บรรณานุกรม

Blalock, Jr. Hubert M. Social Statistics. London : Mc Graw-Hill Book Company Inc., c 1960.

Cochran, William G. and Cox, Gertrude M. Experimental Designs. 2 d. ed. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1957.

Cochran, William G. Sampling Techniques. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1953.

Cornell, Francis G. The Essentials of Educational Statistics. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1956.

Cramer, Harald. The Elements of Probability Theory. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1955.

Dixon, Wilfred J. and Massey, Jr. Frank J. Introduction to Statistical Analysis. 2 d ed. New York : Mc Graw-Hill Book Company, Inc., c 1957.

Draper, N.R. and Smith, H. Applied Regression Analysis. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1966.

Edwards, Allen L. Experimental Design in Psychological Research. 3d ed. New York : Holt, Rinehart and Winston. Inc., c 1968.

Edwards, C. Bryant. Statistical Analysis. New York : Mc Graw-Hill Book Company, Inc., c 1960.

Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. New York : Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1959.

Freund E. John. Modern Elementary Statistics. N.J. : Prentice-Hall Inc., c 1952.

Gerald, Curtis f. Applied Numerical Analysis. Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, c 1970.

Graybill, Franklin A. An Tntroduction to Linear Statistical Models. Vol. 1 . New York : Mc Graw-Hill Book Company, Inc., c 1961.

Griffin, John I. Statistics, Methods and Applications. New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc., c 1962.

Hamming, R.W. Numerical Methods For Scientists And Engineers. New York : Mc Graw-Hill Book Company, Inc., c 1962.

Hansen, Morris H. and Hurwitz, William N., Madow, William G. Sample Survey Methods and Theory. New York : John Wiley & Sons, Inc., c. 1953.

Hays, William L. and Winkler, Robert L. Statistics : Probability Inference and Devision. New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc., c 1971.

Hirsch, Werner Z. Introduction to Modern Statistics. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1957.

Hughes, Ann and Grawoig, Dennis. Statistics : A Foundation for Analysis. Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, c 1971

James, Glenn and James, Robert C. Mathematics Dictionary. New Jersy: D. Vannostrand Company, Inc., c 1959.

Johnson, Norman L. & Leone, Fred C. Statistics and Experimental Design, In Engineering and The Physical Science. Vol. 1. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1964.

Kendall, Maurice G. and Buckland, William R. A Dictionary of Statistical Terms. 2d ed. New York : Hafner Publishing Company, 1966.

Kendall, Maurice G. The Advanced Theory of Statistics. Vol. 2. 3d ed. London : Charles Griffin & Company Limited, 1955.

Kendall, Maurice G. & Stuart, Alan. The Advanced Theory of Statistics. Vol. 3. London : Charles Griffin & Company Limited, c 1968.

Kenney J.F. and Keeping E.S. Mathematics of Statistics. 3d ed. New Delhi : Affiliated East-West Press Private Ltd., c 1939.

Kreyszig, Erwin. Introductory Mathematical Statistics. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1970.

Larson, Harold J. Introduction to Probability Theory And Statistical Inference. California : Wiley International Edition, c 1969.

Lehmann, E.L. Testing Statistical Hypothesis. New York : John Wiley & Sons Inc., c 1959.

Mc Carthy, Philip J. Introduction to Statistical Reasoning. New York: Mc Graw-Hill Book Company, Inc., c 1957.

Mendenhall, William. Introduction to Linear Models and The Design and Analysis of Experiments. California : Wads worth Publishing Company, Inc., c 1968.

Meyer, Paul L. Introductory Probability And Statistical Applications. 2d ed. Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, Inc., c 1970.

Mitra, S.K. and Moore, Betty. "Gauss Markov Estimation with an Incorrect Dispersion Matrix and Applications to the variance Component Model", The Institute of Mathematical Statistic Bulletin, 1 (July. 1972) pp. 135-48.

Mood, Alexander M. and Graybill, Franklin A. Introduction to the Theory of Statistics. New York : Mc Graw-Hill Book Company, Inc., c 1963.

Neiswanger, William Addison. Elementary Statistical Methods. New York: The Macmillan Company, c 1956.

Neville, Adam M. and Kennedy, John B. Basic Statistical Methods for Engineers and Scientists. Pennsylvania : International Textbook Company, c 1964.

Ostberg, Donald R. and Perkins, Fred W. An Introduction to Linear Analysis. Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, Inc., c 1966.

