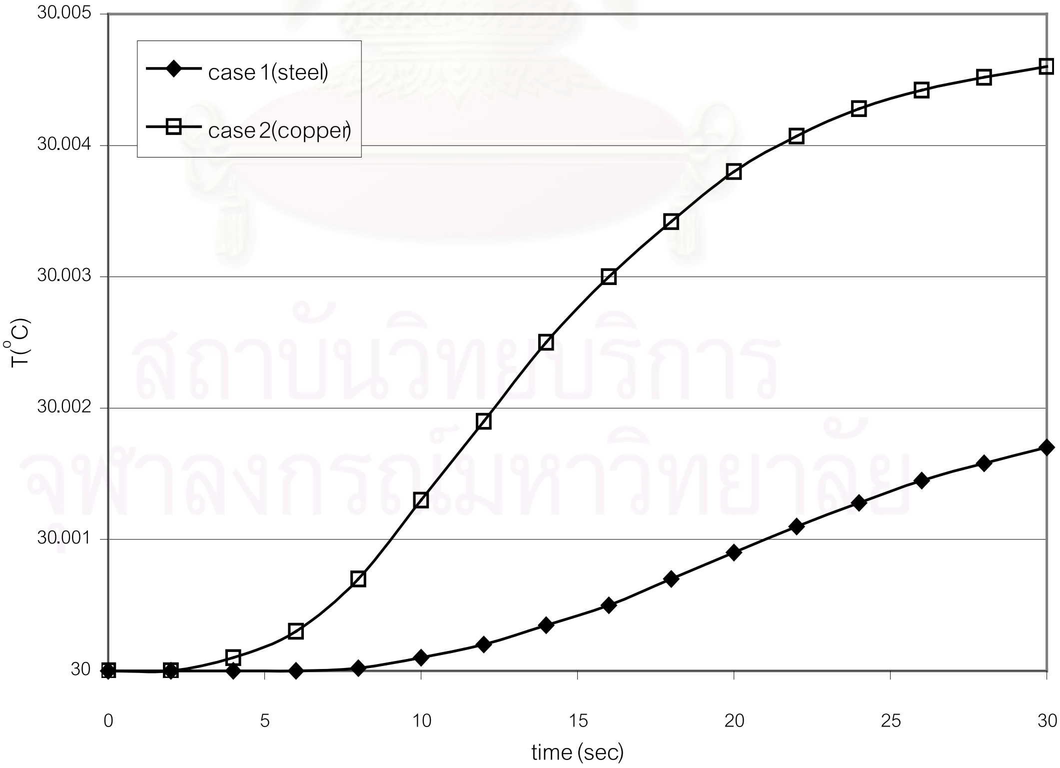
รูปที่ 6.36 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 0 องศา เมื่อเวลาผ่านไป ระหว่างกรณีที่วัสดุเป็นเหล็กเพียงอย่างเดียว กับกรณีที่วัสดุเป็นทองแดงเพียงอย่างเดียว



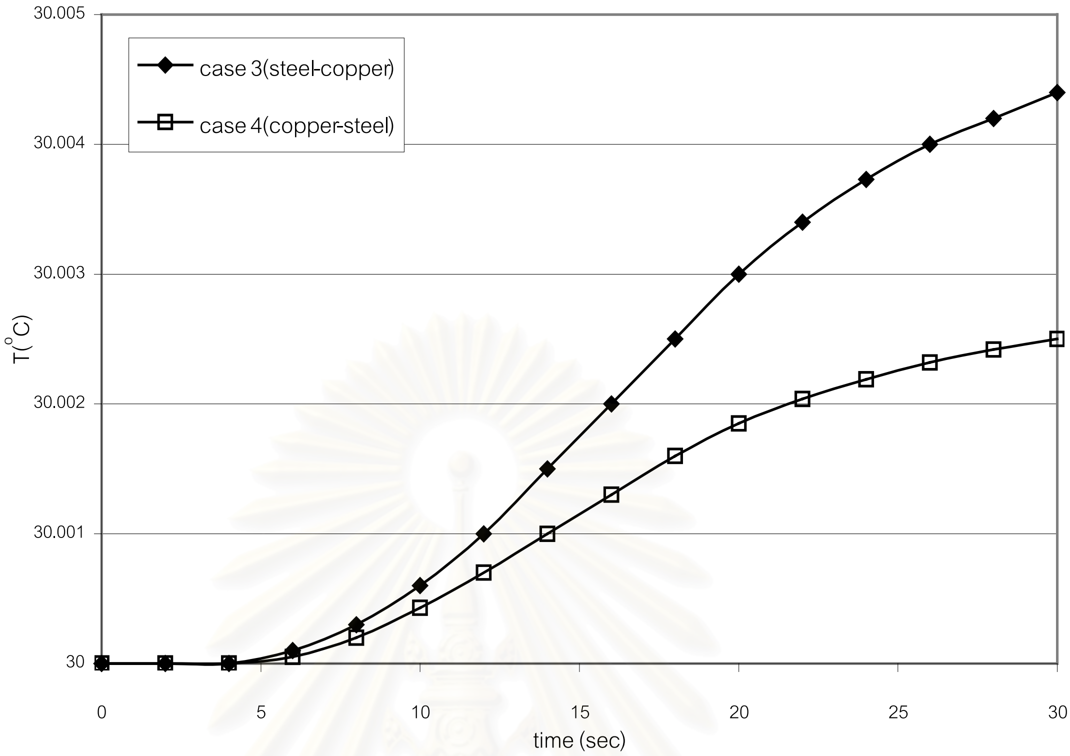
รูปที่ 6.37 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 0 องศา เมื่อเวลาผ่านไป ระหว่างกรณีที่วัสดุชั้นในเป็นเหล็ก ชั้นนอกเป็นทองแดง กับกรณีที่วัสดุชั้นในเป็นทองแดง ชั้นนอกเป็นเหล็ก



