บทที่ 3

ทฤษฎี

3.1 การกรองแบบไมโครฟิลเตรชัน

ในปัจจุบันกระบวนการแยกสารโดยใช้เยื่อแผ่นเป็นที่สนใจและนำมาใช้ในวงการอุตสาหกรรมอย่างแพร่หลาย ด้วยเหตุผลที่ว่ามีประสิทธิภาพการแยกสูง ไม่ต้องมีการเปลี่ยนเฟส ไม่ต้องเติมสารเคมีเพิ่ม ไม่ต้องใช้ความร้อน เมื่อเปรียบเทียบค่าการใช้พลังงานในการแยกกับระบบการแยกอื่นๆพบว่าใช้พลังงานต่ำกว่ามาก ทำให้เกิดความพยายามที่จะนำกระบวนการแยกโดยใช้เยื่อแผ่นมาใช้ในอุตสาหกรรมมากขึ้น

ไมโครฟิลเตรชัน (microfiltration:MF) เป็นกระบวนการแยกโดยใช้เยื่อแผ่นประเภทหนึ่ง เพื่อแยกอนุภาคหรือคอลลอยด์ โดยใช้เยื่อแผ่นที่มีขนาดรูพรุนตั้งแต่ 0.05-10 ไมครอน โดยใช้ความดัน 1-5 บาร์ ใช้หลักการแยกสารแบบคัดเลือกขนาดอนุภาค (sieving mechanism) โดยตัวทำละลายและอนุภาคที่มีขนาดเล็กกว่ารูพรุนของเยื่อแผ่น จะสามารถผ่านเยื่อแผ่นออกไปได้ซึ่งเราเรียกสารละลายในส่วนนี้ว่า เพอมิเอต (permeate) อนุภาคที่มีขนาดใหญ่กว่ารูพรุนของเยื่อแผ่น จะถูกกักไว้ในระบบ โดยเรียกสารละลายในส่วนนี้ว่า รีเทนเตท (retentate) หรือคอนเซนเตรท (concentrate)

ในการประยุกต์ใช้งานของไมโครฟิลเตรชัน ได้แก่ การแยกเซล การทำให้น้ำใสซึ่งใช้ในการผลิตไวน์และเครื่องดื่ม แต่อย่างไรก็ตามเมื่อใช้งานไปได้ระยะหนึ่ง จะพบปัญหาค่าฟลักซ์ที่ลดลง เนื่องจากมีการสะสมของอนุภาคที่ผิวหน้าของเยื่อแผ่นและภายในรูพรุน เรียกปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นนี้ว่า fouling ทำให้มีการหาเทคนิคใหม่ๆมาแก้ไขปัญหานี้ ในปี 1981 Enka ได้

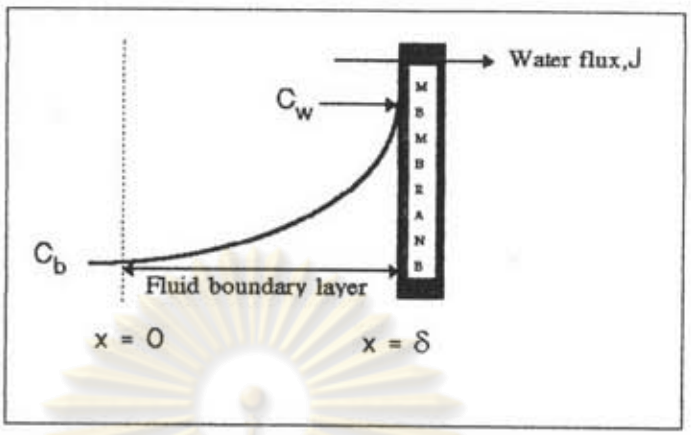
เสนอการใช้การกรองแบบไหลขนาน โดยการป้อนสารด้วยความดันในแนวขนานไปกับผิวเยื่อแผ่น (ดังรูปที่ 3.1) เพื่อเพิ่มแรงเฉือนที่ผิวหน้าเป็นการลดการสะสมของอนุภาคที่ผิวและลดอัตราการลดลงของฟลักซ์

