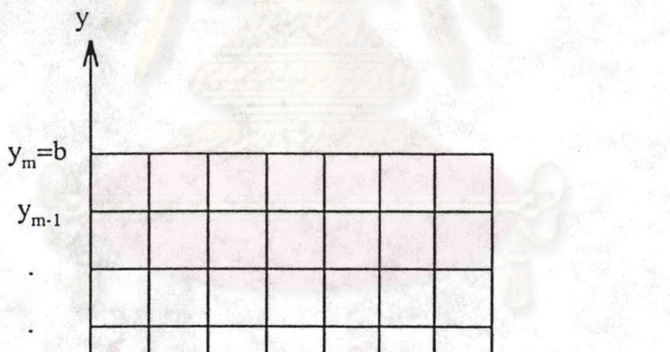
บทที่ 4

รูปแบบการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ในการคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิและความเร็วของอากาศในโครงการวิทยานิพนธ์นี้ ได้นำวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์มาช่วยในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์และเป็นการแก้ปัญหาโดยการแบ่งห้องที่ใช้เป็นแบบจำลองออกเป็นส่วนๆและใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขช่วยในการแก้สมการเพื่อหาค่าคำตอบ

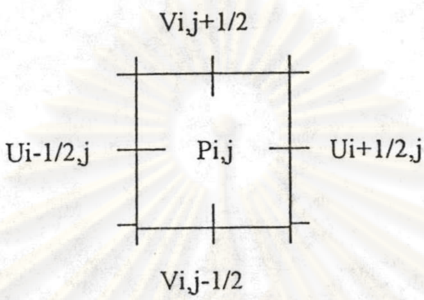
รูปแบบการกำหนดตำแหน่งต่างๆ โดยไฟไนท์ดิฟเฟอเรนซ์ในระบบ 2 มิติ ในแนวกว้างและยาวของห้องดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.1 โดยให้มีขอบเขตจุดพิกัด (0,0), (a,0), (a,b), (0,b) โดย a>0,b>0 โดยแบ่งเป็นส่วนเท่าๆ กัน ในแนว x แบ่งออกเป็น n ส่วนและในแนว y แบ่งออกเป็น m ส่วน



รูปที่ 4.1

ดังนั้นขนาดของแต่ละส่วนย่อยจะมีขนาดในแนวแกน x คือ $\Delta x=a/n$ และในแนวแกนy คือ $\Delta y= b/m$ ดังนั้นพื้นที่ภายในขอบเขตจะมีจำนวนเซลทั้งหมดเท่ากับ n*m เซลโดยแต่

ละเซลจะมีพื้นที่ขนาดกว้างΔxและสูงΔy กำหนดให้ตำแหน่งตรงกลางเซลเป็น (i , j) โดย $i=1,2,..,n$ และ $j=1,2,..m$ ตำแหน่งของตัวแปร u,v และp ซึ่งแทนค่าของความเร็วในแนว x,y และความดันของแต่ละเซล โดยลักษณะอยู่ในตำแหน่งดังแสดงอยู่ในรูปที่ 4.2 โดย u อยู่ตำแหน่งตรงกลางในด้านแนวตั้งของแต่ละเซล v อยู่ในตำแหน่งตรงกลางแนวนอนของแต่ละเซล และ p อยู่ตำแหน่งตรงกลางเซล



รูปที่ 4.2

จากรูปแบบและวิธีการของไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์ดังที่แสดงไว้ในบทที่ 3 และการกำหนดรูปแบบตำแหน่งต่างๆดังข้างต้น เมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับสมการในการพิจารณาหาค่าของความเร็วและอุณหภูมิที่แสดงไว้ในบทที่2 จะสามารถจัดรูปแบบของสมการหลักในรูปของสมการไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์โดยจะมีรูปแบบของสมการดังต่อไปนี้

4.1 <u>รูปแบบไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์ของสมการโมเมนตัม</u>

ในการคำนวณหาความเร็วได้นำสมการโมเมนตัมมาใช้โดยแทนสมการโมเมนตัมให้อยู่ในรูปของไฟไนท์ดิฟเฟอเรนซ์ เนื่องจากสมการขึ้นอยู่กับเวลาดังนั้นจึงนำวิธีการในรูปแบบ Explicit Centered Finite Difference มาแทนในสมการ

จากสมการโมเมนตัมดังแสดงไว้ในบทที่ 2

ในแนวแกน x
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u\partial u}{\partial x}+\frac{v\partial u}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial x}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.16a}$$

ในแนวแกน y
$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u\partial v}{\partial x}+\frac{v\partial v}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2.16b}$$

จากสมการสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบ Explicit Centered Finite Difference ได้ดังนี้

ในแนวแกน x

$$\frac{u^{k+1}_{i+1/2,j}-u^{k+1}_{i+1/2,j}}{\Delta t}+\frac{u^{k}_{i+1/2,j}\left(u^{k}_{i+3/2,j}-u^{k}_{i-1/2,j}\right)}{2\Delta x}+\frac{\overline{v}^{k+1}_{i+1/2,j}\left(u^{k}_{i+1/2,j+1}-u^{k}_{i+1/2,j-1}\right)}{2\Delta y}=\frac{\left(p^{k}_{i+1,j}-p^{k}_{i,j}\right)}{\Delta x}$$
$$+\upsilon\left[\left(\frac{u^{k}_{i+3/2,j}-2u^{k}_{i+1/2,j}+u^{k}_{i-1/2,j}}{\Delta x^2}+\frac{u^{k}_{i+1/2,j+1}-2u^{k}_{i+1/2,j}+u^{k}_{i+1/2,j-1}}{\Delta y^2}\right)\right] \quad (4.1)$$

