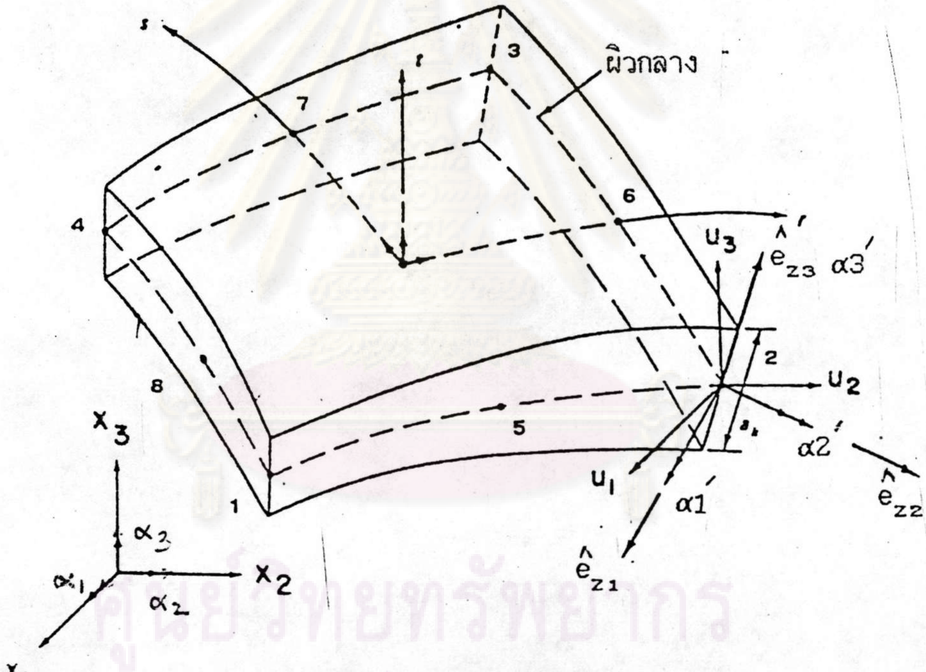
บทที่ 2

การหาค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยเปลือกบางโดยใช้วิธีไฟไนต์เอเลเมนต์

2.1 นิยามของรูปทรงทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อย (Geometric Definition of the Element)

พิจารณาจากรูปลักษณะทั่วไปของชิ้นส่วนย่อยเปลือกบาง ดังรูปที่ 2.1



รูป 2.1 ชิ้นส่วนย่อยเปลือกบาง

กำหนดให้ X_1, X_2, X_3 เป็น ระบบพิกัดคาร์ทีเซียนในวงกว้าง (Global Cartisian Coordinate System)

u_1, u_2, u_3 เป็น การเคลื่อนที่ในแนวแกน X_1, X_2 และ X_3 ตามลำดับ

$\alpha 1, a2, \alpha 3$ เป็น การหมุนรอบแกน X_1, X_2 และ X_3 ตามลำดับ

Z_1, Z_2, Z_3 เป็น ระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเฉพาะที่ (Local Cartisian Coordinate System)

w_1, w_2, w_3 เป็น การเคลื่อนที่ในแนวแกน Z_1, Z_2 และ Z_3 ตามลำดับ

$\alpha 1', \alpha 2', \alpha 3'$ เป็น การหมุนรอบแกน Z_1, Z_2 และ Z_3 ตามลำดับ

$\hat{e}_{z1}, \hat{e}_{z2}, \hat{e}_{z3}$ เป็น หน่วยเวคเตอร์ในทิศทางของ Z_1, Z_2 และ Z_3 ตามลำดับ โดยที่ $\hat{e}_{z3}$ เป็นเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวกลาง ส่วน $\hat{e}_{z1}, \hat{e}_{z2}$ เป็นเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกัน และสัมผัสกับผิวกลาง

r,s,t เป็น ระบบพิกัดธรรมชาติ (Natural Coordinate System) มีค่าระหว่าง -1 ถึง 1

โดยที่ r,s เป็น พิกัดเชิงเส้นโค้ง (Curvilinear Coordinate) ในระนาบของผิวกลาง

t เป็น พิกัดเชิงเส้นตรง (Linear Coordinate) ในทิศทางของความหนา

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของพิกัดของจุดใด ๆ ในชิ้นส่วนย่อยกับพิกัดของจุดที่ขั้วได้ คือ

$$X\ (r,s,t) = \Sigma\ Ni\ (r,s)\ \{ X^i + t/2\ T_i\ \hat{e}_{z3} \} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.1)$$

X^i, T_i = ค่าพิกัด และความหนาที่ขั้ว i ตามลำดับ

N_i = ฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ที่ขั้ว i (ดูหัวข้อ 2.2)

2.2 ฟังก์ชันแห่งการประมาณ (Interpolation Function)

ค่า Shape Function N_i จะเป็นค่าเดียวกับชิ้นส่วนย่อยไอโซพาราเมตริกซ์ในแนวระนาบ 2 มิติ (Q8) และมีค่าต่าง ๆ ดังนี้

สำหรับขั้วที่มุม 1-4

$$N_i = \tfrac{1}{4}(1 + r_o)(1 + s_o)(r_o + s_o - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.2)$$

สำหรับขั้วที่ 5 และ ที่ 7 (r = 0)

$$N_i = \tfrac{1}{2}(1 - r^2)(1 + s_o) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