รูปที่ 3.1 ลักษณะการกรองของเยื่อแผ่นในระบบไมโครฟิลเตรชัน

3.2 <u>กลไกการไหลผ่านเยื่อแผ่น</u>

เมื่อใช้ความดันอัดสารละลายผ่านเยื่อแผ่นไมโครฟิลเตรชัน โมเลกุลที่มีขนาดเล็กกว่าขนาดของรูพรุนของเยื่อแผ่นจะสามารถผ่านออกไปได้ จะเหลือแต่โมเลกุลที่มีขนาดใหญ่สะสมที่ผิวหน้าของเยื่อแผ่น เป็นผลให้เกิดเกรเดียนต์ความเข้มข้น ดังแสดงในรูปที่ 3.2

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.2 เกรเดียนต์ของความเข้มข้น

ความเข้มข้นของอนุภาคแขวนลอยจะมีค่าสูงสุดที่ผิวหน้าของเยื่อแผ่นและเมื่อความเข้มข้นมีค่าสูงขึ้นเรื่อยๆ จะทำให้เกิดการแพร่ของอนุภาคแขวนลอยที่จุดนั้นและภายใต้ภาวะคงที่อัตราการถ่ายโอนมวลสารผ่านการกรองจะสมดุลกับการแพร่ในทิศทางตรงกันข้ามกัน ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการที่ 1

$$JC - D_v \frac{dC}{dX} = 0 \qquad (1)$$

เมื่อ J = ฟลักซ์ของการไหลผ่าน (permeation flux) (m^3/m^2-hr)

C = ความเข้มข้นที่ผิวเยื่อแผ่นที่จุด X ใดๆ (g/l)

D_v = ความสามารถในการแพร่ของอนุภาคแขวนลอย (m^2/s)

จากสมการที่ 1 สามารถทำการอินทิเกรตภายในชั้นขอบเขต (ดังแสดงในรูปที่ 3.2)

$$J = \frac{D_v}{\delta} \ln \frac{C_w}{C_b} \qquad (2)$$

เมื่อ C_w = ความเข้มข้นของอนุภาคแขวนลอยที่ผิวเยื่อแผ่น (g/l)

C_b = ความเข้มข้นของอนุภาคแขวนลอยในสารละลายป้อน (g/l)

δ = ความหนาของชั้นขอบเขต (m)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แทนค่า $\frac{D_v}{\delta}$ ด้วยค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวล (mass transfer coefficient : k)

$$J = k \ln \frac{C_w}{C_b} \qquad (3)$$

โดยที่ k ไม่ได้เป็นฟังก์ชันกับความเข้มข้น แต่จะขึ้นกับแรงขับของความดันและการไหลของของไหลผ่านเยื่อแผ่น ซึ่งมีผลต่อความหนาของชั้นขอบเขต

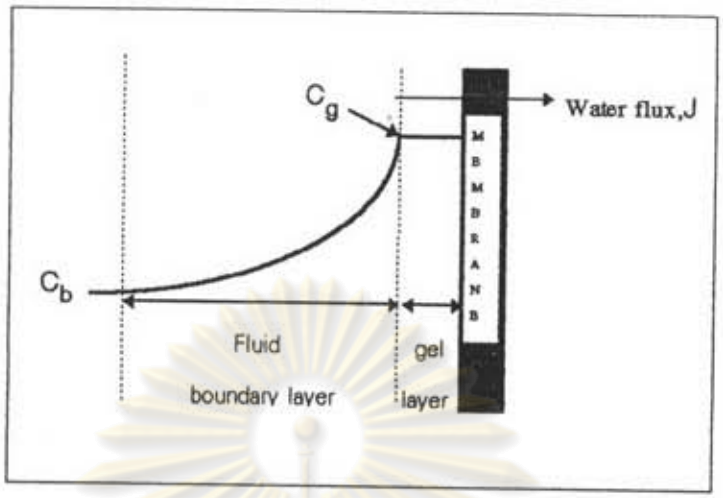
เราสามารถเพิ่มค่าอัตราฟลักซ์ของการกรอง โดยการเพิ่มความเข้มข้นของอนุภาคแขวนลอยที่ผิวหน้าของเยื่อแผ่น (C_w) แต่ค่า C_w จะมีค่าสูงสุดที่ค่าหนึ่ง ซึ่งเมื่อถึงจุดนี้อนุภาคแขวนลอยจะเกิดเป็นชั้นเจล และเรียกความเข้มข้นตรงนี้ว่า ความเข้มข้นของเจล (C_g) ซึ่งเป็นค่าความเข้มข้นสูงสุดของ C_w

$$J = k \ln \frac{C_g}{C_b} \qquad (4)$$

ค่า C_g ขึ้นกับตัวแปรหลายอย่าง คือ ความดัน อุณหภูมิ ค่าการละลายและ ค่า pH อาจกล่าวได้ว่า C_g คือค่าความเข้มข้นที่สูงเพียงพอที่จะทำให้เกิดความดันกลับออสโมติกสูงจนไม่เกิดฟลักซ์ได้

