บทที่ 2

ทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

ในการพิจารณาการเกิดความร้อนขึ้นภายในบริเวณปรับอากาศนั้นจะมีการเกิดการเคลื่อนที่ของความร้อนภายในบริเวณปรับอากาศ 2 ลักษณะ คือ การนำความร้อน และการพาความร้อน กล่าวคือความร้อนที่เกิดขึ้นจากภายนอกที่ไหลเข้ามาสู่ภายในบริเวณปรับอากาศจะเกิดจากการนำความร้อน และเมื่ออยู่ภายในบริเวณปรับอากาศจะเกิดการพาความร้อนขึ้น

ความร้อนคือ พลังงานรูปหนึ่งสามารถแพร่ข้ามขอบเขตของระบบทางเทอร์โมไดนามิกส์ โดยอาศัยความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อม

การไหลของความร้อนคือ การไหลของพลังงานซึ่งมีทั้งขนาด และทิศทาง ทั้งนี้โดยมีทิศทางจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงกว่าไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิที่ต่ำกว่า

การนำความร้อน (Conduction) คือ การเคลื่อนที่ของความร้อนจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำภายในตัวกลางเดียวกันหรือเป็นการเคลื่อนที่ของความร้อนระหว่างตัวกลางที่ติดกันแต่มีอุณหภูมิที่ต่างกัน ในการนำความร้อนนั้นความร้อนจะเคลื่อนที่ผ่านโมเลกุลของสารโดยที่โมเลกุลนั้นจะไม่มีการเคลื่อนที่ และการนำความร้อนจะเกิดขึ้นได้ดีมากในตัวกลางที่เป็นของแข็ง ทั้งนี้ความร้อนจะเคลื่อนที่ได้โดยการเคลื่อนที่ของอิเลคตรอนจากจุดที่มีอุณหภูมิสูงไปสู่จุดที่มีอุณหภูมิต่ำ นอกจากนี้ความร้อนยังเคลื่อนที่ได้โดยการสั่นสะเทือนของโมเลกุลภายในของแข็งในลักษณะของพลังงานของความสั่นสะเทือนอีกด้วย

การพาความร้อนคือ วิธีการที่ความร้อนเคลื่อนที่ระหว่างผิวของของแข็ง และของไหล โดย ของไหลจะเป็นตัวพาความร้อนมาให้หรือพาความร้อน ออกจากผิวของของแข็ง กลไกที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ของความร้อนโดยการพาได้นั้นเกิดจากผลรวมของการนำความร้อน,การสะสมพลังงาน และการเคลื่อนที่ของของไหล การพาความร้อนยังแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ การพาความร้อนโดยการบังคับ (Forced Convection) และการพาความร้อนตามธรรมชาติ (Nature Convection)

การถ่ายเทความร้อนโดยการพาความร้อนเป็นการศึกษาถึงกระบวนการถ่ายเทความร้อน ระหว่างผิวของของไหล เมื่อของไหลอยู่ในลักษณะที่เคลื่อนที่หรือระหว่างของไหลที่เคลื่อนที่ และขอบเขตของผิวสัมผัสกับของไหลนั้น เมื่อมีอุณหภูมิแตกต่างกัน

สมการที่เกี่ยวข้องกับการถ่ายเทความร้อนด้วยการพา

สมการที่เกี่ยวข้องกับการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาที่จะกล่าวถึงนั้น จะคิดจากของไหลที่มีความต่อเนื่อง(continuum) เช่น อากาศ น้ำ และน้ำมัน ที่อุณภูมิ และ ความดันบรรยากาศ โดยจะมี ลักษณะเป็นของไหลที่มีความต่อเนื่อง และมีความสัมพันธ์กันระหว่างค่าของความเค้นเฉือน กับ ความเครียด (Strain) เป็นลักษณะเชิงเส้น ของไหลที่ประพฤติตัวตามลักษณะที่กล่าวมานี้เรียกว่า ของไหลนิวทอเนียน (Newtonian Fuids) สมการที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ของ ความเค้นเฉือน (Shear Stresses)กับความเครียด (Strain) หรือเกรเดียนความเร็ว (Velocity Gradient) สำหรับของไหลนิวทอเนียน ในลักษณะไหลเลื่อนแบบธรรมดาที่มีองค์ประกอบของความเร็ว อยู่ในทิศทางเดียว โดยความแตกต่างเริ่มจากศูนย์ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.1}$$