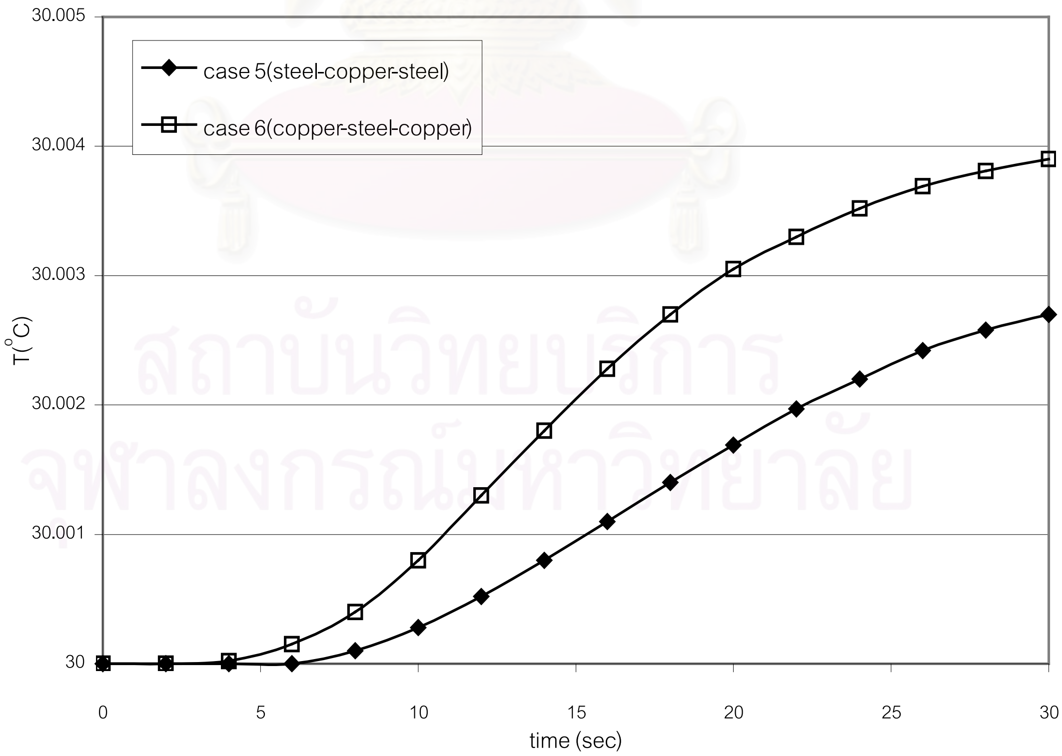
รูปที่ 6.38 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 0 องศา เมื่อเวลาผ่านไป ระหว่างกรณีที่วัสดุชั้นใน และชั้นนอกเป็นเหล็ก ชั้นกลางเป็นทองแดง กับกรณีที่วัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดง ชั้นกลางเป็นเหล็ก



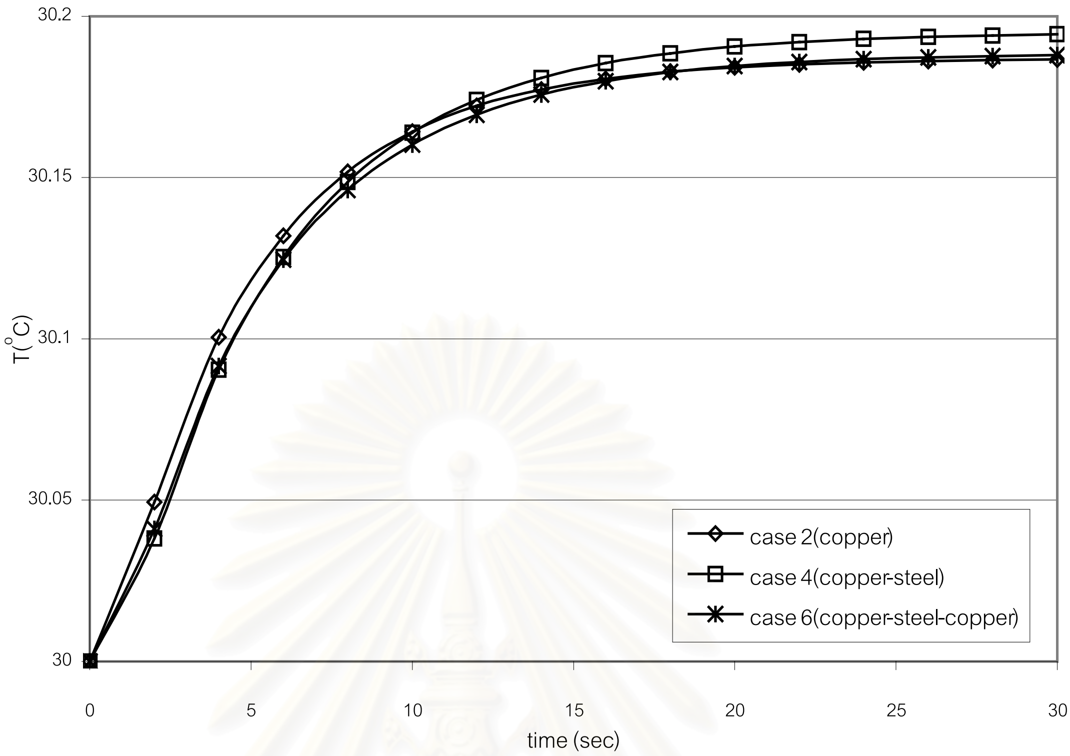
รูปที่ 6.39 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 180 องศา เมื่อเวลาผ่านไป ระหว่างกรณีที่วัสดุเป็นเหล็กเพียงอย่างเดียว กับกรณีที่วัสดุเป็นทองแดงเพียงอย่างเดียว