การเกิดชั้นเจลเปรียบเสมือนเป็นเยื่อแผ่นชั้นที่สอง ที่สกัดกั้นการไหลผ่านของตัวทำละลาย ดังแสดงในรูปที่ 3.3 ซึ่งมีผลทำให้ค่าฟลักซ์ของการกรองลดลง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

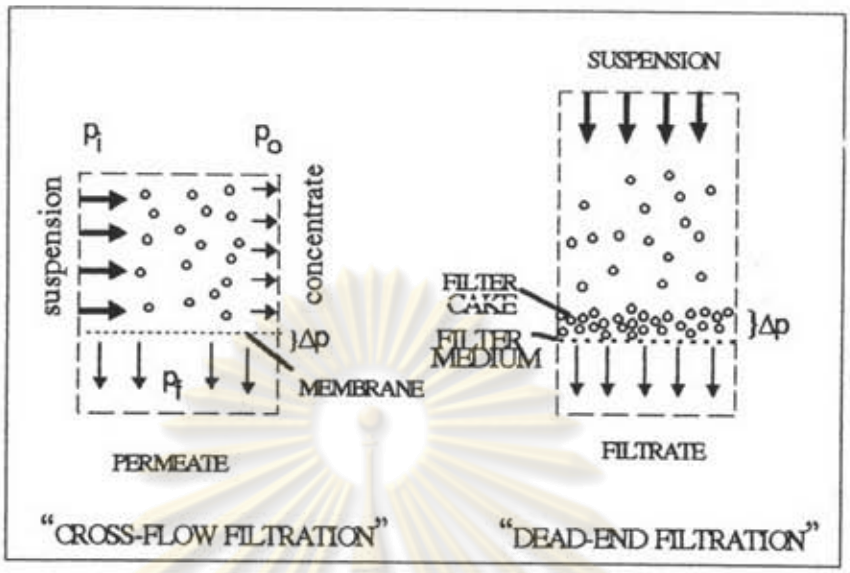


รูปที่ 3.3 เกรเดียนต์ของความเข้มข้นหลังจากเกิดเจลโพลาไรเซชัน

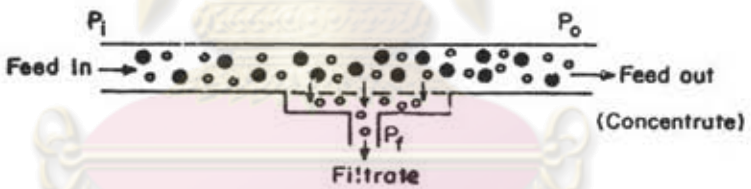
จากเหตุผลดังกล่าวจึงมีความจำเป็นต้องลดการเกิดเจลโพลาไรเซชัน เพื่อให้อนุภาคแขวนลอยสามารถไหลผ่านเยื่อแผ่นได้มากที่สุดและลดความหนาของชั้นเจล หนทางหนึ่งที่สามารถลดปัญหาการเกิดเจลโพลาไรเซชันได้ คือการใช้วิธีการกรองแบบไหลขนานกับเยื่อแผ่น ดังแสดงในรูปที่ 3.4

โดยที่การกรองแบบไหลขนานกับเยื่อแผ่น เป็นการเพิ่มแรงเฉือนที่ผิวกรองทำให้โมเลกุลบริเวณผิวกรองเกิดการเคลื่อนที่ ทำให้ชั้นความหนาของเจลมีค่าลดลง มีผลทำให้สัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลเพิ่มขึ้น จากรูปจะเห็นว่า สายป้อนจะวิ่งผ่านตัวกรองด้วยความแตกต่างของแรงดันขาเข้า (p_i) กับแรงดันขาออก (p_o)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.4 การเปรียบเทียบการกรองแบบไหลขนานกับเยื่อแผ่น และการกรองแบบไหลผ่านเยื่อแผ่น