Ostle, Bernard. Statistics in Research. Iowa : Oxford & IBH Publishing Co., 1966.

Parzen, Emanuel. Modern Probability Theory and Its Application. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1960.

Peng, K.C. The Design And Analysis of Scientific Experiments. Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, c 1967.

Ralston, Anthony. A First Course in Numerical Analysis. New York : Mc. Graw-Hill Book Company, c 1965.

Richmond, Samuel B. Statistical Analysis. 2d ed. New York : The Ronald Press Company, c 1964.

Scheffé Henry. The Analysis of Variance. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1959.

Spiegel, Murray R. Theory and Problems of Statistics. New York : Schaum Publishing Company, c 1961.

Walpole, Ronald E. Introduction to Statistics. New York : The Macmillian Company, c 1968.

Webster, John Thomas. "A Decision Procedure for The inclusion of An Independent Variable in a Linear Estimator", Dissertation Abstracts, 22 (January, 1961), p. 275.

Wilks, Samnels S. Mathematical Statistics. New York : John Wiley & Sons, Inc., c 1962.

Wine, R. Lowell. Statistics for Scientists and Engineers. N.J. : Prentice-Hall, Inc., c 1964.

Young, Pauline V. Scientific Social Surveys and Research. 4th ed. New Jersey : Prentice-Hall, Inc., c 1939.

ภ า ค ผ น ว ก

ภาคผนวก ก

เมตริก แอลยิบบรา

๑. A เป็น 2 x 3 เมตริก, B เป็น 4 x 1 เมตริก , C เป็น 2 x 2 เมตริก

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

๒. การบวกเมตริก

$$\underset{2 \times 3}{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix} , \quad \underset{2 \times 3}{B} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A + B = \begin{vmatrix} (2+0) & (1-1) & (4+1) \\ (-1+6) & (6-3) & (0+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

ข้อสังเกต $A + B = B + A$

๓. การคูณเมตริกโดยเลขจริง

$$\underset{3 \times 2}{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$3A = \begin{vmatrix} 3(2) & 3(1) \\ 3(4) & 3(6) \\ 3(-1) & 3(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 18 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$$

๔. การคูณเมตริก

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \times 5 + 0 \times -1 & 2 \times 2 + 0 \times 3 \\ 1 \times 5 + 4 \times -1 & 1 \times 2 + 4 \times 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 1 & 14 \end{vmatrix}$$

ถ้า $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ และ $B = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$\underset{3x2}{A} \times \underset{2x3}{B} = \begin{vmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\underset{2x3}{B} \times \underset{3x2}{A} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}$$

ถ้า $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$

$$\therefore \underset{1 \times 4}{A} \times \underset{4 \times 1}{B} = \begin{bmatrix} 30 \end{bmatrix}$$

๕. ไอเดนติตี้เมตริก (Identity Matrix)

$AI = A$ และ $IA = A$

$$\underset{n \times n}{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \ldots 1 & \end{vmatrix}$$

ถ้า $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$, $I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\underset{2x2}{I} \times \underset{2x3}{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = A$$

๖. Inverse of Matrix

ถ้า $\underset{n \times n}{A}$ เป็นเมตริกกำลังสองและ A^{-1} หาได้โดย

$$AA^{-1} = I \quad \text{และ} \quad A^{-1}A = I$$

ฉะนั้น A^{-1} เป็น inverse ของ A

๗. Transpose of Matrix

ให้ $\underset{p \times q}{A}$ เป็นเมตริกที่มีมิติเป็น p x q และ A' เรียก " Transpose of A "

$$\underset{3 \times 2}{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ดังนั้น} \quad \underset{2 \times 3}{A'} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

หรือถ้า $y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}$ $\quad y' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

๘. เมตริกในรูปสมการกำลังหนึ่งเช่นเรามีสมการ

$$2v_1 + v_2 = 5$$

$$v_1 - v_2 = 1$$

$$\underset{2 \times 2}{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2v_1 + v_2) \\ (v_1 - v_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix} = G$$

ในการกลับข้างสมการเมตริกเรามักจะคูณด้วย inverse matrix

$$AV = G$$

$$A^{-1}VA = A^{-1}G$$

แต่ $A^{-1}A = I$ และ $IV = V$

ฉะนั้น $V = A^{-1}G$

๙. การทำเมตริกให้เป็น inverse matrix

เมตริก $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\qquad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