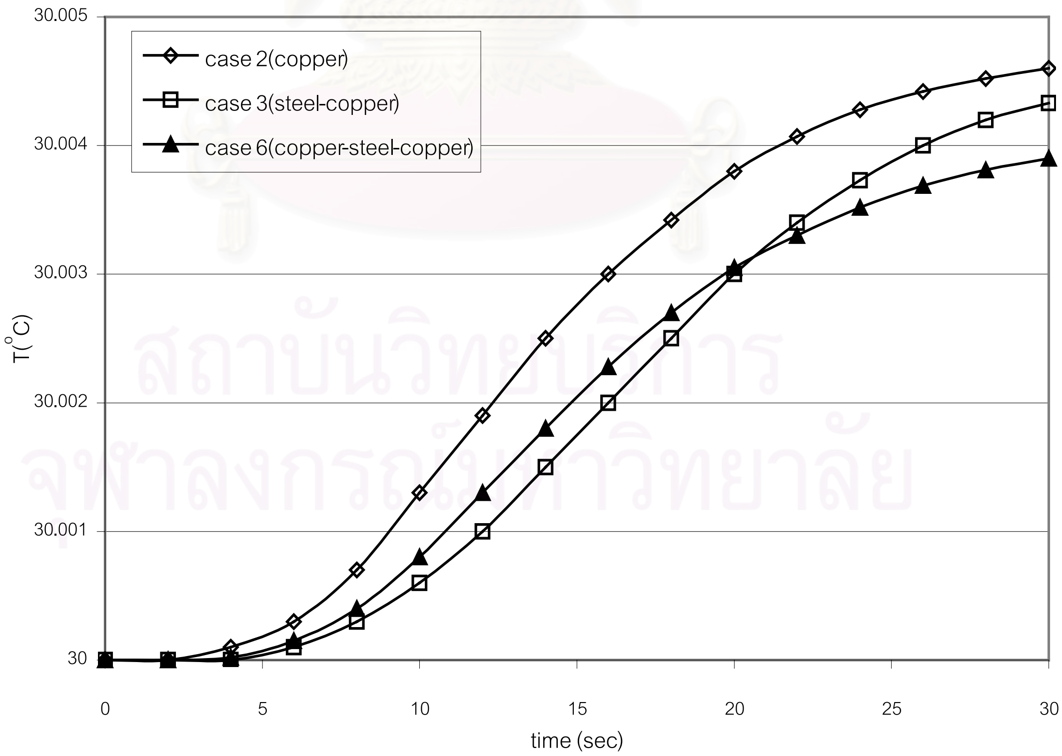
รูปที่ 6.40 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 180 องศา เมื่อเวลาผ่านไป ระหว่างกรณีที่วัสดุชั้นในเป็นเหล็ก ชั้นนอกเป็นทองแดง กับกรณีที่วัสดุชั้นในเป็นทองแดง ชั้นนอกเป็นเหล็ก



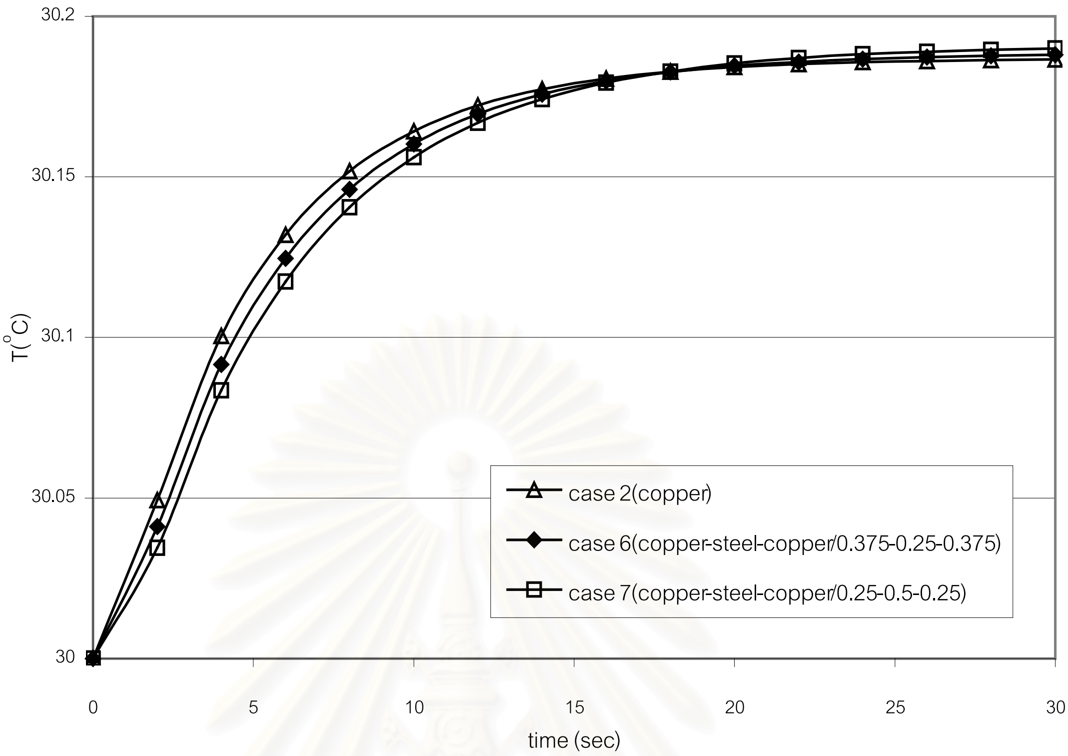
รูปที่ 6.41 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 180 องศา เมื่อเวลาผ่านไป ระหว่างกรณีที่วัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นเหล็ก ชั้นกลางเป็นทองแดง กับกรณีที่วัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดง ชั้นกลางเป็นเหล็ก