เมื่อ $\tau =$ ความเค้นเฉือน , N/m^2

$\mu =$ ความหนืดไดนามิคส์ของของไหล $N.s/m^2$

$\frac{du}{dy} =$ ความลาดชันของความเร็ว s^{-1}

ค่าของความหนืดของของไหลที่เป็นของไหลนิวทอเนียน(Newtonian Fluids) จะมีค่าคงที่สำหรับอุณหภูมิและความดันหนึ่งๆตามที่กำหนด ส่วนกรณีของไหลที่ไม่เป็นของไหลนิวทอเนียนนั้น ค่าความหนืดจะเป็นฟังก์ชันของเกรเดียนความเร็ว ณ.ที่อุณหภูมิและความดันนั้นๆ ความสัมพันธ์ตามสมการที่ (2.1) เป็นกฎหนึ่งในวิชากลศาสตร์ของไหลซึ่งมีชื่อเรียกว่า กฎความหนืดของนิวตัน (Newton's Law of Viscosity) สำหรับการไหลใน 2 มิติ ความสัมพันธ์ของความเค้น (Stress) กับความเครียด (Strain) จะมีความซับซ้อนยิ่งขึ้น

วัตถุประสงค์ของการศึกษาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาก็เพื่อหาการกระจายของอุณหภูมิ (Temperature Distribution) ในของไหลรวมถึงอัตราการส่งผ่านความร้อน (Heat Fluxes) ระหว่างผิวรอบของของไหลที่สัมผัสกับของแข็ง ซึ่งสามารถคำนวณหาค่าได้ แต่ก็ต้องอยู่ในขอบเขตของความเป็นไปได้ด้วย สำหรับสภาวะเริ่มต้น เพื่อคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิในของไหล สำหรับกรณี ที่ต้องการทราบสนามการไหลก็จะใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (Newton's Second Law of Motion) ,กฎทรงมวล(The Law of Conservation of Mass)และกฎข้อหนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ (The First Law of Thermodynamics) ซึ่งประกอบกันเป็นสมการพาร์เชียลดิฟเฟอเรนเชียล อยู่ 5 สมการหลัก เพื่อหาค่าความเร็วใน 3 มิติ ความดันและอุณหภูมิ ถ้าความหนาแน่นของของไหลเปลี่ยนแปลงตามความดัน และอุณหภูมิก็จะมีสมการเพิ่มขึ้นอีก 1 สมการเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง ความหนาแน่น ความดัน และอุณหภูมิ เช่น กฎของก๊าซ กรณีที่ของไหลในแต่ละตำแหน่ง หรือที่ผิวขอบเขตมีความแตกต่างกันมาก คุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ของของไหล ที่ขึ้นกับอุณหภูมิก็จะต้องถูกพิจารณาให้มีค่าแตกต่างกันในแต่ละตำแหน่งซึ่งมีอุณหภูมิแตกต่างกันด้วย

2.1 สมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation)

พิจารณาระบบควบคุมปริมาตรในรูปที่ 2.1 สมการอนุรักษ์มวลหรือสมการความต่อเนื่องจะพิจารณาจากการสมดุลย์ของมวลของของไหลที่ไหลเข้าและออกจากปริมาตรเล็กๆที่มีขนาด $\Delta x*\Delta y*\Delta z$ ในสนามการไหล V(ui+vj+wk) ที่เป็นความเร็วในทิศทาง x ,y และz ตามลำดับจากกฎทรงมวลจะไม่มีการไหลของมวลผ่านขอบเขตของระบบกล่าวคือ อัตราสุทธิของมวลที่ไหลเข้าสู่ระบบควบคุมปริมาตร (มวลไหลเข้า - มวลไหลออก) จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ($\Delta m=0$) พิจารณาสมการจะได้