รูปที่ 3.5 แสดงความสัมพันธ์ของความดันในการกรองแบบไหลขนานกับเยื่อแผ่น

ดังนั้น $$\Delta p = p_i - p_0 \qquad (5)$$

ค่าความดันลดนี้มีความสัมพันธ์กับค่าอัตราการไหล (Q) หรือความเร็วในการไหลผ่านผิวหน้าเยื่อแผ่น

โดยค่าความดันลดเป็นไปตามสมการของ Poiseuille สำหรับการไหลแบบราบเรียบ

$$\Delta p = \frac{C_1 \mu_1 L v}{d_1^2} = \frac{C_2 \mu_1 L Q}{d_1^4} \qquad (6)$$

เมื่อ μ_1 = ค่าความหนืด (kg/m.s)

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

L = ความยาวของตัวกรอง (m)

d_1 = ความสูงของช่องของของเหลวเหนือเยื่อแผ่น (m)

C_1, C_2 = ค่าคงที่ของรูปทรงของช่อง (-)

และค่าความดันลดเป็นไปตามสมการของ Fanning หรือ Darcy สำหรับการไหลแบบปั่นป่วน

$$\Delta p = \frac{C_3 f L v^2}{d_1} = \frac{C_4 f L Q^2}{d_1^5} \qquad (7)$$

เมื่อ f = แฟคเตอร์ที่ขึ้นกับค่า Reynolds number (-)

C_3, C_4 = เป็นค่าคงที่ของรูปทรงของช่อง (-)

ความดันขับผ่านเยื่อแผ่น (transmembrane pressure) คือ ความแตกต่างระหว่างความดันก่อน และหลังผ่านเยื่อแผ่น โดยค่าเฉลี่ยของความดันขับผ่านเยื่อแผ่น (ΔPTM) มีค่าดังนี้

$$\Delta PTM = \frac{p_i + p_o}{2} - p_f \qquad (8)$$

โดยทั่วไปค่าความดันสารกรอง (p_f) จะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\Delta PTM = p_i - \left(\frac{\Delta p}{2}\right) \qquad (9)$$

จากสมการที่ 9 จะเห็นว่าเมื่อควบคุมความดันขาป้อนเข้าให้คงที่ การเปลี่ยนความเร็วในการไหลแบบขนาน จะมีผลต่อค่า ΔPTM

Blatt และคณะ (1970) ได้แสดงสมการที่ชี้ให้เห็นความสัมพันธ์ของค่า k กับความเร็วของของไหลที่ผิวหน้าของเยื่อแผ่นเป็นดังนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$Sh = \frac{(k \cdot d)}{D_v} = A Re^{B} Sc^{1/3} \qquad (10)$$

โดยที่ Sh = Sherwood number (-)

d = ความสูงของช่องของของเหลวเหนือเยื่อแผ่น (m)

Re = Reynolds number (-)

Sc = Schmidt number (-)

ในทางทฤษฎีแล้วค่า B มีค่าเท่ากับ 0.33 สำหรับการไหลแบบราบเรียบ และเป็น 0.80 สำหรับการไหลแบบปั่นป่วน แต่โดยทั่วไป B มีค่าเท่ากับ 0.5 สำหรับการไหลแบบราบเรียบ และมีค่าเท่ากับ 1 สำหรับการไหลแบบปั่นป่วน ดังนั้นค่า k จึงเป็นสัดส่วนกับรากที่สองของความเร็วในการไหลแบบราบเรียบ และเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วในการไหลแบบปั่นป่วน

สำหรับค่า C_g จะเป็นฟังก์ชันกับอุณหภูมิ, ความสามารถในการละลาย, ค่าความเป็นกรด-ด่าง, รูปทรงของช่อง และความเร็วในการไหล ซึ่งแสดงให้เห็นว่าอัตราการไหลจะมีผลต่อค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวล และค่า C_g

ส่วนค่าอัตราฟลักซ์จะขึ้นกับค่า ΔPTM ดังสมการ

$$J = \frac{\Delta PTM}{(R_M + R_G)} \qquad (11)$$

เมื่อ R_M = ความต้านทานการกรองของเยื่อแผ่น (m^{-1})

R_G = ความต้านทานเนื่องจากการเกิดเจลโพลาไรเซชัน (m^{-1})