โดยที่ k เป็นดรรชนีบอกจำนวณครั้งในการคำนวณของเวลาที่ $t_k = k\Delta t$

ในแนวแกน y

$$\frac{v^{k+1}_{i,j+1/2}-v^{k}_{i,j+1/2}}{\Delta t}+\frac{\overline{u}^{k}_{i,j+1/2}\left(v^{k}_{i+1,j+1/2}-v^{k}_{i-1,j+1/2}\right)}{2\Delta x}+\frac{v^{k}_{i,j+1/2}\left(v^{k}_{i,j+3/2}-v^{k}_{i,j-1/2}\right)}{2\Delta y}=\frac{\left(p^{k}_{i,j+1}-p^{k}_{i,j}\right)}{\Delta x}$$
$$+\upsilon\left[\left(\frac{v^{k}_{i-1,j-1/2}-2v^{k}_{i,j+1/2}+v^{k}_{i-1,j+1/2}}{\Delta x^2}+\frac{v^{k}_{i,j-3/2}-2v^{k}_{i,j-1/2}+v^{k}_{i,j-1/2}}{\Delta y^2}\right)\right] \quad (4.2)$$

จากสมการ (4.1) สามารถจัดรูปสมการได้

$$u^{k+1}_{i+1/2,j}=F\,u^{k}_{i+1/2,j}-\Delta t\left(\frac{p^{k}_{i+1,j}-p^{k}_{i,j}}{\Delta x}\right) \quad (4.3)$$

โดย

$$F\,u^{k}_{i+1/2,j}=u^{k}_{i+1/2,j}-\Delta t\left[\frac{u^{k}_{i+1/2,j}\left(u^{k}_{i+3/2,j}-u^{k}_{i-1/2,j}\right)}{2\Delta x}+\frac{\overline{v}^{k}_{i+1/2,j}\left(u^{k}_{i+1/2,j+1}-u^{k}_{i+1/2,j-1}\right)}{2\Delta y}\right]$$
$$+\upsilon\Delta t\left[\left(\frac{u^{k}_{i+3/2,j}-2u^{k}_{i+1/2,j}+u^{k}_{i-1/2,j}}{\Delta x^2}+\frac{u^{k}_{i+1/2,j+1}-2u^{k}_{i+1/2,j}+u^{k}_{i+1/2,j-1}}{\Delta y^2}\right)\right]$$

และ $\overline{v}^{k}_{i+1/2,j}=\dfrac{v^{k}_{i,j+1/2}+v^{k}_{i+1,j+1/2}+v^{k}_{i,j-1/2}+v^{k}_{i+1,j-1/2}}{4}$

และสมการ (4.2) สามารถจัดรูปสมการได้

$$v^{k+1}_{i,j+1/2}=G\,v^{k}_{i,j+1/2}-\Delta t\left(\frac{p^{k}_{i,j+1}-p^{k}_{i,j}}{\Delta y}\right) \quad (4.4)$$

โดย

$$G v^k_{i,j+1/2} = v^k_{i,j+1/2} - \Delta t \left[\frac{\overline{u}^k_{i,j+1/2}\left(v^k_{i+1,j+1/2} - v^k_{i-1,j+1/2}\right)}{2\Delta x} + \frac{v^k_{i,j+1/2}\left(v^k_{i,j+3/2} - v^k_{i,j-1/2}\right)}{2\Delta y} \right]$$

$$+ \upsilon \Delta t \left[\left(\frac{v^k_{i+1,j+1/2} - 2 v^k_{i,j+1/2} + v^k_{i-1,j-1.2}}{\Delta x^2} + \frac{v^k_{i,j+3/2} - 2 v^k_{i,j+1/2} + v^k_{i,j-1/2}}{\Delta y^2} \right) \right]$$

และ $$\overline{u}^k_{i,j+1/2} = \frac{u^k_{i-1/2,j} + u^k_{i+1/2,j} + u^k_{i+1/2,j+1} + u^k_{i-1/2,j+1}}{4}$$

จากสมการ (4.3) และ(4.4) ยังไม่สามารถหาค่าความเร็วได้เพราะค่าของ $p^k_{i,j}$ ยังไม่ทราบค่า ดังนั้นเพื่อที่จะหาค่า $p^k_{i,j}$ ซึ่งต้องการค่าความเร็วที่เหมาะสมในแต่ละเซล ดังนั้นจึงนำสมการความต่อเนื่องมาช่วยในการคำนวณ

จากสมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2.5)$$

จากสมการความต่อเนื่องสามารถเขียนอยู่ในรูปไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์ได้ดังนี้

$$\left(\frac{u^{k+1}_{i+1/2,j} - u^{k+1}_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{v^{k-1}_{i,j-1/2} - v^{k-1}_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right) = 0 \qquad (4.5)$$

พิจารณาโหนดที่อยู่ภายใน ซึ่งไม่มีด้านไหนของโหนดติดกับบริเวณขอบเขตจากสมการ (4.3) จะได้

$$u^{k+1}_{i+1/2,j} = F u^k_{i+1/2,j} - \Delta t \left(\frac{p^k_{i+1,j} - p^k_{i,j}}{\Delta x} \right) \qquad (4.6)$$

$$u^{k+1}_{i-1/2,j} = F u^k_{i-1/2,j} - \Delta t \left(\frac{p^k_{i,j} - p^k_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \qquad (4.7)$$

จากสมการ (4.4) จะได้

$$v^{k+1}_{i,j+1/2} = G v^k_{i,j+1/2} - \Delta t \left(\frac{p^k_{i,j+1} - p^k_{i,j}}{\Delta y} \right) \qquad (4.8)$$

$$v^{k+1}_{i,j-1/2} = G v^k_{i,j-1/2} - \Delta t \left(\frac{p^k_{i,j} - p^k_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \qquad (4.9)$$

แทนค่าสมการ (4.6)-(4.9) ในสมการ (4.5) จะได้

$$\Delta t\left(\frac{p^k_{i+1,j}-2p^k_{i,j}+p^k_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right)+\left(\frac{p^k_{i,j+1}-2p^k_{i,j}+p^k_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right)=\left(\frac{Fu^k_{i+1/2,j}-Fu^k_{i-1/2,j}}{\Delta x}\right)+\left(\frac{Gv^k_{i,j+1/2}-Gv^k_{i,j-1/2}}{\Delta y}\right) \quad (4.10)$$

i = 2,3,...n-1 , j =2,3,...m-1

สำหรับเซลที่อยู่ติดขอบเขตด้านล่างแต่ไม่ใช่ตรงมุมแทนสมการ (4.6) ,(4.7) และ (4.8) ในสมการ (4.5)

$$\Delta t\left(\frac{p^k_{i+1,j}-2p^k_{i,j}+p^k_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right)+\left(\frac{p^k_{i,2}-p^k_{i,1}}{\Delta y^2}\right)=\left(\frac{Fu^k_{i+1/2,1}-Fu^k_{i-1/2,1}}{\Delta x}\right)+\left(\frac{Gv^k_{i,3/2}-v^k_{i,1/2}}{\Delta y}\right) \quad (4.11)$$

i=2,3,...n-1

สำหรับเซลที่อยู่ติดด้านบนของขอบเขตที่ไม่ใช่มุมแทนสมการ (4.6) , (4.7) และ (4.8) ในสมการ (4.5)

$$\Delta t\left(\frac{p^k_{i+1,m}-2p^k_{i,m}+p^k_{i-1,m}}{\Delta x^2}\right)+\left(\frac{p^k_{i,m-1}-2p^k_{i,m}}{\Delta y^2}\right)=\left(\frac{Fu^k_{i+1/2,m}-Fu^k_{i-1/2,m}}{\Delta x}\right)+\left(\frac{v^k_{i,m+1/2}-Gv^k_{i,m-1/2}}{\Delta y}\right) \quad (4.12)$$

i=2,3,...n-1

ในลักษณะเดียวกันที่ตำแหน่งติดด้านซ้ายและด้านขวาของเซลที่ไม่ใช่มุม

$$\Delta t\left(\frac{p^k_{2,j}-p^k_{1,j}}{\Delta x^2}\right)+\left(\frac{p^k_{1,j+1}-2p^k_{1,j}+p^k_{1,j-1}}{\Delta y^2}\right)=\left(\frac{Fu^k_{3/2,j}-u^k_{1/2,j}}{\Delta x}\right)+\left(\frac{Gv^k_{1,j+1/2}-Gv^k_{1,j-1/2}}{\Delta y}\right) \quad (4.13)$$

j=2,3,...m-1

$$\Delta t\left(\frac{p^k_{n-1,j}-p^k_{n,j}}{\Delta x^2}\right)+\left(\frac{p^k_{n,j+1}-2p^k_{n,j}+p^k_{n,j-1}}{\Delta y^2}\right)=\left(\frac{u^k_{n+1/2,j}-Fu^k_{n-1/2,j}}{\Delta x}\right)+\left(\frac{Gv^k_{n,j+1/2}-Gv^k_{n,j-1/2}}{\Delta y}\right) \quad (4.14)$$

j=2,3,...m-1

ในตำแหน่งมุมทั้งสี่

$$\Delta t\left(\frac{p^k_{2,1}-p^k_{1,1}}{\Delta x^2}\right)+\left(\frac{p^k_{1,2}-p^k_{1,1}}{\Delta y^2}\right)=\left(\frac{Fu^k_{3/2,1}-u^k_{1/2,1}}{\Delta x}\right)+\left(\frac{Gv^k_{1,3/2}-v^k_{1,1/2}}{\Delta y}\right) \quad (4.15)$$

$$\Delta t\left(\frac{p^k_{2,m}-p^k_{1,m}}{\Delta x^2}\right)+\left(\frac{p^k_{1,m-1}-p^k_{1,m}}{\Delta y^2}\right) = \left(\frac{F u^k_{3/2,m}-u^k_{1/2,m}}{\Delta x}\right)+\left(\frac{v^k_{1,m+1/2}-G v^k_{1,m-1/2}}{\Delta y}\right) \qquad (4.16)$$

$$\Delta t\left(\frac{p^k_{n-1,1}-p^k_{n,1}}{\Delta x^2}\right)+\left(\frac{p^k_{n,2}-p^k_{n,1}}{\Delta y^2}\right) = \left(\frac{u^k_{n+1/2,1}-F u^k_{n-1/2,1}}{\Delta x}\right)+\left(\frac{G v^k_{n,3/2}-v^k_{n,1/2}}{\Delta y}\right) \qquad (4.17)$$

$$\Delta t\left(\frac{p^k_{n-1,m}-p^k_{n,m}}{\Delta x^2}\right)+\left(\frac{p^k_{n,m-1}-p^k_{n,m}}{\Delta y^2}\right) = \left(\frac{u^k_{n+1/2,m}-F u^k_{n-1/2,m}}{\Delta x}\right)+\left(\frac{v^k_{n,m+1/2}-G v^k_{n,m-1/2}}{\Delta y}\right) \qquad (4.18)$$

จากสมการข้างต้นนี้จะนำมาแก้เพื่อหาค่า u , v และp ในแต่ละเซล โดยใช้หลักวิธีของนิวตัน (Generalized Newton's Method) สำหรับเซลภายใน จากสมการ(4.10) เมื่อจัดอยู่ในรูปแบบนิวตันของ $p^k_{i,j}$จะได้

$$\left(p^k_{i,j}\right)^{r-1}=\left(p^k_{i,j}\right)^{r}-\frac{\omega}{-2\left[\left(1/\Delta x^2\right)+\left(1/\Delta y^2\right)\right]}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\left(p^k_{i+1,j}\right)^r-2\left(p^k_{i,j}\right)^r+\left(p^k_{i-1,j}\right)^{r-1}}{\Delta x^2}\right)+\left(\dfrac{\left(p^k_{i,j+1}\right)^r-2\left(p^k_{i,j}\right)^r+\left(p^k_{i,j-1}\right)^{r+1}}{\Delta y^2}\right)\\ +\left(\dfrac{F u^k_{i+1/2,j}-F u^k_{i-1/2,j}}{\Delta x\Delta t}\right)+\left(\dfrac{G v^k_{i,j-1/2}-G v^k_{i,j-1/2}}{\Delta y\Delta t}\right)\end{array}\right]$$

โดยที่ r เป็นดรรชนีบอกจำนวนครั้งในการคำนวณ

หรือสามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\left(p^k_{i,j}\right)^{r+1}=\left(p^k_{i,j}\right)^{r}-\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^2\right)+\left(1/\Delta y^2\right)\right]}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(F u^k_{i+1/2,j}-\Delta t\dfrac{\left(p^k_{i+1,j}\right)^r-\left(p^k_{i,j}\right)^r}{\Delta x}\right)-\left(F u^k_{i-1/2,j}-\Delta t\dfrac{\left(p^k_{i,j}\right)^r-\left(p^k_{i-1,j}\right)^{r+1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\\ +\dfrac{\left(G v^k_{i,j+1/2}-\Delta t\dfrac{\left(p^k_{i,j+1}\right)^r-\left(p^k_{i,j}\right)^r}{\Delta y}\right)-\left(G v^k_{i,j-1/2}-\Delta t\dfrac{\left(p^k_{i,j}\right)^r-\left(p^k_{i,j-1}\right)^{r+1}}{\Delta y}\right)}{\Delta x}\end{array}\right] \qquad (4.19)$$

พิจารณาสมการ (4.6)-(4.9) เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณในสมการจัดรูปได้

$$\left(u^{k+1}_{i+1/2,j}\right)^r = F u^k_{i+1/2,j}-\Delta t\left(\frac{\left(p^k_{i+1,j}\right)^r-\left(p^k_{i,j}\right)^r}{\Delta x}\right) \qquad (4.20)$$

$$\left(u_{i-1/2,j}^{k+1}\right)^{r+1/2} = F u_{i-1/2,j}^{k} - \Delta t\left(\frac{\left(p_{i,j}^{k}\right)^{r} - \left(p_{i-1,j}^{k}\right)^{r+1}}{\Delta x}\right) \tag{4.21}$$

$$\left(v_{i,j+1/2}^{k+1}\right)^{r} = G v_{i,j+1/2}^{k} - \Delta t\left(\frac{\left(p_{i,j+1}^{k}\right)^{r} - \left(p_{i,j}^{k}\right)^{r}}{\Delta y}\right) \tag{4.22}$$

$$\left(v_{i,j-1/2}^{k+1}\right)^{r+1/2} = G v_{i,j-1/2}^{k} - \Delta t\left(\frac{\left(p_{i,j}^{k}\right)^{r} - \left(p_{i,j-1}^{k}\right)^{r+1}}{\Delta y}\right) \tag{4.23}$$

แทนสมการ (4.20)-(4.23) ใน $p^{k}_{i,j}$ เมื่อจัดรูปแล้วจะได้

$$\left(p_{i,j}^{k}\right)^{r+1} = \left(p_{i,j}^{k}\right)^{r} - \frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^{2}\right)+\left(1/\Delta y^{2}\right)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right]$$

โดยที่

$$Fu^{k+1} = \left[\frac{\left(u_{i+1/2,j}^{k+1}\right)^{r} - \left(u_{i-1/2,j}^{k+1}\right)^{r+1/2}}{\Delta x}\right]$$

$$Gv^{k+1} = \left[\frac{\left(v_{i,j+1/2}^{k+1}\right)^{r} - \left(v_{i,j-1/2}^{k+1}\right)^{r+1/2}}{\Delta y}\right]$$

หรือ

$$\left(p_{i,j}^{k}\right)^{r+1} = \left(p_{i,j}^{k}\right)^{r} - \left(\delta p_{i,j}^{k}\right)^{r} \tag{4.24}$$

โดย

$$\left(\delta p_{i,j}^{k}\right)^{r} = -\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^{2}\right)+\left(1/\Delta y^{2}\right)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right] \tag{4.25}$$

จากสมการนี้จะทราบค่า$(p^{k}_{i,j})^{r+1}$,จากสมการ (4.20)-(4.23) จะนำมาคำนวณหาค่าใหม่ได้ด้วยดังสมการต่อไปนี้

$$\left(u_{i+1/2,j}^{k+1}\right)^{r+1/2} = F u_{i+1/2,j}^{k} - \Delta t\left(\frac{\left(p_{i+1,j}^{k}\right)^{r} - \left(p_{i,j}^{k}\right)^{r+1}}{\Delta x}\right)$$

$$(u^{k+1}_{i-1/2,j})^{r+1} = F\,u^{k}_{i-1/2,j} - \Delta t\left(\frac{\left(p^{k}_{i,j}\right)^{r+1} - \left(p^{k}_{i-1,j}\right)^{r+1}}{\Delta x}\right)$$

$$\left(v^{k+1}_{i,j+1/2}\right)^{r+1/2} = G\,v^{k}_{i,j+1/2} - \Delta t\left(\frac{\left(p^{k}_{i,j+1}\right)^{r} - \left(p^{k}_{i,j}\right)^{r+1}}{\Delta y}\right)$$

$$\left(v^{k+1}_{i,j-1/2}\right)^{r+1} = G\,v^{k}_{i,j-1/2} - \Delta t\left(\frac{\left(p^{k}_{i,j}\right)^{r+1} - \left(p^{k}_{i,j-1}\right)^{r+1}}{\Delta y}\right)$$

เมื่อจัดรูปสมการนี้กับสมการ (4.20)-(4.23) จะได้

$$\left(u^{k+1}_{i+1/2,j}\right)^{r+1/2} = \left(u^{k+1}_{i+1/2,j}\right)^{r} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\delta p^{k}_{i,j}\right)^{r} \qquad (4.26)$$

$$\left(u^{k+1}_{i-1/2,j}\right)^{r+1} = \left(u^{k+1}_{i-1/2,j}\right)^{r+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\delta p^{k}_{i,j}\right)^{r} \qquad (4.27)$$

$$\left(v^{k+1}_{i,j+1/2}\right)^{r+1/2} = \left(v^{k+1}_{i,j+1/2}\right)^{r} + \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\delta p^{k}_{i,j}\right)^{r} \qquad (4.28)$$

$$\left(v^{k+1}_{i,j-1/2}\right)^{r+1} = \left(v^{k+1}_{i,j-1/2}\right)^{r+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\delta p^{k}_{i,j}\right)^{r} \qquad (4.29)$$

จากสมการ (4.24) และ (4.26)-(4.29) จะใช้คำนวณหา p^k, u^{k+1} และv^{k+1} โดยจะมีขั้นตอนในการคำนวณสามารถสรุปได้ดังนี้

a. ที่สภาวะเริ่มต้น เวลาเริ่มต้นการคำนวณที่เวลา $t_k=0$ เริ่มการคำนวณครั้งที่ k=0 กำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปร

b. กำหนดค่าสภาวะของขอบเขต

c. เริ่มการคำนวณครั้งที่ r=0 และหาค่าเริ่มต้นของความเร็วในการคำนวณซ้ำ (iterate) $(u^{k+1}_{i+1/2,j})^0$ และ $(u^{k+1}_{i-1/2,j})^0$ โดยใช้สมการ (4.6) และ (4.8)

d. คำนวณค่า $(\delta p^{k}_{i,j})^r$ ในแต่ละเซล (i,j), i=1,2,...,n,j=1,2,...m และคำนวณหาความดันและความเร็วในแต่ละเซลจากสมการ (4.26)-(4.29)

e. ทำการคำนวณซ้ำข้อ d ที่ r=1,2,...,จนค่าลู่เข้าตามค่าที่ต้องการเมื่อ

$$(\delta p^{k}_{i,j})^r < \text{error}$$

f. ทำการคำนวณที่เวลาต่อไป โดยการใช้ค่าที่ได้รอบแรกนี้เป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณโดยให้

$$(p^k_{i,j})^0=(p^k_{i,j})$$

g. ทำซ้ำข้อ b-f ที่ k=1,2,...,จนได้ค่าลู่เข้าตามค่าที่ต้องการ

สำหรับเซลที่อยู่บริเวณขอบเขตจะสามารถเขียนสมการในลักษณะเช่นเดียวกับเซลที่อยู่ภายในได้โดยมีค่าที่ขอบเขตคงที่ โดยทำการคำนวณเช่นเดียวกับเซลภายใน โดยจะมีรูปแบบของสมการดังนี้

สมการบริเวณด้านล่างติดกับขอบเขตจากสมการ(4.11)จัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\left(p^k_{i,1}\right)^{r+1}=\left(p^k_{i,1}\right)^r-\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^2\right)+\left(1/\Delta y^2\right)\right]}\left[Fu^{k+1}-Gv^{k+1}\right]$$

โดยที่

$$Fu^{k+1}=\left[\frac{(u^{k+1}_{i+1/2,1})^r-(u^{k+1}_{i-1/2,1})^{r+1/2}}{\Delta x}\right]$$

$$Gv^{k+1}=\left[\frac{(v^{k+1}_{i,3/2})^r-(v^{k+1}_{i,1/2})}{\Delta y}\right]$$

หรือ

$$\left(p^k_{i,1}\right)^{r+1}=\left(p^k_{i,1}\right)^r-\left(\delta p^k_{i,1}\right)^r \tag{4.30}$$

โดย

$$\left(\delta p^k_{i,1}\right)^r=-\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^2\right)+\left(1/\Delta y^2\right)\right]}\left[Fu^{k+1}-Gv^{k+1}\right] \tag{4.31}$$

ดังนั้นการคำนวณหาค่าที่บริเวณด้านล่างติดกับขอบเขตจะใช้สมการ (4.30) , (4.31) และสมการ (4.26)-(4.28)

สมการบริเวณด้านบนติดกับขอบเขตจากสมการ (4.12) จัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\left(p^k_{i,m}\right)^{r+1}=\left(p^k_{i,m}\right)^r-\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^2\right)+\left(1/\Delta y^2\right)\right]}\left[Fu^{k+1}-Gv^{k+1}\right]$$

โดยที่

$$Fu^{k+1}=\left[\frac{(u^{k+1}_{i+1/2,m})^r-(u^{k+1}_{i-1/2,m})^{r+1/2}}{\Delta x}\right]$$

$$Gv^{k+1}=\left[\frac{(v^{k+1}_{i,m+1/2})-(v^{k+1}_{i,m-1/2})^{r+1/2}}{\Delta y}\right]$$

หรือ

$$\left(p^{k}_{i,m}\right)^{r+1} = \left(p^{k}_{i,m}\right)^{r} - \left(\delta p^{k}_{i,m}\right)^{r} \tag{4.32}$$

โดย

$$\left(\delta p^{k}_{i,m}\right)^{r} = -\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^2\right)+\left(1/\Delta y^2\right)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right] \tag{4.33}$$

ดังนั้นการคำนวณหาค่าที่บริเวณด้านบนติดกับขอบเขตจะใช้สมการ (4.32) , (4.33) และสมการ (4.26),(4.27)และ (4.29)

สมการบริเวณด้านซ้ายติดกับขอบเขตจากสมการ (4.13) จัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\left(p^{k}_{1,j}\right)^{r+1} = \left(p^{k}_{1,j}\right)^{r} - \frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^2\right)+\left(1/\Delta y^2\right)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right]$$

โดยที่

$$Fu^{k+1} = \left[\frac{(u^{k+1}_{3/2,j})^{r} - (u^{k+1}_{1/2,j})}{\Delta x}\right]$$

$$Gv^{k+1} = \left[\frac{(v^{k+1}_{1,j+1/2})^{r} - (v^{k+1}_{1,j-1/2})^{r+1/2}}{\Delta y}\right]$$

หรือ

$$\left(p^{k}_{1,j}\right)^{r+1} = \left(p^{k}_{1,j}\right)^{r} - \left(\delta p^{k}_{1,j}\right)^{r} \tag{4.34}$$

โดย

$$\left(\delta p^{k}_{1,j}\right)^{r} = -\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^2\right)+\left(1/\Delta y^2\right)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right] \tag{4.35}$$

ดังนั้นการคำนวณหาค่าที่บริเวณด้านซ้ายติดกับขอบเขตจะใช้สมการ (4.34) , (4.35) และสมการ (4.27),(4.28)และ (4.29)

สมการบริเวณด้านขวาติดกับขอบเขตจากสมการ (4.14) จัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\left(p^{k}_{n,j}\right)^{r+1} = \left(p^{k}_{n,j}\right)^{r} - \frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^2\right)+\left(1/\Delta y^2\right)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right]$$

โดยที่

$$Fu^{k+1} = \left[\frac{(u^{k+1}_{n+1/2,j}) - (u^{k+1}_{n-1/2,j})^{r+1/2}}{\Delta x}\right]$$

$$Gv^{k+1} = \left[\frac{(v^{k+1}_{n,j+1/2})^{r} - (v^{k+1}_{n,j-1/2})^{r+1/2}}{\Delta y}\right]$$

หรือ

$$\left(p^{k}_{n,j}\right)^{r+1} = \left(p^{k}_{n,j}\right)^{r} - \left(\delta p^{k}_{n,j}\right)^{r} \tag{4.36}$$

โดย

$$\left(\delta p^{k}_{n,j}\right)^{r} = -\frac{\omega}{2\left[(1/\Delta x^2)+(1/\Delta y^2)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right] \tag{4.37}$$

ดังนั้นการคำนวณหาค่าที่บริเวณด้านขวาติดกับขอบเขตจะใช้สมการ (4.36) , (4.37) และสมการ (4.26),(4.28)และ (4.29)

สมการบริเวณมุมทั้งสี่ จากสมการ (4.15) ที่โหนด(1,1)จัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\left(p^{k}_{1,1}\right)^{r+1} = \left(p^{k}_{1,1}\right)^{r} - \frac{\omega}{2\left[(1/\Delta x^2)+(1/\Delta y^2)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right]$$

โดยที่

$$Fu^{k+1} = \left[\frac{(u^{k+1}_{3/2,1})^{r} - (u^{k+1}_{1/2,1})}{\Delta x}\right]$$

$$Gv^{k+1} = \left[\frac{(v^{k+1}_{1,3/2})^{r} - (v^{k+1}_{1,1/2})}{\Delta y}\right]$$

หรือ

$$\left(p^{k}_{1,1}\right)^{r+1} = \left(p^{k}_{1,1}\right)^{r} - \left(\delta p^{k}_{1,1}\right)^{r} \tag{4.38}$$

โดย

$$\left(\delta p^{k}_{11}\right)^{r} = -\frac{\omega}{2\left[(1/\Delta x^2)+(1/\Delta y^2)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right] \tag{4.39}$$

ดังนั้นการคำนวณหาค่าที่บริเวณโหนด (1,1) ใช้สมการ (4.38) , (4.39) และสมการ (4.26),(4.28)

สมการบริเวณมุมทั้งสี่ จากสมการ (4.16) ที่โหนด(1,m)จัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\left(p^{k}_{1,m}\right)^{r+1} = \left(p^{k}_{1,m}\right)^{r} - \frac{\omega}{2\left[(1/\Delta x^2)+(1/\Delta y^2)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right]$$

โดยที่

$$Fu^{k+1} = \left[\frac{(u^{k+1}_{3/2,m})^{r} - (u^{k+1}_{1/2,m})}{\Delta x}\right]$$

$$Gv^{k+1} = \left[\frac{(v^{k+1}_{1,m+1/2}) - (v^{k+1}_{1,m-1/2})^{r+1/2}}{\Delta y}\right]$$

หรือ

$$\left(p^{k}_{1,m}\right)^{r+1}=\left(p^{k}_{1,m}\right)^{r}-\left(\delta p^{k}_{1,m}\right)^{r} \tag{4.40}$$

โดย

$$\left(\delta p^{k}_{1,m}\right)^{r}=-\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^{2}\right)+\left(1/\Delta y^{2}\right)\right]}\left[Fu^{k+1}-Gv^{k+1}\right] \tag{4.41}$$

ดังนั้นการคำนวณหาค่าที่บริเวณโหนด (1,m) ใช้สมการ (4.40) , (4.41) และสมการ (4.26),(4.29)

สมการบริเวณมุม จากสมการ (4.17) ที่โหนด(n,1)จัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\left(p^{k}_{n,1}\right)^{r+1}=\left(p^{k}_{n,1}\right)^{r}-\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^{2}\right)+\left(1/\Delta y^{2}\right)\right]}\left[Fu^{k+1}-Gv^{k+1}\right]$$

โดยที่

$$Fu^{k+1}=\left[\frac{\left(u^{k+1}_{n+1/2,1}\right)-\left(u^{k+1}_{n-1/2,1}\right)^{r+1/2}}{\Delta x}\right]$$

$$Gv^{k+1}=\left[\frac{\left(v^{k+1}_{n,3/2}\right)^{r}-\left(v^{k+1}_{n,1/2}\right)}{\Delta y}\right]$$

หรือ

$$\left(p^{k}_{n,1}\right)^{r+1}=\left(p^{k}_{n,1}\right)^{r}-\left(\delta p^{k}_{n,1}\right)^{r} \tag{4.42}$$

โดย

$$\left(\delta p^{k}_{n,1}\right)^{r}=-\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^{2}\right)+\left(1/\Delta y^{2}\right)\right]}\left[Fu^{k+1}-Gv^{k+1}\right] \tag{4.43}$$

ดังนั้นการคำนวณหาค่าที่บริเวณโหนด (n,1) ใช้สมการ (4.42) , (4.43) และสมการ (4.27),(4.28)

สมการบริเวณมุม จากสมการ (4.18) ที่โหนด(n,m)จัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\left(p^{k}_{n,m}\right)^{r+1}=\left(p^{k}_{n,m}\right)^{r}-\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^{2}\right)+\left(1/\Delta y^{2}\right)\right]}\left[Fu^{k+1}-Gv^{k+1}\right]$$

โดยที่

$$Fu^{k+1}=\left[\frac{\left(u^{k+1}_{n+1/2,m}\right)-\left(u^{k+1}_{n-1/2,m}\right)^{r+1/2}}{\Delta x}\right]$$

$$Gv^{k+1}=\left[\frac{\left(v^{k+1}_{n,m+1/2}\right)-\left(v^{k+1}_{n,m-1/2}\right)^{r+1/2}}{\Delta y}\right]$$

หรือ

$$\left(p^{k}_{n,m}\right)^{r+1} = \left(p^{k}_{n,m}\right)^{r} - \left(\delta p^{k}_{n,1}\right)^{r} \tag{4.44}$$

โดย

$$\left(\delta p^{k}_{nm}\right)^{r} = -\frac{\omega}{2\left[\left(1/\Delta x^{2}\right)+\left(1/\Delta y^{2}\right)\right]}\left[Fu^{k+1} - Gv^{k+1}\right] \tag{4.45}$$

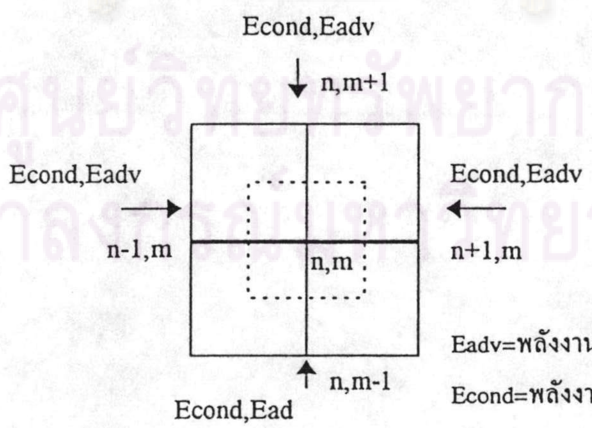
ดังนั้นการคำนวณหาค่าที่บริเวณโหนด (n,m) ใช้สมการ (4.44) , (4.45) และสมการ (4.27),(4.29) สำหรับขั้นตอนการคำนวณทำการคำนวณเช่นเดียวกับที่โหนดภายในดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

4.2 <u>รูปแบบไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์ของสมการพลังงาน</u>

เนื่องจากการคำนวณหาค่าของอุณหภูมิได้พิจารณาที่สภาวะคงที่ ดังนั้นจึงไม่มีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องในการคำนวณและพิจารณาความร้อนที่ผ่านเข้ามาภายในขอบเขตด้วย ดังนั้นในการจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปแบบไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์จะพิจารณาโดยวิธีสมดุลย์พลังงานกับวิธีของไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์

ในการพิจารณาสมการจะแบ่งสมการออกเป็น สมการที่ใช้กับภายใน สมการที่ใช้กับบริเวณขอบเขตที่ไม่ใช่ตรงมุม และสมการที่ใช้บริเวณมุม

4.2.1 <u>สมการที่ใช้กับจุดภายใน</u>



Eadv=พลังงานความร้อนและพลังงานจลน์
Econd=พลังงานจากการนำความร้อน

พิจารณาจากปริมาตรควบคุม เนื่องจากจุด n,m อยู่ภายใน ดังนั้นจะสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$E_{(n-1,m)\to(n,m)} = k(\Delta y\Delta z)\frac{(T_{n-1,m} - T_{n,m})}{\Delta x} - \rho c_p u_{n,m}\Delta y\Delta z(T_{n-1,m} - T_{n,m})$$

$$E_{(n+1,m)\to(n,m)} = k(\Delta y\Delta z)\frac{(T_{n+1,m} - T_{n,m})}{\Delta x} - \rho c_p u_{n,m}\Delta y\Delta z(T_{n+1,m} - T_{n,m})$$

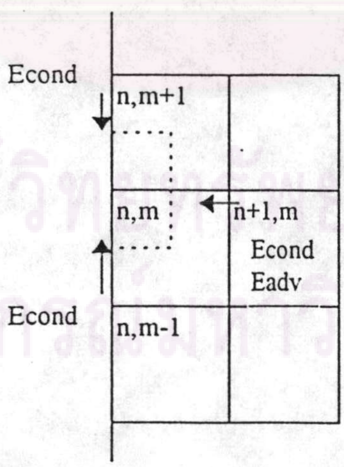
$$E_{(n,m+1)\to(n,m)} = k(\Delta x\Delta z)\frac{(T_{n,m+1} - T_{n,m})}{\Delta y} - \rho c_p v_{n,m}\Delta x\Delta z(T_{n,m+1} - T_{n,m})$$

$$E_{(n,m-1)\to(n,m)} = k(\Delta x\Delta z)\frac{(T_{n,m-1} - T_{n,m})}{\Delta y} - \rho c_p v_{n,m}\Delta x\Delta z(T_{n,m-1} - T_{n,m})$$

ดังนั้นจะได้สมการเป็น

$$(k\frac{\Delta y}{\Delta x} - \rho c_p u_{n,m}\Delta y)T_{n+1,m} + (k\frac{\Delta y}{\Delta x} - \rho c_p u_{n,m}\Delta y)T_{n-1,m} + (k\frac{\Delta x}{\Delta y} - \rho c_p v_{n,m}\Delta x)T_{n,m+1} + (k\frac{\Delta x}{\Delta y} - \rho c_p v_{n,m}\Delta x)T_{n,m-1} +$$
$$(-2k\frac{\Delta y}{\Delta x} - 2k\frac{\Delta x}{\Delta y} + 2\rho c_p u_{n,m}\Delta y + 2\rho c_p v_{n,m}\Delta x)T_{n,m} + q'''\Delta x\Delta y = 0 \qquad (4.46)$$

4.2.2 <u>สมการที่ใช้กับบริเวณขอบเขตที่ไม่ใช่มุม</u>



พิจารณาจากรูปจะสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$E_{(n+1,m)\to(n,m)} = k(\Delta y\Delta z)\frac{(T_{n+1,m} - T_{n,m})}{\Delta x} - \rho c_p u_{n,m}\Delta y\Delta z(T_{n+1,m} - T_{n,m})$$

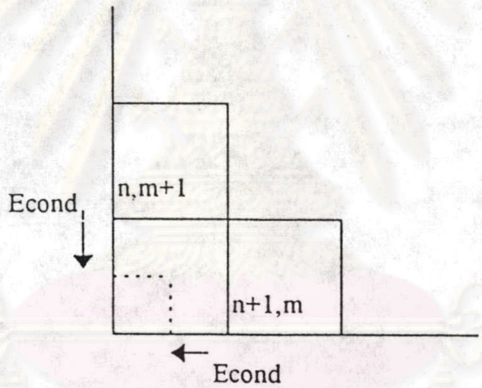
$$E_{(n,m+1)\rightarrow(n,m)} = k(\Delta x \Delta z)\frac{(T_{n,m+1} - T_{n,m})}{\Delta y}$$

$$E_{(n,m-1)\rightarrow(n,m)} = k(\Delta x \Delta z)\frac{(T_{n,m-1} - T_{n,m})}{\Delta y}$$