สำหรับขั้วที่ 6 และ 8 (s = 0)

$$N_i = \tfrac{1}{2}(1 + r_o)(1 - s^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

$$r_o = rr_i,\ ss_i$$

2.2.1 <u>การหาค่าอนุพันธ์ของ Shape Function เทียบกับแกน r</u> ($\partial N/\partial s$)

สำหรับขั้วที่ 1-4

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{4}(1 + r_o)(1 + s_o)(r_o + s_o - 1) \\ &= \tfrac{1}{4}(1 + s_o - 1 + r^2 + r_o s_o - r_o)(1 + s_o) \\ &= \tfrac{1}{4}(r^2 + r_o s_o + s_o - 1)(1 + s_o) \\ &= \tfrac{1}{4}(r^2 + rr_i s_o + s_o - 1)(1 + s_o) \end{aligned}$$

$$\partial N_i/\partial r = \tfrac{1}{4}(2r + r_i s_o)(1 + s_o) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.6)$$

สำหรับขั้ว 5 และ 7

$$N_i = \tfrac{1}{2}(1 - r^2)(1 + s_o)$$

$$\partial N_i/\partial r = -r(1 + s_o) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.7)$$

สำหรับขั้ว 6 และ 8

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{2}(1 + r_o)(1 - s^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(1 + r_{ri})(1 - s^2) \end{aligned}$$

$$\partial N_i/\partial r = \tfrac{1}{2} r_i(1 - s^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

2.2.2 การหาค่าอนุพันธ์ของ Shape Function เทียบกับแกน s ($\partial N/\partial s$)

สำหรับขั้วที่ 1-4

$$N_i = \tfrac{1}{4}(1 + r_o)(1 + s_o)(r_o + s_o - 1)$$

$$= \tfrac{1}{4}(1 + r_o)(r_o + s_o - 1 + r_o s_o + s_o - s_o)$$

$$= \tfrac{1}{4}(1 + r_o)(r_o + r_o s_o + s_o - 1)$$

$$= \tfrac{1}{4}(1 + r_o)(r_o + r_o s s_i + s^2 - 1)$$

$$\partial N_i/\partial s = \tfrac{1}{4}(1 + r_o)(r_o s_i + 2s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.9)$$

สำหรับขั้ว 5 และ 7

$$N_i = \tfrac{1}{2}(1 - r^2)(1 + s_o)$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 - r^2)(1 + s s_i)$$

$$\partial N_i/\partial s = \tfrac{1}{2}(1 - r^2)\, s_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.10)$$

สำหรับขั้ว 6 และ 8

$$N_i = \tfrac{1}{2}(1 + r_o)(1 - s^2)$$

$$\partial N_i/\partial s = -(1 + r_o)s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.11)$$

2.3 การหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ที่จุดใด ๆ กับการเคลื่อนที่ ที่ขั้วของชิ้นส่วนย่อย

สำหรับการหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของจุดใด ๆ บนชิ้นส่วนย่อยเปลือกบาง ซึ่งไม่คิดค่าความเครียด (Strain) ในทิศทางของความหนา จะเขียนรูปสมการได้ดังนี้

$$u(r,s,t) = \sum_{i=1}^{8} N_i(r,s)\,\{u^i + u_\alpha^i(t)\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.12)$$

โดยที่ u^i = เวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ที่ขั้วบนผิวกลาง

u_α^i = เวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นเนื่องจากการหมุนของแกนที่ตั้งฉากกับผิวกลาง รอบแกนอีก 2 แกน

การหาค่า uα จะเริ่มจากสมมติฐานว่าเส้นตรงที่ตั้งฉากกับผิวกลางก่อนการเปลี่ยนรูป ยังคงเป็นเส้นตรงและตั้งฉากกับผิวกลางหลังเกิดการเปลี่ยนรูป ดังนั้นเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ในเทิศทางแนวแกนเฉพาะที่ซึ่งเกิดจากการหมุน (α) รอบแกนเฉพาะที่เอง คือ w จะเท่ากับ (ดูรูปที่ 2.1)

$$w\alpha\ (t) = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \tfrac{1}{2}\, t\, T \begin{Bmatrix} \alpha_2' \\ -\alpha_1' \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{............ (2.13)}$$

พิจารณาจากเมตริกซ์ของการแปลง (Transformation Matrix) ระหว่างการเคลื่อนที่ในวงกว้าง (Global) และการเคลื่อนที่เฉพาะที่ (Local) คือ

$$\{ u \} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \{ w \}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \qquad \text{................. (2.14)}$$

โดยที่ $[A]$ = เมตริกซ์ของการแปลง (ดูหัวข้อ 2.4)

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_{z1}\ , \hat{e}_{z2}\ , \hat{e}_{z3} \end{bmatrix} \qquad \text{.. (2.15)}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับความสัมพันธ์ของการหมุนรอบแกนในวงกว้างและเฉพาะที่จะคล้ายกัน คือ

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha 2' \\ \alpha_3' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_2' \\ -\alpha_1' \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.16)$$

แทนค่าสมการ (2.16) ลงในสมการ (2.13) แล้วแทนค่า $W_{-}(t)$ ลงในสมการ (2.14)