โดยค่า R_M มีค่าคงที่ ดังนั้นในช่วงการกรองที่ยังไม่มีการเกิดเจลโพลาไรเซชัน ค่าฟลักซ์ของการไหลผ่านเยื่อแผ่นจะมีค่าเพิ่มขึ้นเป็นเส้นตรงเมื่อเทียบกับค่า ΔPTM จนกระทั่ง

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อเพิ่มความดันต่อไปอีกจะเกิดชั้นเจลขึ้น ทำให้ค่าความต้านทานรวมมีค่าเพิ่มขึ้น ทำให้ค่าฟลักซ์ของการไหลผ่านเยื่อแผ่นมีอัตราการเพิ่มค่าลดลงเรื่อยจนกระทั่งมีค่าคงที่

จากสมการทั้งหมดที่กล่าวมาแล้วนั้น ค่าฟลักซ์ของสารละลายที่ไหลผ่านเยื่อแผ่นได้ขึ้นกับค่าพารามิเตอร์ 4 ค่าคือ

1. ความดัน (จากสมการที่ 8, 9 และ 11)

ค่าฟลักซ์ของสารละลายที่ไหลผ่านเยื่อแผ่น จะแปรผันตรงกับความดันในระบบ และเมื่อเพิ่มความดันจนถึงค่าค่าหนึ่งจะเกิดชั้นฟิล์มบนผิวเยื่อแผ่น ทำให้ความหนาและความต้านทานรวมของการกรองเพิ่มขึ้น เป็นผลให้อัตราการเพิ่มของค่าฟลักซ์ของการไหลผ่านลดลงจนกระทั่งมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับความดันอีกต่อไป

2. ความเร็วในกระแสเวียนกลับ (จากสมการที่ 7, 9 และ 10)

ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลจะเพิ่มขึ้นโดยแปรผันตรงกับความเร็วในกระแสเวียนกลับ (ดังสมการที่ 7) ยิ่งไปกว่านั้นการเพิ่มความเร็วในกระแสเวียนกลับจะเป็นการเพิ่มค่าแรงเฉือนที่บริเวณผิวหน้าของเยื่อแผ่นจึงทำให้ค่าความหนาและความต้านทานของชั้นเจลลดลง แต่ค่าเฉลี่ยของความดันขับเยื่อแผ่นจะลดลง เมื่อค่าความเร็วในกระแสเวียนกลับซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้น

3. อุณหภูมิ

ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลจะเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น ดังนั้นค่าฟลักซ์ของสารละลายที่สามารถผ่านเยื่อแผ่นได้จึงแปรผันตรงกับอุณหภูมิ

4. ความเข้มข้นของสารละลาย (จากสมการที่ 4)

ค่าฟลักซ์ของสารละลายที่ไหลผ่านเยื่อแผ่นลดลง เมื่อความเข้มข้นของสารละลายเพิ่มขึ้น

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.3 <u>ความสามารถในการกักเก็บของเยื่อแผ่น</u> (Rejection)

ประสิทธิภาพในการกักเก็บของเยื่อแผ่น สามารถแสดงได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$\sigma = 1 - \frac{C_p}{C_b} \qquad (12)$$

เมื่อ σ = สัมประสิทธิ์ของการกักเก็บของเยื่อแผ่น

C_p = ความเข้มข้นของอนุภาคแขวนลอยในเพอมิเอต (g/l)

C_b = ความเข้มข้นของอนุภาคแขวนลอยในสารละลายป้อน (g/l)

เยื่อแผ่นที่เตรียมได้ถ้ามีความสามารถในการกักเก็บอย่างสมบูรณ์ (C_p=0) ค่า σ จะมีค่าเท่ากับ 1

3.4 <u>การหมักแบบต่อเนื่องที่มีการเวียนเซลล์กลับ</u>

กำหนดให้

F = อัตราการไหลเข้าและออกของสารละลายอาหาร (l/hr)

X_o,X = ความเข้มข้นของชีวมวลในสารละลายอาหารที่เข้า และออกจากถังหมักตามลำดับ (g/l)

S_o,S = ความเข้มข้นของสารละลายอาหารที่เข้า และออกจากถังหมักตามลำดับ (g/l)

P_o,P = ความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ในสารละลายอาหารที่เข้า และออกจากถังหมักตามลำดับ (g/l)

V = ปริมาตรของของเหลวในถังหมัก (l)

μ = อัตราการเจริญเติบโตจำเพาะของเซลล์ (hr^{-1})

D = อัตราการป้อนสารอาหารต่อปริมาตรถังหมัก (hr^{-1})