ดังนั้นจะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned}(k\frac{\Delta y}{\Delta x} - \rho c_p u_{n,m}\Delta y)T_{n+1,m} + (k\frac{\Delta x}{\Delta y})T_{n,m+1} + (k\frac{\Delta x}{\Delta y})T_{n,m-1} + \\ (-k\frac{\Delta y}{\Delta x} - 2k\frac{\Delta x}{\Delta y} + \rho c_p u_{n,m}\Delta y)T_{n,m} + q'''\Delta x \Delta y = 0 \qquad (4.47)\end{aligned}$$

4.2.3 สมการที่ใช้บริเวณมุม



พิจารณาจากรูปจะสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$E_{(n+1,m)\rightarrow(n,m)} = k(\Delta y \Delta z)\frac{(T_{n+1,m} - T_{n,m})}{\Delta x}$$

$$E_{(n,m+1)\rightarrow(n,m)} = k(\Delta x \Delta z)\frac{\left(T_{n,m+1} - T_{n,m}\right)}{\Delta y}$$

ดังนั้นจะได้สมการเป็น

$$(k\frac{\Delta y}{\Delta x})T_{n+1,m} + (k\frac{\Delta x}{\Delta y})T_{n,m+1} + (-k\frac{\Delta y}{\Delta x} - k\frac{\Delta x}{\Delta y})T_{n,m} + q'''\Delta x \Delta y = 0 \qquad (4.48)$$

ในการพิจารณาความร้อนที่ผ่านเข้ามาในบริเวณขอบเขตในรูปสมการ $q=uA\Delta T$ ดังนั้นเมื่อนำมาพิจารณาในสมการจะสามารถเขียนสมการที่นำมาใช้ในการคำนวณได้คือ

สมการใช้กับโหนดภายใน

$$(k\frac{\Delta y}{\Delta x}-\rho c_p u_{n,m}\Delta y)T_{n+1,m}+(k\frac{\Delta y}{\Delta x}-\rho c_p u_{n,m}\Delta y)T_{n-1,m}+(k\frac{\Delta x}{\Delta y}-\rho c_p v_{n,m}\Delta x)T_{n,m+1}+$$
$$(k\frac{\Delta x}{\Delta y}-\rho c_p v_{n,m}\Delta x)T_{n,m-1}+(-2k\frac{\Delta y}{\Delta x}-2k\frac{\Delta x}{\Delta y}+2\rho c_p u_{n,m}\Delta y+2\rho c_p v_{n,m}\Delta x)T_{n,m}+q'''\Delta x\Delta y=0 \quad (4.49)$$

สมการใช้กับบริเวณขอบที่ไม่ใช่มุม

$$(k\frac{\Delta y}{\Delta x}-\rho c_p u_{n,m}\Delta y)T_{n+1,m}+(k\frac{\Delta x}{\Delta y})T_{n,m+1}+(k\frac{\Delta x}{\Delta y})T_{n,m-1}$$
$$+(-k\frac{\Delta y}{\Delta x}-2k\frac{\Delta x}{\Delta y}+\rho c_p u_{n,m}\Delta y+u\Delta y)T_{n,m}-u\Delta y T_{amb}+q'''\Delta x\Delta y=0 \quad (4.50)$$

สมการใช้กับบริเวณมุม

$$(k\frac{\Delta y}{\Delta x})T_{n+1,m}+(k\frac{\Delta x}{\Delta y})T_{n,m+1}+(-k\frac{\Delta y}{\Delta x}-k\frac{\Delta x}{\Delta y}+u\Delta x+u\Delta y)T_{n,m}+\left(-u\Delta x-u\Delta y\right)T_{amb}+q'''\Delta x\Delta y=0 \quad (4.51)$$

จากสมการเมื่อแทนค่าของความเร็ว และค่าที่บริเวณขอบเขตแล้ว สมการที่ได้จะเป็นสมการเชิงเส้น และจะสามารถใช้วิธีแก้สมการโดยวิธีกำจัดแบบเกาส์ แก้สมการหาค่าของอุณหภูมิภายในบริเวณปรับอากาศได้ตามต้องการ

ในการคำนวณได้กำหนดให้มีสภาวะขอบเขตในการคำนวณดังนี้

<u>กำหนดสภาวะเริ่มต้น</u>

ค่าความเร็วที่สภาวะเริ่มต้น

u(i,j,0) = 0 (i=1,2,3,...,n),(j=1,2,3,...,m)

v(i,j,0) = 0 (i=1,2,3,...,n),(j=1,2,3,...,m)

ค่าความดัน

p (i,j,t) = 101300 N/m^2

<u>กำหนดสภาวะขอบเขต</u>

u(i,0,t) = -u(i,1,t) u(i,m+1,t)= -u(i,m,t)

v(0,j,t) = -v(1,j,t) v(n+1,j,t) = -v(n,j,t) u(0,j,t)= u(n,j,t)=v(i,0,t)=0

v(i,j,t)=0   โดยที่ i,j ไม่เท่ากับ ตำแหน่งติดตั้งของเครื่องปรับอากาศ

q ที่ขอบเขตมีค่า เท่ากับ q= uAΔT

โดยที่ u เป็นค่าสัมประสิทธ์การถ่ายเทความร้อนรวม

<u>กำหนดตำแหน่งติดตั้งเครื่องปรับอากาศ</u>

u(i,j,t)= constant ค่าความเร็วที่กำหนดคงที่

v(i,j,t)= constant ค่าความเร็วที่กำหนดคงที่

โดยที่ i,j เป็นตำแหน่งใดๆ ภายในบริเวณปรับอากาศ

พิจารณาค่าคุณสมบัติต่างๆของอากาศที่อุณหภูมิ 24 องศาเซลเซียสดังนี้

$$k = 0.0263\ w/m\,K \qquad \rho = 1.1614\ kg/m^3$$
$$c_p = 1007\ J/kg\ K \qquad \mu = 184.6*10^{-7}\ N.s/m^2$$

ค่าคงที่ต่างๆนี้จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าของความเร็วและอุณหภูมิตามขั้นตอนการคำนวณดังกล่าวไว้ในตอนต้น

ตำแหน่งของความเร็วที่บริเวณขอบเขตแสดงไว้ในรูปต่อไปนี้