ขั้นที่ ๑ คูณด้วยตัวคงที่สมมุติว่าเป็น $\frac{1}{2}$ จะได้

$$\begin{matrix} * \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ขั้นที่ ๒ ลบแถวที่หนึ่งจากแถวที่สอง

$$\begin{matrix} \\ * \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

ขั้นที่ ๓ คูณแถวที่สองโดย $-\frac{2}{3}$

$$\begin{matrix} \\ * \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

ขั้นที่ ๔ คูณแถวที่สองด้วย $\frac{1}{2}$ แล้วลบจากแถวที่ ๑

$$\begin{matrix} * \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

ทดสอบโดยตรวจดูว่า $A^{-1}A$ จะเท่ากับ I หรือไม่

$$A^{-1}A = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

๑๐. การหาคำตอบของสมการกำลังหนึ่งเช่นถ้ามีสมการ

$$
\begin{aligned}
2v_1 + v_2 &= 5 \\
v_1 - v_2 &= 1 \\
A \quad V &= G \\
V &= A^{-1}G \\
&= \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \; V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}
$$

คือ $v_1 = 2$ และ $v_2 = 1$

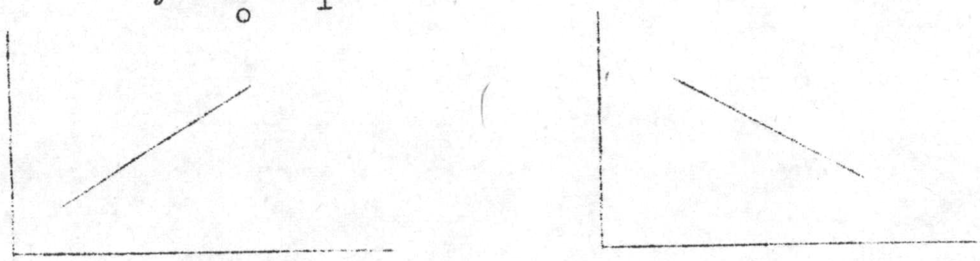
ภาคผนวก ข

กราฟของสมการแบบต่าง ๆ

๑. สมการโพลี่โนเมียล[1]

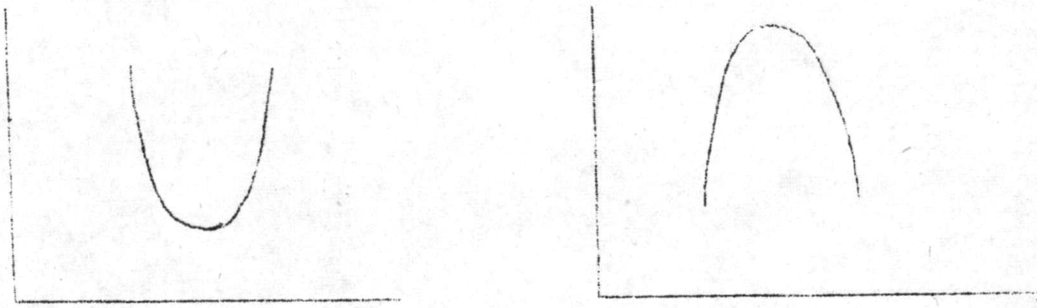
๑.๑ สมการโพลี่โนเมียลกำลังหนึ่ง

$y = b_0 + b_1x$ เป็นสมการเส้นตรง



๑.๒ สมการโพลี่โนเมียลกำลังสองซึ่งอาจเรียก "พาราโบล่า หรือ ครอดแดรติ๊ก (Parabola or Quadratic Curve) มีลักษณะกราฟดังนี้[2]

$y = b_0 + b_1x + b_2x^2$



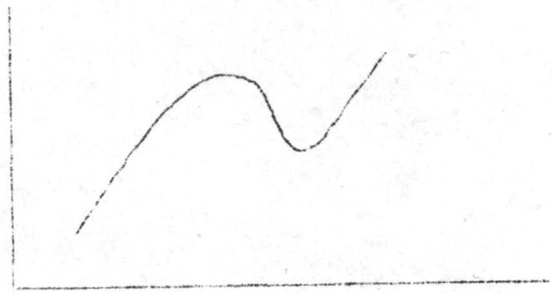
---

[1] Murray R. Spiegel, Theory and Problems of Statistics (New York : Schaum Publishing Company, c 1961), p. 218.

[2] Ann Hughes and Dennis Grawoig, Statistics : A Foundation for Analysis (Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, c 1971), p. 381.

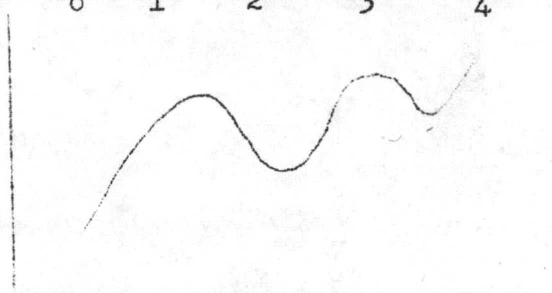
๑.๓ สมการโพลี่โนเมียลกำลังสามซึ่งเรียก "คิวบิคเคิฟ (Cubic curve)"

$$y = b_o + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$



๑.๔ สมการโพลี่โนเมียลกำลังสี่ซึ่งเรียก "ควอติค เคิฟ (Quartic curve)"

$$y = b_o + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$$



๑.๕ สมการโพลี่โนเมียลกำลัง n จะมีการเปลี่ยนโค้ง (n - 1) ครั้ง

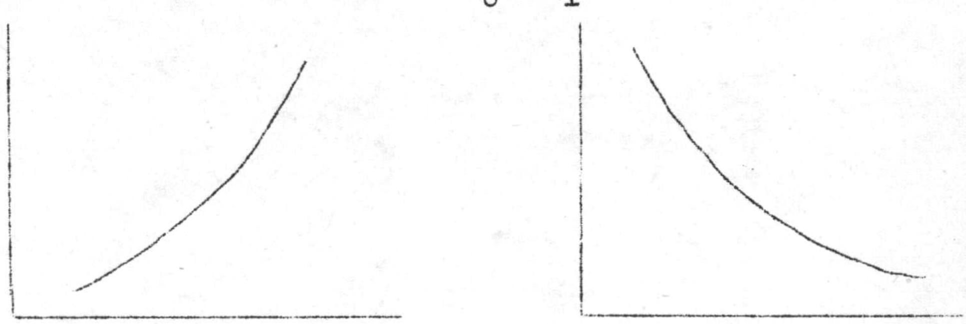
$$y = b_o + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots b_nx$$

๒. สมการรูปอื่น ๆ ซึ่งใช้กันมากในทางปฏิบัติ

๒.๑ สมการที่อยู่ในรูปกำลัง (Exponential curve)

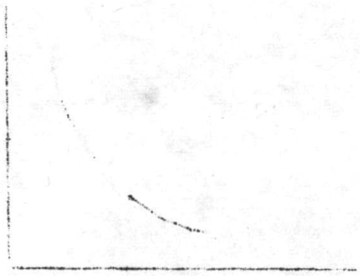
$y = ab^x$ หรือ $\log y = \log a + x \log b$

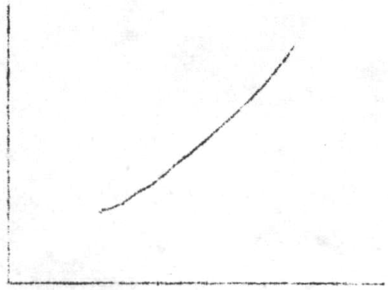
$$= b_o + b_1x$$



๒.๒ สมการไฮเปอโบล่า (Hyperbola Curve)

$$y = \frac{1}{b_0 + b_1 x} \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{y} = b_0 + b_1 x$$





นอกจากนี้ยังมีสมการแบบอื่น ๆ ซึ่งจะไม่ค่อยพบบ่อยนัก คือ

๒.๓ สมการเรขาคณิต (Geometric curve)

$$y = ax^b \quad \text{หรือ} \log y = \log a + b \log x$$

๒.๔ สมการกำลังแปรรูป (Modified Exoonential Curve)

$$Y = ab^x + g$$

๒.๕ สมการเรขาคณิตแปรรูป (Modified Geometric Curve)

$$y = ax^b + g$$

๒.๖ สมการคอมเพิทส์ (Gompert Curve)

$$y = pq^{b^X} \quad \text{หรือ} \quad \log y = \log p + b^x \log q$$

$$= ab^x + g$$

๒.๗ สมการคอมเพิทส์แปรรูป (Modified Compertz Curve)

$$y = pq^{b^X} + h$$

๒.๘ สมการโลจิสติค (Logistic Curve)

$$y = \frac{1}{ab^x + g} \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{y} = ab^x + g$$

ภาคผนวก ค

วิธีดูลิทเทิท (Doolittle Method)

วิธีดูลิทเทลเป็นวิธีหาสัมประสิทธิ์ของสมการกำลังหนึ่งที่มีตัวแปรอิสสระมากกว่า ๓ ตัวขึ้นไป สมมุติว่ามีกลุ่มตัวอย่างขนาด n และมีตัวแปรอิสสระ ๔ ตัวคือ x_1, x_2, x_3, x_4 ข้อมูลที่ได้ดังแสดงในตาราง

	ตัวแปร				
จำนวนตัวอย่าง	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	y_2
3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}	y_3
j	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	y_j
n	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	x_{4n}	y_n

สำหรับสัญญลักษณ์ x_{ij} , i = จำนวนตัวแปรอิสสระ

j = จำนวนหน่วยในตัวอย่าง

เราจะคำนวณหา a ได้จาก

$$a_{ii} = \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = \sum_j x_{ij}^2 - (\sum_j x_{ij})^2/n$$

$$\cdot\ a_{ii'} = \sum_j \left[(x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{i'j} - \bar{x}_{i'}) \right] = \sum_j x_{ij}x_{i'j} - (\sum_j x_{ij})(\sum_j x_{i'j})/n$$

$$\cdot\ a_{iy} = \sum_j \left[(x_{ij} - \bar{x}_i)(y_j - \bar{y}) \right] = \sum_j x_{ij}y_j - (\sum_j x_{ij})(\sum_j y_i)/n$$

ตารางข้างล่างจะแสดงขั้นการหาสัมประสิทธิ์ตามเทคนิคของวิธีนี้ [3]

(1)	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{1y}
(2)	(a_{21})	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{2y}
(3)	(a_{31})	(a_{32})	a_{33}	a_{34}	a_{3y}
(4)	(a_{41})	(a_{42})	(a_{43})	a_{44}	a_{4y}
(5)	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{5y}
(6)	1	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{6y}
(7)		a_{72}	a_{73}	a_{74}	a_{7y}
(8)		1	a_{83}	a_{84}	a_{8y}
(9)			a_{93}	a_{94}	a_{9y}
(10)			1	$a_{10.4}$	a_{10y}
(11)				$a_{11.4}$	a_{11y}
(12)				1	a_{12y}

---

[3] Norman L. Johnson & Fred C. Leone, Statistics and Experimenttal Design In Engineering and Physical Sciene, **Vol. 1** (New York : John Wiley & Sons Inc., c 1964), pp. 416 - 18.

แถวที่ ๑ ถึง ๔ คำนวณโดยใช้สูตรข้างบน

ขั้นที่ ๑ เขียนแถวที่ (๕) ซ้ำแถวที่ ๑ คือ $a_{51} = a_{11}$, $a_{52} = a_{12}$ .....

...........$a_{5y} = a_{1y}$

ขั้นที่ ๒ แถวที่ (๖) ได้จากผลคูณตามสูตร $a_{6i} = (a_{51})^{-1} a_{5i}$ และ

$a_{6y} = (a_{51})^{-1} a_{5y}$

ขั้นที่ ๓ แถวที่ (๗) ได้จากสมการ

$$a_{7i} = a_{2i} - a_{62} a_{5i}'$$

นั่นคือ $a_{71} = a_{21} - a_{62} a_{51}$ ซึ่งหมดไป

$$a_{72} = a_{22} - a_{62} a_{52}$$

......