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ν = อัตราการสร้างผลิตภัณฑ์จำเพาะ (hr^{-1})

γ = อัตราการตายจำเพาะ (hr^{-1})

$Y_{X/S}$ = ผลได้ของเซลล์จากสารอาหาร (g/g)

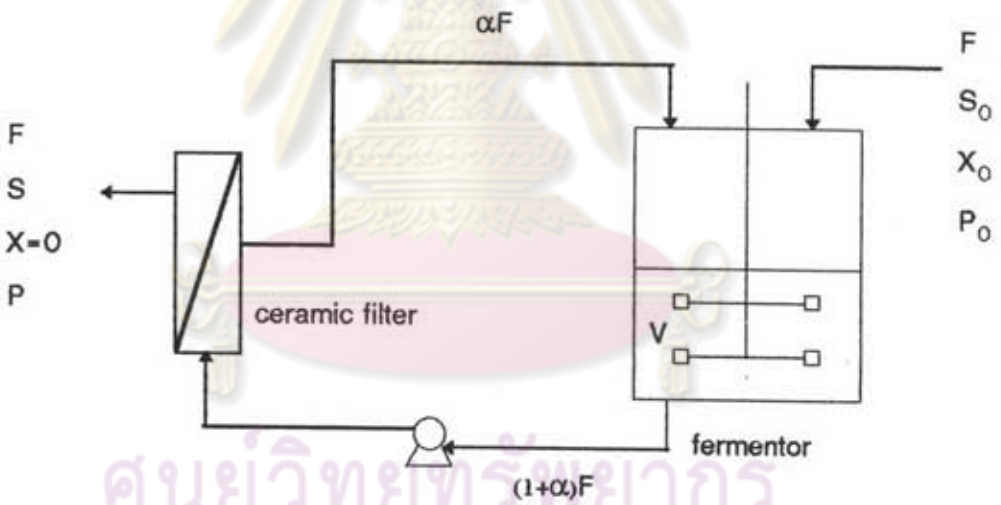
$Y_{P/S}$ = ผลได้ของผลิตภัณฑ์จากสารอาหาร (g/g)

K = อัตราการสลายตัวของผลิตภัณฑ์ (hr^{-1})

m = อัตราการใช้สารอาหารเพื่อการยังชีพ (hr^{-1})

ให้ อัตราการไหลของน้ำหมักออกจากถังหมักเท่ากับ $(1+\alpha)F$ และ

อัตราการไหลของน้ำหมักออกจากตัวกรองเข้าสู่ถังหมักเท่ากับ αF (ดังรูปที่ 3.6)



รูปที่ 3.6 การหมักแบบต่อเนื่องที่มีการเวียนเซลล์กลับ

- ในกรณีที่ผลิตภัณฑ์ที่สร้างถูกปล่อยออกมานอกเซลล์ (Extracellular product)

สมการสมดุลมวลเชิงชีวมวลรอบถังหมัก (biomass)

อัตราการสะสม = อัตราการเจริญ + อัตราการเข้า + อัตราการเวียน - อัตราการออก - อัตราการตาย
ของเซลล์ เติบโตของเซลล์ ของเซลล์ เซลล์กลับ ของเซลล์ ของเซลล์

$$dX/dt = \mu X + (F/V)X_0 + \alpha(F/V)cX - (1+\alpha)(F/V)X - \gamma X \quad (13)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สมการสมดุลมวลเชิงผลิตภัณฑ์ (product)

อัตราการสะสม = อัตราการสร้าง+อัตราการเข้า+อัตราการเวียน-อัตราการออก-อัตราการสลายตัว
ของผลิตภัณฑ์ ผลิตภัณฑ์ ของผลิตภัณฑ์ ผลิตภัณฑ์กลับ ของผลิตภัณฑ์ ของผลิตภัณฑ์

$$dP/dt = \nu X + (F/V)P_0 + \alpha(F/V)P - (1+\alpha)(F/V)P - KP \qquad (14)$$

สมการสมดุลมวลเชิงสารอาหาร (nutrient)

