

การเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ปัญหาของแข็งด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบปรับขนาดได้
ที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น



นายณัฐชนนทร์ ประสมสุข

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CHULALONGKORN UNIVERSITY

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2556

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)

เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR) are the thesis authors' files submitted through the University Graduate School.

IMPROVING SOLUTION ACCURACY IN STRUCTURES BY ADAPTIVE QUADRILATERAL
ELEMENTS WITH LINEAR FLUX FORMULATION

Mr. Nutchanon Prasomsuk



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CHULALONGKORN UNIVERSITY

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2013

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ปัญหาของแข็งด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบปรับขนาดได้ที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น

โดย

นายณัฐชนนท์ ประสมสุข

สาขาวิชา

วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโทมหาบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.บัณฑิต เอื้ออาภรณ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.กฤษณี มณีรัตน์)

..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์)

..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ดร.อธิพงษ์ มาลาทิพย์)

ณัฐชนนทร์ ประสมสุข : การเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ปัญหาของแข็งด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบปรับขนาดได้ที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น. (IMPROVING SOLUTION ACCURACY IN STRUCTURES BY ADAPTIVE QUADRILATERAL ELEMENTS WITH LINEAR FLUX FORMULATION) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ศ. ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 114 หน้า.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ทำการศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งในสองมิติด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ การคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจะก่อให้เกิดสมการที่อยู่ในรูปการอินทิเกรตที่ซับซ้อน วิธีการทั่วไปจึงใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์เข้ามาช่วยทำการอินทิเกรต การประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นซึ่งสมมุติการกระจายของฟลักซ์เป็นเชิงเส้นตรงเช่นเดียวกับการกระจายของผลเฉลยบนเอลิเมนต์ ทำให้สามารถทำการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบชัดแจ้งได้โดยตรง ไม่ต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขเช่นเดิม เป็นผลให้ลดเวลาในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ลง และการปรับใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ร่วมกับโปรแกรม AUTOMESH-2D เพื่อสร้างเอลิเมนต์ใหม่ โดยที่เอลิเมนต์ถูกปรับให้มีขนาดเล็กในบริเวณที่ค่าความชันของคำตอบมีการเปลี่ยนแปลงสูง และมีขนาดใหญ่ในบริเวณที่ค่าความชันของคำตอบมีการเปลี่ยนแปลงต่ำ เป็นผลให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงเพิ่มขึ้นโดยไม่ต้องใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่มากเกินไปเมื่อทำการคำนวณในครั้งถัดไป

การวิเคราะห์ปัญหาของแข็งโดยการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นและวิธีการทั่วไปจะถูกนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำโดยการวิเคราะห์ปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำและเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่คำนวณได้ การตรวจสอบประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นทำโดยการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ เปรียบเทียบกับการใช้วิธีการทั่วไป จากการตรวจสอบพบว่าการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเทียบเท่ากับวิธีการทั่วไปในขณะที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่า เมื่อใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ร่วมในกระบวนการวิเคราะห์ปัญหา ผลลัพธ์ที่ได้จะมีความเที่ยงตรงเพิ่มขึ้น แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของกระบวนการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ที่ประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ลายมือชื่อนิสิต

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ปีการศึกษา 2556

5370231821 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS: QUADRILATERAL ELEMENT / FLUX-BASED FORMULATION / ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE / NUMERICAL INTEGRATION

NUTCHANON PRASOMSUK: IMPROVING SOLUTION ACCURACY IN STRUCTURES BY ADAPTIVE QUADRILATERAL ELEMENTS WITH LINEAR FLUX FORMULATION. ADVISOR: PROF.PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D., 114 pp.

A finite element method for solving two-dimensional structural problem by using a flux-based formulation with four nodes quadrilateral element is presented. For the finite element method with the quadrilateral element, a numerical integration is needed to determine the element matrices. Conventional method uses the numerical integration such as the gauss-legendre integration. However, it requires a large computational time to calculate the element matrices. The flux-based formulation which assumes distribution of flux as linear distribution can lead to an explicit closed-form expression of the element matrices. Therefore, it requires less computational time. Moreover, an adaptive meshing technique combining with AUTOMESH-2D to generate a completely new mesh based on the solution obtained from a previous mesh is also cooperated. The new mesh will have small elements in the regions of large changes in solution gradients and larger elements in the regions where the gradient changes are small. This technique provides higher solution accuracy without too many elements for the next calculation.

Several structural problems with exact solutions are used to evaluate the efficiency of the proposed method. These results are also compared with the results calculated by using the conventional method. The flux-based formulation uses lower computational time than the conventional method while it can provide almost the same solution accuracy. The proposed method combined with the adaptive meshing technique provides a developed solution accuracy. In summary, the quadrilateral element using linear flux formulation combined with the adaptive meshing technique is an efficient method to solve two-dimensional structural problems.

Department: Mechanical Engineering Student's Signature

Field of Study: Mechanical Engineering Advisor's Signature

Academic Year: 2013

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้แก่ผู้วิจัย และยังได้แนะนำแนวทางตั้งเตือน ให้ข้อคิด รวมทั้งยังเป็นแบบอย่างที่ดีในการทำงานวิจัย ตลอดจนการดำเนินชีวิตของผู้วิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.กฤษณี มณีรัตน์ ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ และ ดร.อิพิงษ์ มาลาทิพย์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำที่มีค่าต่อการทำงานวิจัย ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ ดร.ซินหวู มา (Dr.Xinwu Ma) มหาวิทยาลัยซานตง (Shandong university) ประเทศจีน ที่กรุณาอนุเคราะห์โปรแกรม AUTOMESH-2D และการสนับสนุนที่ดีเยี่ยม ซึ่งเป็นส่วนสำคัญของงานวิจัยในครั้งนี้

ขอขอบคุณ ดร.สมบูรณ์ โอตรวรรณะ และนักวิจัยทุกท่านในห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ ช่วยในการออกแบบ ศูนย์วิจัยโลหะและวัสดุแห่งชาติ ที่ให้โอกาสผู้วิจัยในการเป็นนักศึกษาร่วมวิจัย ซึ่งทำให้ผู้วิจัยได้รับความรู้ และประสบการณ์ที่มีคุณค่ายิ่ง

ขอขอบคุณ ดร.สุธี ไตรวิวัฒนา, คุณพิชฌันทร์ โพธิคุณ และผู้ร่วมงานทุกท่าน ในห้องปฏิบัติการทางด้านกลศาสตร์การคำนวณ ที่ช่วยสอน ให้คำแนะนำ และให้ความช่วยเหลือผู้วิจัย ตั้งแต่ที่ผู้วิจัยยังเป็นผู้ที่ใหม่ งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ท้ายสุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาอันเป็นที่รักยิ่ง ที่สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัย และคอยให้กำลังใจในการทำวิจัยมาโดยตลอด อนึ่ง ประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญูตราบาแต่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญรูป.....	ญ
สารบัญตาราง.....	ฎ
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	ฏ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	3
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	4
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์.....	4
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	4
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	5
2.1 บทนำ.....	5
2.2 การคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าโดยทั่วไป.....	5
2.2.1 สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์.....	6
2.3 แนวคิดในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์โดยวิธีการ ๑.....	6
2.3.1 การอินทิเกรตโดยตรง (Analytical Solution).....	7
2.3.2 การอินทิเกรตโดยใช้โปรแกรมช่วยคำนวณ (Semi-Analytical Solution).....	7
2.3.3 การประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์ (Flux-based Formulation).....	8
2.4 บทสรุป.....	10
บทที่ 3 การวิเคราะห์ปัญหาของแข็งด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	11
3.1 ปัญหาของแข็ง.....	11
3.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของสภาวะสมดุล.....	11
3.1.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด.....	12
3.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเคลื่อนตัว.....	12

3.1.4 ความเครียดขั้นต้นที่เกิดจากความร้อน	13
3.1.5 ความเค้นระนาบและความเครียดระนาบ.....	13
3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	14
3.3 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ	15
3.4 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้หลักการของฟลักซ์.....	22
บทที่ 4 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็ง	30
4.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็งโดยวิธีการอินทิเกรตของเกาส์..	30
4.1.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม STRUCTURALQUAD.....	30
4.1.2 รายละเอียดของโปรแกรม STRUCTURALQUAD	31
4.1.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า.....	31
4.1.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์	34
4.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็งโดยวิธีฟลักซ์เชิงเส้น.....	37
4.2.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม STRUCTURALFLUX.....	37
4.2.2 รายละเอียดของโปรแกรม STRUCTURALFLUX	38
4.2.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า.....	38
4.2.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์	38
4.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับคำนวณเกรเดียนท์อันดับสอง	38
4.3.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม SECONDGRADIENT.....	38
4.3.2 รายละเอียดของโปรแกรม SECONDGRADIENT	39
4.3.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า.....	39
4.3.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์	39
บทที่ 5 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	41
5.1 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมถูกกระทำด้วยแรงดึงในแนวแกนทั้งสองข้าง	41
5.2 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่รับภาระการกระจายของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นตามยาว.....	44
5.3 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมมีรูตรงกลางที่รับแรงดึงทั้งสองด้าน	46
5.4 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่รับภาระการกระจายของอุณหภูมিবนแผ่น	49
5.5 ปัญหาคานยื่นที่รับภาระแรงเฉือนบริเวณปลายคาน	52

5.6 ปัญหาแผ่นสีเหลืองที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามยาว	53
5.7 ปัญหาวงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี	55
บทที่ 6 การตรวจสอบประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น	58
6.1 บทนำ	58
6.2 การเปรียบเทียบเมทริกซ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้บนเอลิเมนต์ลักษณะต่างๆ	58
6.3 ปัญหาทดสอบความเค้นระนาบ	60
6.4 ปัญหาแผ่นที่ใช้เอลิเมนต์ที่มีรูปร่างต่างกัน	62
6.5 ปัญหาแผ่นสีเหลืองที่ใช้เอลิเมนต์ที่บิดเบี้ยว	66
6.6 การทดสอบเวลาที่ใช้ในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ของปัญหาคานยีน	68
บทที่ 7 เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์	70
7.1 การปรับขนาดเอลิเมนต์	70
7.2 การประยุกต์ใช้การปรับขนาดเอลิเมนต์กับโปรแกรม AUTOMESH-2D	73
7.2.1 ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับปรับขนาดเอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม AUTOMESH-2D	74
บทที่ 8 การวิเคราะห์ปัญหาของแข็งร่วมกับการปรับขนาดเอลิเมนต์	76
8.1 ปัญหากล่องสีเหลืองลูกบาศก์	76
8.2 ปัญหาแผ่นรูปตัวแอล	78
8.3 ปัญหาแผ่นโลหะ	80
8.4 ปัญหาแผ่นทองเหลือง	83
8.5 ปัญหาแผ่นเหล็ก	86
8.6 ปัญหาแผ่นมีรู	90
บทที่ 9 สรุปการวิจัย ปัญหา และข้อเสนอแนะ	94
9.1 สรุปการวิจัย	94
9.2 ปัญหาที่พบ	97
9.3 ข้อเสนอแนะในการวิจัยในอนาคต	97
รายการอ้างอิง	98
ภาคผนวก	102
ภาคผนวก ก รายละเอียดเมทริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบปิด	103

ภาคผนวก ข วิธีใช้โปรแกรม AUTOMESH-2D.....	107
ภาคผนวก ค การประมาณความผิดพลาดสัมพัทธ์.....	112
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์	114



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

สารบัญรูป

หน้า

รูปที่ 1.1	เปรียบเทียบการกระจายของผลเฉลยบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม	1
รูปที่ 1.2	ตำแหน่งจุดเกาส์เมื่อใช้ 2 จุดในแต่ละทิศทาง.....	2
รูปที่ 3.1	องค์ประกอบความเค้น.....	11
รูปที่ 3.2	เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ	15
รูปที่ 3.3	การแปลงระหว่างพิกัด $x-y$ และพิกัด $\xi-\eta$	16
รูปที่ 4.1	ปัญหาคานยีน	32
รูปที่ 4.2	การแปลงแรงที่กระทำเป็นบริเวณไปสู่แรงรวมที่จุดต่อ	34
รูปที่ 5.1	ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมถูกระทำได้ด้วยแรงดึงในแนวแกนทั้งสองข้าง	41
รูปที่ 5.2	ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ของแนวเส้นตรง $y=0$	42
รูปที่ 5.3	ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ของแนวเส้นตรง $x=0$	43
รูปที่ 5.4	ค่าความเค้นในแนวแกน x ของแนวเส้นตรง $y=0$	43
รูปที่ 5.5	แผ่นสี่เหลี่ยมที่รับภาระการกระจายของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นตามยาว.....	44
รูปที่ 5.6	การกระจายของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นตามยาว.....	44
รูปที่ 5.7	ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ของแนวเส้น $y=0$	45
รูปที่ 5.8	ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ของแนวเส้น $y=5$	45
รูปที่ 5.9	แผ่นสี่เหลี่ยมมีรูตรงกลางที่รับแรงดึงทั้งสองด้าน	46
รูปที่ 5.10	เมชหยาบ (Coarse mesh).....	47
รูปที่ 5.11	เมชละเอียด (Fine mesh).....	47
รูปที่ 5.12	ความเค้นในแนวแกน x (σ_{xx}) บริเวณส่วนโค้ง.....	48
รูปที่ 5.13	ความเค้นในแนวแกน y (σ_{yy}) บริเวณส่วนโค้ง.....	48
รูปที่ 5.14	ความเค้นเฉือน (τ_{xy}) บริเวณส่วนโค้ง	49
รูปที่ 5.15	แผ่นสี่เหลี่ยมที่รับภาระการกระจายของอุณหภูมิบนแผ่น	49
รูปที่ 5.16	ความเค้นในแนวแกน x (σ_{xx}) ในแนวเส้น $x=0$	50
รูปที่ 5.17	ความเค้นในแนวแกน y (σ_{yy}) ในแนวเส้น $y=0$	51
รูปที่ 5.18	ความเค้นเฉือน (τ_{xy}) ในแนวเส้น $y=6$	51
รูปที่ 5.19	คานยีน	52
รูปที่ 5.20	ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ที่ตำแหน่ง $(x, y) = (0, 0)$	53
รูปที่ 5.21	แผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามยาว	53
รูปที่ 5.22	ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ในแนวเส้น $y=0$	54
รูปที่ 5.23	วงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี	55

รูปที่ 5.24	แบบจำลองที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า จำนวน 600 เอลิเมนต์	56
รูปที่ 5.25	ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกนรัศมี	56
รูปที่ 5.26	ค่าความเค้น (σ_r) ในแนวแกนรัศมี	57
รูปที่ 5.27	ค่าความเค้น (σ_θ) ในแนวแกนรัศมี	57
รูปที่ 6.1	เอลิเมนต์รูปร่างต่าง ๆ.....	59
รูปที่ 6.2	ปัญหาทดสอบความเค้นระนาบ.....	60
รูปที่ 6.3	แผ่นที่ใช้เอลิเมนต์ที่มีรูปร่างต่างกัน	62
รูปที่ 6.4	ความเค้นบนเอลิเมนต์ A (σ_x) ที่คำนวณได้เมื่อปัญหารับภาระแรงดิ่งกับแรงกด	63
รูปที่ 6.5	ความเค้นบนเอลิเมนต์ A (σ_y) ที่คำนวณได้เมื่อปัญหารับภาระแรงดิ่งกับแรงกด	64
รูปที่ 6.6	ความเค้นบนเอลิเมนต์ A (τ_{xy}) ที่คำนวณได้เมื่อปัญหารับภาระแรงดิ่งกับแรงกด	64
รูปที่ 6.7	ค่าการเคลื่อนที่ของจุดต่อ B (u) ที่คำนวณได้เมื่อปัญหารับภาระแรงดิ่งกับแรงกด	65
รูปที่ 6.8	ค่าการเคลื่อนที่ของจุดต่อ B (v) ที่คำนวณได้เมื่อปัญหารับภาระแรงดิ่งกับแรงกด.....	65
รูปที่ 6.9	ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่ใช้เอลิเมนต์ที่บิดเบี้ยว	66
รูปที่ 6.10	ปัญหาคานยื่น	68
รูปที่ 6.11	เปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ในแต่ละวิธี	69
รูปที่ 7.1	วิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์ของโปรแกรม AUTOMESH-2D.....	73
รูปที่ 8.1	ปัญหากล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์	76
รูปที่ 8.2	ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล	77
รูปที่ 8.3	ปัญหาแผ่นรูปตัวแอล	78
รูปที่ 8.4	ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล	79
รูปที่ 8.5	ความเค้นวอนมิสบริเวณขอบด้านใน	80
รูปที่ 8.6	ปัญหาแผ่นโลหะ	81
รูปที่ 8.7	ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล	82
รูปที่ 8.8	ความเค้นวอนมิสบริเวณขอบเอียง.....	82
รูปที่ 8.9	ปัญหาแผ่นทองเหลือง.....	83
รูปที่ 8.10	ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล	84
รูปที่ 8.11	ความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้นบนไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล	85
รูปที่ 8.12	ความเค้นวอนมิสบนขอบรอยเว้าด้านบน.....	86
รูปที่ 8.13	ปัญหาแผ่นเหล็ก	87
รูปที่ 8.14	ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล	88
รูปที่ 8.15	ความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้นบนไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล	89

รูปที่ 8.16	ความเค้นวอนมิสบนขอบโค้ง.....	90
รูปที่ 8.17	ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล	91
รูปที่ 8.18	ความเค้นวอนมิสบนส่วนโค้งที่เกิดจากรู.....	92
รูปที่ 8.19	เปรียบเทียบเวลาที่ใช้คำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์	93
รูปที่ ข.1	หน้าต่างทำงานการสร้างรูปร่างของโดเมนปัญหา	107
รูปที่ ข.2	ส่วนแสดงพิกัดจุดในการสร้างโดเมน และการแก้ไข.....	108
รูปที่ ข.3	หน้าต่างทำงานการแบ่งเอลิเมนต์.....	109
รูปที่ ข.4	หน้าต่างทำงานการปรับขนาดเอลิเมนต์	110
รูปที่ ข.5	ส่วนแสดงจุดความหนาแน่นสัมพัทธ์.....	110
รูปที่ ข.6	หน้าต่างทำงานแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์.....	111

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 6.1 ลักษณะของของเมทริกซ์เชิงเกร็งที่ได้จากวิธีฟลักซ์เชิงเส้นเปรียบเทียบกับวิธีทั่วไปโดย สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จุดเกาส์ 2 จุด ในแต่ละทิศทาง.....	60
ตารางที่ 6.2 ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากปัญหาทดสอบความเค้นระนาบ.....	61
ตารางที่ 6.3 ผลลัพธ์ที่คำนวณได้เมื่อปัญหารับภาระแรงดึงทั้งสองแรง	63
ตารางที่ 6.4 ค่าการเคลื่อนที่ที่จุดต่อ C ที่คำนวณได้จากโปรแกรมทั้งสอง.....	67
ตารางที่ 6.5 ค่าความเค้นที่เอลิเมนต์ D ที่คำนวณได้จากโปรแกรมทั้งสอง.....	67
ตารางที่ 8.1 เปรียบเทียบความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้นที่จุดซิงกูลาริตี.....	78
ตารางที่ 8.2 เปรียบเทียบความผิดพลาดสัมพัทธ์ที่เกิดขึ้น.....	92



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

คำอธิบายสัญลักษณ์

A	พื้นที่
d_i	ความหนาแน่นสัมพัทธ์
d_{\max}	ความหนาแน่นสัมพัทธ์ที่มากที่สุด
E	โมดูลัสของความยืดหยุ่น
e	ความผิดพลาดของผลลัพธ์
$\{F\}$	โหนดเวกเตอร์
h	ขนาดโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์
h_{\max}	ขนาดโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์ที่ใหญ่ที่สุด
$[J]$	จาโคเบียนเมทริกซ์
$[K]$	เมทริกซ์สัมประสิทธิ์
NG	จำนวนจุดเกาส์ที่ใช้ในแต่ละทิศทาง
N_i	ฟังก์ชันการประมาณภายใน
n_x	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x
n_y	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน y
R	เศษตกค้าง
s	เส้นรอบขอบเขตการคำนวณ
$T(x, y)$	อุณหภูมิที่ตำแหน่ง (x, y)
T_0	อุณหภูมิที่ไม่เกิดความเค้น
T_x	ภาระแรงที่กระทำที่ผิวในแนวแกน x
T_y	ภาระแรงที่กระทำที่ผิวในแนวแกน y
u	ระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน x
v	ระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน y
W	ฟังก์ชันน้ำหนัก
x	ระยะในแนวราบ
y	ระยะในแนวตั้ง

α	ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวจากความร้อน
Γ	บริเวณขอบของเขตการคำนวณ
γ	ความเครียดเฉือน
$\{\delta\}$	เวกเตอร์ระยะการเคลื่อนตัว
ε	ความเครียดในแนวตั้งฉาก
ε_0	ความเครียดเริ่มต้นที่เกิดจากความร้อน
η	ระยะในแนวราบของพิกัดฐานธรรมชาติ, ค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์
θ	มุมมอง
λ	ตัวแปรในการปรับขนาดเอลิเมนต์
ν	อัตราส่วนปัวส์ซอง
ξ	ระยะในแนวตั้งของพิกัดฐานธรรมชาติ
σ	ความเค้นในแนวตั้งฉาก
τ	ความเค้นเฉือน
ϕ	ตัวแปรใดๆ
$\phi^{(e)}$	ตัวแปรใดๆ ที่กระจายตัวบนเอลิเมนต์
$\hat{\phi}^{(e)}$	ตัวแปรใดๆ ที่กระจายตัวแบบแผ่นเรียบบนเอลิเมนต์
Ω	โดเมนของขอบเขตการคำนวณ

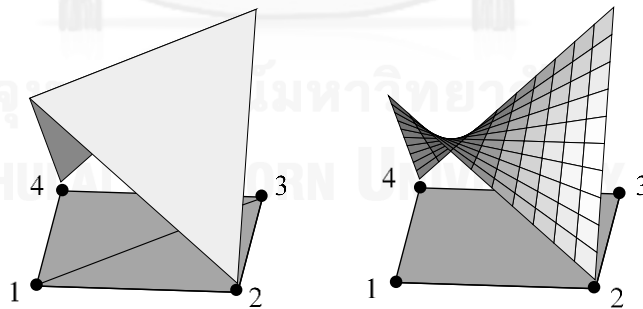
บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิธานิพนธ์

ในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งในสภาวะสมดุล สมการเชิงอนุพันธ์สภาวะสมดุล (Equilibrium equation) ซึ่งอธิบายถึงลักษณะทางกายภาพของความสมดุลของของแข็งโดยทั่วไป จะถูกนำมาพิจารณา ประกอบกับต้องทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา รวมทั้งภาระที่กระทำกับของแข็งที่ชัดเจน และเนื่องจากปัญหาในทางปฏิบัติโดยทั่วไป รูปร่างของปัญหาจะเป็นรูปร่างที่มีความซับซ้อน ทำให้การวิเคราะห์ปัญหาของแข็งด้วยการคำนวณโดยตรง (Analytical method) มีความยากลำบาก และอาจจะไม่สามารถทำได้

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกพัฒนาขึ้นมาเพื่อช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งนี้ จนเป็นที่ยอมรับและแพร่หลายอย่างมากในปัจจุบัน เพราะสามารถนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้โดยสะดวก และให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง ถูกต้องใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact solution) ที่ได้จากการคำนวณโดยตรง โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีการคำนวณผลเฉลยโดยประมาณ (Approximate solution) ซึ่งอาศัยการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นส่วนเล็กๆ หรือเรียกว่าเอลิเมนต์ จากนั้นทำการสมมุติการกระจายของผลเฉลยบนเอลิเมนต์ และทำการคำนวณหาผลลัพธ์ออกมาที่จุดต่อของเอลิเมนต์ ซึ่งความเที่ยงตรงของผลเฉลยโดยประมาณนี้ขึ้นอยู่กับการสมมุติการกระจายของผลเฉลยบนเอลิเมนต์ และขนาดของเอลิเมนต์



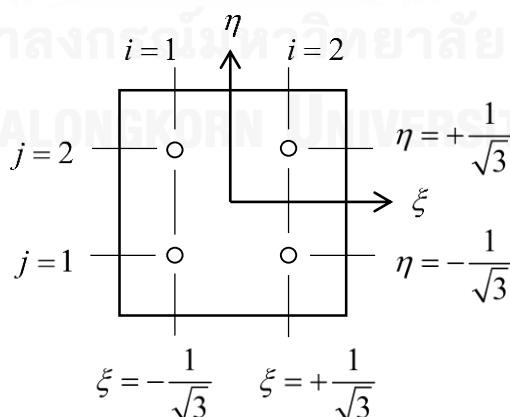
(ก) เอลิเมนต์สามเหลี่ยม

(ข) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม

รูปที่ 1.1 เปรียบเทียบการกระจายของผลเฉลยบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม

ในปัญหาสองมิติ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะได้รับความนิยมในการนำมาใช้สร้างแบบจำลองของปัญหา เพราะสามารถสร้างบนปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ง่าย และการดำเนินการในระเบียบวิธีไฟ

ไนต์เอลิเมนต์มีความสะดวก แต่เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ จะใช้การสมมุติการกระจายของผลเฉลยเป็นแผ่นเรียบ (Flat plane) ทำให้เมื่อเปรียบเทียบกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อแล้ว เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะแสดงลักษณะของการกระจายของผลเฉลยได้สมจริงมากกว่าเนื่องจากใช้การสมมุติการกระจายของผลเฉลยเป็นเชิงเส้นคู่ (Bilinear) ซึ่งมีลักษณะโค้งมนบนเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 1.1 ทำให้สามารถจำลองลักษณะของการกระจายของผลเฉลยของปัญหาให้มีความสมจริงมากกว่า จึงอาจพิจารณาได้ว่าการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะดีกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยม แต่การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน จำเป็นจะต้องใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า หรือเรียกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใดๆ (Quadrilateral element) [1] เพื่อให้สามารถแบ่งรูปร่างปัญหาที่ซับซ้อนได้ใกล้เคียงมากที่สุด ซึ่งการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า นี้ ทำให้การดำเนินการในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความยุ่งยากขึ้น การสร้างเมทริกซ์แข็งเกร็งของแต่ละเอลิเมนต์จำเป็นต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical integration) เข้ามาช่วย โดยวิธีที่ได้รับความนิยมคือการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ซึ่งมีข้อดีคือให้ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์การอินทิเกรตตามจำนวนจุดเกาส์ที่เลือกใช้ (NG) โดยที่จะก่อให้เกิดผลเฉลยแม่นยำตรงจากการอินทิเกรตฟังก์ชัน $y(x)$ ซึ่งอยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) ที่มีอันดับ $2NG-1$ หรือต่ำกว่านั้น สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมนี้ นิยมใช้จุดเกาส์จำนวน 2 จุดในแต่ละทิศทาง รวมทั้งสิ้นจึงเป็น 2×2 จุดในแต่ละเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 1.2 แต่วิธีนี้จะมีข้อเสียคือใช้เวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้นตามจำนวนจุดเกาส์ที่เลือกใช้ และไม่ก่อให้เกิดผลลัพธ์แม่นยำตรงสำหรับเอลิเมนต์ด้านไม่เท่าทั่วไป [2, 3] จึงเป็นสาเหตุให้มีความพยายามที่จะปรับปรุงการดำเนินการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า เพื่อหลีกเลี่ยงการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขนี้ ซึ่งจะช่วยให้ลดเวลาในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็งลง โดยประยุกต์ใช้หลักการของพลักซ์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 1.2 ตำแหน่งจุดเกาส์เมื่อใช้ 2 จุดในแต่ละทิศทาง

การปรับปรุงความเที่ยงตรงของผลลัพธ์นอกจากจะปรับปรุงที่กระบวนการคำนวณภายในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว ยังสามารถทำการปรับปรุงหลังจากกระบวนการคำนวณของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้อีกด้วย เนื่องจากหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ และคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณบนจุดต่อของเอลิเมนต์ ดังนั้นลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์บนรูปร่างของปัญหา จึงมีความสำคัญส่งผลกระทบต่อความเที่ยงตรงของผลเฉลยโดยประมาณที่คำนวณได้ เช่นการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่เกินไปบนบริเวณที่ผลเฉลยแม่นยำตรงมีการเปลี่ยนแปลงสูง หรือซับซ้อน จะทำให้ได้ผลเฉลยโดยประมาณที่ผิดพลาดไปมาก เพราะเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ก็จะทำให้บริเวณนั้นมีการสมมุติการกระจายของผลเฉลยเป็นบริเวณกว้างด้วย ไม่อาจจะแสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่สูง หรือซับซ้อนได้ แต่หากใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กมากเกินไป ก็จะทำให้ต้องใช้จำนวนเอลิเมนต์เป็นจำนวนมาก ส่งผลให้ใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น ดังนั้นจึงต้องใช้ขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรง แต่ใช้เวลาในการคำนวณที่เหมาะสม

การแบ่งรูปร่างของปัญหาในครั้งแรกจะใช้ประสบการณ์ของผู้ที่ทำการวิเคราะห์ปัญหาเป็นสำคัญ โดยเลือกใช้ขนาดและลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์บนรูปร่างตามการคาดการณ์ลักษณะของผลเฉลยแม่นยำตรงที่ว่าจะเกิดขึ้น แต่เมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว อาจจะได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด การปรับขนาดเอลิเมนต์จึงเข้ามามีบทบาทสำคัญที่จะปรับลักษณะของเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับปัญหานั้นๆ เพื่อให้การคำนวณครั้งถัดไป ได้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จึงได้นำเสนอการปรับปรุงประสิทธิภาพของการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ เพื่อหลีกเลี่ยงการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข ซึ่งจะทำให้ลดเวลาในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็งลง และใช้การปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ในการคำนวณครั้งถัดไป

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1. ศึกษาการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งในสองมิติ ที่ใช้สมการสภาวะสมดุล (Equilibrium equation) เป็นสมการอธิบายลักษณะทางกายภาพของปัญหา ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
2. ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์ สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาของแข็งในสองมิติที่อยู่ในสภาวะสมดุล
3. ศึกษาและประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. ศึกษาถึงพฤติกรรมของปัญหาของแข็งภายใต้สภาวะสมดุลในสองมิติ
2. ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในปัญหาของแข็งมีลักษณะยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear elastic)
3. ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์ สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ
4. ประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์

1. ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งภายใต้สภาวะสมดุลในสองมิติ
2. ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ
3. ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์ สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ
4. ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ศึกษา
5. ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไป
6. ประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้
7. จัดทำรายงานเพื่อนำเสนอ สรุปผล และอภิปรายผลวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. มีความเข้าใจในการวิเคราะห์ปัญหาทางด้านของแข็งในสองมิติ โดยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ
2. มีความเข้าใจในการประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
3. มีความเข้าใจในการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์
4. โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น สามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาทางด้านของแข็งในสองมิติได้
5. เป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทนำ

การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ทำให้เกิดความยุ่งยากในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ เนื่องจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้คำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์นั้นอยู่ในรูปการอินทิเกรตที่มีความซับซ้อน ทำให้การอินทิเกรตโดยตรงทำได้ยาก การคำนวณโดยทั่วไปจึงใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข โดยใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ อย่างไรก็ตามความน่าสนใจของการเลือกใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ทำให้เกิดแนวคิดมากมายที่พยายามจัดการกับความซับซ้อนของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่านี้ เพื่อให้สามารถทำการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ได้สะดวกขึ้น โดยไม่ต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขเช่นวิธีการทั่วไป

การศึกษาการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าโดยทั่วไป และแนวคิดต่างๆ ในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ด้วยวิธีอื่นๆ รวมทั้งการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์ จะทำให้เข้าใจในแนวคิดต่างๆ และตระหนักถึงประโยชน์และความสำคัญของการพัฒนาการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ โดยเฉพาะการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้น ซึ่งถูกเลือกใช้ในงานวิจัยนี้

2.2 การคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าโดยทั่วไป

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทั่วไป การคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์จะต้องทำการอินทิเกรตบนเอลิเมนต์นั้นๆ สำหรับปัญหาของแข็ง สมการที่ทำการอินทิเกรตเพื่อคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$[K] = \int_V [B]^T [C][B] dV \quad (2.1)$$

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า นั้น สามารถวางตัวอยู่บนรูปร่างของปัญหาที่ซับซ้อนได้ดี แต่การคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์ซึ่งต้องทำการอินทิเกรตบนพื้นที่ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า นั้นมีความซับซ้อนมาก จึงทำการแปลงรูปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าซึ่งอยู่ในพิกัด $x - y$ ให้ไปอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในพิกัดธรรมชาติ $\xi - \eta$ พิกัดธรรมชาตินี้มีลิมิตจาก -1 จนถึง +1 ซึ่งทำให้ง่ายต่อการอินทิเกรต ทำให้สมการการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์แปลงมาอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [C][B(\xi, \eta)] t |J| d\xi d\eta \quad (2.2)$$

จากนั้นสามารถใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์กับสมการ (2.2) ได้โดยตรง ทำให้การคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์สามารถคำนวณได้ง่ายจากสมการดังนี้

$$[K] = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} [B(\xi_i, \eta_j)]^T [C][B(\xi_i, \eta_j)] t |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (2.3)$$

แต่จากสมการ (2.3) จะพบว่า สมการอยู่ในรูปของผลรวม (Summation) ของการคูณกันของเมทริกซ์และค่าต่างๆ ซึ่งจำนวนพจน์ของผลรวมนั้นขึ้นอยู่กับจำนวนจุดเกาส์ที่เลือกใช้ เช่น เลือกใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุด ดังนั้นจำนวนพจน์ของผลรวมที่จะต้องคำนวณจึงมีทั้งหมด 4 พจน์ ซึ่งทำให้จะต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก และยิ่งมากขึ้นเมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์มากขึ้น

อนึ่ง รายละเอียดการคำนวณโดยละเอียดแสดงในบทที่ 3

2.2.1 สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์

สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์เป็นวิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขที่นิยมใช้กันมากวิธีหนึ่ง เนื่องจากสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง มีลักษณะสมการดังนี้

$$\int_{-1}^1 y(x) dx \cong \sum_{i=1}^{NG} W_i y(x_i) \quad (2.4)$$

โดย $y(x)$ คือ ฟังก์ชันที่ต้องการทำการอินทิเกรต

NG คือ จำนวนจุดเกาส์ที่ใช้

W_i คือ น้ำหนัก (Weight)

x_i คือ ตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss point locations)

สูตรการอินทิเกรตนี้สามารถใช้ได้กับฟังก์ชันทั่วไป แต่ผลลัพธ์ของการอินทิเกรตจะมีความเที่ยงตรงมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชันที่ต้องการทำการอินทิเกรต และจำนวนจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรตนั้น ซึ่งหากทำการอินทิเกรตฟังก์ชันพหุนามที่มีอันดับ $2NG-1$ หรือต่ำกว่านั้น จะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่เป็นผลเฉลยแม่นยำตรง [4]

2.3 แนวคิดในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์โดยวิธีการ ๓

เนื่องจากสมการการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ติดอยู่ในรูปการอินทิเกรต ดังนั้นจุดมุ่งหมายโดยทั่วไปคือหาผลลัพธ์จากสมการอินทิเกรตนี้ เพื่อให้สามารถทำการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ได้โดยตรง ไม่ต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขเข้ามาช่วยเช่นเดิม

2.3.1 การอินทิเกรตโดยตรง (Analytical Solution)

เริ่มแรกนั้นได้มีความพยายามที่จะทำการอินทิเกรตโดยตรง (Analytical solution) เพื่อคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์ โดยในปี 1980 Okabe [5] ได้เสนอการประดิษฐ์สมการแบบชัดแจ้ง (Explicit form) ที่ได้จากการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ ที่เป็นไอโซพารามเมตริกซ์เอลิเมนต์ สำหรับรูปสี่เหลี่ยมในบางรูปแบบ แต่ตัวสมการมีความซับซ้อนมาก

จากนั้นในปี 1984 Badu and Pinder [6] ได้ปรับปรุงสมการต่อจาก Okabe ให้ลดความซับซ้อนของสมการที่มีฟังก์ชันลอการิทึมอยู่ออกไป และพบว่าใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข อีกทั้งผลลัพธ์ที่ได้ยังมีความเที่ยงตรงมากกว่าการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองส์ที่ 2×2 จุดเกาส์ เมื่อเปรียบเทียบกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่สร้างขึ้นภายในวงกลม

จากนั้นในปี 1986 Mizukami [7] ก็ได้เสนอสมการการอินทิเกรตที่มีความซับซ้อนลดน้อยลงอีก ซึ่งพบว่าสามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมได้ง่ายขึ้น และจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข แต่ไม่ได้แสดงผลการเปรียบเทียบใดๆ โดยสมการประดิษฐ์ขึ้นมาจากสมมติฐานของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านขนาน แต่เมื่อนำไปใช้กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ก็ให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเทียบเท่ากับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองส์ที่ 2×2 จุดเกาส์

จากนั้นในปี 1987 Rathod [8] ก็ได้เสนอการประดิษฐ์สมการจากการอินทิเกรตโดยตรง สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยการจัดกลุ่มให้อยู่ในรูปการอินทิเกรตอย่างง่าย 4 พจน์ ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเทียบเท่ากับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองส์ที่ 6×6 จุดเกาส์

นอกจากนั้นยังมีงานวิจัยอีกหลายงาน [9-11] ที่ศึกษาการประดิษฐ์สมการจากการอินทิเกรตโดยตรง แต่ตัวสมการยังประกอบอยู่ในรูปของฟังก์ชันต่าง ๆ ที่มีความซับซ้อน ซึ่งทำให้การประดิษฐ์โปรแกรมเกิดความยุ่งยากอยู่

2.3.2 การอินทิเกรตโดยใช้โปรแกรมช่วยคำนวณ (Semi-Analytical Solution)

แม้จะมีการเสนอแนวคิดการประดิษฐ์สมการจากการอินทิเกรตโดยตรงแล้ว แต่แนวคิดต่างๆ ก็ยังไม่ได้รับความนิยมเท่าใดนัก การอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองส์ยังเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมโดยทั่วไป ต่อมาเมื่อโปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic manipulation) ได้ถูกประดิษฐ์ขึ้น ความสามารถของโปรแกรมในการคำนวณสมการคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปตัวแปร และการจัดพจน์สมการได้ถูกนำมาใช้

ในปี 1989 Kikuchi [12] ได้นำโปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ มาใช้คำนวณหาสมการทั่วไปของการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ ในรูปร่างบิดเบี้ยวต่างๆ เปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองส์ที่จำนวนจุดเกาส์ต่างๆ ผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงมากกว่า โดยเฉพาะเอลิเมนต์ที่บิดเบี้ยวไปมาก แต่เนื่องจากสมการที่ได้มีความยาวและซับซ้อนมาก วิธีนี้จึงใช้เวลาในการคำนวณมากตามไปด้วย

จากนั้นในปี 1990 Yagawa et al. [13] ก็ได้เสนอการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ร่วมกับโปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ช่วยในการอินทิเกรต และการจัดพจน์สมการเพื่อให้ง่ายต่อการประดิษฐ์โปรแกรม ซึ่งผลลัพธ์ให้ความเที่ยงตรงเทียบเท่ากับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ที่ 2×2 จุดเกาส์ แต่ใช้เวลาในการคำนวณเพียง 15% ของการคำนวณโดยสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมคางหมูแบบสี่จุดต่อ

และในปี 1994 Griffiths [14] ก็ได้เสนอการจัดสมการที่ได้จากสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ที่ 2×2 จุดเกาส์ สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าสี่จุดต่อ โดยใช้การสังเกตลักษณะของรูปแบบของผลลัพธ์ของเอลิเมนต์เมทริกซ์ และใช้โปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ช่วยในการจัดรูปสมการ ซึ่งช่วยให้ได้สมการที่อยู่ในรูปแบบปิด สามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมได้โดยง่าย และใช้เวลาในการคำนวณที่น้อยลงถึง 5 เท่า เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์

จากนั้นในปี 1996 Videla et al. [15] ได้เสนอวิธีการจัดสมการที่ได้จากแปลงพิกัดสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าสี่จุดต่อ และใช้โปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ช่วยในการอินทิเกรตและจัดรูปสมการ ซึ่งช่วยให้ลดเวลาการคำนวณไป 64% เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุดเกาส์ และ 166% เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 3×3 จุดเกาส์ ในขณะที่ผลลัพธ์มีความเที่ยงตรงเทียบเท่าการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ที่ 3×3 จุดเกาส์

จากนั้นในปี 2005 Lozada et al. [16] ได้นำวิธีของ Griffiths (1994) มาปรับปรุงให้ใช้เอลิเมนต์ที่มีอันดับสูงขึ้นได้ โดยประดิษฐ์สมการของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบ 8 จุดต่อ ซึ่งพบว่าช่วยลดเวลาการคำนวณไปสูงสุด 37% เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุดเกาส์ วิธีของ Griffiths นี้ได้รับความนิยมและถูกนำมาปรับปรุงต่อเป็นจำนวนหลายครั้ง เช่น ในปี 2006 Zhou and Vecchio [17] ทำการปรับปรุงโดยจัดรูปสมการใหม่ซึ่งส่งผลให้ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่า Griffiths แต่ได้ผลลัพธ์ที่เหมือนกัน

หลังจากนั้น วิธีการต่าง ๆ ได้ถูกพัฒนาต่อเพื่อใช้กับเอลิเมนต์ที่มีอันดับสูงขึ้น และเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาในลักษณะต่างๆ เช่น ในปี 2007 Videla et al. [18] ได้พัฒนาวิธีที่เคยเสนอไว้ในปี 1996 ช่วยในการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบ 8 จุดต่อ ซึ่งลดเวลาในการคำนวณได้มากถึง 50% และในปี 2009 Lozada et al. [19] ก็ได้นำวิธีที่เคยเสนอไว้ในปี 2005 มาวิเคราะห์ปัญหาที่มีความสมดุกรอบแกน

2.3.3 การประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์ (Flux-based Formulation)

การประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์นั้นเป็นอีกวิธีการหนึ่ง ซึ่งสามารถทำให้สมการการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์แปลงมาอยู่ในรูปแบบปิด (Closed form) จึงสามารถคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ได้โดยตรง วิธีฟลักซ์ได้รับแนวคิดเริ่มต้นมาจากระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน (Taylor-Galerkin method) ที่ใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของสมการการพา (Convection equation) ซึ่งเสนอโดย Donea [20] ในปี 1984

จากนั้นในปี 1985 Bey et al. [21] ได้นำระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาลอร์คินนี้ มาใช้ในการคำนวณปัญหาการไหลแบบไม่หนืด โดยจัดสมการที่เกี่ยวข้องกับการไหลให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ (Conservative form)

$$\frac{d\{U\}}{dt} + \frac{d\{E\}}{dx} + \frac{d\{F\}}{dy} = 0 \quad (2.5)$$

ซึ่งเวกเตอร์ที่อยู่ในสมการอนุพันธ์ คือ พลักซ์ของส่วนประกอบต่างๆ เช่น มวล โมเมนตัม พลังงาน เป็นต้น เมื่อใช้ระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาลอร์คิน ในขั้นตอนหนึ่งของระเบียบวิธีจะต้องทำการคำนวณ พลักซ์บนเอลิเมนต์ ทำให้ต้องทำการสมมุติการกระจายตัวของพลักซ์บนเอลิเมนต์

$$\{U\}^{\text{element}} = [N]\{U\}^{\text{nodes}} \quad (2.6ก)$$

$$\{E\}^{\text{element}} = [N]\{E\}^{\text{nodes}} \quad (2.6ข)$$

$$\{F\}^{\text{element}} = [N]\{F\}^{\text{nodes}} \quad (2.6ค)$$

และจากการจัดรูปสมการการคำนวณดิเทอร์มิแนนต์ของจาโคเบียนเมทริกซ์ เป็นผลทำให้สมการการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปการอินทิเกรต สามารถแปลงให้อยู่ในเมทริกซ์รูปแบบปิดได้ ทำให้การคำนวณทำได้โดยตรง เป็นผลให้สามารถทำการคำนวณได้รวดเร็ว ระเบียบวิธีเดียวกันนี้ ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาความร้อนกับโครงสร้างแบบไม่เชิงเส้นที่ขึ้นกับเวลา (Transient nonlinear thermal-structural problem) สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ โดย Thornton and Dechaumphai [22] ในปี 1986 ซึ่งพบว่าช่วยลดเวลาในการคำนวณแทนการคำนวณสมการที่อยู่ในรูปการอินทิเกรตเดิมประมาณ 50%

จากนั้นวิธีพลักซ์ซึ่งได้รับแนวคิดมาจากระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาลอร์คิน ได้รับการกล่าวถึงและทำให้เด่นชัดขึ้น โดยการนำแนวคิดของการสมมุติการกระจายของพลักซ์บนเอลิเมนต์และการจัดรูปสมการการคำนวณดิเทอร์มิแนนต์ของจาโคเบียนเมทริกซ์แยกออกมาใช้ สำหรับทำการวิเคราะห์ปัญหาความร้อนกับโครงสร้างที่อยู่ตัวโดย Pandey et al. [23] ในปี 1989 ทำให้เห็นถึงความสามารถและประโยชน์ของวิธีพลักซ์ที่เด่นชัดขึ้น ซึ่งแต่เดิมนั้นเป็นส่วนหนึ่งของระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาลอร์คินในการวิเคราะห์ปัญหาที่ไม่อยู่ตัว โดยพบว่า สามารถประหยัดเวลาที่ใช้ในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ 39% สำหรับปัญหาสองมิติโดยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า และ 78% สำหรับปัญหาสามมิติโดยเอลิเมนต์ทรงหกหน้า เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีทั่วไปซึ่งใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขในการคำนวณสมการที่อยู่ในรูปการอินทิเกรต

จากนั้นในปี 1992 Polesky [24] ได้นำข้อดีของวิธีพลักซ์ ซึ่งสามารถลดความซับซ้อนของสมการการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปการอินทิเกรตให้แปลงมาอยู่ในเมทริกซ์รูปแบบปิดได้ ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาความร้อนกับโครงสร้างที่อยู่ตัว ที่ใช้กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ ซึ่งใช้การประมาณภายในเอลิเมนต์เป็นฟังก์ชันอันดับสอง โดยปกติแล้วการคำนวณเอลิเมนต์ชนิดนี้จะทำให้เกิดสมการการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปการอินทิเกรตที่มีความซับซ้อนเป็นอันมาก ซึ่ง Polesky ไม่ได้แสดงเวลาที่ใช้ในการคำนวณ แต่แสดงให้เห็นถึงความเที่ยงตรงของผลลัพธ์

ที่ดีขึ้นเมื่อใช้เอลิเมนต์ชนิดนี้ ซึ่งวิธีฟลักซ์มีส่วนสำคัญในการลดความซับซ้อนของสมการการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่เกิดจากเอลิเมนต์ชนิดนี้

คุณสมบัติของวิธีฟลักซ์ ทำให้มีการนำไปประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดสมการซึ่งอยู่ในรูปการอินทิเกรตที่ซับซ้อนอีกหลายปัญหา เช่น Phongthanapanich et al (2006) [25, 26] และ Traivivatana et al. (2009) [27] ใช้สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ที่ใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอันดับสอง และ Phongthanapanich and Dechaumphai (2008) [28, 29] ใช้สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็งและปัญหาความร้อนร่วมกับของแข็ง โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ที่ใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอันดับสอง

จะเห็นได้ว่าการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์นั้น นอกจากจะสามารถหลีกเลี่ยงการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขแล้ว ข้อดีอีกประการหนึ่งคือ สามารถใช้กับเอลิเมนต์ได้หลายชนิด โดยใช้หลักการเดียวกัน ซึ่งกระบวนการในการประดิษฐ์สมการนั้นไม่ซับซ้อน และผลลัพธ์ที่ได้สามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ง่าย

2.4 บทสรุป

จากงานวิจัยที่ผ่านมา จะเห็นได้ว่าความพยายามเพื่อหลีกเลี่ยงการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขได้รับความสนใจมาเป็นเวลานานแล้ว และการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์ก็เป็นอีกแนวทางหนึ่งที่สามารถหลีกเลี่ยงการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขได้ โดยมักจะนำมาใช้กับเอลิเมนต์ที่มีฟังก์ชันการกระจายตัวของผลเฉลยที่ซับซ้อน แต่ไม่ได้นำเสนอประสิทธิภาพด้านความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้มากนัก วิทยานิพนธ์นี้จึงได้นำการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์มาใช้กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ ซึ่งใช้ฟังก์ชันการกระจายตัวของผลเฉลยเป็นเชิงเส้นตรง สำหรับทำการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งที่ไม่ซับซ้อน เพื่อศึกษาประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น เปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์โดยทั่วไป

บทที่ 3

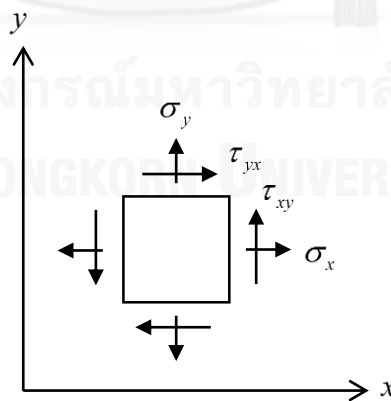
การวิเคราะห์ปัญหาของแข็งด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

3.1 ปัญหาของแข็ง

สำหรับปัญหาของแข็งที่จะใช้ในการวิเคราะห์นั้น จะถูกกำหนดให้เป็นปัญหาสองมิติในสถานะคงตัว (Steady state) ของวัสดุเนื้อเดียว (Homogeneous material) ที่รับภาระคงตัวจากแรงภายนอก (External force) คือ แรงที่กระทำที่จุด หรือแรงที่กระทำเป็นบริเวณ หรือรับภาระจากความแตกต่างของอุณหภูมิบนวัตถุ โดยวัตถุจะถูกจับยึดในรูปแบบต่างๆ ปัญหานี้จะอยู่ในสภาวะสมดุล ซึ่งถูกอธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ของสภาวะสมดุล โดยไม่คำนึงน้ำหนักของตัวเอง และถูกวิเคราะห์ในช่วงที่มีความยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear elastic) เพื่อแสดงการเคลื่อนตัว และความเค้นที่เกิดขึ้นบนวัตถุ

3.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของสภาวะสมดุล

หากพิจารณาจุดๆ หนึ่งบนหน้าตัดของวัตถุชิ้นหนึ่งที่ถูกแรงภายนอกมากระทำ และอยู่ในสภาวะสมดุล ความเค้นที่จุดใดจุดหนึ่งบนหน้าตัดของวัตถุจะหมายถึง แรงภายในต่อหน่วยพื้นที่ของจุดนั้นที่รับแรง โดยความเค้นสามารถแบ่งชนิดที่เกิดขึ้นได้ 2 ชนิดคือ ความเค้นในแนวแกน (Normal stress, σ) ที่กระทำตั้งฉากกับพื้นที่ และความเค้นเฉือน (Shear stress, τ) ที่กระทำในแนวสัมผัสกับพื้นที่ ดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 องค์ประกอบความเค้น

ความสมดุลของของแข็งที่มีการยึดหยุ่นได้ในสองมิติ เมื่อไม่คิดน้ำหนักของตัวเอง สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ดังนี้ [30]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

โดย

σ_x, σ_y แทนความเค้นในแนวแกน x, y ตามลำดับ

τ_{xy}, τ_{yx} แทนความเค้นเฉือน ซึ่ง $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ เพราะวัตถุอยู่ในสภาวะสมดุล ไม่เกิดการหมุน

การหมุน

3.1.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในสองมิติ สำหรับปัญหาที่มีความเครียดขึ้นต้นจากความร้อน สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon - \varepsilon_0\} \quad (3.2)$$

โดย

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$[C]$ คือ เมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Elasticity matrix) ซึ่งสำหรับปัญหาสองมิติ ขึ้นอยู่กับการสมมุติลักษณะของปัญหาว่าเป็นลักษณะความเค้นระนาบ หรือความเครียดระนาบ

$\{\varepsilon_0\}$ คือ ความเครียดขึ้นต้นที่เกิดจากความร้อน

3.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเคลื่อนตัว

หากพิจารณาจุดๆ หนึ่งบนหน้าตัดในวัตถุชิ้นหนึ่ง ความเครียดที่จุดใดจุดหนึ่งบนหน้าตัดของวัตถุ คือ การเสียรูปของวัตถุอันเนื่องมาจากภาระต่างๆ เช่น แรงที่มากระทำ หรืออุณหภูมิ เป็นต้น ความเครียดสามารถแบ่งได้ 2 ชนิด คือ ความเครียดในแนวแกน (Normal strain, ε) และความเครียดเฉือน (Shear strain, γ) โดยความเครียดในแนวแกน คือ การเสียรูปยืด-หด ตามแนวแกน จากแรงภายในที่กระทำตั้งฉากกับหน้าตัด และความเครียดเฉือน คือ การเสียรูปเชิงมุมของวัตถุจากแรงที่ขนานกับหน้าตัด หากแทนการเคลื่อนที่ด้วย u, v ในแนวแกน x, y ตามลำดับ สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนที่ในสองมิติ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.3)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\{\varepsilon\} = [L]\{\bar{\delta}\} \quad (3.4)$$

โดย

$$[L]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \{\bar{\delta}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

3.1.4 ความเครียดขั้นต้นที่เกิดจากความร้อน

หากมีภาระอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆ บนวัสดุไม่เท่ากันแล้ว วัสดุจะเกิดการยืด-หด ในแต่ละตำแหน่งไม่เท่ากัน ซึ่งทำให้เกิดความเครียดเกิดขึ้นบนวัสดุ สำหรับความเครียดของวัสดุที่เกิดจากภาระอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆ บนวัสดุไม่เท่ากันนั้น สามารถเขียนความสัมพันธ์กับอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆ ได้ดังนี้ [31]

$$\{\varepsilon_0\} = \{\alpha\}(T(x, y) - T_0) \quad (3.5)$$

โดย

$\{\alpha\}$ คือ เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวจากความร้อน (Coefficient of linear thermal expansion) ซึ่งสำหรับปัญหาสองมิติ ขึ้นอยู่กับการสมมุติลักษณะของปัญหาว่าเป็นลักษณะความเค้นระนาบ หรือความเครียดระนาบ

$T(x, y)$ คือ อุณหภูมิที่ตำแหน่งนั้นๆ

T_0 คือ อุณหภูมิเริ่มต้นของวัตถุซึ่งถือว่าไม่มีความเค้น

3.1.5 ความเค้นระนาบและความเครียดระนาบ

ปัญหาในทางปฏิบัติซึ่งเป็นปัญหาในสามมิตินั้น ในบางลักษณะสามารถจำลองให้อยู่ในสองมิติได้เพื่อความง่ายในการวิเคราะห์ปัญหา เช่น ปัญหาที่มีลักษณะเป็นแผ่นที่มีความหนาเท่ากันตลอดทั้งแผ่น หรือปัญหาเขื่อนที่มีรูปร่างหน้าตัดแบบเดียวกันตลอดความยาวเขื่อน การสมมุติลักษณะของปัญหาในสองมิติสามารถแยกได้เป็น 2 แบบ คือ ความเค้นระนาบ (Plane stress) และ ความเครียดระนาบ (Plane strain) [32]

ความเค้นระนาบ

ลักษณะของปัญหาความเค้นในระนาบ คือ การสมมุติให้ความเค้นในแนวแกนลึกเท่ากับศูนย์ ($\sigma_z = 0$) ในกรณีของความเค้นในระนาบนี้

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

โดย

E คือ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (Young's modulus)

ν คือ ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง (Poisson's ratio)

α คือ ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวจากความร้อน (Coefficient of linear thermal expansion)

ความเครียดระนาบ

ลักษณะของปัญหาความเครียดระนาบ คือ การสมมุติให้ความเครียดในแนวแกนลึกเท่ากับศูนย์ ($\varepsilon_z = 0$) ในกรณีของความเครียดในระนาบนี้

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha(1+\nu) \\ \alpha(1+\nu) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็น ส่วนเล็กๆ เรียกว่า เอลิเมนต์ และคำนวณแต่ละเอลิเมนต์เหล่านี้ตลอดทั้งปัญหา โดยผลลัพธ์จะอยู่บน จุดต่อของเอลิเมนต์ การคำนวณจะเริ่มจากการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์ โดยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ สมการที่ได้จากการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์และสมการอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ จากนั้นรวมสมการแต่ละเอลิเมนต์เข้าด้วยกัน ซึ่งจะได้สมการ สุดท้ายที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ เช่น $[K]\{\phi\} = \{F\}$ โดย $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ของผลลัพธ์ที่จะคำนวณหา หรือเรียกว่าตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (Nodal unknowns) ซึ่งสำหรับปัญหาของแข็งนี้ คือ ค่าการเคลื่อนตัว u, v ตามแนวแกน x, y ตามลำดับ ที่จุดต่อต่างๆ

ขั้นตอนทั่วไปในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์มี 6 ขั้นตอนหลัก ดังนี้

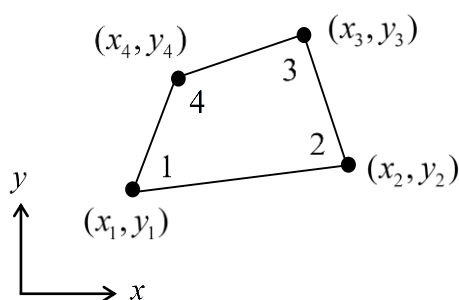
1. การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ
2. การเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
3. การสร้างสมการของเอลิเมนต์
4. การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบรวมกันเข้า ก่อให้เกิดเป็นระบบสมการรวมของปัญหา
5. ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ลงในระบบสมการรวม แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาผลลัพธ์
6. เมื่อคำนวณค่าที่จุดต่อได้แล้ว สามารถนำมาใช้เพื่อหาค่าอื่นๆ ที่ต้องการได้ต่อไป โดยสำหรับปัญหาของแข็ง เมื่อทราบค่าการเคลื่อนตัวแล้ว สามารถนำไปหาค่าความเครียด และความเค้นได้ตามลำดับ

จากขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอนนี้ จะเห็นได้ว่าขั้นตอนที่ 3 เป็นหัวใจสำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งโดยทั่วไปทำได้หลายวิธี แต่ในที่นี้จะเลือกใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residual) [2]

3.3 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ

เมื่อพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์และสมการอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาของแข็งแล้ว สามารถนำมาประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อตามขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ดังนี้

1. แบ่งรูปร่างของปัญหาด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยใช้โปรแกรมภายนอกคือ โปรแกรม AUTOMESH-2D [33] เข้ามาช่วยในการแบ่งเอลิเมนต์ ให้ได้แบบจำลองของปัญหาที่ต้องการ
2. เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ

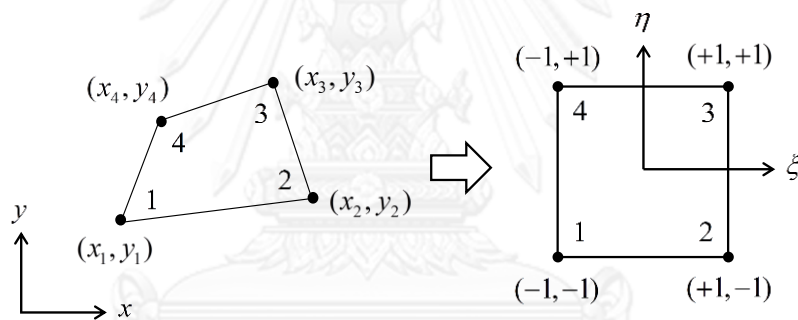
สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม โดยปกติจะสมมุติการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์นั้นให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\phi = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 + N_4\phi_4 = \underset{(1 \times 4)}{[N]} \underset{(4 \times 1)}{\{\phi\}} \quad (3.8)$$

โดย ϕ_i , $i=1,2,3,4$ แทนค่าที่จุดต่อทั้งสี่

N_i , $i=1,2,3,4$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ ซึ่งมีคุณสมบัติ คือ N_i จะเท่ากับ 1 ที่จุดต่อ i และเท่ากับ 0 ที่จุดต่ออื่น

ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่เลือกใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ มีลักษณะการกระจายที่เรียกว่าเชิงเส้นคู่ คือ เป็นเชิงเส้นตรงทั้งในแนวแกน x และ y แต่สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ฟังก์ชันการประมาณภายในจะอยู่ในรูปที่ยุ่งยาก จึงจะทำการแปลงรูปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ซึ่งอยู่ในพิกัด $x-y$ ให้อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในพิกัดฐานธรรมชาติ $\xi-\eta$ (Natural coordinate) ดังแสดงในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 การแปลงระหว่างพิกัด $x-y$ และพิกัด $\xi-\eta$

โดยรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะมีระยะในแกน ξ และแกน η จาก -1 ถึง 1 ทั้งสองแกน จากการแปลงพิกัดนี้เอง ทำให้เราเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในสมการ (3.8) ในรูปแบบเดียวกับฟังก์ชันการแปลงพิกัด ซึ่งทำให้เอลิเมนต์นี้ถูกเรียกว่า ไอโซพารามเมตริกซ์เอลิเมนต์ (Isoparametric element) คือ

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

ดังนั้นสำหรับปัญหาของแข็งที่มีตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ คือ u และ v จะสามารถเขียนการสมมุติการกระจายผลเฉลยโดยประมาณได้เป็น

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 = [N(\xi, \eta)] \{u\} \quad (3.10)$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 = [N(\xi, \eta)] \{v\} \quad (3.11)$$

ซึ่งสามารถเขียนรวมกันในรูปเมทริกซ์เป็น

$$\{\bar{\delta}\} = [N] \{\delta\} \quad (3.12)$$

โดย $\{\bar{\delta}\}^T = [u \ v]$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$\{\delta\}^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]$$

3. สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง จะเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์สถานะสมดุลที่อธิบายลักษณะทางกายภาพของปัญหาของแข็งดั่งสมการ (3.1) ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$[L]^T \{\sigma\} = 0 \quad (3.13)$$

จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดดั่งสมการ (3.2) แทนลงไปในสมการ (3.13) ได้เป็น

$$[L]^T [C] \{\varepsilon - \varepsilon_0\} = 0 \quad (3.14)$$

และใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าเคลื่อนตัวดั่งสมการ (3.4) แทนลงไปในสมการ (3.14) ได้เป็น

$$[L]^T ([C][L]\{\bar{\delta}\} - [C]\{\varepsilon_0\}) = 0 \quad (3.15)$$

จากนั้นประยุกต์หลักการของวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง คือ เมื่อทำการแทนผลเฉลยโดยประมาณลงไปในสมการ จะทำให้สมการเหลือเศษตกค้าง (Residual)

$$[L]^T ([C][L]\{\bar{\delta}\} - [C]\{\varepsilon_0\}) \quad \text{จะ } \neq 0 \quad \text{แต่จะ } = R$$

จากนั้นคูณเศษตกค้าง R นี้ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W (Weighting function) และทำการอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ และกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega} W R d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

จะได้

$$\int_{\Omega} [W][L]^T ([C][L]\{\bar{\delta}\} - [C]\{\varepsilon_0\}) d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

$$\text{โดย } [W]^T = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & W_2 & 0 & W_3 & 0 & W_4 & 0 \\ 0 & W_1 & 0 & W_2 & 0 & W_3 & 0 & W_4 \end{bmatrix}$$

จากนั้นทำการอินทิเกรตทีละส่วน (Integrate by part) บนพจน์แรกของสมการ ซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสอง โดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) จะได้

$$\int_{\Omega} ([L][W]^T)^T [C][L]\{\delta\} d\Omega - \int_{\Omega} ([L][W]^T)^T [C]\{\varepsilon_0\} d\Omega - \int_{\Gamma} [W][n][C][L]\{\delta\} d\Gamma = 0 \quad (3.18)$$

$$\int_{\Omega} ([L][W]^T)^T [C][L]\{\delta\} d\Omega - \int_{\Omega} ([L][W]^T)^T [C]\{\varepsilon_0\} d\Omega - \int_{\Gamma} [W]\{T_s\} d\Gamma = 0 \quad (3.19)$$

โดย $\{T_s\}$ คือ เวกเตอร์ภาระเนื่องจากแรงที่ผิว

$$\{T_s\} = [n][C][L]\{\delta\}$$

$$[n] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \end{bmatrix}$$

จากนั้นจะเลือกการถ่วงน้ำหนักโดยให้ $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าเป็นแบบบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) ดังนั้น

$$[W] = [N]^T \quad (3.20)$$

และแทนการสมมุติการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณตามสมการ (3.12) จะได้สมการเป็น

$$\int_{\Omega} ([L][N])^T [C][L][N]\{\delta\} d\Omega - \int_{\Omega} ([L][N])^T [C]\{\varepsilon_0\} d\Omega - \int_{\Gamma} [N]^T \{T_s\} d\Gamma = 0 \quad (3.21)$$

เมื่อให้

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

จะได้สมการ

$$\int_{\Omega} [B]^T [C][B]\{\delta\} d\Omega = \int_{\Omega} [B]^T [C]\{\varepsilon_0\} d\Omega + \int_{\Gamma} [N]^T \{T_s\} d\Gamma \quad (3.23)$$

ซึ่งคือ

$$[K]\{\delta\} = \{F_0\} + \{F_f\} \quad (3.24)$$

โดย

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV \quad (3.25)$$

$$\{F_0\} = \int_V [B]^T [C] \{\varepsilon_0\} dV \quad (3.26)$$

$$\{F_T\} = \int_\Gamma [N]^T \{T_s\} d\Gamma \quad (3.27)$$

อนึ่ง $\{F_T\}$ ในสมการ (3.27) หรือเวกเตอร์ภาระที่เกิดจากแรงภายนอกที่มากระทำที่ขอบรอบนอกนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของแรงที่กระทำ เช่น มีความดันที่สม่ำเสมอมากระทำตลอดขอบ หรือมีแรงกระทำที่จุดใดจุดหนึ่ง เราจะแปลงแรงที่กระทำในลักษณะต่างๆ ให้ไปเป็นแรงรวมที่จุดต่อ โดยใช้หลักการที่ว่า ฟังก์ชันการกระจายที่ใช้ภายในเอลิเมนต์นั้นอยู่ในรูปแบบเชิงเส้นตรงตลอดขอบใดๆ ของเอลิเมนต์ แต่เนื่องจากการระบุตำแหน่งของภาระนั้นทำให้เกิดความยุ่งยากในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ จึงทำการคำนวณภาระส่วนนี้ให้เป็นแรงที่จุดต่อ ก่อนนำมาใส่ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อความสะดวก จึงจะไม่แสดงการคำนวณของพจน์ที่เกี่ยวกับภาระที่ผิวอีก

เนื่องจากสมการ (3.25)-(3.26) เมื่อทำการอินทิเกรตบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ นั้น จะทำให้สมการอยู่ในรูปการอินทิเกรตที่มีความซับซ้อน ไม่สามารถทำการอินทิเกรตโดยตรงได้ จึงจะใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขช่วยในการอินทิเกรตสมการเหล่านี้ โดยใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ โดยในขั้นตอนแรกจะทำการแปลงพิกัดก่อน เพื่อให้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแปลงไปอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในพิกัดฐานธรรมชาติ ซึ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะทำการกำหนดขอบเขตการอินทิเกรตอยู่ในช่วง -1 ถึง $+1$ ทำให้ง่ายต่อการอินทิเกรต เพื่อให้สามารถใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ต่อไปได้