พิจารณาในทิศทาง x

อัตราการเคลื่อนที่ของของไหลที่เข้าสู่ปริมาตร $= \rho u \Delta y \Delta z$

อัตราการเคลื่อนที่ของของไหลออกจากปริมาตร $= \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\Delta x\right]\Delta y \Delta z$

$\therefore$ อัตราการไหลสุทธิของมวลเข้าสู่ปริมาตร $= \left[-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\Delta x\right]\Delta y \Delta z$

พิจารณาในทิศทาง y

อัตราการเคลื่อนที่ของของไหลที่เข้าสู่ปริมาตร $= \rho v \Delta x \Delta z$

อัตราการเคลื่อนที่ของของไหลออกจากปริมาตร $= \left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\Delta y\right]\Delta x \Delta z$

$\therefore$ อัตราการไหลสุทธิของมวลเข้าสู่ปริมาตร $= \left[-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\Delta y\right]\Delta x \Delta z$

พิจารณาในทิศทาง z

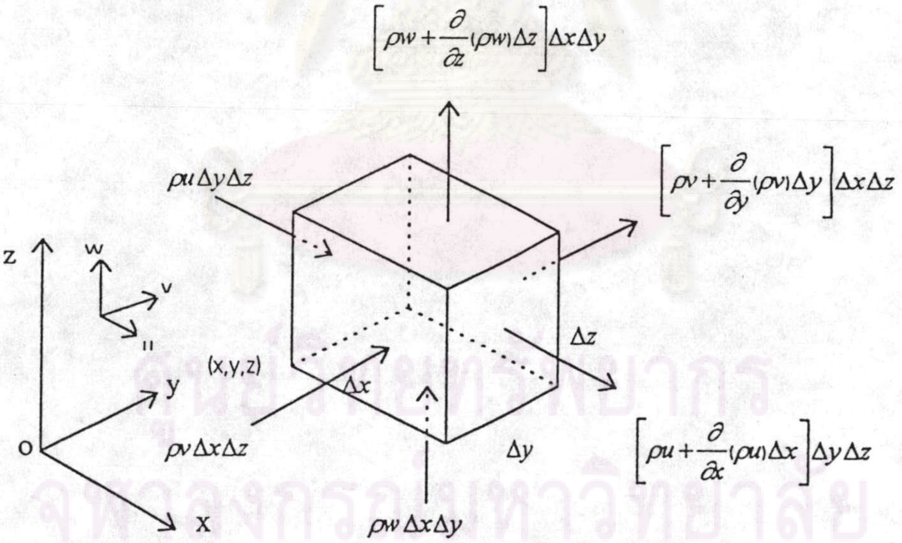
อัตราการเคลื่อนที่ของของไหลที่เข้าสู่ปริมาตร $= \rho w \Delta x \Delta y$

อัตราการเคลื่อนที่ของของไหลออกจากปริมาตร $= \left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\Delta z\right]\Delta x \Delta y$

$\therefore$ อัตราการไหลสุทธิของมวลเข้าสู่ปริมาตร $= \left[-\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\Delta z\right]\Delta x \Delta y$

ดังนั้นอัตราการไหลของมวลเข้าสู่ระบบ $= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right]\Delta x \Delta y \Delta z$

อัตราของมวลที่เพิ่มในระบบต่อเวลา คือ $\frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta x \Delta y \Delta z$



รูปที่ 2.1 แสดงมวลที่เข้าและออกจากปริมาตรควบคุม

ดังนั้นจากกฎทรงมวล(The Law of Conservation of Mass) จะเขียนสมการในรูปทางคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial (\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial (\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial (\rho w)}{\partial z}=0 \qquad (2.2)$$

สมการที่ (2.2) เรียกว่า สมการความต่อเนื่อง (The Continuity Equation)

สำหรับการไหลที่สม่ำเสมอ (Steady Flow) โดยจะมีค่า $\partial \rho/\partial t = 0$ ดังนั้นสมการจะเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial (\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial (\rho w)}{\partial z}=0 \qquad (2.3)$$

สำหรับของไหลที่อัดตัวไม่ได้ (Incompressible Fluids) มีค่า ρ คงที่ ดังนั้นสมการจะเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (2.4)$$

จากสมการข้างต้นสามารถเขียนสมการความต่อเนื่องในรูป 2 มิติในแกน x และyได้ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (2.5)$$

2.2 <u>สมการการเคลื่อนที่</u> (Equations of Motion)

การเคลื่อนที่ของของไหลสามารถอธิบายได้ด้วยสมการที่เรียกว่าสมการโมเมนตัม (Momentum Equations) หรือเรียกอีกอย่างว่า สมการการเคลื่อนที่ (Equations of Motion) ซึ่งสมการดังกล่าว ประยุกต์มาจากสมการ กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (Newton's Second Law of Motion) เพื่อนำมาใช้กับหน่วยปริมาตรควบคุมเล็กๆ (Elemental Control Volume)ในสนามการไหล พิจารณาถึงอนุภาคของของไหล โดยใช้สมการกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (Newton's Second Law of Motion) ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$F = \frac{dM}{dt} = \frac{d(mV)}{dt} = ma \tag{2.6}$$

ซึ่ง F คือ แรงลัพธ์ที่กระทำกับอนุภาคของของไหล N

V คือ ความเร็ว m/s

a คือ ความเร่ง m/s^2

พิจารณาอนุภาคของของไหลที่ตำแหน่ง(x,y,z) ที่เวลา t และที่ตำแหน่งใหม่(x+Δx , y+Δy,z+Δz) ที่เวลา t+Δt ผลรวมของการเปลี่ยนแปลงความเร็วสามารถเขียนได้เป็น

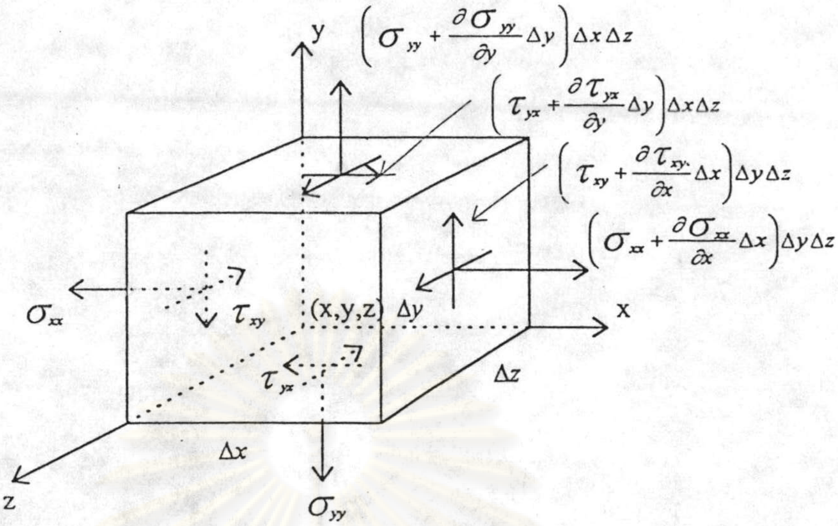
$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z \tag{2.7}$$

ความเร่งของอนุภาคที่ตำแหน่ง(x,y,z)ที่เวลา t จะได้สมการเป็น

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\partial V}{\partial t} + u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{DV}{Dt} \tag{2.8}$$

แรงที่กระทำบนอนุภาคของของไหลสามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ แรงประจำตัว (Body Forces) ให้ f_x,f_y และ f_z เป็นแรงประจำตัวต่อหน่วยมวลกระทำบนอนุภาคของของไหลที่ตำแหน่ง(x,y,z) ซึ่งแรงประจำตัวได้แก่ แรงเนื่องจากความโน้มถ่วง, อำนาจแม่เหล็กและอำนาจไฟฟ้า ส่วนอีกแรงเป็นแรงที่กระทำบนผิวของอนุภาค (Surface Forces) เป็นผลที่มาจากความเค้นที่กระทำบนผิวของของไหล

ความเค้นที่กระทำบนของไหลมีความเค้นเฉือน ใช้สัญลักษณ์ τ (Shear Stress) และความเค้นในแนวตั้งฉาก σ (Normal Stress) และจะมีสัญลักษณ์อักษรห้อย (Subscripts) อยู่ที่ท้ายตัวแปรโดยที่ทั้งสองตัวอักษรมีความหมายดังนี้ อักษรตัวแรกแสดงถึงทิศทางของพื้นผิวที่ตั้งฉากกับความเค้นที่กระทำ และอักษรตัวที่สองแสดงถึงทิศทางที่ความเค้นกระทำ ความเค้นเฉือนและความเค้นในแนวตั้งฉากที่กระทำกับพื้นผิวภายในปริมาตร แสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงความเค้นในแนวตั้งฉากและความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นบนพื้นผิวปริมาตร

ดังนั้นแรงที่กระทำกับอนุภาคของของไหลในทิศทางแกน x ,y และ z เขียนสมการได้ดังนี้

$$F_x=\left[\rho f_x+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z \tag{2.9}$$

$$F_y=\left[\rho f_y+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z \tag{2.10}$$

$$F_z=\left[\rho f_z+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\right]\Delta x\Delta y\Delta z \tag{2.11}$$

พิจารณาอนุภาคของของไหล ณ ตำแหน่ง (x,y,z) ที่เวลา t ในสนามการไหล (Flow Field) ความเร่งของอนุภาคในทิศทาง x จะเขียนสมการได้ว่า

$$\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.12}$$

ดังนั้นตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน จากสมการ 2.6 จะเขียนสมการในทิศทางแกน x,y และ z ได้เป็น

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\left[\rho f_x+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right] \tag{2.13a}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\left[\rho f_y+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right] \tag{2.13b}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\left[\rho f_z+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\right] \tag{2.13c}$$

สมการ (2.13a),(2.13b)และ (2.13c) เรียกว่า สมการโมเมนตัม (The Momentum Equation) หรือสมการการเคลื่อนที่ (The Equation of Motion) ในการนำสมการมาใช้ต้องทราบถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น (Stress) กับความเครียด (Strain) ของอนุภาคของของไหล ซึ่งจากการทดลองพบว่าค่าของความเค้นในของไหลจะมีความสัมพันธ์ในลักษณะเชิงเส้นกับค่าของความเครียดสำหรับของไหลที่เป็นของไหลนิวทอ-เนียน (Newtonian Fluids) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\sigma_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right] \tag{2.14a}$$

$$\sigma_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right] \tag{2.14b}$$

$$\sigma_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right] \tag{2.14c}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right] \tag{2.14d}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right] \qquad (2.14e)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right] \qquad (2.14f)$$

โดย μ คือ ค่าความหนืดพลวัติ (Dynamic Viscosity) ของของไหล และ p คือ ค่าความดัน นำสมการ (2.14a) ถึง (2.14f) มาแทนใน สมการโมเมนตัม (The Momentum Equation) (2.13a),(2.13b) และ(2.13c) จะเขียนสมการได้เป็น

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left\{2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\right. + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \qquad (2.15a)$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left\{2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\right. + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] \qquad (2.15b)$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left\{2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\right. + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] \qquad (2.15c)$$

จากสมการนาเวียร์-สโตก ในรูป 3มิติสามารถลดรูปอยู่ในแบบ 2 มิติได้ดังนี้

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left\{2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\right. + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \qquad (2.16a)$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left\{2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\right. + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \qquad (2.16b)$$

ความสัมพันธ์ของสมการข้างบนนี้คือสมการนาเวียร์-สโตก (Navier-Stokes Equation) โดยเทอมด้านซ้ายมือแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมกับเวลา และเทอมด้านขวามือแทนแรงที่กระทำบนอนุภาค ความเร็วในแกนต่างๆและความดันเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลา ซึ่งสามารถหาคำตอบได้โดยใช้สมการความต่อเนื่อง (The Continuity Equation) และสมการนาเวียร์-สโตก ภายใต้เงื่อนไขและสภาวะเริ่มต้นสมการที่อยู่ในรูปทั่วไปจะมีความซับซ้อนในการวิเคราะห์หาค่าซึ่งอาจใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numuerical Method) ในการหาคำตอบสมการได้

2.3 <u>สมการพลังงาน</u> (Energy Equation)

พิจารณาการสมดุลย์ของพลังงานสำหรับหน่วยเล็กๆ ของของไหลที่มีมวลของของไหล $\rho\Delta x\ \Delta y\Delta z$ ณ.ตำแหน่ง (x,y,z) ที่เวลา t ในสนามการไหล ในการพิจารณาสมการพลังงานนั้นได้นำกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์มาใช้คืออัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิลบด้วยอัตราสุทธิของงานที่ทำโดยแต่ละส่วนจะมีค่าเท่ากับอัตราการเพิ่มขึ้นของพลังงานของแต่ละส่วน

อัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z \tag{2.17}$$

เมื่อ k คือค่าการนำความร้อน (the Thermal Conductivity) ของของไหล

อัตราสุทธิของงานที่ทำโดยของไหลกับพื้นผิว และแรงประจำตัว เขียนสมการได้คือ

$$-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz})+\dfrac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx}+v\sigma_{yy}+w\tau_{yz})\\ +\dfrac{\partial}{\partial z}(u\tau_{zx}+v\tau_{zy}+w\sigma_{yy})+\rho Vf\end{bmatrix}\Delta x\Delta y\Delta z \tag{2.18}$$

อัตราการเพิ่มของพลังงานภายใน(Internal Energy)และพลังงานจลน์(Kinetic Energy) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{D}{Dt}\left(U+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right) \qquad (2.19)$$

โดย U คือพลังงานภายใน(the Internal Energy) ของของไหลต่อหน่วยมวล

ดังนั้นเมื่อรวมสมการ(2.17)ถึง(2.19) ตามกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์(The First Law of Thermodynamics) และจัดรูปสมการจะสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(U+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right)=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{T}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz})$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx}+v\sigma_{yy}+w\tau_{yz})+\frac{\partial}{\partial z}(u\tau_{zx}+v\tau_{zy}+w\sigma_{zz})+\rho Vf \qquad (2.20)$$

สมการที่ได้เรียกว่า สมการรวมพลังงาน (The Total Energy Equation) เพราะสมการนี้ประกอบด้วยพลังงานความร้อนและพลังงานกล จากสมการโมเมนตัมสมการที่ (2.13a) ,(2.13b) และ(2.13c) นำมาคูณด้วย u v และw ตามลำดับ เมื่อรวมสมการและจัดรูปจะเขียนได้เป็น

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right)=u\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)$$
$$+w\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)+\rho Vf \qquad (2.21)$$

นำสมการ (2.21) ไปหักออกจากสมการ (2.20) จะได้ว่า

$$\rho\frac{DU}{Dt}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]+\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$+\tau_{xy}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\tau_{zx}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (2.22)$$