อัตราการสะสม = อัตราการใช้ + อัตราการเข้า + อัตราการเวียน - อัตราการออก
ของสารอาหาร สารอาหาร ของสารอาหาร กลับของ ของสารอาหาร
เพื่อการเจริญ สารอาหาร
- อัตราการใช้สาร - อัตราการใช้สารอาหาร
อาหารเพื่อยังชีพ เพื่อผลิตผลิตภัณฑ์

$$dS/dt = -\mu X/Y_{X/S} + (F/V)S_0 + \alpha(F/V)S - (1+\alpha)(F/V)S - mX - \nu X/Y_{p/s} \qquad (15)$$

จากสมมุติฐาน

1. เซลล์อยู่ในระยะเจริญทวีคูณ

$$\mu >>> \gamma \qquad (16)$$

2. การใช้สารอาหารเพื่อการเจริญเติบโตมากกว่าการยังชีพ และไม่มีการสร้างผลิตภัณฑ์

$$mX <<< \mu X/Y_{X/S} \qquad (17)$$

$$\nu X/Y_{p/s} = 0$$

3. ในระยะการสร้างผลิตภัณฑ์ มีการสร้างผลิตภัณฑ์มากกว่าการสลายตัวของผลิตภัณฑ์

$$\nu >>> K \qquad (18)$$

จากสมการที่ 13, 14 และ 15 และจากสมมุติฐานสมการที่ 16, 17 และ 18

และกำหนดให้ D= F/V จะได้

$$dX/dt = (\mu+\alpha cD-(1+\alpha)D)X \qquad (19)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$dP/dt = \nu X - DP \quad (20)$$

$$dS/dt = D(S_0 - S) - \mu X/Y_{X/S} \quad (21)$$

ที่ภาวะคงที่ (steady state)

$$\mu = (1+\alpha-\alpha c)D \quad (22)$$

$$\nu = DP/X \quad (23)$$

$$Y_{X/S} = \mu X/D(S_0 - S) \quad (24)$$

- ในกรณีที่ผลิตภัณฑ์ที่สร้างถูกเก็บไว้ภายในเซลล์ (Intracellular product)

สมการสมดุลมวลเชิงชีวมวลรอบถังหมัก (biomass)

อัตราการสะสม = อัตราการเจริญ+อัตราการเข้า+อัตราการเวียน-อัตราการออก-อัตราการตาย
ของเซลล์ เติบโตของเซลล์ ของเซลล์ เซลล์กลับ ของเซลล์ ของเซลล์

$$dX/dt = \mu X + (F/V)X_0 + \alpha(F/V)cX - (1+\alpha)(F/V)X - \gamma X \quad (25)$$

สมการสมดุลมวลเชิงผลิตภัณฑ์ (product)

อัตราการสะสม = อัตราการสร้าง+อัตราการเข้า+อัตราการเวียน-อัตราการออก-อัตราการสลายตัว
ของผลิตภัณฑ์ ผลิตภัณฑ์ ของผลิตภัณฑ์ ผลิตภัณฑ์กลับ ของผลิตภัณฑ์ ของผลิตภัณฑ์

$$dP/dt = \nu X + (F/V)P_0 + \alpha(F/V)cP - (1+\alpha)(F/V)P - KP \quad (26)$$

สมการสมดุลมวลเชิงสารอาหาร (nutrient)

อัตราการสะสม = อัตราการใช้ + อัตราการเข้า + อัตราการเวียน - อัตราการออก
ของสารอาหาร สารอาหาร ของสารอาหาร กลับของ ของสารอาหาร
เพื่อการเจริญ สารอาหาร
- อัตราการใช้สาร - อัตราการใช้สารอาหาร
อาหารเพื่อยังชีพ เพื่อผลิตผลิตภัณฑ์

$$dS/dt = -\mu X/Y_{X/S} + (F/V)S_0 + \alpha(F/V)S - (1+\alpha)(F/V)S - mX - \nu X/Y_{p/s} \quad (27)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากสมการที่ 25, 26 และ 27 และจากสมมุติฐานสมการที่ 16, 17 และ 18 จะได้

$$dX/dt = (\mu+\alpha cD-(1+\alpha)D)X \quad (28)$$

$$dP/dt = \nu X+(\alpha c-(1+\alpha))DP \quad (29)$$

$$dS/dt = D(S_0-S)- \mu X/Y_{X/S} \quad (30)$$

ที่ภาวะคงที่ (steady state)

$$\mu = (1+\alpha-\alpha c)D \quad (31)$$

$$\nu = (1+\alpha-\alpha c)DP/X \quad (32)$$

$$Y_{X/S} = \mu X/D(S_0-S) \quad (33)$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย