บทที่ 2

คอพพูลาและวิธีการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิคคอพพูลา

2.1 **คอพพูลา**[1] (Copula)

Copula (C) คือฟังก์ชันการแจกแจงตัวแปรสุ่มร่วม d ตัวโดยที่แต่ละตัวมีการแจกแจงส่วนริมแบบสม่ำเสมอบน [0,1] อีกนัยหนึ่งคือ $C:[0,1]^d \to [0,1]$

ซึ่งมีคุณสมบัติคือ

1. $C(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในทุกๆ x_i
2. $C(1,\ldots,1,x_i,1,\ldots,1) = x_i \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,d\}, x_i \in [0,1]$
3. สำหรับทุก $(a_1, a_2, \ldots, a_d), (b_1, b_2, \ldots, b_d) \in [0,1]^d$ โดยที่ $a_i \le b_i$ จะได้ว่า

$$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\cdots+i_d} C(x_{1i_1}, \cdots, x_{di_d}) \ge 0$$

<u>นิยาม</u> ฟังก์ชัน quantile สอดคล้องกับฟังก์ชัน c.d.f F เป็นฟังก์ชันจากช่วง $(0,1)$ ไปสู่จำนวนจริง

$Q_F : (0,1) \to \Re$ นิยามดังนี้ $\quad Q_F(q) = \inf\{x \in \Re : F(x) \ge q\}$, *for* $\quad 0 < q < 1$

โดยฟังก์ชัน quantile มีคุณสมบัติดังนี้

1. ถ้า F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่เพิ่มขึ้น (Strictly increasing continuous function) บนจำนวนจริง

$$Q_F = F^{-1}$$

2. ถ้า F เป็น c.d.f. ใดๆ และ $0 < q < 1$ จะได้ว่า $F(Q_F(q)-) \le q \le F(Q_F(q))$

   โดยที่ $F(Q_F(q)-) = \sup\limits_{x < Q_F(q)} F(x) \le q$

3. $q \le F(x)$ ก็ต่อเมื่อ $Q_F(q) \le x$, $0 < q < 1$

สมมุติให้ $\mathbf{X}$ เป็นตัวแปรสุ่มร่วม ซึ่งแต่ละตัวมีการแจกแจงส่วนริม $F(X_i)$ โดยที่ $F(X_i)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ว่า $Y_i = Q_F(X_i)$ มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอบนช่วง $[0,1]$

---

[1] เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์, " Copula ," <u>เอกสารประกอบการสอนวิชาการคำนวณและจำลองแบบเชิงสถิติ 2603642</u> , (กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2548)

จะได้ว่าการแจกแจง $Y_1, Y_2, \ldots, Y_d$ เป็น Copula

โดยใช้สัญลักษณ์ $C(y_1, y_2, ..., y_d)$ แทนการแจกแจงสะสมร่วมของ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_d$

และถ้าให้การแจกแจงสะสมร่วมของ $\mathbf{X}$ เป็น $F(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \ldots, x_d) &= P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_d \le x_d) \\
&= P(F_1(X_1) \le F_1(x_1), F_2(X_2) \le F_2(x_2), \ldots, F_d(X_d) \le F_d(x_d)) \\
&= C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d))
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท (Sklar's Theorem 1959)

กำหนดให้ $F(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมของตัวแปรสุ่มร่วม $\mathbf{X}$ โดยที่ X_i แต่ละตัวมีฟังก์ชันการแจกแจงส่วนริม คือ $F(X_i)$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \ldots, x_d) &= P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_d \le x_d) \\
&= P(F_1(X_1) \le F_1(x_1), F_2(X_2) \le F_2(x_2), \ldots, F_d(X_d) \le F_d(x_d)) \\
&= C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d))
\end{aligned}
$$

โดยที่ $C(u_1, u_2, \ldots, u_d)$ คือ Copula และ C จะมีเพียงเหนึ่ง (Unique) ถ้า F_i เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ถ้า F_i ไม่ต่อเนื่องแล้ว C จะมีเพียงหนึ่ง(Unique) บน $Ran(F_1) \times Ran(F_2) \times \ldots \times Ran(F_d)$ ซึ่ง $Ran(F_i)$ คือ พิสัย F_i