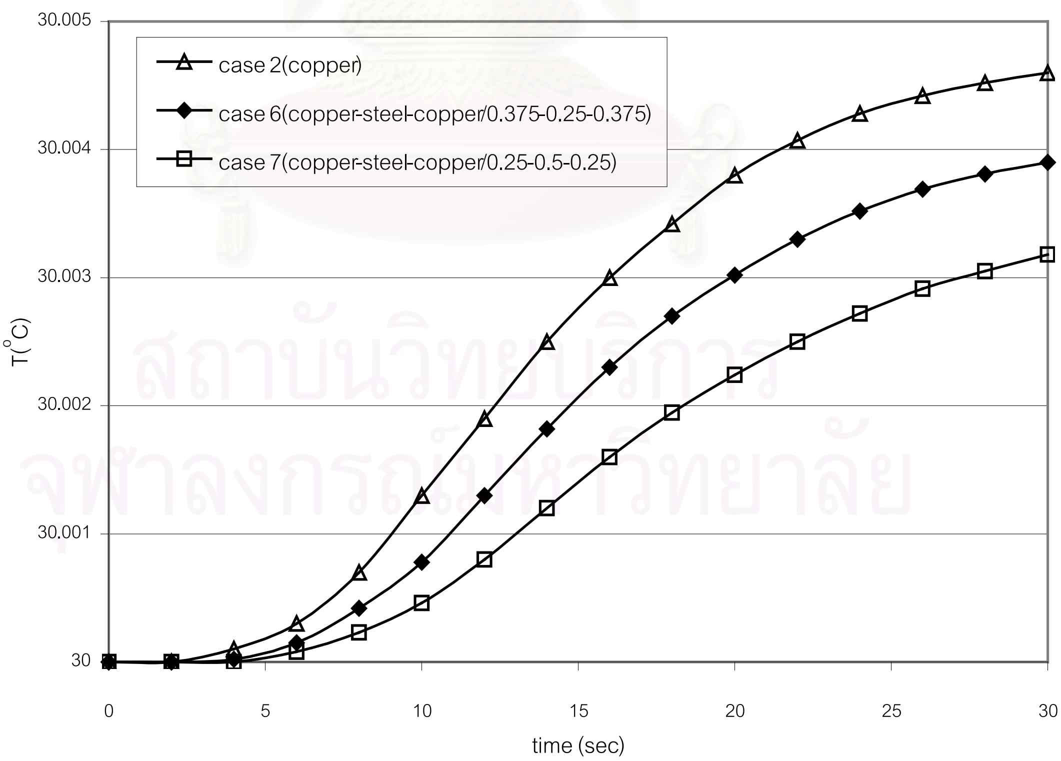
รูปที่ 6.42 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 0 องศา เมื่อเวลาผ่านไป ระหว่างกรณีวัสดุ 1 ชั้น 2 ชั้น และ 3 ชั้น



รูปที่ 6.43 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 180 องศา เมื่อเวลาผ่านไป ระหว่างกรณีวัสดุ 1 ชั้น 2 ชั้น และ 3 ชั้น



รูปที่ 6.44 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 0 องศา เมื่อเวลาผ่านไป ระหว่างกรณีที่ 2 กรณีที่ 6 และกรณีที่ 7



รูปที่ 6.45 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 180 องศา เมื่อเวลาผ่านไป ระหว่างกรณีที่ 2 กรณีที่ 6 และกรณีที่ 7

บทที่ 7

บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ของทรงกระบอกกลวงที่ยาวมาก ประกอบด้วยวัสดุเป็นชั้นๆ เงื่อนไขขอบเขตอาจเป็นการกำหนดอุณหภูมิ กำหนดฟลักซ์ความร้อน หรือมีการพาความร้อนเกิดขึ้นก็ได้ การนำความร้อนเกิดขึ้นใน 2 มิติ ในระนาบตัดขวาง ซึ่งจะสามารถพิจารณาให้ทรงกระบอกอยู่ในสภาวะความเครียดระนาบได้ การแก้ปัญหาได้อาศัยทฤษฎีตามชั้น (layerwise theory) ในการพัฒนาแบบจำลองแยกชั้น(discrete - layer model) ขึ้น สำหรับใช้วิเคราะห์ทั้งการกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิ โดยมีการแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ ในทิศทางรัศมี และทำการสมมติคำตอบโดยประมาณขึ้น โดยในทิศทางรัศมีใช้ฟังก์ชันสัณฐาน(shape function) เป็นแบบลากรางจ์เชิงเส้น ส่วนในทิศทางเส้นรอบวงใช้ฟังก์ชันสัณฐานเป็นอนุกรมฟูเรียร์ สำหรับการแก้ปัญหาในภาวะชั่วครู่ได้อาศัยวิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด(recurrence relations) ซึ่งมีการแบ่งเวลาออกเป็นช่วงๆ แล้วทำการคำนวณทีละช่วงต่อเนื่องกันไป

หลังจากได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาตามวิธีแบบจำลองแยกชั้นแล้ว ได้มีการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมและแบบจำลองโดยทำการวิเคราะห์ปัญหาและเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งมีทั้งปัญหาใน 1 มิติ และ 2 มิติ โดยลักษณะของทรงกระบอกและเงื่อนไขขอบเขตก็จะแตกต่างกันออกไปในแต่ละกรณี การทำกรณีศึกษาเปรียบเทียบนี้ นอกจากจะเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมแล้ว ยังได้พิจารณาว่า ผลการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองแยกชั้นมีความถูกต้องแม่นยำมากน้อยเพียงใด จากการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองแยกชั้นกับผลเฉลยแม่นตรงพบว่า สำหรับปัญหาใน 1 มิติ ผลการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองแยกชั้นมีความถูกต้องแม่นยำสูงมาก โดยมีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.5% ซึ่งความถูกต้องแม่นยำของปัญหา 1 มิติ นี้ จะขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นของทรงกระบอกที่แบ่ง และช่วงเวลา(time step) ที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาภาวะชั่วครู่ โดยยิ่งแบ่งทรงกระบอกเป็นจำนวนชั้นมากเท่าใดและใช้ช่วงเวลาที่ละเอียดมากเท่าใด ก็ยิ่งจะได้คำตอบที่ถูกต้องแม่นยำมากขึ้นเท่านั้น

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ในปัญหา 2 มิติ พบว่า ผลการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองแยกชั้นมีความถูกต้องแม่นยำพอสมควร ซึ่งความถูกต้องแม่นยำของปัญหา 2 มิติ นี้ นอกจากจะขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นที่แบ่งและช่วงเวลาที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาภาวะชั่วครู่แล้ว ยังขึ้นอยู่กับจำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์ในอนุกรมฟูเรียร์ซึ่งใช้แทนฟังก์ชันสัณฐานในทิศทางเส้นรอบวงด้วย โดยความถูกต้องแม่นยำจะสูงขึ้นเมื่อแบ่งจำนวนชั้นของทรงกระบอกเพิ่มขึ้น เพิ่มจำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์ในอนุกรมฟูเรียร์ และแบ่งช่วงเวลาให้ละเอียดมากขึ้น ยกเว้นในบางกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตเป็นการกำหนดอุณหภูมิที่มีการกระจายตัวเป็นฟังก์ชันของไซน์หรือโคไซน์ซึ่งสามารถแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์ได้อย่างถูกต้อง ความถูกต้องแม่นยำจะมากที่สุดเมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์ที่ค่าจำกัดค่าหนึ่ง ซึ่งแม้ว่าเราจะใช้จำนวนเทอมเพิ่มขึ้นจากค่าดังกล่าวคำตอบก็จะไม่เปลี่ยนแปลง จากการวิเคราะห์ปัญหาในหลายๆ ลักษณะ พบว่า กรณีที่เงื่อนไขขอบเขตเป็นการกำหนดอุณหภูมิเป็นช่วงที่ผิวซึ่งต้องแทนการกระจายอุณหภูมิด้วยอนุกรมฟูเรียร์นั้น ความถูกต้องแม่นยำจะสูงขึ้น เมื่อใช้จำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์เพิ่มขึ้น

สำหรับการวิเคราะห์กรณีศึกษาปัญหาการนำความร้อนและหน่วยแรงภายในที่เกิดขึ้นของท่อบรรจุของเหลวในระบบผลิตไฟฟ้าพลังงานแสงอาทิตย์(trough) ซึ่งผิวนอกของท่อได้รับฟลักซ์ความร้อนจากแสงอาทิตย์ที่สะท้อนมากจากแผ่นโลหะรับแสง และภายในมีของเหลวบรรจุอยู่ ดังนั้น เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวในจึงพิจารณาให้เป็นการพาความร้อน ส่วนผิวนอกบริเวณที่ได้รับแสงอาทิตย์จะพิจารณาเป็นฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าที่ผิว และบริเวณที่ไม่ได้รับแสงจะพิจารณาให้เป็นฉนวน ในการวิเคราะห์ได้พิจารณาท่อที่มีลักษณะต่างๆ กัน คือ ท่อเหล็กชั้นเดียว ท่อทองแดงชั้นเดียว และท่อ 2 ชั้นและ 3 ชั้น ที่ประกอบด้วยเหล็กกับทองแดง ทั้งนี้เพื่อทำการเปรียบเทียบพฤติกรรมการนำความร้อนและหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในแต่ละกรณี จากการเปรียบเทียบพบว่า ในส่วนของหน่วยแรงที่เกิดขึ้น ท่อที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงชนิดเดียวไม่ว่าจะเป็นเหล็กหรือทองแดง จะมีหน่วยแรงเกิดขึ้นต่ำกว่าท่อที่ประกอบด้วยวัสดุ 2 ชั้น และ 3 ชั้นค่อนข้างมาก โดยท่อทองแดงชั้นเดียวจะมีหน่วยแรงต่ำที่สุด นอกจากนี้ หน่วยแรงเฉือนในทุกๆ กรณีมีค่าต่ำมากเมื่อเทียบกับหน่วยแรงทิศทางรัศมีและหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง และหน่วยแรงที่มีค่าสูงสุดคือหน่วยแรงทิศทางเส้นรอบวง เมื่อพิจารณาหน่วยแรงสูงสุดที่เกิดขึ้นเทียบกับหน่วยแรงครากของวัสดุพบว่า สัดส่วนระหว่างหน่วยแรงสูงสุดต่อหน่วยแรงครากมีค่าประมาณ 0.4 เท่านั้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าท่อในทุกๆ กรณีสามารถทนต่อหน่วยแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากความร้อนได้ สำหรับพฤติกรรมการนำความร้อนนั้นพบว่าท่อทองแดงชั้นเดียวมีการนำความร้อนได้ดีที่สุด รองลงมาเป็นท่อ 3 ชั้นที่วัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดง ส่วนกรณีที่นำความร้อนได้ช้าที่สุดคือกรณีท่อเหล็กชั้นเดียว ทั้งสามกรณีที่กล่าวมานี้จะมีอุณหภูมิที่ผิวในที่มุม 180 องศา (ด้านตรงข้ามกับฟลักซ์ความร้อน) เป็น 90% ของภาวะอยู่ตัวเมื่อเวลาผ่านไป 25, 27 และ 39 วินาที ตามลำดับ จากการเปรียบเทียบการนำความร้อนในทุกๆ กรณี สรุปได้ว่า ท่อที่ยิ่งมีทองแดงเป็นส่วนประกอบในปริมาณมากก็จะยิ่งมีการนำความร้อนได้ดี อย่างไรก็ตาม ทองแดงมีราคาแพงกว่าเหล็ก ดังนั้น การจะเลือกใช้กรณีใดควรพิจารณาทั้งความสามารถในการนำความร้อนและราคาของวัสดุด้วย กล่าวคือ ถ้าต้องการให้ท่อมีความสามารถในการนำความร้อนได้ดี ก็ควรเลือกกรณีที่มีทองแดงในปริมาณมากๆ เช่น ท่อทองแดงชั้นเดียว หรือท่อ 3 ชั้นที่วัสดุชั้นในและชั้นนอกเป็นทองแดง ชั้นกลางเป็นเหล็ก แต่ถ้าต้องการท่อที่มีราคาถูก ก็ควรเลือกกรณีที่มีทองแดงในปริมาณน้อยหรือไม่มีเลย เช่น ท่อเหล็กชั้นเดียว เป็นต้น

นอกจากนี้ การวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิและหน่วยแรงเนื่องจากอุณหภูมิโดยใช้แบบจำลองแยกชั้น นอกจากจะสามารถวิเคราะห์ทรงกระบอกที่ประกอบด้วยวัสดุเป็นชั้นๆ แล้ว ยังสามารถวิเคราะห์ทรงกระบอกที่มีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงตามทิศทางรัศมี(FGM) ได้อีกด้วย โดยทำการแบ่งทรงกระบอกออกเป็นชั้นๆ แล้วแทนค่าคุณสมบัติที่แต่ละชั้นเข้าไป ซึ่งหากเราแบ่งได้ละเอียดพอ ก็จะทำให้คุณสมบัติในแต่ละชั้นใกล้เคียงกับความเป็นจริง ผลการวิเคราะห์ก็จะมีความละเอียดถูกต้องด้วยเช่นกัน ข้อดีอีกอย่างหนึ่งของแบบจำลองแยกชั้นนี้ก็คือการแบ่งทรงกระบอกในทิศทางรัศมีเพียงทิศทางเดียว โดยไม่ต้องแบ่งในทิศทางเส้นรอบวง เพียงแต่กำหนดจำนวนเทอมของไซน์และโคไซน์ที่จะใช้เท่านั้น ซึ่งจะทำให้เกิดความสะดวกและรวดเร็วในการป้อนข้อมูลเข้าไปในโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทำการวิเคราะห์ นอกจากนี้ คำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ยังมีความต่อเนื่องในทิศทางเส้นรอบวง การหาคำตอบที่จุดใดๆ จึงทำได้โดยสะดวก อย่างไรก็ตาม การใช้แบบจำลองแยกชั้นวิเคราะห์ปัญหาที่มีการกำหนดอุณหภูมิที่ผิวแบบเป็นช่วงๆ นั้น จะต้องใช้เทอมของไซน์และโคไซน์เป็นจำนวนมากจึงจะทำให้ผลการวิเคราะห์มีความละเอียดถูกต้องสูง ซึ่งจะต้องใช้เวลาในการรันโปรแกรมนานและสิ้นเปลืองหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์มากพอสมควร

กล่าวโดยสรุป ความรู้ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาที่พบเห็นได้ทั่วๆ ไป ในชีวิตประจำวัน เช่น เสากลมกลวงที่อยู่ภายใต้ภาวะไฟไหม้ ท่อที่วางตัวยาวอยู่ใต้ดินแล้วได้รับความร้อนจากแสงอาทิตย์ ชิ้นส่วนเครื่องจักรกลที่มีลักษณะเป็นทรงกระบอกกลวงซึ่งมีความร้อนเกิดขึ้นขณะทำงาน เป็นต้น หากเราทราบเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนเหล่านี้ ไม่ว่าจะเป็นอุณหภูมิ ฟลักซ์ความร้อน หรือการพาความร้อนแล้ว เราก็จะสามารถหาหน่วยแรงที่เกิดขึ้นและทำนายได้ว่าโครงสร้างหรือชิ้นส่วนนั้นจะทนต่อความร้อนได้หรือไม่ ในทางกลับกัน เราสามารถออกแบบโครงสร้างหรือชิ้นส่วนดังกล่าวให้ทนต่อความร้อนที่เกิดได้