$$a_{7y} = a_{2y} - a_{62} a_{5y}$$

ขั้นที่ ๔ แถวที่ (๘) ได้จากสมการ $a_{8i} = (a_{72})^{-1} a_{7i}$

ขั้นที่ ๕ แถวที่ (๙) ได้จากสมการ

$$a_{9i} = a_{3i} - a_{63} a_{5i} - a_{83} a_{7i}$$

จากสดมภ์ที่ ๓ จะได้

$$a_{93} = a_{33} - a_{63}a_{53} - a_{83}a_{73}$$

$$a_{94} = a_{34} - a_{63}a_{54} - a_{83}a_{74}$$

$$a_{9y} = a_{3y} - a_{63}a_{5y} - a_{83}a_{7y}$$

ขั้นที่ ๖ แถวที่ (๑๐) ได้จากสมการ $a_{10i}' = (a_{93})^{-1} a_{9i}'$

ขั้นที่ ๗ แถวที่ (๑๑) ได้จากสมการ

$$a_{11,i}' = a_{4i} - a_{64}a_{5i}' - a_{84}a_{7i}' - a_{10,4}a_{9i}'$$

จากสดมภ์ที่ ๔ นั้นคือ

$$a_{11,4} = a_{44} - a_{64}a_{54} - a_{84}a_{74} - a_{10,4}a_{94}$$

$$a_{11,y} = a_{4y} - a_{64}a_{5y} - a_{94}a_{7y} - a_{10.4}a_{9y}$$

ขั้นที่ ๘ แถวที่ (๑๒) ได้จากสมการ

$$a_{12,i'} = (a_{11,4})^{-1} a_{11,i'}$$

จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$b_4 = a_{12y}$$

$$b_3 = a_{10y} - a_{10,4}\, b_4$$

$$b_2 = a_{8y} - a_{83}b_3 - a_{84}b_4$$

$$b_1 = a_{6y} - a_{62}\, b_2 - a_{63}\, b_3 - a_{64}\, b_4$$

<u>หมายเหตุ</u>

ขั้นที่ ๑ ถึง ๘ สามารถขยายต่อไปใช้กับตัวแปรอิสสระมากกว่า ๔ ตัวได้ โดยทำต่อเป็นทีละ ๒ ขั้น (๑, ๒), (๓, ๔), (๕, ๖) และ (๗, ๘) นอกจากนี้ควรต่อสดมภ์ (S) เพื่อตรวจสอบผลบวก $S_i = \sum_{j,\ ij} a_{ij} + a_{iy}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$ ผลรวมทางสดมภ์หาได้จาก S_i's เช่นเดียวกับ a's

ถ้า $A = |a_{ii'}|$ และ $A^{-1} = C = |C_{ii'}|$ จะหา inverse matrix C ได้ดังนี้

๑. $C_{44} = (a_{11,4})^{-1}$

$$C_{34} = -C_{44}\, a_{10,4}$$

$$C_{24} = -C_{44}\, a_{84} - a_{34}\, a_{83}$$

$$C_{14} = -C_{44}\, a_{64} - C_{34}\, a_{63} - C_{24}\, a_{62}$$

๒. $C_{43} = C_{34}$

$C_{33} = (a_{93})^{-1} - C_{34}a_{10,4}$

$C_{23} = -C_{34}a_{84} - C_{33}a_{83}$

$C_{13} = -C_{34}a_{64} - C_{33}a_{63} - C_{23}a_{62}$

๓. $C_{42} = C_{24}$

$C_{32} = C_{23}$

$C_{22} = (a_{72})^{-1} - C_{24}a_{84} - C_{23}a_{83}$

$C_{12} = -C_{24}a_{64} - C_{23}a_{63} - C_{22}a_{62}$

๔. $C_{41} = C_{14}$

$C_{31} = C_{13}$

$C_{21} = C_{12}$

$C_{11} = (a_{51})^{-1} - C_{14}a_{64} - C_{13}a_{63} - C_{12}a_{62}$

<u>หมายเหตุ</u> การตรวจสอบ inverse matrix C ที่ได้ใช้หลักดังนี้

$$\sum_{i} a_{ii'} c_{ii'} = 1$$ สำหรับทุกค่าของ i'

$$\sum_{i'} a_{ii'} c_{ij'} = 1$$ สำหรับทุกค่าของ i

การหาสัมประสิทธิ์ของสมการกำลังหนึ่งเมื่อมีหลายตัวแปร วิธีนี้จะให้ผลเช่นเดียวกับคำนวณจาก Normal equation โดยตรง

ประวัติการศึกษา

นางสาวสุปราณี ธานยวาสย์ ได้รับปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิตทางฟิสิกส์ (เกียรตินิยมอันดับ ๒) จากคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. ๒๕๐๗ และเข้าเป็นนิสิตบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย ในแผนกวิจัยการศึกษา สาขาสถิติการศึกษา เมื่อเดือนมิถุนายน พ.ศ. ๒๕๑๓

ปัจจุบันรับราชการในตำแหน่งครูโท แผนกวิทยาศาสตร์ วิทยาลัยเทคนิค กรุงเทพฯ