เรียกสมการที่ได้ว่า สมการพลังงานทางความร้อน(Thermal Energy Equation) จากสมการ (2.14) ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น กับความเครียด สำหรับของไหลนิวทอเนียน (Newtonian Fluid) เมื่อนำมาใช้กับสมการพลังงานจะได้สมการในส่วนที่มีความเค้นเป็น

$$\sigma xx\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma yy\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma zz\frac{\partial w}{\partial z}=-p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \qquad (2.23)$$

และ

$$\tau xy\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (2.24)$$

$$\tau yz\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \qquad (2.25)$$

$$\tau zx\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \qquad (2.26)$$

เมื่อความสัมพันธ์จากสมการ(2.20)และ(2.21)นำไปแทนในสมการ (2.19) จะได้ว่า

$$\rho\frac{DU}{Dt}=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)-p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\Phi \qquad (2.27)$$

โดย

$$\Phi=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$
$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \qquad (2.28)$$

โดยสมการ (2.28) เรียกว่า ฟังก์ชันการกระจาย (The Dissipation Function) ในเทอมแรกทางด้านขวามือของสมการ (2.27) แทนอัตราการนำความร้อนสู่อนุภาคของของไหลต่อหน่วย

ปริมาตร เทอมที่สองคือ อัตราของงานที่ย้อนกลับได้ที่ทำบนอนุภาคของของไหล ต่อหน่วยปริมาตร และ เทอมสุดท้าย $\mu\phi$ คือ อัตราของงานย้อนกลับไม่ได้ ซึ่งเกิดจากแรงเนื่องจากความหนืดต่อหน่วยปริมาตร ซึ่งจากสมการนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปของเอนธาลปี (Enthalpy) แทนพลังงานภายใน จากสมการของเอนทาลปี $h=U+p/\rho$ ดังนั้นสมการจะเขียนได้เป็น

$$\rho\frac{Dh}{Dt}=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{u\partial p}{\partial x}+\frac{v\partial p}{\partial y}+\frac{w\partial p}{\partial z}\right)+\mu\Phi \tag{2.29}$$

โดย $dh=c_p dt$ เมื่อนำมาแทนในสมการ (2.27) เมื่อจัดรูปสมการจะเขียนได้เป็น

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{u\,\partial T}{\partial x}+\frac{v\,\partial T}{\partial y}+\frac{w\,\partial T}{\partial z}\right]=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{u\,\partial p}{\partial x}+\frac{v\,\partial p}{\partial y}+\frac{w\,\partial p}{\partial z}\right)+\mu\Phi+q''' \tag{2.30}$$

โดย q''' ซึ่งเป็นค่าของอัตราพลังงานความร้อนภายในที่เกิดขึ้น (The Rate of Internal Thermal Energy Generation per Unit Volumn) ต่อหน่วยปริมาตรโดยของไหลเนื่องจากปฏิกิริยาเคมี ปฏิกิริยานิวเคลียร์ พลังงานไฟฟ้าฯ

จากสมการ(2.30) สามารถเขียนอยู่ในรูปสมการ 2 มิติได้คือ

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{u\,\partial T}{\partial x}+\frac{v\,\partial T}{\partial y}\right]=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{u\,\partial p}{\partial x}+\frac{v\,\partial p}{\partial y}\right)+\mu\Phi+q''' \tag{2.31}$$

โดย

$$\Phi=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

ดังนั้นสมการพื้นฐานของการพาความร้อนซึ่งสมการที่นำมาใช้ในการคำนวณหาค่าความเร็วของอากาศและอุณหภูมิในระบบ 2มิติ มีสมการหลัก 3 สมการ คือ

1. สมการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \quad = 0$$

2. สมการโมเมนตัม

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left\{2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho f_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left\{2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

3. สมการพลังงาน

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{u\partial T}{\partial x}+\frac{v\partial T}{\partial y}\right]=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{u\partial p}{\partial x}+\frac{v\partial p}{\partial y}\right)+\mu\Phi+q'''$$