รายการอ้างอิง

นักสิทธ์ คูวัฒนาชัย. การถ่ายเทความร้อน. งานโสตทัศนูปกรณ์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์, 2526

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิยาลัย, 2542

มนตรี อึ่งเจริญ. การนำความร้อน. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

Ahmed, S. M. and Zeiden, N. A. Thermal stress problem in non-homogeneous transversely isotropic infinite circular cylinder. Applied Mathematics and Computation 133 (2002): 337-350.

Burnett, D. S. Finite Element Analysis. Addison-Wesley Publishing Company, 1987.

Chen, C. K. and Chen, J. M. Transient heat conduction in an infinitely long hollow cylinder composed of three different materials. Computers & Structures 33 (1989): 765-769.

Chen, J. M., Chen, C. K. and Char, M. I. Thermoelastic transient response of an infinitely long annular cylinder composed of three different materials. Computers & Structures 45 (1992): 229-236.

Chen, L. S. and Chu, H. S. Transient thermal stresses of a composite hollow cylinder heated by a moving line source. Computers & Structures 33 (1989): 1205-1214.

Chen, L. S. and Chu, H. S. Hybrid Laplace transform/finite element method for transient thermoelastic Problem of composite hollow cylinder. Computers & Structures 36 (1990): 853-860.

David, R. Mechanics of Materials. John Wiley & Sons,1996.

Frank, K. and Bohn, M. S. Principles of Heat Transfer. Harper & Row,1986.

Goshima, T. and Miyao, K. Transient thermal stresses in a composite hollow cylinder subjected to γ-ray heating. Nuclear Engineering and Design 126 (1991): 413-425.

Goshima, T. and Miyao, K. Transient thermal stresses in a hollow cylinder subjected to γ-ray heating and convective heat losses. Nuclear Engineering and Design 125 (1991): 267-273.

Jabbari, M., Sohrabpour, S. and Eslami, M.R. Mechanical and thermal stress in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. International Journal of Pressure Vessels and Piping 79 (2002): 493-497.

Jane, K. C. and Lee, Z. Y. Thermoelastic transient response of an infinitely long annular multilayered cylinder. Mechanics Research Communications 26 (1999): 709-718.

Johns, D.J. Thermal Stress Analysis. Pergamon Press, 1965.

Kandil, A., El-Kady, A.A. and El-Kafrawy, A. Transient thermal stress analysis of thick-walled cylinders. Int. J. Mech. Sci. 37 (1995): 721-732.

รายการอ้างอิง (ต่อ)

Kim, K. S. and Noda N. Green's function approach to solution of transient temperature for thermal stresses of functionally graded material. JSME International Journal 44 (2001): 31-36.

Kollar, L. P. and Springer, G. S. Mechanics of Composite Structure. Cambridge University Press, 2003.

Lee, Z. Y. Hybrid numerical method applied to 3-D multilayer hollow cylinder with time-dependent boundary conditions. Applied Mathetics and Computation (2003).

Liew, K. M., Kitipornchai, S., Zhang, X. Z. and Lim, C. W. Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders. International Journal of Solids and Structures 40 (2003): 2355-2380.

Lin, J. Y. and Chen H. T. Radial axisymmetric transient heat conduction in composite hollow cylinders with variable thermal conductivity. Engineering Analysis with Boundary Elements 10 (1992): 27-33.

Ozisik, M. N. Heat Conduction. John Wiley & Sons,1993.

Sladek, J., Sladek, V. and Zhang, Ch. Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method. Computational Materials Science 28 (2003): 494-504.

Sundara Raja Iyengar, K.T. and Chandrashekhara, K. Thermal stress in a finite hollow cylinder due to an axisymmetric temperature field at the end surface. Nuclear Engineering and Design 3 (1966): 382-393.

26. Takeuti, Y. and Tanigawa, Y. Transient thermal stresses in a bonded composite hollow circular cylinder under symmetrical temperature distribution. Nuclear Engineering and Design 41 (1977): 335-343

Takeuti, Y. and Tanigawa, Y. Asymmetrical transient thermoelastic problems in a composite hollow circular cylinder. Nuclear Engineering and Design 45 (1978): 159-172.

Tarn, J. Q. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads. International Journal of Solids and Structures 38 (2001): 8189-8206.

Vedula, V. R., Segall, A. E. and Rangarajan, S. K. Transient analysis of internally heated tubular components with exponential thermal loading and external convection. International Journal of Heat and Mass Transfer 41 (1998): 3675-3678.

Wang, C. T. Applied Elasticity. McGraw-Hill,1953

รายการอ้างอิง (ต่อ)

Wang, X. Thermal shock in a hollow cylinder caused by rapid arbitrary heating. Journal of Sound and Vibration 183 (1995): 899-906.

Zhou, Z. W. Analytical solution for transient heat conduction in hollow cylinders containin well-stirred Fluid with uniform heat sink. International Journal of Heat Mass Transfer 38 (1995): 2915-2919.