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \tfrac{1}{2}\, tT \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{33} \\ -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$u^{i}_{\alpha} = \tfrac{1}{2}\, t.T_1\, \phi^{i} \alpha^{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.17)$$

$$\text{โดยที่}\quad \Phi^{i} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{33} \\ -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} \\ a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22} & 0 & a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} \\ a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32} & a_{31}a_{22}-a_{21}a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับชุดของเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกัน จะได้

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{33} & -a_{23} \\ -a_{33} & 0 & a_{13} \\ a_{23} & -a_{13} & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2.18)}$$

เมื่อแทนค่า u_{α}^{i} ลงในสมการที่ 2.12 ก็จะได้ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของจุดใด ๆ บนชิ้นส่วนย่อยกับการเคลื่อนที่รวมทั้งการหมุนที่จุดบนขั้วต่าง ๆ ดังนี้

$$u\ (r,s,t) = \sum_{i=1}^{8} Ni\ (r,s)\ \{u^{i} + \tfrac{1}{2}\, tT^{i}\, \Phi^{i}\alpha^{i}\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2.19)}$$

2.4 การหาค่าเมตริกซ์ของการแปลง (Transformation Matrix)

ค่าเมตริกซ์ของการแปลง [A] เป็นเมตริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยของเวคเตอร์ในแกนของพิกัดในวงกว้างและพิกัดเฉพาะที่ ซึ่งมีค่าตามสมการ (2.15) คือ

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_{z1}, & \hat{e}_{z2}, & \hat{e}_{z3} \end{bmatrix}$$

a_{ij} = โคไซน์แสดงทิศทาง (Direction Cosine) จากพิกัดในวงกว้างเป็นพิกัดเฉพาะที่

= $(\hat{e}_{xi} \cdot \hat{e}_{zj})$

โดยที่ทิศทางของหน่วยเวคเตอร์ $\hat{e}_{z1}$, $\hat{e}_{z2}$, $\hat{e}_{z3}$ จะเป็นทิศทางของแกนในพิกัดเฉพาะที่ กล่าวคือ $\hat{e}_{z1}$ และ $\hat{e}_{z2}$ จะเป็นเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกัน และมีสัมผัสกับผิวกลางที่จุดใดจุดหนึ่ง ในขณะที่ $\hat{e}_{z3}$ เป็นหน่วยเวคเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับผิวกลาง และสามารถหาได้โดย (14),(20)

$$\hat{e}_{z3}(r,s) = \frac{\partial X/\partial r\,(r,s) \times \partial X/\partial s\,(r,s)}{\left| \partial X/\partial r \times \partial X/\partial s \right|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.20)$$

$$\hat{e}_{z1}(r,s) = \frac{\langle 0,1,0 \rangle \times \hat{e}_{z3}(r,s)}{\left| \langle 0,1,0 \rangle \times \hat{e}_{z3}(r,s) \right|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.21)$$

$$\hat{e}_{z2}(r,s) = \hat{e}_{z3}(r,s) \times \hat{e}_{z1}(r,s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.22)$$

เมื่อ $\langle 0,1,0 \rangle$ = หน่วยเวคเตอร์ในทิศทางของ X_2

2.5 นิยามของความเค้นและความเครียด (Definition of Stresses and Strains)

การหาความเครียด ณ จุด ๆ ใดบนชิ้นส่วนย่อยเปลือกบางมักจะอ้างอิงกับพิกัดเฉพาะที่ซึ่งกำหนดเอาไว้ดังนี้

$$\epsilon(r,s,t) = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{1,z1} \\ w_{2,z2} \\ w_{1,z2} + w_{2,z1} \\ w_{1,z3} + w_{3,z1} \\ w_{2,z3} + w_{3,z2} \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (2.23)$$

เมื่อ $(.)_{,z1}$ แทนค่าอนุพันธ์เมื่อเทียบกับแกนในระบบพิกัดเฉพาะที่

โดยใช้เมตริกซ์ของการแปลง จะได้ความสัมพันธ์ของอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่เฉพาะที่กับการเคลื่อนที่ในวงกว้างดังนี้ (1)

$$\begin{bmatrix} w_{1,z1} & w_{2,z1} & w_{3,z1} \\ w_{1,z2} & w_{2,z2} & w_{3,z2} \\ w_{1,z3} & w_{2,z3} & w_{3,z3} \end{bmatrix} = [\ A\ ]^T \begin{bmatrix} u_{1,x1} & u_{2,x1} & u_{3,x1} \\ u_{1,x2} & u_{2,x2} & u_{3,x2} \\ u_{1,x3} & u_{2,x3} & u_{3,x3} \end{bmatrix} [\ A\ ]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.24)$$

โดยที่ค่า u_1 , u_2 , u_3 เป็นค่าการเคลื่อนที่ในวงกว้างจากสมการ (2.12)

สำหรับค่าความเค้นที่สอดคล้องกับความเครียดตามสมการ (2.23) ของวัสดุที่มีพฤติกรรมเชิงเส้น ไอโซทรอปิค และอีลาสติก จะหาได้ดังนี้

$$\sigma(r,s,t) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = D\,\epsilon(r,s,t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.25)$$

โดยที่ D = Elasticity Matrix (14)

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu/2K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu/2K \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.26)$$

เมื่อ E = Young's Modulus

ν = Poisson's Ratio

K = ค่าคงที่สำหรับแรงเฉือน = 1.2

2.6 การหาค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยเปลือกบาง

รูปแบบของสมการสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยเปลือกบางหรือชิ้นส่วนย่อยอื่น ๆ ซึ่งหาโดยวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ จะอยู่ในรูปสมการ

$$K_{ij} = \int_V (B^i)^T D B^j \, dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.27)$$

โดยที่ B^i เป็นค่าเมตริกซ์ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับค่าการเคลื่อนที่ที่ข้อของชิ้นส่วนย่อย (Strain - Displacement Matrix)

$$\epsilon(r,s,t) = \Sigma B^{i} \begin{Bmatrix} u_i \\ \alpha_i \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.28)$$

การหาค่าสติฟเนสด้วยการอินทิเกรตเชิงเลขนั้น ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในงานวิจัยได้แบ่งแยกสติฟเนสเมตริกซ์ออกเป็น 2 ส่วน คือ สติฟเนสในส่วนของการดัด (Bending) และในระนาบ กับสติฟเนสเนื่องจากแรงเฉือนตามขวาง (Transverse Shear) เพื่อความเหมาะสมในการเลือกจำนวน Gauss Point ที่ต่างกันในการอินติเกรตเชิงเลขของแต่ละส่วน (4) ดังนี้

$$K^{ij} = K_m^{ij} + K_s^{ij} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.29)$$

โดยที่ $K_m^{ij} = \int (B^i)^T D_m B^j \, dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.30)$

$$K_s^{ij} = \int (B^i)^T D_s B^j \, dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.31)$$

โดยมีนิยามของ B_m, B_s, D_m และ D_s ดังนี้

$$\epsilon_m = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \Sigma B^{i} \begin{Bmatrix} u_i \\ \alpha_i \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.32)$$

$$\epsilon_s = \begin{Bmatrix} \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix} = \Sigma B^{i} \begin{Bmatrix} u_i \\ \alpha_i \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.33)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_m & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.34)$$

ในการหาค่าเมตริกซ์ B_m และ B_s ทำได้โดยการแทนค่า u(r,s,t) ในสมการ (2.12) ลงในสมการ (2.24) และสมการ (2.23) ตามลำดับจะได้สมการของความเครียดและการเคลื่อนที่ที่ขั้วใหม่ คือ

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_m\ (r,s,t) \\ \epsilon_s\ (r,s,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1m} & B_{2m} + t\ B_{3m} \\ B_{1s} & B_{2s} + t\ B_{3s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \alpha_i \end{Bmatrix} \quad ...... (2.35)$$

การหาค่า $B_{1m}, B_{1s}, B_{2m}, B_{2s}, B_{3m}, B_{3s}$ สามารถหาได้ดังนี้

พิจารณาความสัมพันธ์ของความเครียดและค่าการเคลื่อนที่ ๆ ขั้ว

$$\{\epsilon\} = \Sigma \begin{bmatrix} B^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \alpha_i \end{Bmatrix} \quad .... (2.36)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{1,z1} \\ w_{2,z2} \\ w_{1,z2} + w_{2,z1} \\ w_{1,z3} + w_{3,z1} \\ w_{2,z3} + w_{3,z2} \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

จากสมการ (2.24)

$$\begin{bmatrix} w_{1,z1} & w_{2,z1} & w_{3,z1} \\ w_{1,z2} & w_{2,z2} & w_{3,z2} \\ w_{1,z3} & w_{2,z3} & w_{3,z3} \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} u_{1,x1} & u_{2,x1} & u_{3,x1} \\ u_{1,x2} & u_{2,x2} & u_{3,x2} \\ u_{1,x3} & u_{2,x3} & u_{3,x3} \end{bmatrix} A$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,x1} & u_{2,x1} & u_{3,x1} \\ u_{1,x2} & u_{2,x2} & u_{3,x2} \\ u_{1,x3} & u_{2,x3} & u_{3,x3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma\, a_{k1}\, u_{1,xk} & \Sigma\, a_{k1}\, u_{2,xk} & \Sigma\, a_{k1}\, u_{3,xk} \\ \Sigma\, a_{k2}\, u_{1,xk} & \Sigma\, a_{k2}\, u_{2,xk} & \Sigma\, a_{k2}\, u_{3,xk} \\ \Sigma\, a_{k3}\, u_{1,xk} & \Sigma\, a_{k3}\, u_{2,xk} & \Sigma\, a_{k3}\, u_{3,xk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

.... (2.38)

$$w_{1,z1} = a_{11}\, \Sigma\, a_{k1}\, u_{1,xk} + a_{21}\, \Sigma\, a_{k1}\, u_{2,xk} + a_{31}\, \Sigma\, a_{k1}\, u_{3,xk}$$

พิจารณาเฉพาะผลของการเคลื่อนที่ที่ขั้ว i (u_i)

$$= a_{11}\, \Sigma\, a_{k1}\, \Sigma\, N_{i,xk}\, u_1 + a_{21}\, \Sigma\, a_{k1}\, \Sigma\, N_{i,xk}\, u_2 + a_{31}\, \Sigma\, a_{k1}\, \Sigma\, N_{i,xk}\, u_3$$

$$= \Sigma\, \Sigma\, a_{k1}\, N_{i,xk}\, \langle a_{11}\ a_{21}\ a_{31} \rangle \begin{Bmatrix} u_1^{i} \\ u_2^{i} \\ u_3^{i} \end{Bmatrix} \qquad .... (2.38.1)$$

ในทำนองเดียวกันจะหาค่าอนุพันธ์อื่น ๆ ในสมการของความเครียด เมื่อพิจารณาเฉพาะจากการเคลื่อนที่ (u_i) เพียงอย่างเดียว คือ

$$w_{2,z1} = \Sigma\, \Sigma\, a_{k1}\, N_{i,xk}\, \langle a_{12}\ a_{22}\ a_{32} \rangle \begin{Bmatrix} u_i \end{Bmatrix} \qquad ...... (2.38.2)$$

$$w_{3,z1} = \Sigma\,\Sigma\, a_{k1} N_{i,xk} \langle a_{13}\ a_{23}\ a_{33} \rangle \begin{bmatrix} u_i \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (2.38.3)$$

$$w_{1,z2} = \Sigma\,\Sigma\, a_{k2} N_{i,xk} \langle a_{11}\ a_{21}\ a_{31} \rangle \begin{bmatrix} u_i \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (2.38.4)$$

$$w_{2,z2} = \Sigma\,\Sigma\, a_{k2} N_{i,xk} \langle a_{12}\ a_{22}\ a_{32} \rangle \begin{bmatrix} u_i \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (2.38.5)$$

$$w_{3,z2} = \Sigma\,\Sigma\, a_{k2} N_{i,xk} \langle a_{13}\ a_{23}\ a_{33} \rangle \begin{bmatrix} u_i \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (2.38.6)$$

$$w_{1,z3} = \Sigma\,\Sigma\, a_{k3} N_{i,xk} \langle a_{11}\ a_{21}\ a_{31} \rangle \begin{bmatrix} u_i \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (2.38.7)$$

$$w_{2,z3} = \Sigma\,\Sigma\, a_{k3} N_{i,xk} \langle a_{12}\ a_{22}\ a_{32} \rangle \begin{bmatrix} u_i \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (2.38.8)$$

$$w_{3,z3} = \Sigma\,\Sigma\, a_{k3} N_{i,xk} \langle a_{13}\ a_{23}\ a_{33} \rangle \begin{bmatrix} u_i \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots (2.38.9)$$

แทนค่าอนุพันธ์เหล่านี้ลงในสมการของความเครียด จะได้ค่า B_{1m}, B_{1s} ดังนี้

$$B_{1m} = \begin{bmatrix} \Sigma a_{k1} N_{i,xk} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma a_{k2} N_{i,xk} & 0 \\ \Sigma a_{k2} N_{i,xk} & \Sigma a_{k1} N_{i,xk} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$= L_m (N_i) A^T \qquad \text{............} (2.40)$$

เมื่อ
$$L_m(N_i) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{k1} N_{i,xk} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma\, a_{k2} N_{i,xk} & 0 \\ \Sigma\, a_{k2} N_{i,xk} & \Sigma\, a_{k1} N_{i,xk} & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.41)$$

ในทำนองเดียวกับการหาค่า $B_{1m}{}^{i}$, จะสามารถหาค่า B_{1s} ได้คือ

$$B_{1s}{}^{i} = L_s(N_i) A^T \qquad \text{...............} (2.42)$$

$$L_s(N_i) = \begin{bmatrix} \Sigma\, a_{k3} N_{i,xk} & 0 & \Sigma\, a_{k1} N_{i,xk} \\ 0 & \Sigma\, a_{k3} N_{i,xk} & \Sigma\, a_{k2} N_{i,xk} \end{bmatrix} \qquad (2.43)$$

สำหรับค่า B_{2m}, B_{2s}, B_{3m}, B_{3s} ซึ่งมีผลมาจากค่าการหมุนที่ขั้วของชิ้นส่วนย่อย ก็สามารถหาได้ด้วยวิธีคล้ายกันดังนี้

เมื่อพิจารณาผลของการหมุน (α_1) อย่างเดียว จากสมการ (2.17)

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \Sigma\, N_i \tfrac{1}{2} t T_i \Phi^i \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

แทนค่า u_1, u_2, u_3 ลงในสมการ (2.37) จะได้ว่า

$$B_{2m} = \tfrac{1}{2} T_i N_i L_m (t) A^T \Phi^i \qquad \text{...............} (2.44)$$

$$B_{2s} = \tfrac{1}{2} T_i N_i L_s (t) A^T \Phi^i \qquad \text{...............} (2.45)$$

$$B_{3m} = \tfrac{1}{2} T_i L_m (N_i) A^T \Phi^i \qquad \text{...............} (2.46)$$

$$B_{3s} = \tfrac{1}{2} T_i L_s (N_i) A^T \Phi^i \qquad \text{...............} (2.47)$$

โดยที่

$$L_m(t) = \begin{bmatrix} \Sigma\, a_{k1}t_{,xk} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma\, a_{k2}t_{,xk} & \\ \Sigma\, a_{k2}t_{,xk} & \Sigma\, a_{k1}t_{,xk} & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.48)$$

เนื่องจาก เวคเตอร์ในทิศทางของ t จะตั้งฉากกับทิศทางของ e_{z1}, e_{z2}

$L_m(t) = 0$ ซึ่งทำให้ $B_{2m} = 0$ ได้เช่นกัน

และ

$$L_s(t) = \begin{bmatrix} \Sigma\, a_{k3}t_{,xk} & 0 & \Sigma\, a_{k1}t_{,xk} \\ 0 & \Sigma\, a_{k3}t_{,xk} & \Sigma\, a_{k2}t_{,xk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma\, a_{k3}t_{,xk} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma\, a_{k3}t_{,xk} & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.49)$$

โดยการแทนค่าสมการ (2.35) ลงในสมการ (2.30)

$$K_m^{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (B_{1m})^T D_m B_{1m} & t(B_{3m})^T D_m B_{1m} \\ (B_{1m})^T D_m B_{3m} & t^2(B_{3m})^T D_m B_{3m} \end{bmatrix} \left|J(r,s,o)\right| drdsdt \quad \ldots\ldots\ldots (2.50)$$

เมื่อ $|J|$ = ตัวกำหนดของเมตริกซ์ Jacobian $[\,J\,]$

และ
$$[\,J\,] = \begin{bmatrix} X_{1,r} & X_{2,r} & X_{3,r} \\ X_{1,s} & X_{2,s} & X_{3,s} \\ X_{1,t} & X_{2,t} & X_{3,t} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.51)$$

เนื่องจาก B_1 และ B_3 อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ของ r และ s เท่านั้น สมการ (2.50) สามารถอินทิเกรตเทียบกับ t ได้ คือ

$$K_m^{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 2(B_{1m})^T D_m B_{1m} & 0 \\ 0 & \tfrac{2}{3}(B_{3m})^T D_m B_{3m} \end{bmatrix} \left|J(r,s,o)\right| drds \quad \ldots\ldots\ldots (2.52)$$

ในทำนองเดียวกัน สติฟเนสที่หมวดของแรงเฉือนตามขวางจะหาได้จาก

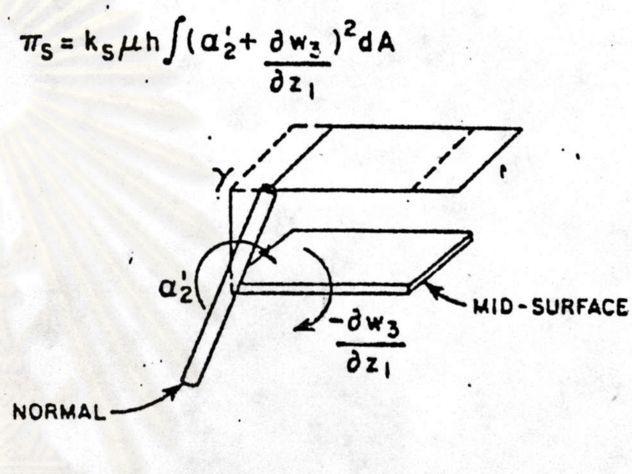
$$K^{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 2(B_{1s})^T D_s B_{1s} & 2(B_{1s})^T D_s B_{2s} \\ 2(B_{2s})^T D_s B_{1s} & 2(B_{2s})^T D_s + \tfrac{2}{3}(B_{3s})^T D_s B_{3s} \end{bmatrix} \left|J(r,s,o)\right| drds \quad \ldots\ldots (2.53)$$

เมื่อรวมค่าจากสมการที่ (2.50) และสมการ (2.53) เข้าด้วยกัน ก็จะได้ค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยโดยที่ยังไม่ได้รวมผลของแรงบิด

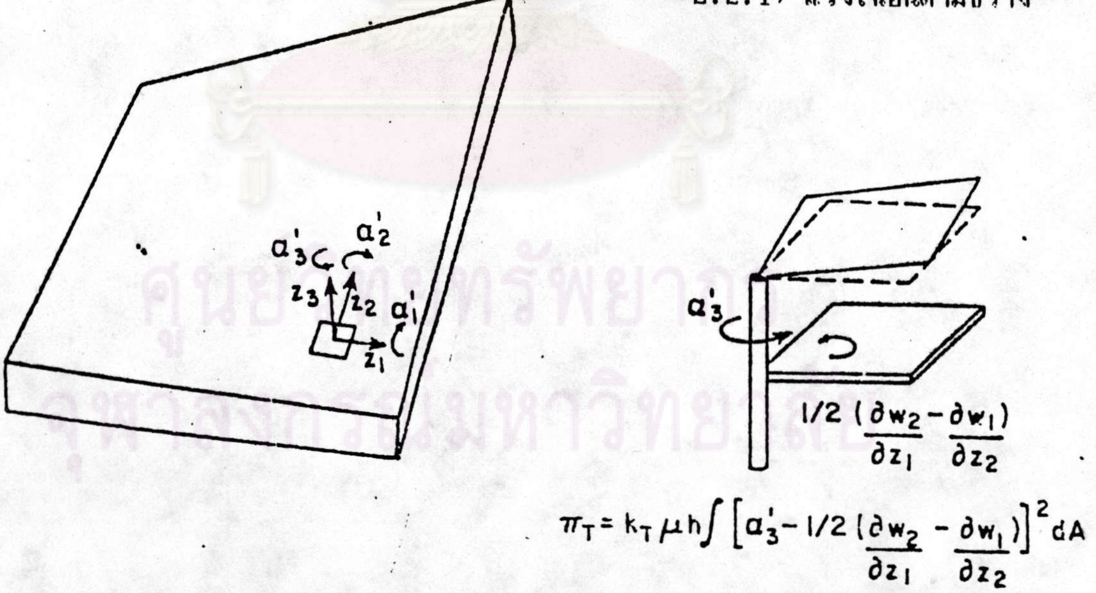
2.7 ผลของแรงบิด (Torsional Effect) กับค่าสติฟเนส

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าในแต่ละขั้วของชิ้นส่วนย่อยเปลือกบางจะประกอบด้วยระดับขั้นความเสรี 6 ค่า คือการเคลื่อนที่ในแนวแกนที่ตั้งฉากกัน 3 ค่า และค่าการหมุนรอบแกนดังกล่าวอีก 3 ค่า แต่ค่าสติฟเนสที่สอดคล้องกันจะมีเพียง 2 ค่า ในขณะที่สติฟเนสที่สอดคล้องกับการหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับผิวกลางในระดับเฉพาะที่จะเท่ากับศูนย์ ในกรณีของวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นพื้นรับแรงตัดในระนาบ (Plate Bending)ด้วยชิ้นส่วนย่อยเปลือกบาง เช่นในตัวอย่างการวิเคราะห์ที่ 1,2,5 และ 6 เนื่องจากชิ้นส่วนย่อยทั้งหมดอยู่ในระนาบเดียวกันจึงทำให้สติฟเนสในวงกว้างที่สอดคล้องกับการบิดเท่ากับศูนย์ ซึ่งทำให้ได้สมการ 0 = 0 ด้วย แต่เนื่องจากโปรแกรมย่อยคอมพิวเตอร์ที่ใช้แก้สมการสติฟเนสของโครงสร้างในงานวิจัยนี้สามารถที่จะทำการตรวจสอบสมการ 0 = 0 และทำการกำจัดออกไปก่อนที่จะทำการแก้สมการได้ จึงไม่จำเป็นต้องเพิ่มค่าสติฟเนสที่สอดคล้องกับการบิดแต่อย่างใด ในการป้อนข้อมูลโครงสร้างของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในงานวิจัยนี้สามารถที่จะเลือกใช้สติฟเนสดังกล่าวหรือไม่ก็ได้

ได้มีผู้คิดค้นหาค่าสติฟเนสดังกล่าวหลายวิธีด้วยกัน แต่ในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้วิธีจากเอกสารอ้างอิงที่ (11) โดยการสร้างความสัมพันธ์ของการหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับผิวกลาง กับการหมุนของผิวกลางเอง โดยเริ่มจากสมการพลังงานความเครียดเนื่องจากแรงเฉือนในทิศทางที่ตั้งฉากกับผิวกลางเองคือ (ดูรูป 2.2)



(2.2.1) แรงเฉือนตามขวาง



(2.2.2) แรงบิด

รูปที่ 2.2 Penalty Function

$$\pi_s = k_s \mu T \int [\alpha_2 (r,s) + w_{3,z1}(r,s,o)]^2 dA \qquad .... (2.54)$$

ในทำนองเดียวกันสมการพลังงานความเครียดเนื่องจากการบิดจะอยู่ในรูปของ

$$\pi_t = k_t \mu T \int [\alpha_3 (r,s) - \tfrac{1}{2}\{w_{2,z1}(r,s,o) - w_{1,z2}(r,s,o)\}]^2 dA .. (2.55)$$

เมื่อ k_t เป็นพารามิเตอร์ที่จะต้องพิจารณา ถ้า $k_t \mu$ มีค่ามากกว่า Eh^3 (ซึ่งปรากฏอยู่ในค่าพลังงานความเครียด) มาก ๆ สมการ (2.55) จะสอดคล้องกับวิธีของ Penalty Function ซึ่งจะทำให้ได้ผลลัพธ์ของข้อจำกัด (Constraint)

$$\alpha_3' \approx \tfrac{1}{2} \left[w_{2,z1} - w_{1,z2} \right] \qquad .... (2.56)$$

ในการหาค่าสติฟเนสซึ่งสอดคล้องกับการบิด จะเริ่มจากความสัมพันธ์ของค่าการเคลื่อนที่ระหว่างพิกัดเฉพาะที่ และพิกัดในวงกว้าง โดยใช้เมตริกซ์ของการแปลง ดังสมการที่ (2.24)

$$\begin{bmatrix} w_{1,z1} & w_{2,z1} & w_{3,z1} \\ w_{1,z2} & w_{2,z2} & w_{3,z2} \\ w_{1,z3} & w_{2,z3} & w_{3,z3} \end{bmatrix} = [A]^T \begin{bmatrix} u_{1,x1} & u_{2,x1} & u_{3,x1} \\ u_{1,x2} & u_{2,x2} & u_{3,x2} \\ u_{1,x3} & u_{2,x3} & u_{3,x3} \end{bmatrix} [A]$$

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{matrix} \right\} = [A]^T \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{matrix} \right\}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ} \quad a_{ij} = \hat{e}_{xi} \cdot \hat{e}_{zj}$$

จะได้ความสัมพันธ์ของ α_3' กับการหมุนในวงกว้าง

$$\alpha_3' = \langle a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33} \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \langle a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33} \rangle \sum_{i=1}^{8} N_i \begin{Bmatrix} \alpha_1^{i} \\ \alpha_2^{i} \\ \alpha_3^{i} \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{8} N_i \; \langle a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33} \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1^{i} \\ \alpha_2^{i} \\ \alpha_3^{i} \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{8} R_n^{i} \alpha^{i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.57)$$

เมื่อ $\quad R_n^{i} = N_i \langle a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33} \rangle \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.58)$

จากสมการ (2.24) :

$$W_{2,21} = \langle \sum_{k=1}^{3} a_{k1} u_{1,xk} \quad \sum_{k=1}^{3} a_{k1} u_{2,xk} \quad \sum_{k=1}^{3} a_{k1} u_{3,xk} \rangle \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} a_{k1} \; \langle a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33} \rangle \begin{Bmatrix} u_{1,xk} \\ u_{2,xk} \\ u_{3,xk} \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} a_{k1} \langle a_{12} \; a_{22} \; a_{32} \rangle \sum_{i=1}^{8} N_{i,xk} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{8} a_{k1} N_{i,xk} \langle a_{12} \; a_{22} \; a_{32} \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{.........} \quad (2.59)$$

$$W_{1,22} = \langle \sum_{k=1}^{3} a_{k2} \, u_{1,xk} \;\; \sum_{k=1}^{3} a_{k2} \, u_{2,xk} \;\; \sum_{k=1}^{3} a_{k2} \, u_{3,xk} \rangle \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} a_{k2} \langle a_{11} \; a_{21} \; a_{31} \rangle \sum_{i=1}^{8} N_{i,xk} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{8} a_{k2} N_{i,xk} \langle a_{11} \; a_{21} \; a_{31} \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{.........} \quad (2.60)$$

จากสมการ (2.59), (2.60) และ (2.56)

$$-\tfrac{1}{2}\left[W_{2,z1}\,(r,s,o) - W_{1,z2}\,(r,s,o) \right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[W_{1,z2}\,(r,s,o) - W_{2,z1}\,(r,s,o) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{8} \tfrac{1}{2} \left\langle \sum_{k=1}^{3} a_{k2} N_{i,xk} \quad - \sum_{k=1}^{3} a_{k1} N_{i,xk} \quad 0 \right\rangle \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{8} R_m\, u^i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.61)$$

เมื่อ $R_m = \tfrac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{3} a_{k2} N_{i,xk} \quad -\sum_{k=1}^{3} a_{k1} N_{i,xk} \quad 0 \right) [\,A\,]^T$ .... (2.62)

จากสมการของพลังงานความเครียดในสมการ (2.55) จะได้ความสัมพันธ์ของความเครียดกับค่าการเคลื่อนที่ที่ขั้ว คือ

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} k_t\, \mu T \langle R_m \quad R_n \rangle \begin{Bmatrix} u^i \\ \alpha^i \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.63)$$

ซึ่งจะได้ค่าสติฟเนส คือ

$$K_t = k_t \mu T \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (R_m)^T R_m & (R_m)^T R_n \\ (R_n)^T R_m & (R_n)^T R_n \end{bmatrix} \left| J\,(r,s,o) \right| \, drds \quad ..(2.64)$$

เมื่อรวมค่าสติฟเนสในสมการ (2.52) (2.53) และ (2.64) ก็จะได้ค่าสติฟเนสที่สมบูรณ์ของชิ้นส่วนย่อยเปลือกบาง

2.8 จำนวน Gauss Point ที่เหมาะสมในการอินทิเกรตหาค่าสติฟเนส

ในการอินทิเกรตหาค่าสติฟเนสที่แน่นอนของชิ้นส่วนย่อยเปลือกบาง 8 ขั้วนั้น ตามทฤษฎีจะต้องใช้จำนวน Guass Point เท่ากับ 3 x 3 จุด (4) แต่จากการทดสอบความถูกต้องของค่าการเคลื่อนที่จากการวิเคราะห์เทียบกับค่าจริงจากการคำนวณในเอกสารอ้างอิงที่ 5 โดยการเปลี่ยนอัตราส่วนอัตราส่วนระหว่างความกว้างต่อความหนาที่ค่าต่างๆกัน พบว่าจำนวน Guass Point ดังกล่าวจะใช้ได้กับโครงสร้างที่มีความหนามากเท่านั้น เมื่อโครงสร้างมีความหนาน้อยลงสติฟเนสของโครงสร้างที่สอดคล้องกับแรงเฉือนตามขวางจะมีค่าสูงกว่าความจริงมาก ทำให้ค่าการเคลื่อนที่ที่วิเคราะห์ได้จะน้อยกว่าค่าจริงมากเช่นกัน จึงจำเป็นต้องลดค่าของสติฟเนสจากแรงเฉือนตามขวางด้วยการลดจำนวน Gauss Point ในการอินทิเกรตลงเหลือ 2 x 2 จุด ซึ่งหลังจากการลดจำนวนลงแล้ว พบว่าชิ้นส่วนย่อยดังกล่าวสามารถใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีเปลือกบางมากๆได้ และจากการศึกษาเพิ่มเติมด้วยการลดจำนวน Gauss Point ในการอินทิเกรตหาค่าสติฟเนสในระนาบเหลือ 2 x 2 จุดด้วย พบว่าชิ้นส่วนย่อยกลับมีประสิทธิภาพดีขึ้นกว่าเดิมมาก โดยสามารถให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับค่าจริงได้ด้วยการใช้ชิ้นส่วนย่อยจำนวนน้อยๆในการจำลองโครงสร้าง ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงได้เลือกใช้จำนวน Gauss Point = 2 x 2 จุด สำหรับหาค่าสติฟเนสทั้งในและนอกระนาบ