ถ้า F_i และ C เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้วจะสามารถเขียนฟังก์ชันการแจกแจงร่วมของตัวแปรสุ่ม X ให้อยู่ในรูปของ Copula ได้คือ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times \cdots \times f_d(x_d) c[F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)]$$

โดยที่ $f_i(x_i)$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมที่สอดคล้องกับ $F_i(x_i)$

และ $c = \dfrac{\partial^d C}{\partial F_1 \partial F_2 \ldots \partial F_d}$ คือฟังก์ชันความหนาแน่น Copula (Copula Density)

ถ้า X_i แต่ละตัวเป็นอิสระต่อกันแล้ว $c = 1$ และ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times \cdots \times f_d(x_d)$$

2.2 Gaussian หรือ Normal Copula[1]

ให้ Σ_U เป็นเมตริกซ์สมมาตรและเป็นบวกแน่นอน

และ Φ เป็นการแจกแจงสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐานที่มีเมตริกซ์สหสัมพันธ์ Σ_Z

Gaussian Copula นิยามโดย $C_{\Sigma_U}^{Ga}(\mathbf{u}) = \Phi_{\Sigma_Z}(\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-1}(u_2),\ldots,\Phi^{-1}(u_d))$

จากทฤษฎีบท Sklar จะได้ว่า

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\Sigma_Z|^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\Sigma_Z\mathbf{z}) = \mathrm{c}_{\Sigma_U}^{\mathrm{Ga}}(\Phi(z_1),\Phi(z_2),\ldots,\Phi(z_d))\times\prod_{j=1}^{d}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}z_j^2))$$

โดยที่ $|\Sigma_Z|$ คือดีเทอร์มินันท์ของ Σ_Z

นั่นคือ
$$\mathrm{c}_{\Sigma_U}^{\mathrm{Ga}}(\Phi(z_1),\Phi(z_2),\ldots,\Phi(z_d)) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\Sigma_Z|^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\Sigma_Z\mathbf{z})}{\prod_{j=1}^{d}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}z_j^2))}$$

ให้ $u_j = \Phi(x_j)$ ซึ่งทำให้ $x_j = \Phi^{-1}(u_j)$ ซึ่งสามารถเขียนความหนาแน่น Copula ได้ใหม่คือ

$$c_{\Sigma_U}^{Ga} = (u_1,u_2,\ldots,u_d) = \frac{1}{|\Sigma_Z|^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{1}{2}\varsigma'(\Sigma_Z^{-1}-I)\varsigma)$$

โดยที่ $\varsigma = (\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-1}(u_2),\ldots,\Phi^{-1}(u_d))'$

<u>สำหรับ Gaussian Copula 2 ตัวแปร</u>

$$C_{\rho_U}^{Ga}(u_1,u_2) = \Phi_{\rho_Z}\left(\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-1}(u_2)\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_z^2}}\exp\left(-\frac{s^2-2\rho_z st+t^2}{2(1-\rho_z^2)}\right)\quad ds\,dt$$

จากทฤษฎีบท Sklar $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_z^2}}\exp\left(-\frac{z_1^2-2\rho_z z_1^2 z_2^2+z_2^2}{2(1-\rho_z^2)}\right) = c_{\rho_U}^{Ga}\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z_i^2\right)\right)$

จะได้
$$c_{\rho_U}^{Ga} = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_z^2}}\exp\left(-\frac{z_1^2-2\rho_z z_1^2 z_2^2+z_2^2}{2(1-\rho_z^2)}\right)}{\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z_i^2\right)\right)}$$

---

[1]Cherubini,U.,Luciano,E.,Vecchiato,W., " **Gaussian Copula** ," in <u>Copula Methods in Finance</u> ,(New York :John Wiley,2004)

2.3 วิธีการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Gaussian Copula

กำหนดให้ $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \ldots, U_d)'$ เป็นตัวแปรสุ่มร่วมมิติ d ซึ่งแต่ละ U_i $i = 1,2,3,\ldots d$ มีการแจกแจงส่วนริมแบบสม่ำเสมอบน [0,1]และมีเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $= \Sigma_U$ ขั้นตอนการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม $\mathbf{U}$ ด้วยเทคนิค Gaussian Copula มีดังต่อไปนี้

1. ทำการแปลงค่า Σ_U ให้เป็น Σ_z ($\Sigma_z = f^{-1}(\Sigma_U)$) ซึ่งมีขั้นตอนในการทำดังต่อไปนี้

1.1 นำ Σ_U มาแยกองค์ประกอบโดยให้ค่าในองค์ประกอบที่ (i, j) และ (j,i) $= \rho_{U_iU_j}$

$i, j = 1,2,\ldots,d \quad ; i \neq j$ ซึ่งจะได้ $\rho_{U_iU_j}$ ทั้งหมด $\dfrac{(d-1)d}{2}$ ตัว

1.2 นำแต่ละ $\rho_{U_iU_j}$ มาทำการแปลงค่าให้เป็น $\rho_{z_iz_j}$ ($\rho_{U_iU_j} \xrightarrow{f^{-1}} \rho_{z_iz_j}$) ด้วยฟังก์ชัน

$$\rho_{U_iU_j} = f(\rho_{z_iz_j}) = 12 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z_i)\Phi(z_j) \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{z_iz_j}^2}} \exp\left(-\frac{z_i^2 - 2\rho_{z_iz_j} z_i^2 z_j^2 + z_j^2}{2(1-\rho_{z_iz_j}^2)}\right) dz_i dz_j - 3$$

ซึ่งสามารถคำนวณค่า $\rho_{z_iz_j}$ ได้จาก

$$\rho_{z_iz_j} = 2\sin[\frac{\pi}{6}\rho_{U_iU_j}]$$

หรือสามารถคำนวณทำได้โดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขการประมาณค่าคำตอบของสมการด้วยวิธี Secant ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1.2.1 ให้

$$f^*(\rho_{z_iz_j}) = \rho_{U_iU_j} - \left(12 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z_i)\Phi(z_j) \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{z_iz_j}^2}} \exp\left(-\frac{z_i^2 - 2\rho_{z_iz_j} z_i^2 z_j^2 + z_j^2}{2(1-\rho_{z_iz_j}^2)}\right) dz_i dz_j - 3\right)$$

1.2.2 ให้ $n = 0$

$Tol = 10^{-10}$

1.2.3 กำหนดค่าเริ่มต้น

$$\rho_{z_iz_j,0} = \rho_{U_iU_j} - 0.01$$

$$\rho_{z_iz_j,1} = \rho_{U_iU_j} + 0.01$$

1.2.4 ให้ $n = n+1$

1.2.5 คำนวณค่า

$$\rho_{z_iz_j,n+1} = \rho_{z_iz_j,n} - f^*(\rho_{z_iz_j,n})\left(\frac{\rho_{z_iz_j,n} - \rho_{z_iz_j,n-1}}{f^*(\rho_{z_iz_j,n}) - f^*(\rho_{z_iz_j,n-1})}\right)$$

1.2.6 ถ้า $\left|\rho_{z_iz_j,n+1} - \rho_{z_iz_j,n}\right| > Tol$ กลับไปขั้นตอนที่ 1.4

อื่นๆ ทำขั้นตอนต่อไป

1.2.7 ให้ $\rho_{z_iz_j} = \rho_{z_iz_j,n+1}$ จบขั้นตอน

1.3 นำค่า $\rho_{z_i z_j}$ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1.2 มาประกอบเป็น Σ_z โดยกำหนดให้ Σ_z มีค่าในองค์ประกอบที่ (i, j) และ $(j,i) = \rho_{z_i z_j} \quad ;i, j = 1,2,...,d \quad ;i \neq j$
และองค์ประกอบที่ $(i,i) = 1$

2. ทำการตรวจสอบว่า Σ_z เป็นเมตริกซ์สหสัมพันธ์หรือไม่

ถ้า $\Sigma_z \in R$ ทำขั้นตอนต่อไป โดยที่ R เป็นเซตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์

แต่ถ้า $\Sigma_z \notin R$ จบขั้นตอน แสดงว่า ตัวแปรสุ่มร่วม $\mathbf{U}$ ไม่สามารถทำการจำลองด้วยเทคนิคGaussian Copula ได้

3. จำลองตัวแปรสุ่มร่วมปกติมิติ d ซึ่งมีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย = 0 และมีเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $= \Sigma_z$

$$\mathbf{Z} \sim N_d(0, \Sigma_z)$$

ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

3.1 หาเมตริกซ์ $\mathbf{C}$ โดยที่ $\mathbf{CC}' = \Sigma_z$ โดยใช้ Cholesky Decomposition

3.2 จำลองตัวแปรสุ่มร่วมแบบปกติ N_i

3.3 ให้ $Z_i = \sum_{j=1}^{i} c_{ij} N_j \qquad ; i = 1,2,...,d$

3.4 ให้ $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3 \ldots, Z_d)$

4. ให้ $U_i = \Phi(z_i) \qquad ; i = 1,2,...,d$

โดยที่ Φ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงแบบสะสม (Cumulative Density Function) ของตัวแปรสุ่มปกติ

5. ให้ $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \ldots, U_d)'$ จบขั้นตอน

2.4 Student's t Copula[1]

ให้ $F_{T,\Sigma_T,\upsilon}$ เป็นการแจกแจงสะสมของการแจกแจง Student's t ที่มีองศาความเป็นอิสระ υ และมีเมตริกซ์สหสัมพันธ์ Σ_T

นั่นคือ $$F_{T,\Sigma_T,\upsilon}(x_1,x_2,\ldots,x_d)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_d}\frac{\Gamma(\frac{\upsilon+d}{2})}{\Gamma(\frac{\upsilon}{2})(\upsilon\pi)^{\frac{d}{2}}\left|\Sigma_T\right|^{\frac{1}{2}}}(1+\frac{1}{\upsilon}\mathbf{x}'\Sigma_T^{-1}\mathbf{x})^{-\frac{\upsilon+d}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_d$$

Student's t Copula นิยามโดย

$$C^T_{\Sigma_U,v}(u_1,u_2,\ldots,u_d)=F_{T,\Sigma_T,\upsilon}(F_{T,\upsilon}^{-1}(u_1),F_{T,\upsilon}^{-1}(u_2),\ldots,F_{T,\upsilon}^{-1}(u_d))$$

$$=\int_{-\infty}^{F_{T,\upsilon}^{-1}(u_1)}\int_{-\infty}^{F_{T,\upsilon}^{-1}(u_2)}\cdots\int_{-\infty}^{F_{T,\upsilon}^{-1}(u_d)}\frac{\Gamma(\frac{\upsilon+d}{2})}{\Gamma(\frac{\upsilon}{2})(\upsilon\pi)^{\frac{d}{2}}\left|\Sigma_T\right|^{\frac{1}{2}}}(1+\frac{1}{\upsilon}\mathbf{x}'\Sigma_T^{-1}\mathbf{x})^{-\frac{\upsilon+d}{2}}dx_1dx_2\ldots dx_d$$

โดยที่ $F_{T,\upsilon}^{-1}$ คือฟังก์ชันผกผันของการแจกแจงสะสมของ Student's t ที่มีองศาความเป็นอิสระ υ

ความหนาแน่น Copula คือ

$$c_{\Sigma_U,\upsilon}(u_1,u_2,\ldots,u_d)=\left|\Sigma_T\right|^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{\upsilon+d}{2})}{\Gamma(\frac{\upsilon}{2})}\left(\frac{\Gamma(\frac{\upsilon}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})}\right)^d\frac{\left(1+\frac{1}{\upsilon}\varsigma'\Sigma_T^{-1}\varsigma\right)^{-\frac{\upsilon+d}{2}}}{\prod_{j=1}^{d}\left(1+\frac{\varsigma_j^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}}}$$

โดยที่ $\varsigma_j=t_\upsilon^{-1}(u_j)$

<u>สำหรับ Student's t Copula 2 ตัวแปร</u>

$$C^T_{\rho_U,v}(u_1,u_2)=F_{T,\rho_{T,v}}\left(F_{T,v}^{-1}(u_1),F_{T,v}^{-1}(u_2)\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{F_{T,v}^{-1}(u_1)}\int_{-\infty}^{F_{T,v}^{-1}(u_2)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_T^2}}\left(1+\frac{x_1{}^2-2\rho_Tx_1x_2+x_2{}^2}{v(1-\rho_T^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}}dx_1dx_2$$

จากทฤษฎีบท Sklar จะได้ว่า $$c^T_{\rho_{U,v}}=\frac{v}{2\sqrt{1-\rho_T^2}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}\right)^2\frac{\left(1+\frac{t_1^2-2\rho_Tt_1t_2+t_2^2}{v(1-\rho_T^2)}\right)^{-\left(\frac{v+2}{2}\right)}}{\prod_{i=1}^{2}\left(1+\frac{t_i^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)}}$$

---

[1]Cherubini,U.,Luciano,E.,Vecchiato,W., " Student's t Copula ," in <u>Copula Methods in Finance</u> ,(New York :John Wiley,2004)

2.5 วิธีการจำลองตัวแปรสุ่มร่วมด้วยเทคนิค Student's t Copula

กำหนดให้ $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \ldots, U_d)'$ เป็นตัวแปรสุ่มร่วมมิติ d ซึ่งแต่ละ U_i $i = 1,2,3,\ldots d$ มีการแจกแจงส่วนริมแบบสม่ำเสมอบน [0,1] และมีเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $= \Sigma_U$ ขั้นตอนการจำลองตัวแปรสุ่มร่วม $\mathbf{U}$ ด้วยเทคนิค Student's t Copula องศาความเป็นอิสระ v มีดังต่อไปนี้

1. ทำการแปลงค่า Σ_U ให้เป็น Σ_T ($\Sigma_T = g^{-1}(\Sigma_U)$) ซึ่งมีขั้นตอนในการทำดังต่อไปนี้

   1.1 นำ Σ_U มาแยกองค์ประกอบโดยให้ค่าในองค์ประกอบที่ (i,j) และ (j,i) $= \rho_{U_iU_j}$ โดยที่ $i,j = 1,2,\ldots,d \quad ; i \neq j$ ซึ่งจะได้ $\rho_{U_iU_j}$ ทั้งหมด $\dfrac{(d-1)d}{2}$ ตัว

   1.2 นำแต่ละ $\rho_{U_iU_j}$ มาทำการแปลงค่าให้เป็น $\rho_{T_iT_j}$ ($\rho_{U_iU_j} \xrightarrow{g^{-1}} \rho_{T_iT_j}$) ด้วยฟังก์ชัน

$$\rho_{U_iU_j} = g(\rho_{T_iT_j}) = 12 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_{T,v}(t_i)F_{T,v}(t_j)\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{T_iT_j}^2}}\left(1-\frac{t_1^2 - 2\rho_{T_iT_j}t_it_j + t_j^2}{v(1-\rho_{T_iT_j}^2)}\right)^{-\left(\frac{v+2}{2}\right)} dt_i dt_j \; -3$$

ซึ่งสามารถคำนวณค่า $\rho_{T_iT_j}$ ได้โดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขการประมาณค่าคำตอบของสมการด้วยวิธี Secant ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1.2.1 ให้

$$g^*(\rho_{T_iT_j}) = \rho_{U_iU_j} - \left(12 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_{T,v}(t_i)F_{T,v}(t_j)\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{T_iT_j}^2}}\left(1-\frac{t_1^2 - 2\rho_{T_iT_j}t_it_j + t_j^2}{v(1-\rho_{T_iT_j}^2)}\right)^{-\left(\frac{v+2}{2}\right)} dt_i \, dt_j \; -3\right)$$

1.2.2 ให้ $n = 0$

$Tol = 10^{-10}$

1.2.3 กำหนดค่าเริ่มต้น $\rho_{T_iT_j,0} = \rho_{U_iU_j} - 0.01$

$\rho_{T_iT_j,1} = \rho_{U_iU_j} + 0.01$

1.2.4 ให้ $n = n+1$

1.2.5 คำนวณค่า $\rho_{T_iT_j,n+1} = \rho_{T_iT_j,n} - g^*(\rho_{T_iT_j,n})\left(\dfrac{\rho_{T_iT_j,n} - \rho_{T_iT_j,n-1}}{g^*(\rho_{T_iT_j,n}) - g^*(\rho_{T_iT_j,n-1})}\right)$

1.2.6 ถ้า $\left|\rho_{T_iT_j,n+1} - \rho_{T_iT_j,n}\right| > Tol$ กลับไปขั้นตอนที่ 1.4

อื่นๆ ทำขั้นตอนต่อไป

1.2.7 ให้ $\rho_{T_iT_j} = \rho_{T_iT_j,n+1}$ จบขั้นตอน

1.3 นำค่า $\rho_{T_iT_j}$ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1.2 มาประกอบเป็น Σ_T โดยกำหนดให้ Σ_T มีค่าในองค์ประกอบที่ (i,j) และ $(j,i) = \rho_{T_iT_j}$ $;i,j = 1,2,...,d$ $;i \neq j$

และองค์ประกอบที่ $(i,i) = 1$

2. ทำการตรวจสอบว่า Σ_T เป็นเมตริกซ์สหสัมพันธ์หรือไม่

ถ้า $\Sigma_T \in R$ ทำขั้นตอนต่อไป

แต่ถ้า $\Sigma_T \notin R$ จบขั้นตอน แสดงว่า ตัวแปรสุ่มร่วม $\mathbf{U}$ ไม่สามารถทำการจำลองด้วยเทคนิค Student's t Copula ได้

3. จำลองตัวแปรสุ่มร่วมทีมิติ d ซึ่งมีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย = 0 และมีเมตริกซ์สหสัมพันธ์ = Σ_T $\mathbf{T} \sim t_d(v,0,\Sigma_T)$ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

3.1 จำลอง $\mathbf{Z} \sim N_d(0,\left(\frac{v-2}{v}\right)\Sigma_T)$

3.1.1 หาเมตริกซ์ $\mathbf{C}$ โดยที่ $\mathbf{CC}' = \left(\frac{v-2}{v}\right)\Sigma_T$ โดยใช้ Cholesky Decomposition

3.1.2 จำลองตัวแปรสุ่มร่วมแบบปกติ N_i

3.1.3 ให้ $Z_i = \sum_{j=1}^{i} c_{ij} N_j$; $i = 1,2,...,d$

3.1.4 ให้ $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3 ..., Z_d)$

3.2 จำลองตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไคกำลังสอง (Chi-square Distribution) ด้วยองศาความเป็นอิสระ v ($Y \sim \chi^2_{(v)}$) ซึ่งเป็นอิสระจาก $\mathbf{Z}$

โดยมีขั้นตอนดังนี้

3.2.1 จำลอง Z_i' ที่เป็นอิสระต่อกันจำนวน v ตัว

3.2.2 ให้ $Y = \sum_{i=1}^{v} Z_i'^2$ จบขั้นตอน

3.3 ให้ $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{\frac{Y}{v}}}$ จบขั้นตอน

4. ให้ $U_i = F_{T,v}(T_i)$; $i = 1,2,...,d$; $\mathbf{T} = (T_1, T_2,...,T_d)'$

โดยที่ $F_{T,v}$ คือฟังก์ชันการแจกแจงแบบสะสม (Cumulative Density Function) ของตัวแปรสุ่มทีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ v

5. ให้ $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_d)'$ จบขั้นตอน