ภาคผนวก

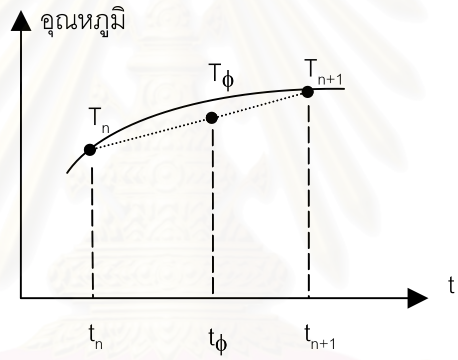
ก. การแก้ปัญหาความร้อนในภาวะชั่วครู่

เนื่องจากปัญหาการนำความร้อนในวิทยานิพนธ์นี้อยู่ในภาวะชั่วครู่ ดังนั้น จะต้องทำการหาการกระจายของอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ ซึ่งการนำความร้อนในภาวะชั่วครู่นั้น ก็เปรียบเหมือนการนำความร้อนในภาวะอยู่ตัวมาเรียงประกอบกันขึ้น ดังนั้น ในการแก้ปัญหาภายใต้ภาวะชั่วครู่ จำเป็นต้องทำการแก้ระบบสมการรวมหลายๆ ครั้งในแต่ละช่วงเวลา แทนที่จะแก้สมการเพียงครั้งเดียว

จากสมการที่ (3.33) ซึ่งการกระจายของอุณหภูมิอยู่ในภาวะชั่วครู่ จะใช้การแก้สมการโดยวิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) พิจารณารูปที่ ก.1 ที่เวลา t_n มีอุณหภูมิที่รู้ค่า T_n และเราจะใช้ช่วงเวลา (time step) Δt เพื่อคำนวณหาอุณหภูมิ T_{n+1} ที่เวลา t_{n+1} ซึ่งจากรูปจะสามารถเขียนได้ว่า

$$t_\phi = t_n + \phi\Delta t \tag{ก.1}$$

โดยที่ $0 \le \phi \le 1$ และในช่วงเวลาดังกล่าว มีความชันของอุณหภูมิโดยประมาณ คือ



รูปที่ ก.1 กราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิตามเวลา

และในช่วงเวลาดังกล่าว มีความชันของอุณหภูมิโดยประมาณ คือ

$$\dot{T} \cong \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} \tag{ก.2}$$

และอุณหภูมิโดยประมาณที่เวลา t_ϕ คือ

$$T_\phi \cong (1-\phi)T_n + \phi T_{n+1} \tag{ก.3}$$

โดยใช้หลักการดังสมการที่ (ก.2) และ (ก.3) จะสามารถคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิในภาวะชั่วครู่ได้ ดังนี้

พิจารณาสมการที่ (3.33) ที่เวลา t_ϕ จะสามารถเขียนสมการดังกล่าวได้ดังนี้

$$[C]\{\dot{T}\}_\phi + [K]\{T\}_\phi = \{Q\}_\phi \tag{ก.4}$$

ดังนั้น ความชันของอุณหภูมิที่จุดต่อต่างๆ คือ

$$\{\dot{T}\}_{\phi} \cong_{n} \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}}{\Delta t} \quad (ก.5)$$

ในทำนองเดียวกัน อุณหภูมิที่จุดต่อต่างๆ คือ

$$\{T\}_{\phi} \cong (1-\phi)\{T\}_{n} + \phi\{T\}_{n+1} \quad (ก.6)$$

เวคเตอร์ $\{Q\}$ ทางด้านขวามือของสมการที่ (3.33) อาจเปลี่ยนแปลงได้ตามเวลา ซึ่งที่เวลา t_{ϕ} สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกัน คือ

$$\{Q\}_{\phi} \cong (1-\phi)\{Q\}_{n} + \phi\{Q\}_{n+1} \quad (ก.7)$$

แทนค่าสมการ (ก.5) – (ก.7) ลงในสมการ (ก.4) แล้วย้ายเทอมที่ทราบค่ามาทางขวามือ จะได้

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[C] + \phi[K]\right)\{T\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[C] - (1-\phi)[K]\right)T_{n} + (1-\phi)\{Q\}_{n} + \phi\{Q\}_{n+1} \quad (ก.8)$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (3.33) จะเปลี่ยนมาอยู่ในรูปของระบบสมการ (ก.8) ซึ่งสามารถแก้สมการได้โดยตรง

ค่า ϕ จะมีค่าเป็นเท่าใดนั้น ขึ้นอยู่กับเราเป็นผู้เลือกใช้ ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ จะใช้ค่า ϕ = 2/3 ซึ่งเป็นวิธีของการเลอร์คิน เหตุผลในการเลือกใช้ค่า ϕ = 2/3 เนื่องจาก สามารถใช้ช่วงเวลาที่มีค่าค่อนข้างสูงได้และมีความแม่นยำพอสมควร

สำหรับการเลือกช่วงเวลา Δt นั้น จะมีผลต่อคำตอบที่ได้ การใช้ช่วงเวลาที่ต่ำเกินไปจะได้ผลที่แม่นยำ แต่ก็จะเสียเวลาในการคำนวณมาก ในขณะที่การใช้ช่วงเวลาที่มีค่าสูง ก็จะทำให้ประหยัดเวลาในการคำนวณ แต่ก็จะเกิดความคลาดเคลื่อนมากขึ้น

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นาย นพปฎูล เสงี่ยมศักดิ์ เกิดวันที่ 3 กันยายน พ.ศ. 2522 ที่จังหวัดร้อยเอ็ด สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น ในปีการศึกษา 2544 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิตที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยเมื่อ พ.ศ. 2545