การแปลงสมการที่อยู่ในพิกัด $x-y$ นี้ให้อยู่ในพิกัดฐานธรรมชาติ $\xi-\eta$ จะทำให้เมทริกซ์ $[B]$ มีการเปลี่ยนแปลงไปดังนี้

จากการประยุกต์ใช้กฎลูกโซ่ (Chain rule)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.28)$$

เขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

เมทริกซ์ $[J]$ เรียกว่า จาคอเบียนเมทริกซ์

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{i=1}^4 N_i x_i \right) & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{i=1}^4 N_i y_i \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^4 N_i x_i \right) & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^4 N_i y_i \right) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$J_{11} = -\frac{1}{4}(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1+\eta)x_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)x_4 \quad (3.31ก)$$

$$J_{12} = -\frac{1}{4}(1-\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)y_2 + \frac{1}{4}(1+\eta)y_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)y_4 \quad (3.31ข)$$

$$J_{21} = -\frac{1}{4}(1-\xi)x_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)x_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)x_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)x_4 \quad (3.31ค)$$

$$J_{22} = -\frac{1}{4}(1-\xi)y_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)y_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)y_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)y_4 \quad (3.31ง)$$

เมื่อย้ายข้างสมการ (3.29) และแทนสมการ (3.10) ลงไป จะได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

โดย

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(J_{11}^* \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \right) u_1 + \left(J_{11}^* \frac{\partial N_2}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \right) u_2 + \left(J_{11}^* \frac{\partial N_3}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \right) u_3 + \left(J_{11}^* \frac{\partial N_4}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \right) u_4 \quad (3.34ก)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(J_{21}^* \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \right) u_1 + \left(J_{21}^* \frac{\partial N_2}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \right) u_2 + \left(J_{21}^* \frac{\partial N_3}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \right) u_3 + \left(J_{21}^* \frac{\partial N_4}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \right) u_4 \quad (3.34ข)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับตัวแปร v จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(J_{11}^* \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \right) v_1 + \left(J_{11}^* \frac{\partial N_2}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \right) v_2 + \left(J_{11}^* \frac{\partial N_3}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \right) v_3 + \left(J_{11}^* \frac{\partial N_4}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \right) v_4 \quad (3.35ก)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(J_{21}^* \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \right) v_1 + \left(J_{21}^* \frac{\partial N_2}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \right) v_2 + \left(J_{21}^* \frac{\partial N_3}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \right) v_3 + \left(J_{21}^* \frac{\partial N_4}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \right) v_4 \quad (3.35ข)$$

ดังนั้น สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเคลื่อนตัวได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{11}^* & J_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

หรือสามารถเขียนได้เป็น

$$\{\varepsilon\} = [B(\xi, \eta)] \{\delta\} \quad (3.37)$$

และใช้ความสัมพันธ์

$$dA = |J| d\xi d\eta \quad (3.38)$$

ดังนั้น สามารถแปลงสมการ (3.25) และสมการ (3.26) จากพิกัด $x-y$ ให้อยู่ในพิกัดฐานธรรมชาติ $\xi-\eta$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} [K] &= \int_V [B]^T [C][B] dV \\ &= \int_A [B]^T [C][B] t dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi_i, \eta_i)]^T [C][B(\xi_i, \eta_i)] t |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
\{F_0\} &= \int_V [B]^T [C] \{\varepsilon_0\} dV \\
&= \int_A [B]^T [C] \{\varepsilon_0\} t dA \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi_i, \eta_j)]^T [C] \{\varepsilon_0\} t |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.40}$$

เมื่อแปลงพิกัดแล้ว แม้ว่าสมการที่อยู่ในรูปการอินทิเกรตจะมีขอบเขตการอินทิเกรตที่ง่าย แต่พจน์ภายในนั้น กลับอยู่ในรูปที่ซับซ้อน ยังไม่อาจทำการอินทิเกรตโดยตรงได้ จึงใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre formulas) ซึ่งทำการแทนค่าจุดเกาส์ลงบนฟังก์ชันที่จะทำการอินทิเกรตพร้อมทั้งคูณกับค่าน้ำหนัก เป็นจำนวนพจน์เท่ากับจำนวนจุดเกาส์ที่เลือกใช้ [4] จะได้สมการ (3.39)-(3.40) แปลงมาอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$[K] = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} w_i w_j [B(\xi_i, \eta_j)]^T [C] [B(\xi_i, \eta_j)] t |J(\xi_i, \eta_j)| \tag{3.41}$$

$$\{F_0\} = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} w_i w_j [B(\xi_i, \eta_j)]^T [C] \{\varepsilon_0\} t |J(\xi_i, \eta_j)| \tag{3.42}$$

โดยที่วิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้จำนวนจุดเกาส์ $NG = 2$ ในการคำนวณเป็นหลัก

4. เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์แล้ว จะนำสมการมาประกอบรวมกันด้วยการแทนค่าที่ตำแหน่งจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ลงไปตำแหน่งจุดต่อของระบบสมการรวม เมื่อประกอบกันทุกเอลิเมนต์ จะกลายเป็นระบบสมการรวมของทั้งปัญหา

5. ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวม คือ ถ้าที่ตำแหน่งใดถูกกำหนดไม่ให้เคลื่อนที่ได้ในแนวแกนใด ระบบสมการรวมจะถูกปรับให้คำนวณค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกนนั้นเป็นศูนย์ จากนั้นระบบสมการรวมที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ $[A]\{x\} = \{B\}$ จะถูกนำไปคำนวณหาค่าผลเฉลยโดยประมาณ $\{x\}$ ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ซึ่งสำหรับวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination) [4]

6. เมื่อคำนวณได้ค่าที่จุดต่อ ซึ่งสำหรับปัญหาของแข็ง คือ ผลเฉลยโดยประมาณของค่าการเคลื่อนที่แล้ว จะนำค่าการเคลื่อนที่นี้กลับไปคำนวณหาความเค้น ซึ่งเป็นตัวแปรที่ต้องการทราบในปัญหาของแข็ง เพื่อทราบถึงพฤติกรรมของปัญหาของแข็งที่นำมาวิเคราะห์

3.4 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้หลักการของฟลักซ์

หลักการของฟลักซ์ คือ การสมมุติการกระจายของฟลักซ์ของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ให้อยู่ในรูปแบบเดียวกับการสมมุติการกระจายตัวของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์ [24] โดยจากสมการเชิงอนุพันธ์สถานะสมดุลของปัญหาของแข็ง เมื่อจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปแบบอนุกรม ฟลักซ์บนเอลิเมนต์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สถานะสมดุลของปัญหาของแข็งจะเทียบได้เป็นความเค้น ดังนั้นเมื่อค่าการ

เคลื่อนตัวใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ที่มีลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนเอลิเมนต์ที่เรียกว่า เชิงเส้นคู่ ความเค้นก็จะถูกสมมุติให้ใช้การกระจายของผลเฉลยบนเอลิเมนต์ในลักษณะเชิงเส้นคู่เช่นกัน เรียกว่า ฟลักซ์เชิงเส้น (Linear flux) [23]

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ จะมีวิธีการเหมือนวิธีการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปแต่ประยุกต์หลักการของฟลักซ์เข้าไป ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการเชิงอนุพันธ์สถานะสมดุล สำหรับปัญหาของแข็งที่ไม่มีแรงวัตถุในสองมิติ ดังสมการ (3.1) เมื่อทำการประยุกต์วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่าง และ เลือกใช้การถ่วงน้ำหนักแบบบับโนพกาเลอร์คินแล้ว จะได้สมการดังนี้

$$\int_{\Omega} N_i \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} N_i \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) d\Omega = 0$$
(3.43)

และทำการอินทิเกรตทีละส่วนโดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ จะได้สมการดังนี้

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} N_i T_x d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} \left(\tau_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} N_i T_y d\Gamma$$
(3.44)

โดย T_x และ T_y คือ ภาระเนื่องจากแรงกระทำที่ผิวในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

สามารถเขียนสมการรวม (3.44) ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\int_A [B]^T \{ \sigma \} t dA = \int_s [N]^T \{ T_s \} t dS$$
(3.45)

โดย $\{ T_s \} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$

ซึ่งความเค้นจะถูกแบ่งออกเป็น 2 ชนิด เพื่อความสะดวกในการประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์ ดังนี้

$$\{ \sigma \} = \{ \sigma_M \} - \{ \sigma_T \}$$
(3.46)

โดย $\{ \sigma_M \}$ คือ ความเค้นที่สัมพันธ์กับความเครียดที่เกิดจากการเคลื่อนตัว และ $\{ \sigma_T \}$ คือ ความเค้นเริ่มต้นที่สัมพันธ์กับความเครียดขั้นต้นที่เกิดจากอุณหภูมิ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\{ \sigma_M \} = [C] \{ \epsilon \}$$
(3.47)

และ

$$\{ \sigma_T \} = [C] \{ \alpha \} (T(x, y) - T_0)$$
(3.48)

โดย เมทริกซ์ $[C]$ และ $\{\alpha\}$ ขึ้นอยู่กับการสมมุติลักษณะของปัญหาสองมิติตามสมการ (3.6) หรือ (3.7)

เมื่อแทนสมการ (4.46)-(4.48) ลงในสมการ (4.45) จะทำให้ได้สมการ

$$\int_A [B]^T \{\sigma_M\} t dA - \int_A [B]^T \{\sigma_T\} t dA = \int_S [N]^T \{T_s\} t dS \quad (3.49)$$

จากหลักการของฟลักซ์ จะสมมุติการกระจายของความเค้นบนเอลิเมนต์ดังนี้

ความเค้นทางกล

$$\{\sigma_M\}_{(3 \times 1)} = [N_F]_{(3 \times 12)} \{\bar{\sigma}_M\}_{(12 \times 1)} \quad (3.50)$$

โดย

$$[N_F]_{(3 \times 12)} = \begin{bmatrix} \{\bar{N}\}^T & \{\bar{0}\}^T & \{\bar{0}\}^T \\ \{\bar{0}\}^T & \{\bar{N}\}^T & \{\bar{0}\}^T \\ \{\bar{0}\}^T & \{\bar{0}\}^T & \{\bar{N}\}^T \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{\sigma}_M\}_{(12 \times 1)} = \begin{Bmatrix} (\{\bar{\sigma}_{XM}\}_{i=1,\dots,4}) \\ (\{\bar{\sigma}_{YM}\}_{i=1,\dots,4}) \\ (\{\bar{\tau}_{XYM}\}_{i=1,\dots,4}) \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{0}\}_{(1 \times 4)}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\{\bar{N}\}_{(1 \times 4)}^T = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$$

ความเค้นจากอุณหภูมิ

$$\{\sigma_T\}_{(3 \times 1)} = [N_F]_{(3 \times 12)} \{\bar{\sigma}_T\}_{(12 \times 1)} \quad (3.51)$$

โดย

$$\{\bar{\sigma}_T\}_{(12 \times 1)} = \begin{Bmatrix} (\{\bar{\sigma}_{XT}\}_{i=1,\dots,4}) \\ (\{\bar{\sigma}_{YT}\}_{i=1,\dots,4}) \\ (\{\bar{\tau}_{XYT}\}_{i=1,\dots,4}) \end{Bmatrix}$$

แทนสมการ (3.50) - (3.51) ลงในสมการ (3.49) จะได้

$$\int_A [B]^T [N_F] \{\bar{\sigma}_M\} t dA - \int_A [B]^T [N_F] \{\bar{\sigma}_T\} t dA = \int_S [N]^T \{T_s\} t dS \quad (3.52)$$

เนื่องจาก $\{\bar{\sigma}_M\}$ และ $\{\bar{\sigma}_T\}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าคงที่ของความเค้นที่จุดต่อ ดังนั้นจึงสามารถดึงออกจากการอินทิเกรตได้ และ $\{T_s\}$ ก็เป็นค่าที่จุดต่อเช่นเดียวกัน สมการ (3.52) จึงกลายเป็น

$$\int_A [B]^T [N_F] t dA \{\bar{\sigma}_M\} - \int_A [B]^T [N_F] t dA \{\bar{\sigma}_T\} = \int_S [N]^T t dS \{T_s\} \quad (3.53)$$

ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้หลักการของพลักซ์เชิงเส้นได้เป็น

$$[D]\{\bar{\sigma}_M\} = [D]\{\bar{\sigma}_T\} + [B_T]\{T_s\} \quad (3.54)$$

$$\text{โดย } [D] = \int_A [B]^T [N_F] t dA$$

$$[B_T] = \int_S [N]^T t dS$$

เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังสมการ (3.54) แล้ว เนื่องจากใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า เพื่อให้สามารถทำการอินทิเกรตได้โดยง่าย จะทำการแปลงพิกัด $x-y$ ให้กลายเป็นพิกัดฐานธรรมชาติ $\xi-\eta$ โดยใช้วิธีการเหมือนกันกับที่ใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไป แต่เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปการอินทิเกรตจะสามารถอินทิเกรตหาค่าออกมาได้โดยตรง ไม่ต้องใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์เช่นระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไป โดยที่เมทริกซ์ $[D]$ จะมีรายละเอียดดังแสดงในภาคผนวก ก

อนึ่ง สำหรับพจน์ $[B_T]\{T_s\}$ ซึ่งหมายถึงภาระแรงที่กระทำที่ผิว หรือคือพจน์ $\{F_T\}$ ของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบทั่วไป ดังสมการที่ (3.27) จะใช้การดำเนินการเช่นเดียวกัน จึงจะไม่แสดงการคำนวณของพจน์ที่เกี่ยวกับภาระแรงที่กระทำที่ผิวนี้อีก

จากนั้นเพื่อที่จะหาระยะเคลื่อนตัว (u, v) ในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประยุกต์ใช้หลักการของพลักซ์ เราสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด และความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและระยะเคลื่อนตัว ดังนี้

$$\{\sigma_M\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (3.55)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{XM} \\ \sigma_{YM} \\ \tau_{XYM} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{XM} &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \\
\sigma_{YM} &= C_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \\
\tau_{XYM} &= C_{33} \frac{\partial u}{\partial y} + C_{33} \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

โดย $[C]$ ขึ้นอยู่กับการสมมุติลักษณะของปัญหาสองมิติตามสมการ (3.6) หรือ (3.7)

จากนั้นการแทนการสมมุติการกระจายของระยะเคลื่อนตัว ดังสมการ (3.10) – (3.11) ลงในสมการ (3.57) จะได้

$$\begin{aligned}
\sigma_{XM} &= C_{11} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial x} \right\}^T \{u\} + C_{12} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial y} \right\}^T \{v\} \\
\sigma_{YM} &= C_{21} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial x} \right\}^T \{u\} + C_{22} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial y} \right\}^T \{v\} \\
\tau_{XYM} &= C_{33} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial y} \right\}^T \{u\} + C_{33} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial x} \right\}^T \{v\}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

เพื่อที่จะหาค่าความเค้น ณ ตำแหน่งจุดต่อทั้งสี่ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม สามารถแทนพิกัดฐานธรรมชาติได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\text{จุดต่อที่ 1 } (i=1) & : (\xi = -1, \eta = -1) \\
\text{จุดต่อที่ 2 } (i=2) & : (\xi = +1, \eta = -1) \\
\text{จุดต่อที่ 3 } (i=3) & : (\xi = +1, \eta = +1) \\
\text{จุดต่อที่ 4 } (i=4) & : (\xi = -1, \eta = +1)
\end{aligned}$$

เช่น การหาความเค้นที่จุดต่อที่ 1 จากสมการ (3.58) จะทำการแทนค่า $(\xi = -1, \eta = -1)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\sigma_{XM1} &= C_{11} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial x} \right\}^T \{u\} \Big|_{\text{node 1 } (\xi=-1, \eta=-1)} + C_{12} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial y} \right\}^T \{v\} \Big|_{\text{node 1 } (\xi=-1, \eta=-1)} \\
\sigma_{YM1} &= C_{21} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial x} \right\}^T \{u\} \Big|_{\text{node 1 } (\xi=-1, \eta=-1)} + C_{22} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial y} \right\}^T \{v\} \Big|_{\text{node 1 } (\xi=-1, \eta=-1)} \\
\tau_{XYM1} &= C_{33} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial y} \right\}^T \{u\} \Big|_{\text{node 1 } (\xi=-1, \eta=-1)} + C_{33} \left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial x} \right\}^T \{v\} \Big|_{\text{node 1 } (\xi=-1, \eta=-1)}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

สำหรับพจน์ $\left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial x} \right\}$ และ $\left\{ \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial y} \right\}$ สามารถคำนวณได้จากการประยุกต์ใช้กฎลูกโซ่ ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \xi} &= \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} &= \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.60)$$

เขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

เมทริกซ์ $[J]$ นั้น คือจาโคเบียนเมทริกซ์เดียวกันกับสมการ (3.10) และสามารถหาค่าภายในเมทริกซ์ได้จากสมการ (3.11)

จากนั้นเมื่อย้ายข้างสมการ (3.61) จะได้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

ซึ่งสามารถแยกออกมาเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left(J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (3.63ก)$$

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left(-J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \quad (3.63ข)$$

สำหรับการหาความเค้นที่จุดต่ออื่นๆ ก็ใช้วิธีคล้ายกันนี้ ทำให้ได้ค่าสำหรับใส่ใน $\{\bar{\sigma}_M\}$ ดังนี้

$$\{\bar{\sigma}_M\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{XM1} \\ \sigma_{XM2} \\ \sigma_{XM3} \\ \sigma_{XM4} \\ \sigma_{YM1} \\ \sigma_{YM2} \\ \sigma_{YM3} \\ \sigma_{YM4} \\ \tau_{XYM1} \\ \tau_{XYM2} \\ \tau_{XYM3} \\ \tau_{XYM4} \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

และเวกเตอร์ $\{\bar{\sigma}_M\}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์กับระยะเคลื่อนตัวด้วยเมทริกซ์ $[P]$ ได้ดังนี้

$$\{\bar{\sigma}_M\} = [P]\{\delta\} \quad (3.65)$$

เมทริกซ์ $[P]$ นั้นจะอยู่ในรูปแบบปิด ซึ่งมีรายละเอียดดังแสดงในภาคผนวก ก

สำหรับความเค้นที่สัมพันธ์กับความเครียดที่เกิดจากความอุณหภูมิสำหรับทุกจุดต่อ $\{\bar{\sigma}_T\}$ สามารถหาได้จากสมการ (3.48) ดังนี้

$$\{\bar{\sigma}_T\} = [C]\{\alpha\}(T(x, y) - T_0) \quad (3.66)$$

โดยมีรายละเอียดภายในเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{XT} \\ \sigma_{YT} \\ \tau_{XYT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha} \\ 0 \end{Bmatrix} (T(x, y) - T_0) \quad (3.67)$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \sigma_{XT} &= (C_{11}\bar{\alpha} + C_{12}\bar{\alpha})(T(x, y) - T_0) \\ \sigma_{YT} &= (C_{21}\bar{\alpha} + C_{22}\bar{\alpha})(T(x, y) - T_0) \\ \tau_{XYT} &= 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

เพื่อที่จะหาความเค้น ณ ตำแหน่งจุดต่อทั้งสี่ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม สามารถหาได้จากการแทนอุณหภูมิทั้งสี่จุดต่อ ดังนี้

$$\{\bar{\sigma}_T\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{XT1} \\ \sigma_{XT2} \\ \sigma_{XT3} \\ \sigma_{XT4} \\ \sigma_{YT1} \\ \sigma_{YT2} \\ \sigma_{YT3} \\ \sigma_{YT4} \\ \tau_{XYT1} \\ \tau_{XYT2} \\ \tau_{XYT3} \\ \tau_{XYT4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}(C_{11} + C_{12})(T_1 - T_0) \\ \bar{\alpha}(C_{11} + C_{12})(T_2 - T_0) \\ \bar{\alpha}(C_{11} + C_{12})(T_3 - T_0) \\ \bar{\alpha}(C_{11} + C_{12})(T_4 - T_0) \\ \bar{\alpha}(C_{21} + C_{22})(T_1 - T_0) \\ \bar{\alpha}(C_{21} + C_{22})(T_2 - T_0) \\ \bar{\alpha}(C_{21} + C_{22})(T_3 - T_0) \\ \bar{\alpha}(C_{21} + C_{22})(T_4 - T_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

ดังนั้นจะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมื่อใช้หลักการของฟลักซ์เชิงเส้นมาประยุกต์ โดยแทนสมการ (3.64) ลงในสมการ (3.54) คือ

$$[D][P]\{\delta\} = [D]\{\bar{\sigma}_T\} + [B]\{T_s\} \quad (3.70)$$

ซึ่งมี $\{\delta\}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อต่าง ๆ ที่ต้องการจะคำนวณหา โดยที่เมทริกซ์อื่น ๆ สามารถคำนวณได้จากรูปแบบปิด จึงไม่ต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข สามารถนำไปคำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวได้โดยตรง และดำเนินการตามระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปเช่นเดิม

บทที่ 4

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็ง

4.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็งโดยวิธีการอินทิเกรตของเกาส์

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็งโดยวิธีการอินทิเกรตของเกาส์ หรือ สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นมาจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่ได้อธิบาย ในหัวข้อ 3.3 ในบทที่ 3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) โดย โปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถนำไปใช้งานโดยตรงกับเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล โปรแกรมที่ ประดิษฐ์ขึ้นนี้ใช้ชื่อว่า STRUCTURALQUAD ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.1.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม STRUCTURALQUAD

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ STRUCTURALQUAD ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (Main program) ซึ่งมีการเรียกใช้โปรแกรมย่อย (Subroutine) ใน 2 มอดูลหลัก (Modules) ขั้นตอนการ ทำงานของโปรแกรมสามารถอธิบายโดยสรุปได้ดังนี้

1. เริ่มต้นการทำงานโดยการอ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้าของปัญหา (Input file) เช่น จำนวนจุดต่อ ตำแหน่งของทุกจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ คุณสมบัติต่างๆ ของวัสดุ จำนวนของจุดเกาส์ที่ใช้ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [READINPUT]
2. รับค่าตำแหน่งจุดเกาส์ (Gauss point locations) และน้ำหนัก (Weights) ที่ สอดคล้องกับจำนวนของจุดเกาส์ที่กำหนด โดยเรียกโปรแกรมย่อย [GAUSSPOINT]
3. ทำการสร้างเมทริกซ์แข็งเกร็งของระบบสมการรวม เวกเตอร์ภาระจากแรง ภายนอก และเวกเตอร์ภาระจากความเค้นเริ่มต้นจากความร้อน ของระบบสมการ โดยเรียกโปรแกรม ย่อย [QUADS] ซึ่งจะคำนวณค่าดิเทอร์มิแนนท์ของจาโคเบียนเมทริกซ์ เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่าง ความเครียดและค่าการเคลื่อนที่ และเมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด ของแต่ละเอลิเมนต์ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [BJC] และนำเมทริกซ์ที่คำนวณได้แต่ละเอลิเมนต์ ประกอบเข้ากันเป็นระบบสมการ โดยเรียกโปรแกรม [ASSEMBLE]
4. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวม เช่น จุดต่อใดสามารถเคลื่อนที่ ไปในแนวแกนใด ก็จะกำหนดให้เป็น 0 หากไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ในแนวแกนใดจะกำหนดให้เป็น 1 โดยเรียกโปรแกรมย่อย [APPLYBC]
5. แก้ระบบสมการรวมโดยใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method) โดยเรียกโปรแกรมย่อย [GAUSS] เพื่อหาค่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้น
6. แปลงค่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในแต่ละจุดต่อให้กลายเป็นค่าความเครียด ความ เค้นในแนวแกน ความเค้นเฉือน และความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้น โดยเรียกโปรแกรม [FSTRESS] ซึ่งมีการคำนวณจาโคเบียนเมทริกซ์ เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเคลื่อนที่ และ

เมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของแต่ละเอลิเมนต์ เพื่อใช้ในการแปลงค่า โดยเรียกโปรแกรมย่อย [BJC2]

7. พิมพ์คำตอบของค่าการเคลื่อนที่และค่าความเค้นที่เกิดขึ้นลงในไฟล์ใหม่ โดยเรียกโปรแกรม [WRITEOUTPUT]

8. พิมพ์คำตอบให้อยู่ในรูปแบบไฟล์ Tecplot binary data file ซึ่งสามารถนำไปแสดงผลกราฟิกบนโปรแกรม Tecplot™ ได้ โดยเรียกโปรแกรม [PLOTOUTPUT]

9. ผู้ใช้สามารถระบุว่าจะทำการคำนวณรูปร่างที่เปลี่ยนไป และพิมพ์คำตอบให้หรือไม่ โดยเรียกโปรแกรม [PLOTDEFORM]

10. พิมพ์เวลาที่โปรแกรมใช้ในการคำนวณ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [WRITETIME]
อนึ่ง โปรแกรม Tecplot™ สามารถศึกษาได้จาก www.tecplot.com

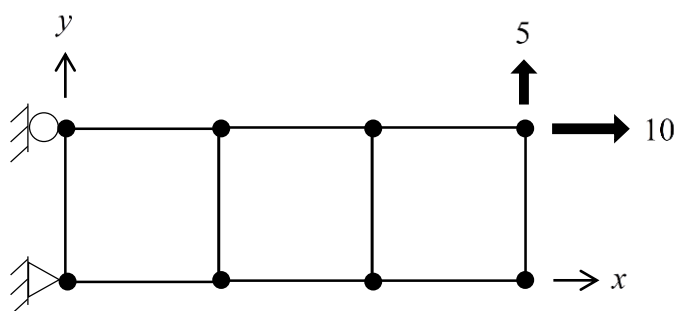
4.1.2 รายละเอียดของโปรแกรม STRUCTURALQUAD

รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ STRUCTURALQUAD ได้แสดงไว้ในแผ่นซีดีที่แนบไปกับวิทยานิพนธ์นี้

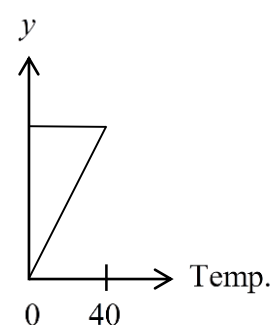
4.1.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า

การวิเคราะห์ปัญหาของแข็งใดๆ ข้อมูลต่างๆ ของปัญหาจะถูกนำไปสร้างเป็นไฟล์ข้อมูลนำเข้าเพื่อส่งให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์วิเคราะห์ผลลัพธ์ ดังเช่นปัญหาตัวอย่างต่อไปนี้

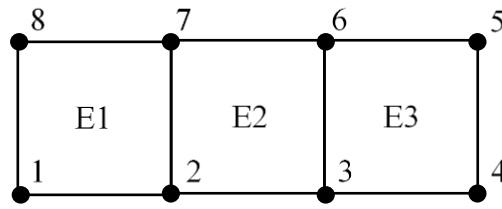
ปัญหาคานยื่นที่รับภาระสองชนิด คือ ภาระแรงที่จุดต่อด้านขวาบน และภาระความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างผิวด้านบนและด้านล่างตลอดความยาวของคาน ดังแสดงในรูปที่ 4.1 ถูกยึดตรึงที่จุดต่อด้านซ้ายล่าง และจุดต่อด้านซ้ายบนสามารถเคลื่อนที่ได้ในแนวแกน y ตัวคานมีขนาดยาว 6 กว้าง 2 และหนา 0.1 และมีคุณสมบัติทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 100$ ค่าอัตราส่วนปัวส์ซง $\nu = 0.3$ ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน $\alpha = 0.001$ และอุณหภูมิที่ไม่เกิดความเค้น $T_0 = 0$ แบบจำลองของปัญหาประกอบด้วยเอลิเมนต์ 3 เอลิเมนต์ และมีจุดต่อ 8 จุดต่อ



(ก) ภาพรวมของปัญหา



(ข) การกระจายตัวของอุณหภูมิตั้งบนคาน



(ค) แบบจำลองของปัญหา

รูปที่ 4.1 ปัญหาคานยื่น

ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาของแข็งโดยวิธีการอินทิเกรตของเกาส์ต้องการ สามารถจำแนกออกเป็น 6 ส่วนย่อย คือ

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร
 บรรทัดถัดไป ประโยคต่างๆ ที่มีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้
 ตัวอย่างเช่น 1

FINITE ELEMENT COMPUTER ASSIGNMENT NO. 1

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา

บรรทัดแรก คำระบุจำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์
 บรรทัดที่สอง ตัวเลขแสดงจำนวนจุดต่อ, จำนวนเอลิเมนต์, จำนวนแรงที่กระทำ และจำนวนจุดเกาส์ที่ใช้คำนวณในแต่ละทิศทาง

ตัวอย่างเช่น	Points	Elements	Force points	Gauss points
	8	3	1	2

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่างๆ ของปัญหา

บรรทัดแรก คำระบุคุณสมบัติต่างๆ ของวัสดุ
 บรรทัดที่สอง ตัวเลขแสดงค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น, อัตราส่วนของปัวส์ซง, ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวจากความร้อน, อุณหภูมิเริ่มต้นของวัตถุซึ่งไม่มีความเค้น และค่าความหนาของวัตถุ

ตัวอย่างเช่น	Elasticity	Poisson ratio	Coefficient of linear thermal expansion	Reference temperature	Thickness
	100	0.3	0.001	0	0.1

ส่วนที่ 4 ลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขต ตำแหน่งในแนวแกน x และ y และ อุณหภูมิ

ตัวอย่างเช่น	N	BCX	BCY	X	Y	TEMP
1	1	1	1	0	0	0
2	0	0	0	2	0	0
3	0	0	0	4	0	0
4	0	0	0	6	0	0
5	0	0	0	6	2	40
6	0	0	0	4	2	40
7	0	0	0	2	2	40
8	1	1	0	0	2	40

หมายเหตุ : เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) แทนด้วย BCX และ BCY ตามทิศแกน x และ y ตามลำดับ

$BC^* = 1$ กำหนดให้จุดต่อนั้นไม่มีการเคลื่อนที่ตามทิศแกน * ที่ระบุ

$BC^* = 0$ กำหนดให้จุดต่อนั้นสามารถเคลื่อนที่ตามทิศแกน * ที่ระบุ

ส่วนที่ 5 ลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของเอลิเมนต์ หมายเลขจุดต่อทั้งสี่ที่ประกอบเป็นเอลิเมนต์นั้น

ตัวอย่างเช่น	E	N1	N2	N3	N4
1	1	1	2	7	8
2	2	2	3	6	7
3	3	3	4	5	6

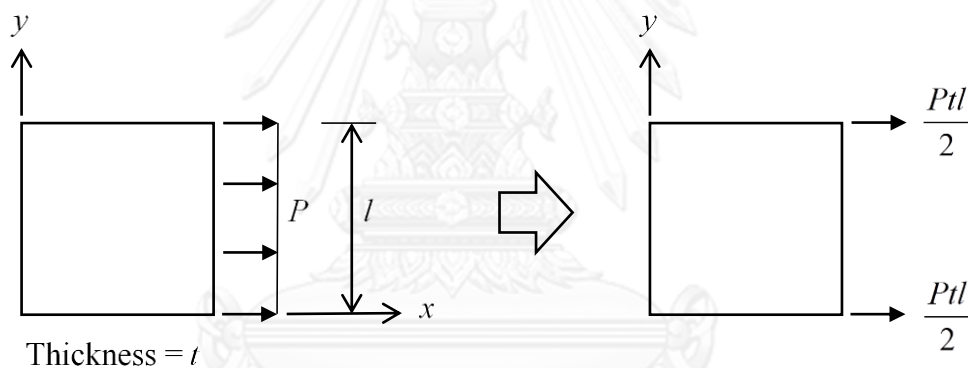
ส่วนที่ 6 ลักษณะของแรงภายนอกที่กระทำ

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของแรงภายนอกที่กระทำ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขจุดต่อที่รับแรงภายนอก ขนาดของแรงภายนอกที่กระทำในแนวแกน x และ y บนจุดต่อนั้น

ตัวอย่างเช่น	T	TX	TY
	5	10	5

อนึ่ง หากแรงภายนอกที่มากระทำที่ขอบนอกกระทำเป็นบริเวณ เช่น มีความดัน P กระทำตลอดขอบบนเอลิเมนต์หนึ่ง ในแนวแกน x ความดันนี้จะถูกแปลงไปเป็นแรงรวมที่จุดต่อทั้งสองของขอบเดิม ดังแสดงในรูปที่ 4.2 ซึ่งเกิดจากฟังก์ชันการกระจายภายในที่ใช้ในเอลิเมนต์นี้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นตรงตลอดขอบใด ๆ และจากสมการ (3.27)



รูปที่ 4.2 การแปลงแรงที่กระทำเป็นบริเวณไปสู่แรงรวมที่จุดต่อ

4.1.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

ไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ STRUCTURALQUAD จะมีทั้งหมด 4 ไฟล์ ซึ่งจะถูกตั้งชื่อไฟล์ตามชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าและตามด้วยรายละเอียดนามสกุลที่แตกต่างกัน เพื่อแยกประเภทของข้อมูล

4.1.4.1. ไฟล์ผลลัพธ์ที่สามารถนำไปใช้สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์

ไฟล์ชนิดนี้จะถูกตั้งชื่อตามชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าและตามด้วยนามสกุล ”_Q_RESULT.OUT” โดยไฟล์นี้สามารถนำไปใช้เป็นไฟล์ข้อมูลนำเข้าต่อไปสำหรับโปรแกรม SECONDGRADIENT เพื่อใช้ในการคำนวณหาเกรเดียนท์สำหรับนำไปใช้ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ต่อไป ซึ่งไฟล์ผลลัพธ์นี้มีลักษณะดังต่อไปนี้

*** STRUCTURAL QUAD PROGRAM ***

NUMBER OF NODE				NUMBER OF ELEMENT					
8				3					
NODE	X	Y	VMS	U	V	SYX	SXY	SXX	
1	0.00	0.00	0.62E+02	0.00E+00	0.00E+00	0.50E+02	0.15E+02	0.25E+02	
2	2.00	0.00	0.64E+02	0.39E+01	0.47E+01	0.50E+02	0.49E+01	0.25E+02	
:	:	:	:	:	:	:	:	:	
8	0.00	2.00	0.62E+02	0.00E+00	0.40E+00	0.50E+02	0.15E+02	0.25E+02	
1	1	2	7	8					
2	2	3	6	7					
3	3	4	5	6					

4.1.4.2. ไฟล์ผลลัพธ์ที่นำไปใช้สำหรับแสดงผลกราฟิก

ไฟล์ชนิดนี้จะถูกตั้งชื่อตามชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าและตามด้วยนามสกุล "_Q_GRAPHIC.PLT" ซึ่งจะแสดงผลลัพธ์ที่คำนวณได้ลงบนรูปร่างเดิม โดยไฟล์นี้สามารถแสดงผลกราฟิกบนโปรแกรม Tecplot™ ได้ทันที ซึ่งไฟล์ผลลัพธ์นี้มีลักษณะดังต่อไปนี้

TITLE = TEST.DAT

VARIABLES = "X", "Y", "SXX", "SYY", "SXY", "VMS", "TEMP", "DISX", "DISY",
"SAXX", "SAYY", "SAXY"

ZONE N = 8, E = 3, F = FEPOINT, ET = QUADRILATERAL

0.00	0.00	0.50E+02	0.15E+02	0.25E+02	0.62E+02	0.00	0.00E+00	0.00E+00
0.45E+00	0.44E-03	0.65E+00						
2.00	0.00	0.50E+02	0.49E+01	0.25E+02	0.64E+02	0.00	0.39E+01	0.47E+01
0.48E+00	-0.10E+00	0.65E+00						
:	:	:	:	:	:	:	:	:
0.00	2.00	0.50E+02	0.15E+02	0.25E+02	0.62E+02	40.00	0.00E+00	0.40E+00
0.45E+00	0.44E-03	0.65E+00						
1	2	7	8					
2	3	6	7					
3	4	5	6					

4.1.4.3. ไฟล์ผลลัพธ์ที่นำไปใช้สำหรับแสดงผลกราฟสำหรับรูปร่างที่เปลี่ยนไป

ไฟล์ชนิดนี้จะถูกตั้งชื่อตามชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าและตามด้วยนามสกุล ”_Q_DFS.PLT” โดยไฟล์นี้สามารถแสดงผลกราฟกับโปรแกรม Tecplot™ ได้ทันที ซึ่งไฟล์ผลลัพธ์นี้มีลักษณะเดียวกับไฟล์ผลลัพธ์ที่รูปร่างไม่เปลี่ยนไป

4.1.4.4. ไฟล์ผลลัพธ์เวลาที่ใช้ในการคำนวณของโปรแกรม

ไฟล์ชนิดนี้จะถูกตั้งชื่อตามชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าและตามด้วยนามสกุล ”_Q_TIME.DAT” โดยไฟล์นี้จะแสดงเวลาที่ใช้ในการคำนวณภายในโปรแกรม ซึ่งไฟล์ผลลัพธ์นี้มีลักษณะดังต่อไปนี้

PROGRAM STRUCTURALQUAD

START PROGRAM DATE = 28/ 4/2014

START PROGRAM TIME = 13:18:18: 857

START PROGRAM ZONE = 420

TIMELINE OF TEST

READINPUT TIME

QUAD TIME

APPLY BC TIME

SOLVE DISPLACEMENT TIME

FIND STRESS TIME

OUTPUT TIME

TOTAL TIME

0.15600100E-01

0.15600100E-01

0.00000000E+00

0.00000000E+00

0.00000000E+00

0.00000000E+00

0.31200200E-01

4.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็งโดยวิธีฟลักซ์เชิงเส้น

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็งโดยวิธีฟลักซ์เชิงเส้น ได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นมาจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ตั้งที่ได้อธิบายในหัวข้อ 3.4 ในบทที่ 3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถนำไปใช้งานโดยตรงกับเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้มีชื่อว่า STRUCTURALFLUX ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.2.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม STRUCTURALFLUX

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ STRUCTURALFLUX ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (Main program) ซึ่งมีการเรียกใช้โปรแกรมย่อย (Subroutine) ใน 2 มอดูลหลัก (Modules) ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมสามารถอธิบายโดยสรุปได้ดังนี้

1. เริ่มต้นการทำงานโดยการอ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้าของปัญหา (Input file) เช่น จำนวนจุดต่อ ตำแหน่งของทุกจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ คุณสมบัติต่างๆ ของวัสดุ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [READINPUT]
2. ทำการสร้างเมทริกซ์ความแข็งเกร็ง และเวกเตอร์ภาระของแต่ละเอลิเมนต์ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [QUADFLUX] และนำเมทริกซ์ที่คำนวณได้แต่ละเอลิเมนต์ประกอบเข้ากันเป็นระบบสมการ โดยเรียกโปรแกรม [ASSEMBLE]
3. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวม เช่น จุดต่อใดสามารถเคลื่อนที่ไปในแนวแกนใด ก็จะกำหนดให้เป็น 0 หากไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ในแนวแกนใดจะกำหนดให้เป็น 1 โดยเรียกโปรแกรมย่อย [APPLYBC]
4. แก่ระบบสมการรวมโดยใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method) โดยเรียกโปรแกรมย่อย [GAUSS] เพื่อหาค่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้น
5. แปลงค่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นในแต่ละจุดต่อให้กลายเป็นค่าความเครียด ความเค้นในแนวแกน ความเค้นเฉือน และความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้น โดยเรียกโปรแกรม [STRESS] ซึ่งมีการคำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ของจาโคเบียนเมทริกซ์ เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเคลื่อนที่ และเมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของแต่ละเอลิเมนต์เพื่อใช้ในการแปลงค่า โดยเรียกโปรแกรมย่อย [BJC2]
6. พิมพ์คำตอบของค่าการเคลื่อนที่และค่าความเค้นที่เกิดขึ้นลงในไฟล์ใหม่ โดยเรียกโปรแกรม [WRITEOUTPUT]
7. พิมพ์คำตอบให้อยู่ในรูปแบบไฟล์ Tecplot binary data file ซึ่งสามารถนำไปแสดงผลกราฟิกบนโปรแกรม Tecplot™ ได้ โดยเรียกโปรแกรม [PLOTOUTPUT]
8. ผู้ใช้สามารถระบุว่าจะทำการคำนวณรูปร่างที่เปลี่ยนไป และพิมพ์คำตอบหรือไม่ โดยเรียกโปรแกรม [PLOTDEFORM]
9. พิมพ์เวลาที่โปรแกรมใช้ในการคำนวณ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [WRITETIME]

4.2.2 รายละเอียดของโปรแกรม STRUCTURALFLUX

รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ STRUCTURALFLUX ได้แสดงไว้ในแผ่นซีดีที่แนบไปกับวิทยานิพนธ์นี้

4.2.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์ STRUCTURALFLUX ต้องการ มีลักษณะเดียวกับลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์ STRUCTURALQUAD ต้องการ ซึ่งสามารถใช้ไฟล์ข้อมูลนำเข้าเดียวกันในการคำนวณ โดยที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์ STRUCTURALFLUX จะไม่รับข้อมูลจุดเกาส์ที่ระบุในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

4.2.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

ไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ STRUCTURALFLUX จะมีทั้งหมด 4 ไฟล์ เช่นเดียวกับไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ STRUCTURALQUAD และมีลักษณะข้อมูลเช่นเดียวกัน

4.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับคำนวณเกรเดียนท์อันดับสอง

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับคำนวณเกรเดียนท์อันดับสอง ได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นมาจากสมการดังที่ได้อธิบายในหัวข้อที่ 7.1 ในบทที่ 7 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถนำไปใช้งานโดยตรงกับเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้มีชื่อว่า SECONDGRADIENT ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.3.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม SECONDGRADIENT

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ SECONDGRADIENT ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (Main program) ซึ่งมีการเรียกใช้โปรแกรมย่อย (Subroutine) ใน 2 มอดูล (Modules) ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมสามารถอธิบายโดยสรุปได้ดังนี้

1. เริ่มต้นการทำงานโดยการอ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้าของปัญหา (Input file) เช่น จำนวนจุดต่อ ตำแหน่งของทุกจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ และตัวแปรที่จะนำมาคำนวณหาเกรเดียนท์ครั้งที่สอง โดยเรียกโปรแกรมย่อย [READINPUT]
2. ทำการคำนวณหาเกรเดียนท์อันดับหนึ่ง โดยเรียกโปรแกรม [GRAD] ซึ่งมีขั้นตอนคือ ทำการคำนวณเมทริกซ์ และเวกเตอร์ที่จะใช้ในการหาเกรเดียนท์ของแต่ละเอลิเมนต์ และประกอบรวมกันเข้าเป็นระบบสมการ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [ASSEMBLE] จากนั้นทำการแก้ระบบสมการเพื่อหาเกรเดียนท์ตามแนวแกน x และ y ด้วยระเบียบวิธีคอนจูเกตเกรเดียนท์ (Conjugate gradient method) [4] โดยเรียกโปรแกรมย่อย [CGNEW]

3. ทำการคำนวณหาเกรเดียนต์อันดับสอง โดยเรียกโปรแกรม [SECONDGRAD] ซึ่งมีขั้นตอนเช่นเดียวกับการหาเกรเดียนต์ครั้งแรก เพียงแต่ใช้ข้อมูลเกรเดียนต์อันดับหนึ่งในการคำนวณ และมีการคำนวณที่มากกว่า โดยเกรเดียนต์อันดับสองนี้จะมีทั้งหมด 4 ค่า คือ เกรเดียนต์ตามแนวแกน xx , yy , xy และ yx

4. ทำการคำนวณเกรเดียนต์ในแนวแกนหลัก และหาค่าเกรเดียนต์ที่มากที่สุดที่จุดต่อนั้นๆ โดยเรียกโปรแกรม [MAXGRADIENT]

5. พิมพ์คำตอบให้อยู่ในรูปแบบไฟล์ Tecplot binary data file ซึ่งสามารถนำไปแสดงผลกราฟิกบนโปรแกรม Tecplot™ ได้ โดยเรียกโปรแกรม [PLOTOUTPUT]

6. พิมพ์คำตอบของเกรเดียนต์แต่ละจุดต่อ โดยเรียกโปรแกรม [WRITEOUTPUT]

4.3.2 รายละเอียดของโปรแกรม SECONDGRADIENT

รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ SECONDGRADIENT ได้แสดงไว้ในแผ่นซีดีที่แนบไปกับวิทยานิพนธ์นี้

4.3.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ไฟล์ข้อมูลนำเข้านั้นสามารถใช้ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากโปรแกรม STRUCTURALQUAD หรือโปรแกรม STRUTURALFLUX ได้โดยตรง ซึ่งเป็นไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่มีนามสกุล “_RESULT.OUT”

4.3.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

ไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ SECONDGRADIENT จะมีทั้งหมด 2 ไฟล์ ซึ่งจะถูกตั้งชื่อตามชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าและตามด้วยรายละเอียดนามสกุลที่แตกต่างกัน เพื่อแยกประเภทของข้อมูล

4.3.4.1 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

ไฟล์ชนิดนี้จะถูกตั้งชื่อตามชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าและตามด้วยนามสกุล “_MAXG.OUT” โดยไฟล์นี้จะแสดงเกรเดียนต์ที่มากที่สุดของแต่ละจุดต่อ ซึ่งไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์นี้มีลักษณะดังต่อไปนี้

*** DOUBLE GRADIENT ***

TITLE = TEST

NODE = 8,ELEMENT = 3

VARIABLES = "X", "Y", "DMAX", "DDMAX"

0.000000 0.000000 0.795153E-15 0.147772E+00

: : : :

0.000000 2.000000 0.795153E-15 0.147772E+00

4.3.4.2 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่นำไปใช้สำหรับแสดงผลกราฟิก

ไฟล์ชนิดนี้จะถูกตั้งชื่อตามชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้าและตามด้วยนามสกุล
 ”_GRADIENT.PLT” โดยไฟล์นี้สามารถแสดงผลกราฟิกบนโปรแกรม Tecplot™ ได้ทันที ซึ่งไฟล์
 ผลลัพธ์นี้มีลักษณะดังต่อไปนี้

TITLE = TEST

VARIABLES = "X", "Y", "Z", "DX", "DY", "DXX", "DYY", "DXY", "DYX", "DMAX",
 "DDXX", "DDYY", "DDMAX"

ZONE N = 8,E = 3, F = FEPOINT, ET = QUADRILATERAL

0.000000 0.000000 0.620413E+02 0.143166E+01 0.000000E+00 -0.238610E+00
 0.795153E-15 -0.250787E-14 0.000000E+00 0.795153E-15 0.147772E+00
 -0.908376E-01 0.147772E+00

2.000000 0.000000 0.644274E+02 0.715830E+00 -0.671463E-14 -0.596525E+00
 0.795153E-15 0.000000E+00 0.716946E-16 0.795153E-15 0.476184E+00
 -0.120341E+00 0.476184E+00

: : : : :

0.000000 2.000000 0.620413E+02 0.143166E+01 0.000000E+00 -0.238610E+00
 0.795153E-15 -0.125394E-14 0.000000E+00 0.795153E-15 0.147772E+00
 -0.908376E-01 0.147772E+00

1 2 7 8

2 3 6 7

3 4 5 6

บทที่ 5

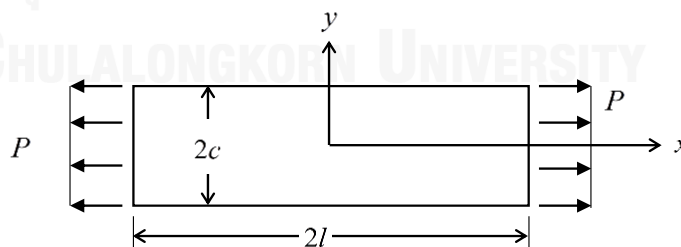
การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้จะได้นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นไปวิเคราะห์ปัญหาของแข็งที่มีผลเฉลยแม่นยำในหลายปัญหา ซึ่งมีลักษณะของภาระที่กระทำหรือรูปร่างของปัญหาที่แตกต่างกัน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสอง โดยมีปัญหาทดสอบดังนี้

1. ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมถูกกระทำด้วยแรงดึงในแนวแกนทั้งสองข้าง
2. ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่รับภาระการกระจายของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นตามยาว
3. ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมมีรูตรงกลางที่รับแรงดึงทั้งสองด้าน
4. ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่รับภาระการกระจายของอุณหภูมิบนแผ่น
5. ปัญหาคานยื่นที่รับภาระแรงเฉือนบริเวณปลายคาน
6. ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามยาว
7. ปัญหาวงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี

5.1 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมถูกกระทำด้วยแรงดึงในแนวแกนทั้งสองข้าง

แผ่นสี่เหลี่ยมขนาดยาว ($2l$) 8 เมตร กว้าง ($2c$) 4 เมตรหนา (b) 2.5 มิลลิเมตร รับแรงดึงทั้งสองด้าน $P = 5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ ดังรูปที่ 5.1 เป็นปัญหาความเค้นในระนาบ มีคุณสมบัติทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 200 \text{ GPa}$ และค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง $\nu = 0.3$

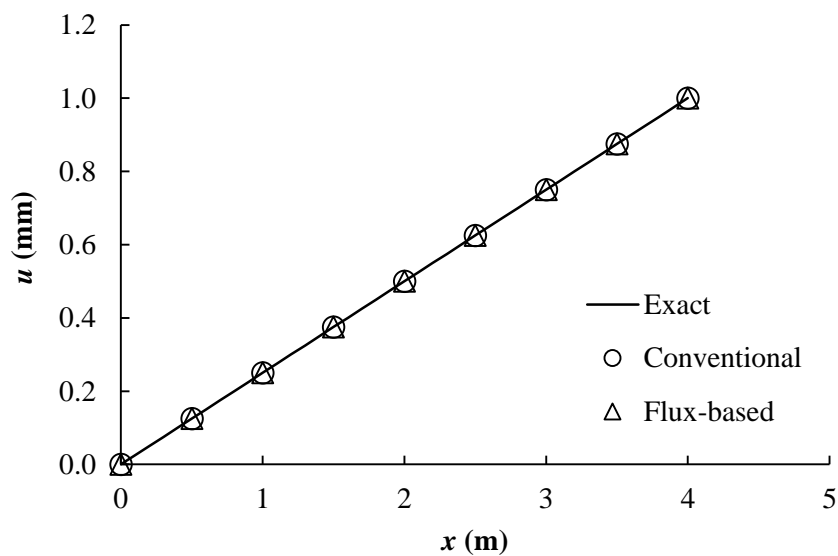


รูปที่ 5.1 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมถูกกระทำด้วยแรงดึงในแนวแกนทั้งสองข้าง

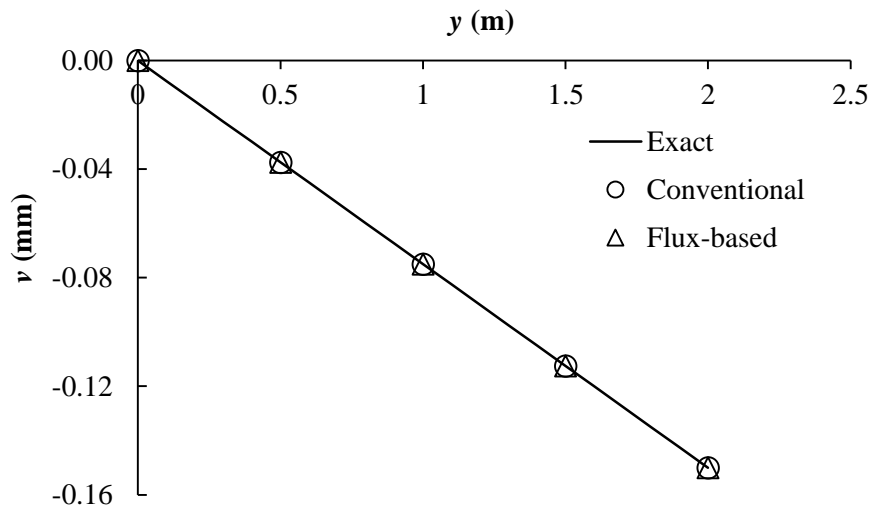
ปัญหานี้เมื่อจุดกลางของแผ่น $(x, y) = (0, 0)$ ถูกยึดตรึงไว้กับที่ จะสามารถหาผลเฉลยแม่นยำได้ดังนี้ [34]

$$\begin{aligned}\sigma_x(\pm l, y) &= P \\ \sigma_y(x, \pm c) &= 0 \\ \tau_{xy}(\pm l, y) &= \tau_{yx}(x, \pm c) = 0 \\ u &= \frac{P}{E} x \\ v &= -\nu \frac{P}{E} y\end{aligned}$$

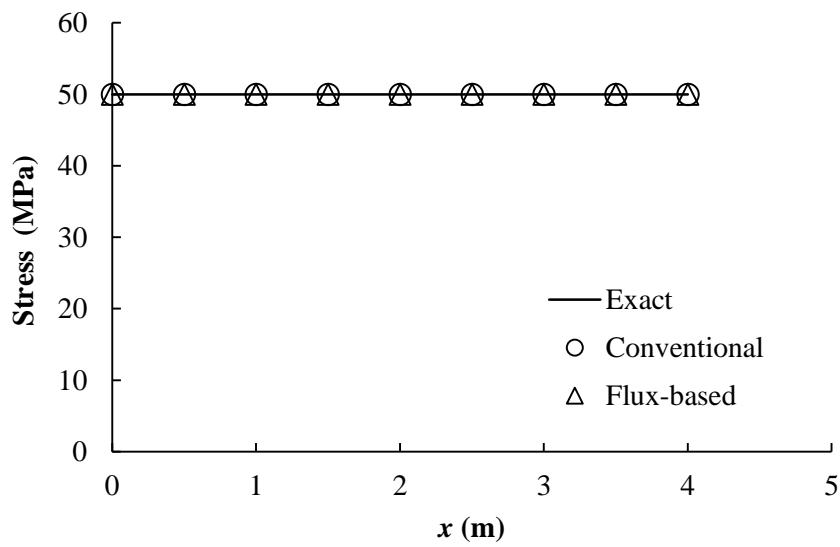
ปัญหานี้เป็นปัญหาพื้นฐาน ซึ่งรับภาระแรงดึงสม่ำเสมอทั้งสองข้างและมีรูปร่างหน้าตัดสม่ำเสมอตลอดแนวที่ถูกแรงกระทำ ดังนั้นผลเฉลยแม่นยำจึงสามารถหาได้โดยง่ายจากการคำนวณการวิเคราะห์ปัญหานี้ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะเริ่มด้วยการสร้างแบบจำลองของปัญหา เนื่องจากความสมมาตรของปัญหา พื้นที่หนึ่งส่วนของปัญหาจะถูกนำมาวิเคราะห์เท่านั้น โดยกำหนดให้ขอบล่างเคลื่อนที่ได้ในแนวแกน x เท่านั้น และขอบซ้ายเคลื่อนที่ได้ในแนวแกน y เท่านั้น เนื่องจากรูปร่างของปัญหาเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จึงสามารถใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม (Rectangular element) ในการสร้างแบบจำลองของปัญหานี้ เมื่อใช้จำนวนเอลิเมนต์ 32 เอลิเมนต์ในการสร้างแบบจำลอง จากนั้นใช้โปรแกรม STRUCTURALFLUX และโปรแกรม STRUCTURALQUAD ซึ่งใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุดในแต่ละทิศทางในการคำนวณหาผลลัพธ์ของปัญหานี้ ผลลัพธ์ที่คำนวณได้ของค่าการเคลื่อนที่และความเค้นได้แสดงถึงประสิทธิภาพของโปรแกรมทั้งสองที่สามารถให้ผลลัพธ์ที่เท่ากันและถูกต้องตามผลเฉลยแม่นยำ ดังแสดงในรูปที่ 5.2-5.4 ซึ่งแสดงถึงความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสอง ในการวิเคราะห์ปัญหาที่รับภาระแรง ด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม



รูปที่ 5.2 ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ของแนวเส้นตรง $y = 0$



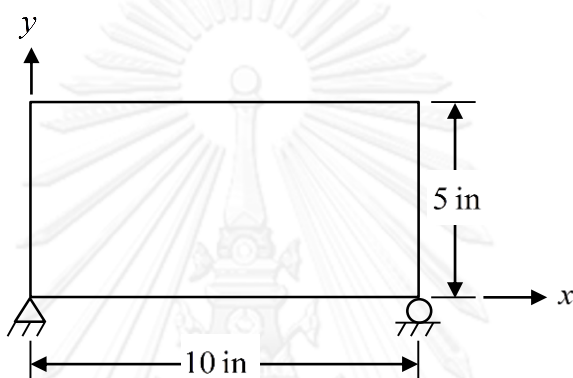
รูปที่ 5.3 ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ของแนวเส้นตรง $x=0$



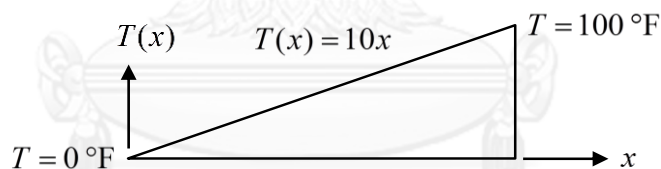
รูปที่ 5.4 ค่าความเค้นในแนวแกน x ของแนวเส้นตรง $y=0$

5.2 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่รับภาระการกระจายของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นตามยาว

พิจารณาแผ่นสี่เหลี่ยมขนาดยาว 10 นิ้ว กว้าง 5 นิ้ว และหนา 1 นิ้ว ดังรูปที่ 5.5 ถูกยึดแน่นที่มุมด้านซ้ายล่าง และตลอดแนวด้านล่างให้เคลื่อนตัวได้ในแนวแกน x เท่านั้น รับภาระการกระจายของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นตลอดแผ่นตามสมการ $T(x) = 10x$ ดังรูปที่ 5.6 และมีคุณสมบัติทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 30 \times 10^6$ psi ค่าอัตราส่วนปัวส์ซง $\nu = 0.25$ ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน $\alpha = 9.44 \times 10^{-6}$ $1/^\circ\text{F}$ และอุณหภูมิที่ไม่เกิดความเค้น $T_0 = 0^\circ\text{F}$



รูปที่ 5.5 แผ่นสี่เหลี่ยมที่รับภาระการกระจายของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นตามยาว



รูปที่ 5.6 การกระจายของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นตามยาว

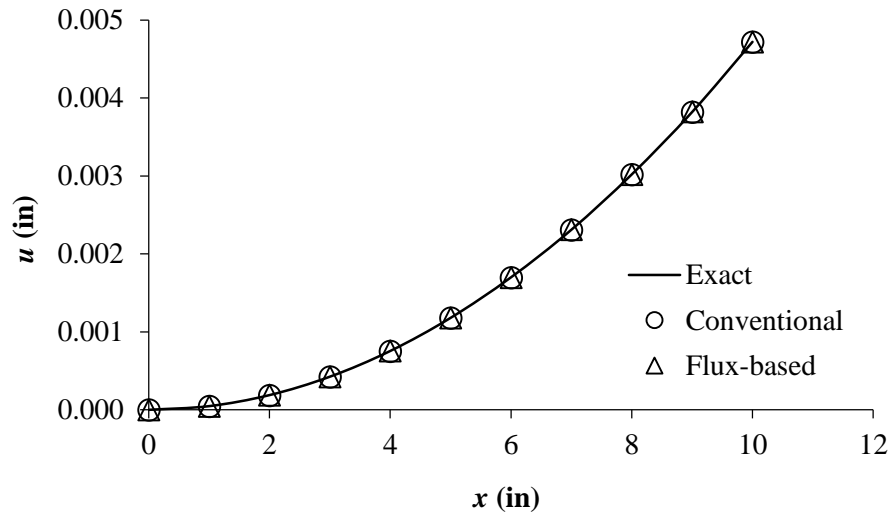
ปัญหานี้จะเกิดผลเฉลยแม่นยำตรงของค่าการเคลื่อนที่เป็น [24]

$$u(x, y) = 5\alpha(x^2 - y^2)$$

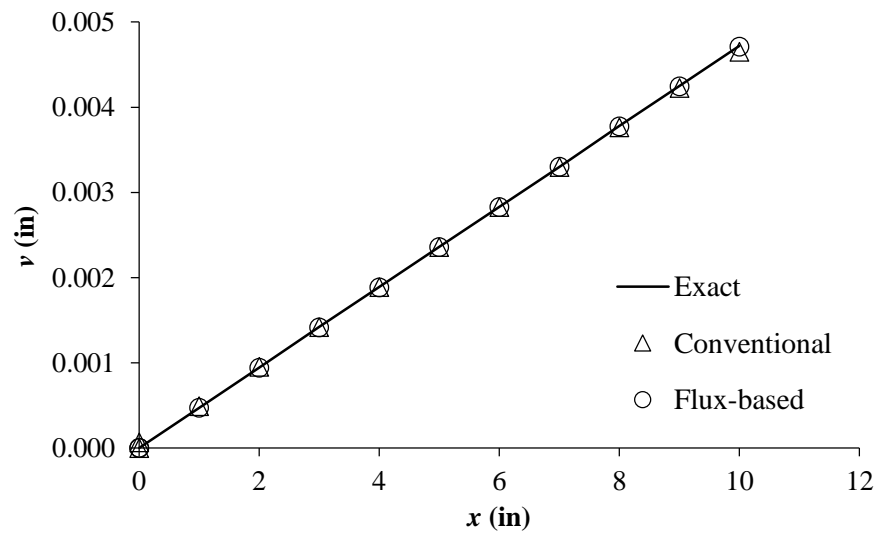
$$v(x, y) = 10\alpha xy$$

ปัญหานี้เป็นปัญหาที่รับภาระจากความแตกต่างของอุณหภูมิ ปัญหานี้จะถูกคำนวณโดยการสร้างแบบจำลองด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 50 เอลิเมนต์ และเมื่อใช้โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสองในการคำนวณ พบว่าโปรแกรม STRUCTURALFLUX และโปรแกรม STRUCTURALQUAD ซึ่งใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุดในแต่ละทิศทางให้ผลลัพธ์ที่มีค่าเท่ากัน และถูกต้องตามผลเฉลยแม่นยำตรง ดัง

แสดงในรูปที่ 5.7-5.8 ซึ่งแสดงถึงความถูกต้องของโปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสอง ในการวิเคราะห์ปัญหาที่รับภาระอุณหภูมิ ด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม



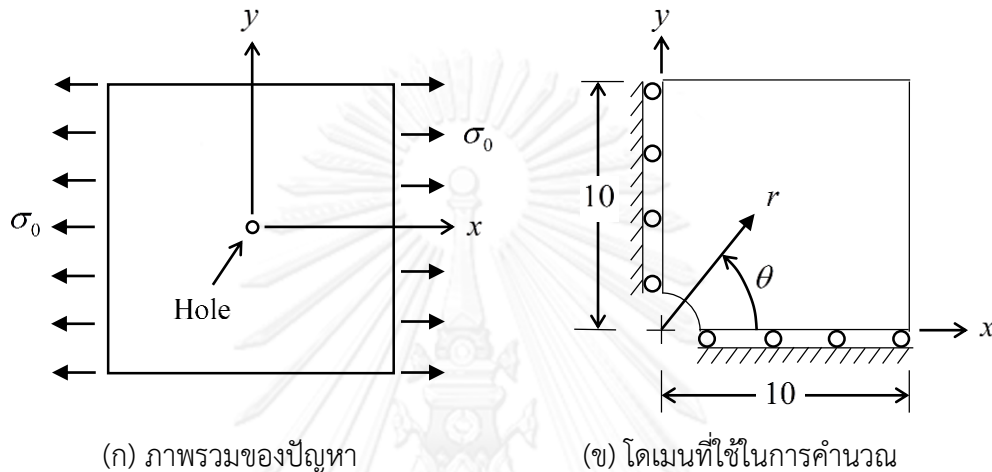
รูปที่ 5.7 ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ของแนวเส้น $y = 0$



รูปที่ 5.8 ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ของแนวเส้น $y = 5$

5.3 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมมีรูตรงกลางที่รับแรงดึงทั้งสองด้าน

พิจารณาปัญหาไร้หน่วยของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดใหญ่ที่มีรูกลมตรงกลางแผ่นมีขนาดรัศมี $a = 0.25$ ดังรูปที่ 5.9 รับแรงดึงตลอดขอบทั้งสองด้านตามแนวยาว $\sigma_0 = 1$ และมีคุณสมบัติทางกล ดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 1000$ และค่าอัตราส่วนปัวซอง $\nu = 0.3$



(ก) ภาพรวมของปัญหา

(ข) โดเมนที่ใช้ในการคำนวณ

รูปที่ 5.9 แผ่นสี่เหลี่ยมมีรูตรงกลางที่รับแรงดึงทั้งสองด้าน

โดยปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นยำตรงของความเค้นที่กระจายในแผ่นดังสมการ [30]

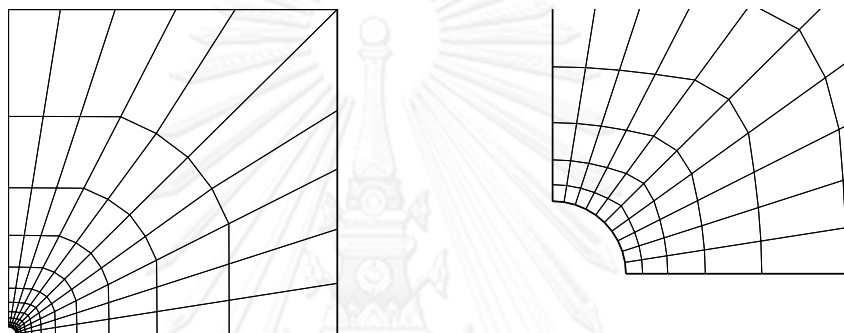
$$\sigma_{xx} = 1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta$$

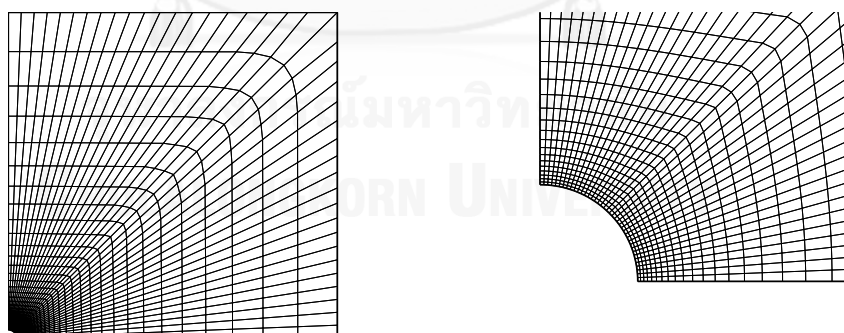
$$\tau_{xy} = -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin 4\theta$$

ปัญหานี้เป็นปัญหาที่ได้รับความนิยมในการวิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นภายใน เมื่อแผ่นที่รับแรงดึงเกิดมีรูขึ้น ซึ่งการวิเคราะห์ปัญหาโดยการคำนวณโดยตรงสามารถทำได้ เมื่อพิจารณาว่าเป็นแผ่นขนาดใหญ่เมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของรู การวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มโดยการจำลองโดเมนการคำนวณด้วยแบบจำลองบนพื้นที่ควอดรอนต์ที่ 1 เนื่องจากความสมมาตรของปัญหา และด้วยรูปร่างของปัญหาที่มีส่วนโค้ง จึงต้องใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (Quadrilateral element) ในการสร้างแบบจำลองของปัญหานี้ แบบจำลองถูกสร้างขึ้นมาจำนวน 2 โมเดล โดยเป็นโมเดลที่มีจำนวนเอลิเมนต์ 110 เอลิเมนต์ (Coarse mesh) และโมเดลที่มีจำนวนเอลิเมนต์ 1600 เอลิเมนต์ (Fine mesh) ดังแสดงในรูปที่ 5.10-5.11 โดยที่แบบจำลองทั้งสองจะใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็ก

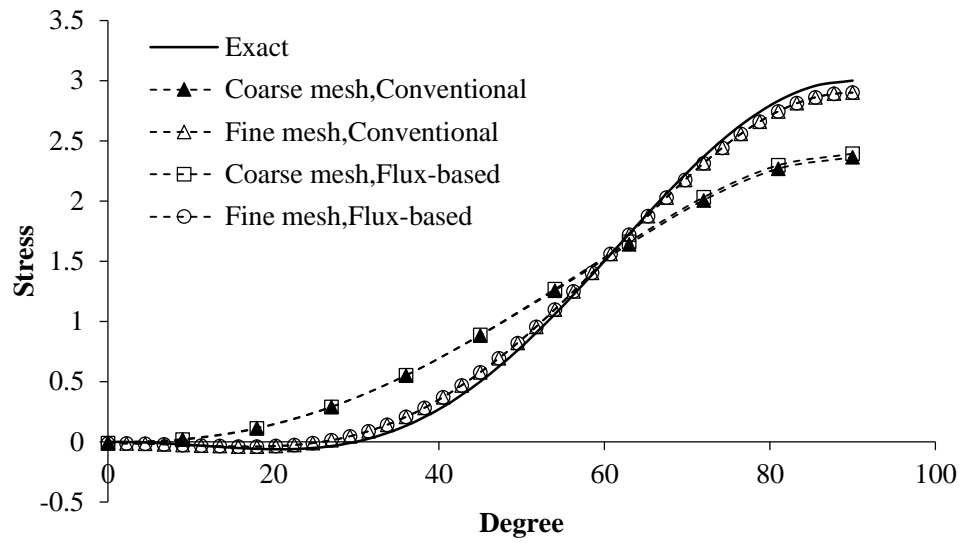
บริเวณส่วนโค้งที่เกิดจากรูของปัญหา เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงบริเวณส่วนโค้ง เมื่อใช้โปรแกรม STRUCTURALFLUX และโปรแกรม STRUCTURALQUAD ซึ่งใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุดในแต่ละทิศทางในการคำนวณหาผลลัพธ์ของปัญหานี้ พบว่าบริเวณส่วนโค้งของปัญหา โปรแกรมทั้งสองให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกัน และแบบจำลองที่แตกต่างกันทั้งสองก็แสดงถึงผลลัพธ์ที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำยิ่งขึ้นเมื่อใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กบริเวณส่วนโค้ง ดังแสดงในรูปที่ 5.12-5.14 ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องของโปรแกรมที่ได้ประติมากรรมขึ้นทั้งสอง ในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า



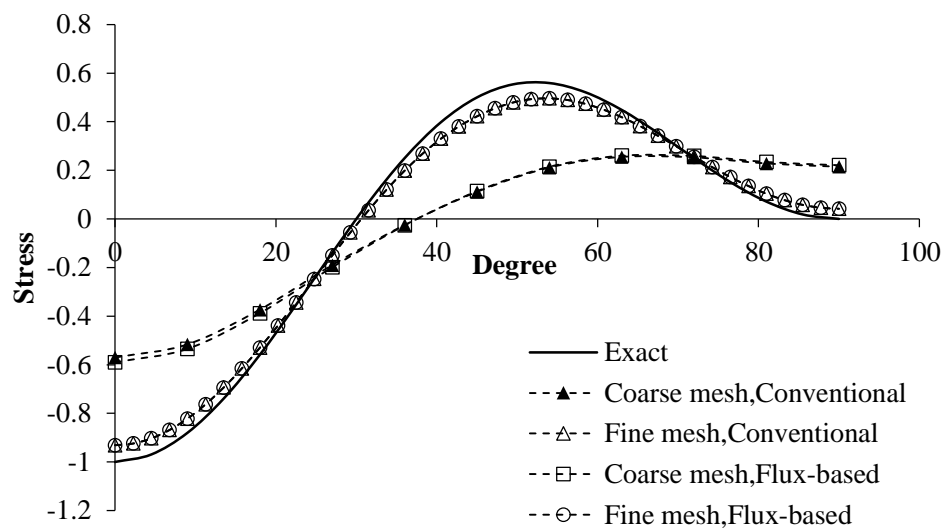
(ก) แบบจำลอง 110 เอลิเมนต์ (ข) ส่วนขยายเอลิเมนต์บริเวณส่วนโค้งของปัญหา
รูปที่ 5.10 เมชหยาบ (Coarse mesh)



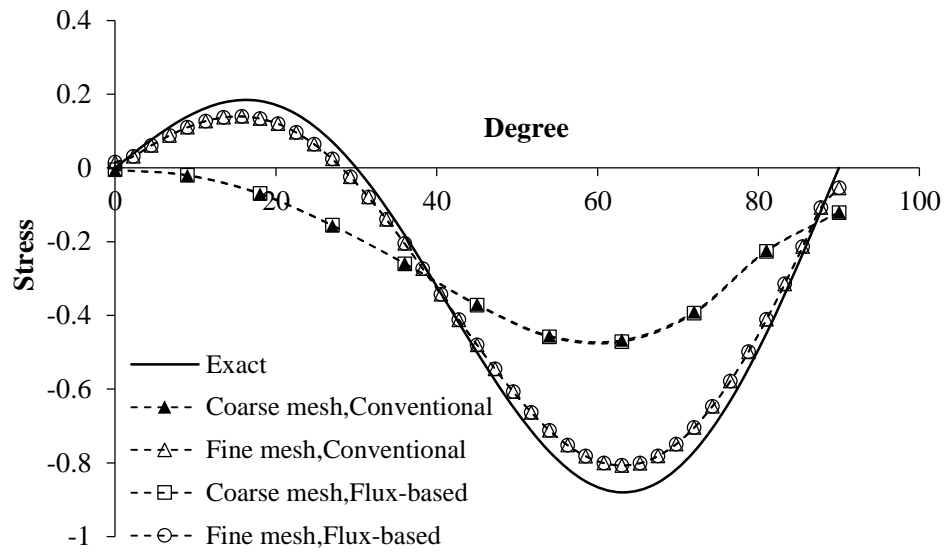
(ก) แบบจำลอง 1600 เอลิเมนต์ (ข) ส่วนขยายเอลิเมนต์บริเวณส่วนโค้งของปัญหา
รูปที่ 5.11 เมชละเอียด (Fine mesh)



รูปที่ 5.12 ความเค้นในแนวแกน x (σ_{xx}) บริเวณส่วนโค้ง



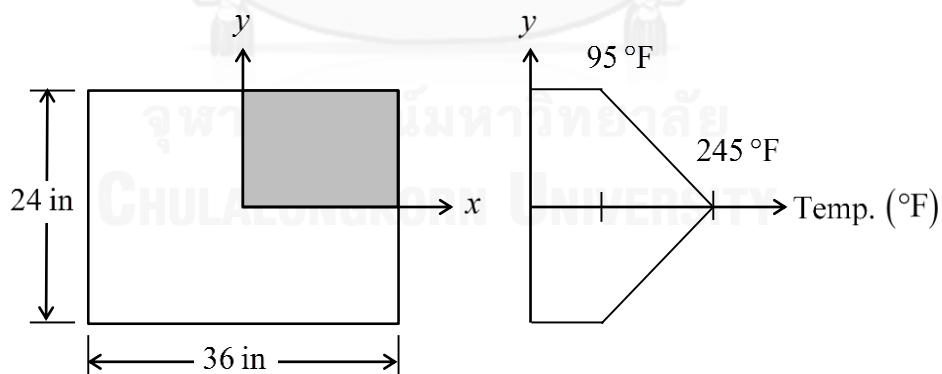
รูปที่ 5.13 ความเค้นในแนวแกน y (σ_{yy}) บริเวณส่วนโค้ง



รูปที่ 5.14 ความเค้นเฉือน (τ_{xy}) บริเวณส่วนโค้ง

5.4 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่รับภาระการกระจายของอุณหภูมิบนแผ่น

แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดยาว 36 นิ้ว กว้าง 24 นิ้ว หนา 1 นิ้ว รับภาระการกระจายของอุณหภูมิบนแผ่นมีลักษณะดังรูปที่ 5.15 และมีคุณสมบัติทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 10.4 \times 10^6$ psi ค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง $\nu = 0.3$ ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน $\alpha = 12.7 \times 10^{-6}$ $1/^\circ\text{F}$ และอุณหภูมิที่ไม่เกิดความเค้น $T_0 = 95^\circ\text{F}$



รูปที่ 5.15 แผ่นสี่เหลี่ยมที่รับภาระการกระจายของอุณหภูมิบนแผ่น

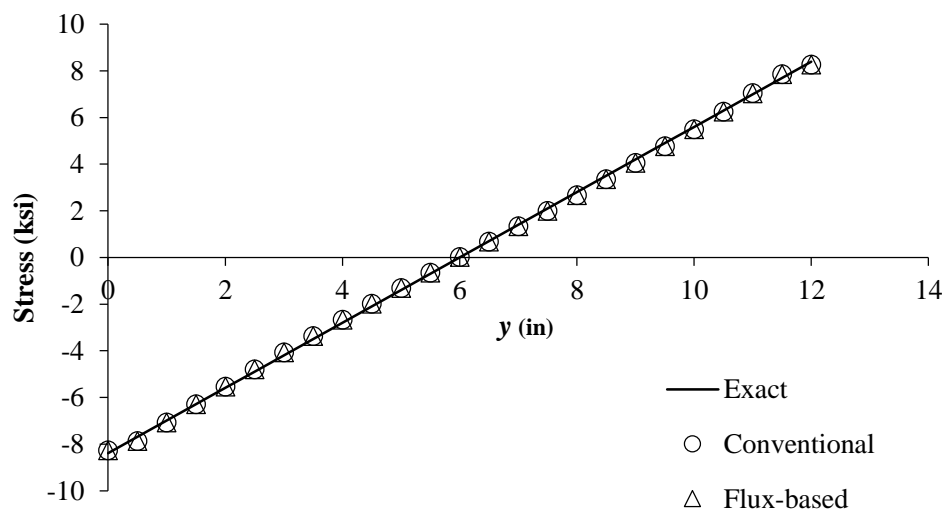
สำหรับปัญหานี้ สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงของความเค้นที่กระจายบนแผ่นที่อยู่ในช่วง $(0 \leq x \leq 18; 0 \leq y \leq 12)$ ดังสมการ [35]

$$\sigma_x = 1651(y-6)[1 - 0.0987 \sinh(0.1759x) \sin(0.0923x) - 0.1528 \cosh(0.1759x) \cos(0.0923x)]$$

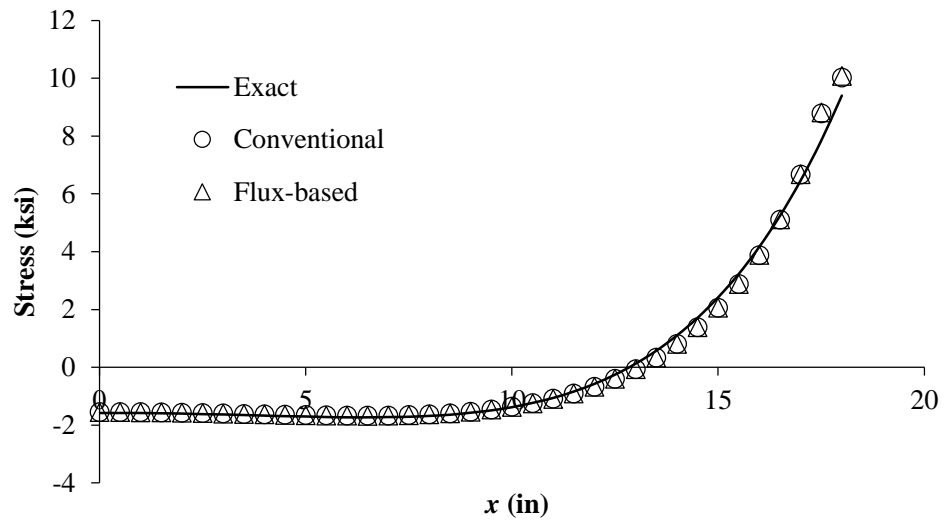
$$\sigma_y = 2.752(y^3 - 18y^2 + 864)[0.2750 \sinh(0.1759x) \sin(0.0923x) - 0.6634 \cosh(0.1759x) \cos(0.0923x)]$$

$$\tau_{xy} = 82.55(y^2 - 12y)[0.0326 \cosh(0.1759x) \sin(0.0923x) + 0.3600 \sinh(0.1759x) \cos(0.0923x)]$$

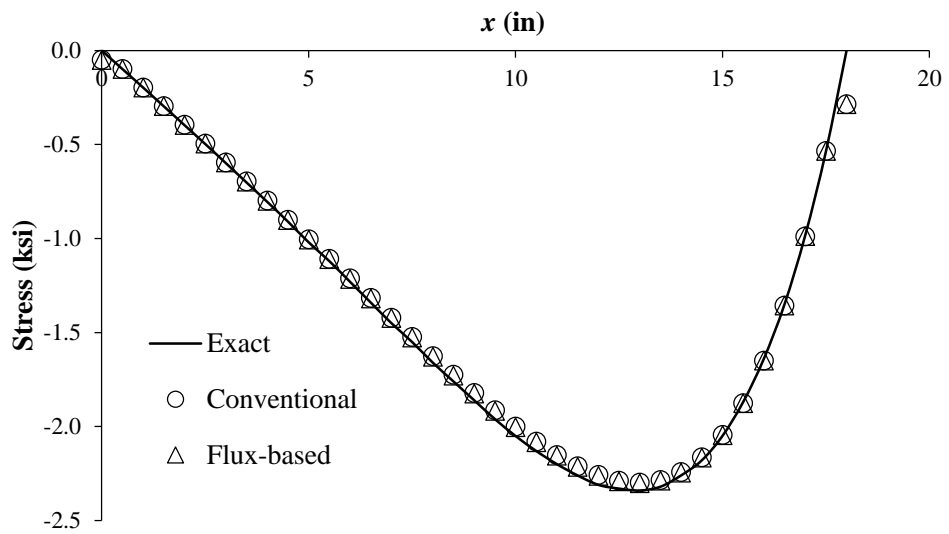
ปัญหานี้รับภาระการกระจายของอุณหภูมิบนแผ่น ซึ่งสามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ การวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เริ่มจากการสร้างแบบจำลองบนคอนกรีตที่ 1 ของปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง ด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 864 เอลิเมนต์ กำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้ขอบล่างเคลื่อนที่ได้ในแนวแกน x เท่านั้น และขอบซ้ายเคลื่อนที่ได้ในแนวแกน y เท่านั้น เมื่อใช้โปรแกรมทั้งสองที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากันและสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรง ดังแสดงในรูปที่ 5.16-5.18 ซึ่งแสดงถึงความถูกต้องของโปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น



รูปที่ 5.16 ความเค้นในแนวแกน x (σ_{xx}) ในแนวเส้น $x=0$



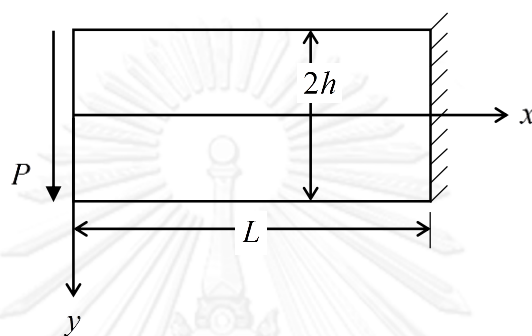
รูปที่ 5.17 ความเค้นในแนวแกน y (σ_{yy}) ในแนวเส้น $y=0$



รูปที่ 5.18 ความเค้นเฉือน (τ_{xy}) ในแนวเส้น $y=6$

5.5 ปัญหาคานยื่นที่รับภาระแรงเฉือนบริเวณปลายคาน

พิจารณาคานยื่นขนาดยาว (L) 0.4 เมตร กว้าง ($2h$) 0.2 เมตร และหนา (b) 0.03 เมตร ถูกยึดตรึงที่บริเวณปลายด้านหนึ่ง อีกด้านหนึ่งรับแรงเฉือนขนาด (P) 1,000 นิวตัน ดังแสดงในรูปที่ 5.19 มีคุณสมบัติทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 210 \text{ GPa}$ และค่าอัตราส่วนปัวส์ซง $\nu = 0.3$



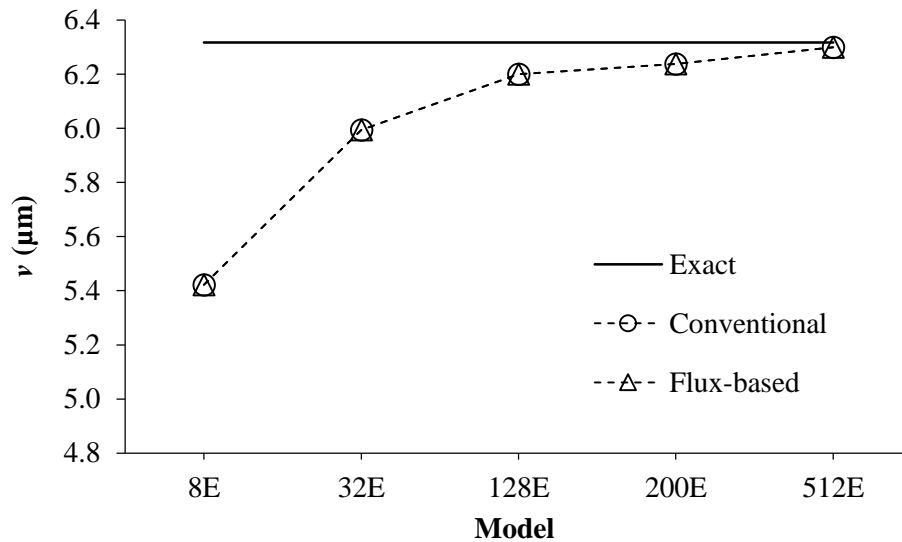
รูปที่ 5.19 คานยื่น

ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นยำตรงของค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน y บริเวณจุดกลางปลายคานยื่นดังสมการ [36]

$$V_{x=y=0} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{Ph^2(1+\nu)L}{EI}$$

โดย
$$I_{zz} = \frac{hb^3}{12}$$

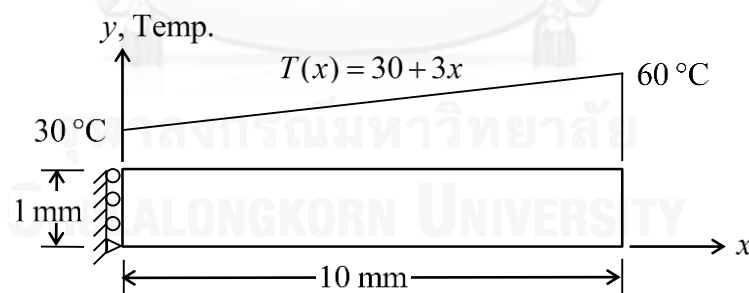
ปัญหานี้เป็นปัญหาคานยื่นอย่างง่าย ทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการสร้างแบบจำลองด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมทั้งหมด 5 โมเดล เพื่อตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบสู่ผลเฉลยแม่นยำ แต่ละโมเดลใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่แตกต่างกัน คือ 8 เอลิเมนต์, 32 เอลิเมนต์, 128 เอลิเมนต์, 200 เอลิเมนต์ และ 512 เอลิเมนต์ เมื่อทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสองพบว่าโปรแกรมทั้งสองให้ผลลัพธ์ที่เท่ากัน และลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำ ดังแสดงในรูปที่ 5.20 ซึ่งแสดงถึงประสิทธิภาพของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสอง



รูปที่ 5.20 ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ที่ตำแหน่ง $(x, y) = (0, 0)$

5.6 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามยาว

พิจารณาแผ่นสี่เหลี่ยม ขนาดยาว 10 มิลลิเมตร กว้าง 1 มิลลิเมตร และหนา 0.1 มิลลิเมตร ด้านหนึ่งถูกยึดตรึงไม่ให้เคลื่อนที่ได้ในแนวแกน x รับภาระการกระจายของอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามยาว ดังแสดงในรูปที่ 5.21 มีคุณสมบัติทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 71,705.5 \text{ N/mm}^2$ ค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง $\nu = 0.29$ ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน $\alpha = 1.27 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ และอุณหภูมิที่ไม่เกิดความเค้น $T_0 = 0^\circ\text{C}$

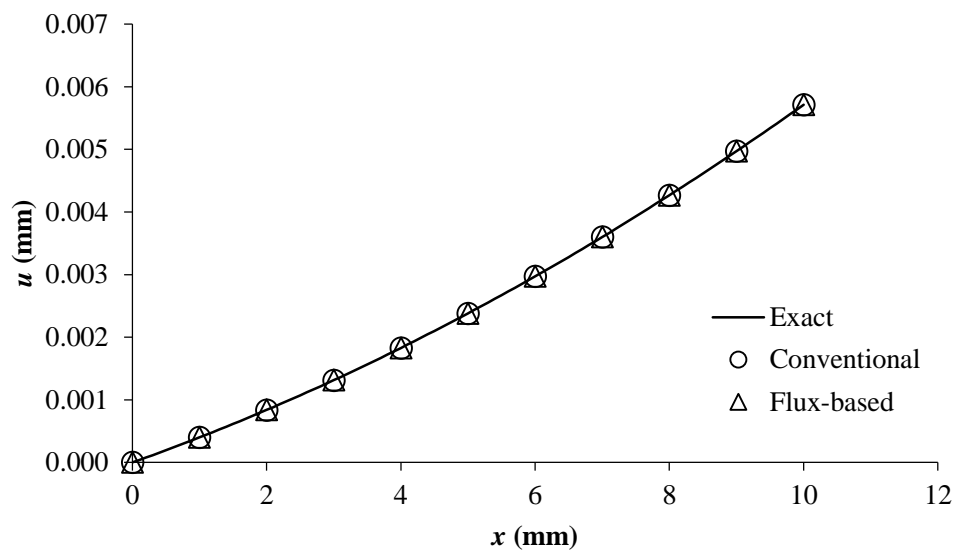


รูปที่ 5.21 แผ่นสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตามยาว

ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นยำตรงของค่าการเสียรูปในแนวแกน x ดังนี้ [37]

$$u(x) = \alpha \left(30x + \frac{3x^2}{2} \right)$$

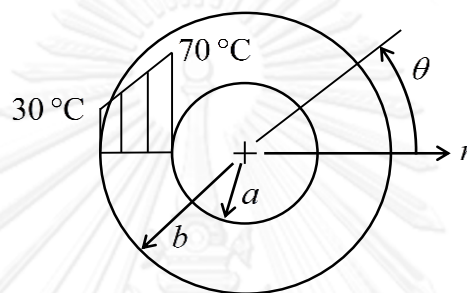
ปัญหานี้เป็นปัญหาที่รับภาระความแตกต่างของอุณหภูมิบนแผ่น ซึ่งก่อให้เกิดการเปลี่ยนรูปร่างของแผ่น ปัญหานี้ถูกวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 10 เอลิเมนต์ เมื่อพิจารณาค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน x บริเวณขอบล่างของแผ่น ($y=0$) โปรแกรมทั้งสองให้ผลลัพธ์ที่เท่ากัน และถูกต้องตามผลเฉลยแม่นยำตรง ดังแสดงในรูปที่ 5.22 ซึ่งแสดงถึงความถูกต้องของโปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสอง



รูปที่ 5.22 ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ในแนวเส้น $y=0$

5.7 ปัญหาวงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี

วงแหวนขนาดรัศมีภายใน (a) 100 มิลลิเมตร และขนาดรัศมีภายนอก (b) 200 มิลลิเมตร รับภาระการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเชิงเส้นตรงตามแนวรัศมี ดังแสดงในรูปที่ 5.23 มีคุณสมบัติทางกล ดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 71,705.5 \text{ N/mm}^2$ ค่าอัตราส่วนปัวส์ซง $\nu = 0.29$ ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน $\alpha = 1.27 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ และอุณหภูมิที่ไม่เกิดความเค้น $T_0 = 0^\circ\text{C}$



รูปที่ 5.23 วงแหวนที่มีอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมี

ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นยำตรงของการเสียรูปตามแนวรัศมี ความเค้นตามแนวแกนรัศมี และความเค้นตามแนวแกนมุมที่เกิดขึ้น [38] ดังสมการ

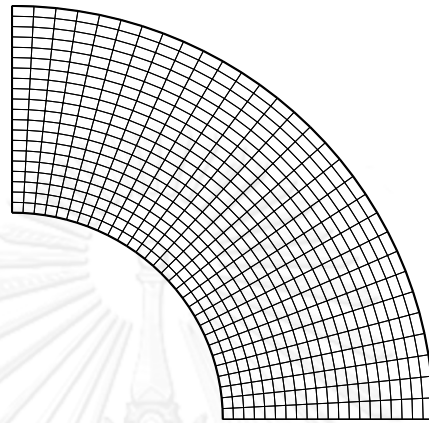
$$u(r) = \frac{\alpha}{r} \left(110r^2 - \frac{0.4}{3} \left((1+\nu)(r^3 - a^3) + \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} ((1-\nu)r^2 + (1+\nu)a^2) \right) \right)$$

$$\sigma_r(r) = \frac{E\alpha}{r^2} \left(\frac{0.4}{3} \left(r^3 - a^3 - \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} (r^2 + a^2) \right) + 110a^2 \right)$$

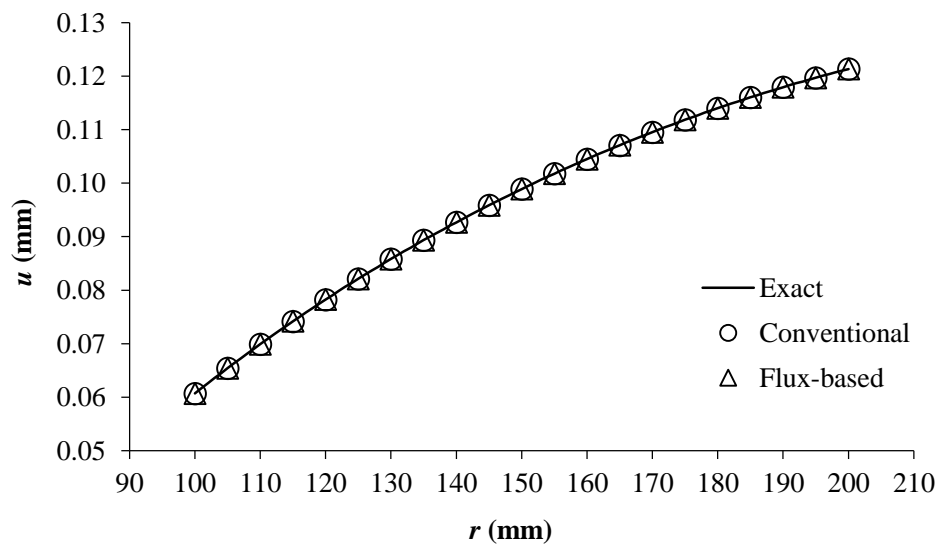
$$\sigma_\theta(r) = \frac{0.4}{3} \frac{E\alpha}{r^2} \left(2r^3 + a^3 - \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} (r^2 + a^2) \right)$$

ปัญหานี้เป็นปัญหาความเค้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ทำการวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า จำนวน 600 เอลิเมนต์ บนโดเมนในควอนรันต์ที่ 1 ของปัญหา เนื่องจากความสมมาตรของปัญหา ดังแสดงในรูปที่ 5.24 โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้ขอบล่างเคลื่อนที่ได้ในแนวแกน x เท่านั้น และขอบซ้ายเคลื่อนที่ได้ในแนวแกน y เท่านั้น เมื่อใช้โปรแกรม STRUCTURALFLUX และโปรแกรม STRUCTURALQUAD ซึ่งใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุดในแต่ละทิศทางการคำนวณหาผลลัพธ์ของปัญหานี้ เมื่อตรวจสอบค่าการเคลื่อนที่และความเค้นที่เกิดขึ้นตามแนวรัศมี เมื่อ $\theta = 0$ ผลลัพธ์ค่าการเคลื่อนที่และความเค้นที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันและสอดคล้อง

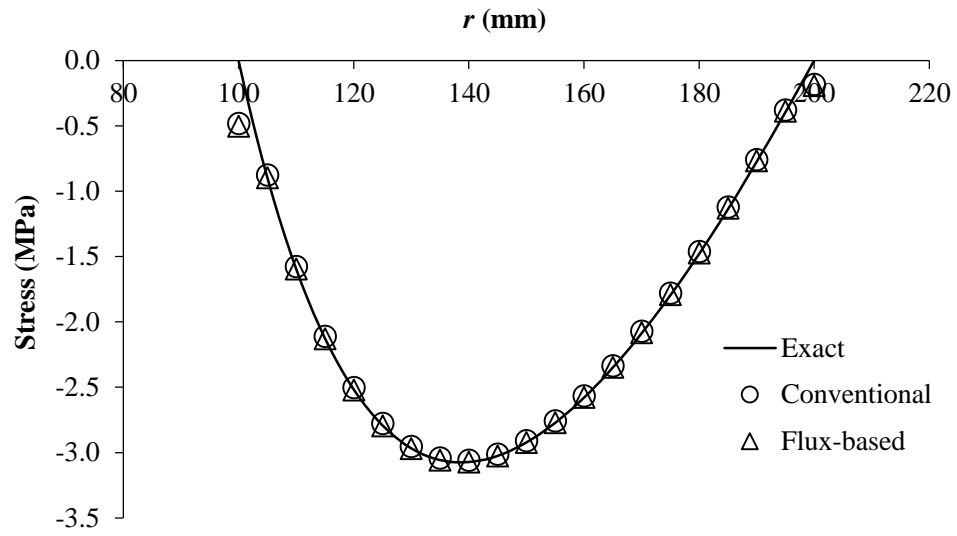
กับผลเฉลยแม่นยำตรง ดังแสดงในรูปที่ 5.25-5.27 ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสอง ในการวิเคราะห์ห้ปัญหาที่รับภาระอุณหภูมิ ด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า



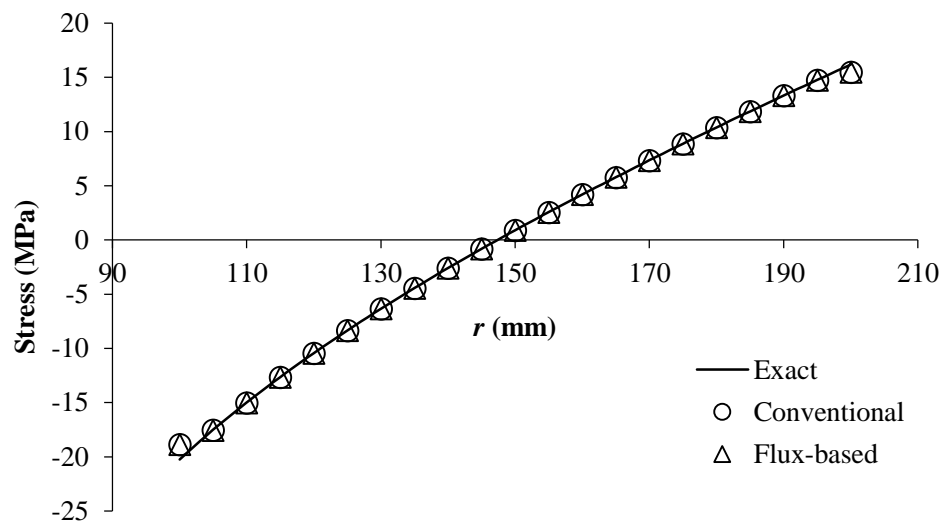
รูปที่ 5.24 แบบจำลองที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า จำนวน 600 เอลิเมนต์



รูปที่ 5.25 ค่าการเคลื่อนที่ในแนวแกนรัศมี



รูปที่ 5.26 ค่าความเค้น (σ_r) ในแนวแกนรัศมี



รูปที่ 5.27 ค่าความเค้น (σ_θ) ในแนวแกนรัศมี

บทที่ 6

การตรวจสอบประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น

6.1 บทนำ

การวิเคราะห์ปัญหาของแข็งดังแสดงในบทที่ 5 แสดงให้เห็นว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น สามารถวิเคราะห์ปัญหาของแข็งได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเทียบเท่า ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปที่ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ แต่ปัญหาเหล่านั้นถูกจำลองด้วยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ดี คือใช้เอลิเมนต์ที่มีรูปร่างที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือใช้จำนวนเอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมาก ซึ่งปัญหาในทางปฏิบัติ อาจจะทำให้การสร้างแบบจำลองได้ไม่ดีเท่า ดังนั้นเพื่อให้ทราบถึงประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นที่ชัดเจนยิ่งขึ้น ในด้านความเที่ยงตรงของการคำนวณ และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่บิดเบี้ยวในลักษณะต่างๆ กัน และภาระแรงลักษณะต่างๆ จะถูกนำมาใช้ในการตรวจสอบประสิทธิภาพ โดยเปรียบเทียบกับวิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบเดิม ซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์

6.2 การเปรียบเทียบเมทริกซ์ที่ประติรูปขึ้นได้บนเอลิเมนต์ลักษณะต่างๆ



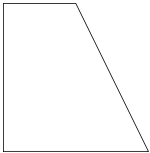


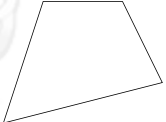

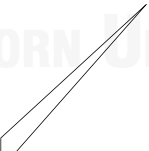
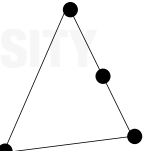
เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของวิธีฟลักซ์เชิงเส้น เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการอินทิเกรตแบบเดิม เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่บิดเบี้ยวในลักษณะต่างๆ จะถูกนำมาทดสอบ เพื่อเปรียบเทียบเมทริกซ์แข็งเกร็งที่คำนวณได้จากวิธีทั้งสอง เอลิเมนต์ที่นำมาทดสอบนั้น หากแบ่งประเภทของเอลิเมนต์ตามโปรแกรม AUTOMESH-2D จะมีทั้งหมดสามประเภทคือ

- 1) เอลิเมนต์ที่มีมุมภายในอยู่ในช่วง $120 \geq \theta \geq 60$
- 2) เอลิเมนต์ที่มีมุมภายในอยู่ในช่วง $\theta > 120$ or $\theta < 60$
- 3) เอลิเมนต์ที่มีมุมภายในอยู่ในช่วง $\theta > 150$ or $\theta < 30$

โดยที่คุณภาพของเอลิเมนต์ประเภทที่หนึ่งจะดีที่สุดเนื่องจากมีการบิดเบี้ยวไปจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีมุมภายในเท่ากับเก้าสิบองศาอย่างน้อยที่สุด และเอลิเมนต์ประเภทที่สามมีคุณภาพน้อยที่สุด เนื่องจากมีการบิดเบี้ยวมากที่สุด ซึ่งโปรแกรม AUTOMESH-2D เอง จะพยายามสร้างเอลิเมนต์ในประเภทที่หนึ่งให้มากที่สุด แต่เนื่องจากรูปร่างของปัญหาที่ซับซ้อน จึงจำเป็นที่จะต้องใช้อิเลเมนต์ประเภทอื่นประกอบด้วย จึงเป็นสาเหตุให้ต้องทำการทดสอบด้วยเอลิเมนต์ทั้งสามประเภท

เอลิเมนต์จำนวนเก้าเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.1 จะถูกนำมาคำนวณหาเมทริกซ์แข็งเกร็งของแต่ละเอลิเมนต์ โดยที่เอลิเมนต์ที่หนึ่งถึงสามเป็นเอลิเมนต์ในประเภทที่หนึ่ง เอลิเมนต์ที่สี่ถึงหกเป็นเอลิเมนต์ในประเภทที่สอง และเอลิเมนต์ที่เจ็ดถึงเก้าเป็นเอลิเมนต์ในประเภทที่สาม เมื่อนำมาคำนวณหาเมทริกซ์แข็งเกร็งของแต่ละเอลิเมนต์โดยวิธีฟลักซ์เชิงเส้นและวิธีอินทิเกรตโดยสูตรการ

อินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จุดเกาส์ 2 จุดในแต่ละทิศทาง พบว่า วิธีทั้งสองสามารถคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์ที่หนึ่งและเอลิเมนต์ที่สองได้เมทริกซ์สมมาตร (Symmetrical matrix) ที่มีค่าเทียบเท่ากัน แสดงถึงความเที่ยงตรงของเมทริกซ์แข็งเกร็งที่ได้จากวิธีทั้งสอง ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่เทียบเท่ากัน ในขณะที่เอลิเมนต์ที่สามถึงเอลิเมนต์ที่แปด วิธีฟลักซ์เชิงเส้นจะคำนวณได้เมทริกซ์แข็งเกร็งที่เป็นเมทริกซ์ไม่สมมาตร (Unsymmetrical matrix) ในขณะที่วิธีอินทิเกรตโดยสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์คำนวณได้เมทริกซ์ที่สมมาตร สำหรับเอลิเมนต์ที่เก้า นั้นเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ที่มีการเสียรูปไปอยู่ในรูปของสามเหลี่ยม ซึ่งโดยปกติแล้วโปรแกรม AUTOMESH-2D เองก็จะไม่สร้างเอลิเมนต์ชนิดนี้ขึ้นมาเนื่องจากเป็นเอลิเมนต์ที่มีการเสียรูปอย่างมาก ไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลอง เพราะอาจจะคำนวณได้เมทริกซ์แข็งเกร็งที่ผิดเพี้ยนไป แต่เอลิเมนต์ชนิดนี้ถูกนำมาทดสอบ เพื่อเปรียบเทียบวิธีทั้งสอง ซึ่งปรากฏว่าวิธีอินทิเกรตโดยสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ยังสามารถคำนวณได้และให้เมทริกซ์ที่สมมาตร ในขณะที่วิธีฟลักซ์เชิงเส้นไม่สามารถคำนวณหาเมทริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์ชนิดนี้ได้เลย สรุปผลทดสอบดังแสดงในตารางที่ 6.1

		
Element1	Element2	Element3
		
Element4	Element5	Element6
		
Element7	Element8	Element9

รูปที่ 6.1 เอลิเมนต์รูปร่างต่าง ๆ

จากการทดสอบสามารถสรุปได้ดังนี้ วิธีฟลักซ์เชิงเส้นจะคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็งได้เมทริกซ์ที่สมมาตรและมีค่าเทียบเท่าเมทริกซ์แข็งเกร็งที่ได้จากวิธีอินทิเกรตโดยสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ เมื่อใช้กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม (Rectangular element) หรือเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านขนาน

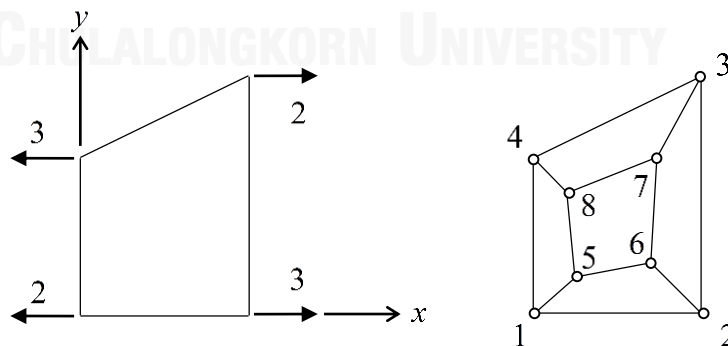
(Parallelogram element) เช่น เอลิเมนต์ที่หนึ่งและสอง ในขณะที่เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (Quadrilateral element) เช่น เอลิเมนต์อื่นๆ นั้น วิธีฟลักซ์เชิงเส้นจะให้เมทริกซ์แข็งเกร็งที่ไม่สมมาตร และวิธีฟลักซ์เชิงเส้นเองไม่สามารถใช้กับเอลิเมนต์ที่มีมุมภายในเท่ากับ 180 องศาได้ ดังเช่น เอลิเมนต์ที่เก้า แต่การที่วิธีฟลักซ์เชิงเส้นให้เมทริกซ์แข็งเกร็งที่ไม่สมมาตรนั้น ก็ยังไม่ได้หมายความว่า จะคำนวณได้คำตอบที่ผิดเพี้ยนไป ดังนั้นจึงต้องทดสอบด้วยปัญหาทดสอบอื่นๆ ต่อไป

ตารางที่ 6.1 ลักษณะของของเมทริกซ์แข็งเกร็งที่ได้จากวิธีฟลักซ์เชิงเส้นเปรียบเทียบกับวิธีทั่วไปโดย สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จุดเกาส์ 2 จุด ในแต่ละทิศทาง

Element type	Name	Stiffness matrix type	
		Flux-based	Conventional
1	Element1	Symmetrical	
	Element2	Symmetrical	Symmetrical
	Element3	Unsymmetrical	
2	Element4		
	Element5	Unsymmetrical	Symmetrical
	Element6		
3	Element7	Unsymmetrical	
	Element8	Unsymmetrical	Symmetrical
	Element9	n/a	

6.3 ปัญหาทดสอบความเค้นระนาบ

แผ่นวัสดุแผ่นหนึ่งถูกกำหนดคุณสมบัติวัสดุทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 1000$ และอัตราส่วนปัวซองส์ $\nu = 0.3$ รับภาระแรงกระทำดังแสดงในรูปที่ 6.2



(ก) ปัญหาในภาพรวม

(ข) การแบ่งเอลิเมนต์

รูปที่ 6.2 ปัญหาทดสอบความเค้นระนาบ

ปัญหานี้เป็นปัญหาทดสอบ ซึ่งมีผลเฉลยแม่นยำตรงดังนี้ [32]

$$u = 0.002x$$

$$v = -0.0006y$$

$$\sigma_x = 2$$

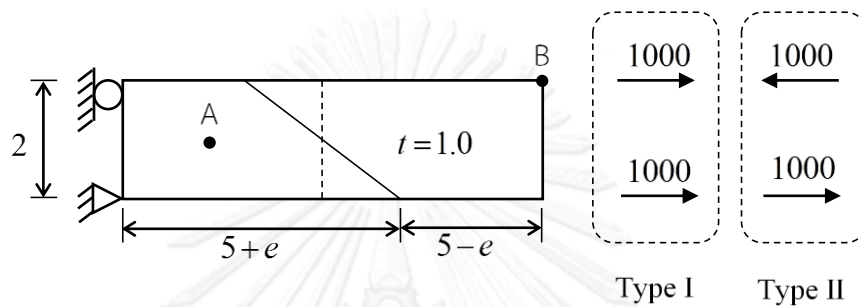
ปัญหานี้ทำการทดสอบแบบจำลองที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์ที่บิดเบี้ยว โดยจะทำการทดสอบทั้งหมด 4 แบบ แบ่งตามจำนวนเอลิเมนต์ คือ แบบจำลองหนึ่งเอลิเมนต์และแบบจำลองห้าเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.2 โดยที่แบบจำลองหนึ่งเอลิเมนต์นั้นจะเป็นเอลิเมนต์ที่มีคุณภาพประเภทที่หนึ่ง ตามการแบ่งคุณภาพเอลิเมนต์ของโปรแกรม AUTOMESH-2D ส่วนแบบจำลองห้าเอลิเมนต์นั้นจะประกอบด้วยเอลิเมนต์ที่มีคุณภาพทั้งสามประเภท และแบ่งตามการยึดตรึง 2 แบบ คือการกำหนดยึดฐานด้านล่าง โดยให้จุดต่อที่หนึ่งยึดตั้งทุกทิศ และจุดต่อที่สองเคลื่อนที่ในแนวแกน x เท่านั้น และการกำหนดยึดฐานด้านล่างร่วมกับขอบด้านซ้าย โดยเพิ่มการกำหนดจุดยึดจากเดิม ให้จุดต่อที่สี่เคลื่อนที่ได้แนวแกน y เท่านั้น ผลลัพธ์ที่คำนวณได้โดยโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสอง คือการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น และสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุดในแต่ละทิศทาง ให้ค่าผลลัพธ์ที่เท่ากันทุกค่าและตรงกับผลเฉลยแม่นยำตรงในทุกกรณี ดังแสดงค่าผลลัพธ์ในตารางที่ 6.2 และผลลัพธ์ความเค้นก็เท่ากับผลเฉลยแม่นยำตรง จึงแสดงได้ว่าโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสองสามารถวิเคราะห์ปัญหาความเค้นระนาบที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าได้ถูกต้อง แม้ว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าานั้นจะมีลักษณะบิดเบี้ยวและมีคุณภาพเอลิเมนต์ที่แตกต่างกัน

ตารางที่ 6.2 ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากปัญหาทดสอบความเค้นระนาบ

จุดต่อ (i)	ค่าโคออร์ดิเนต		ค่าการเคลื่อนที่ที่คำนวณได้		ภาระแรง	
	x_i	y_i	u_i	v_i	F_{x_i}	F_{y_i}
1	0.0	0.0	0.0000	0.00000	-2	0
2	2.0	0.0	0.0040	0.00000	3	0
3	2.0	3.0	0.0040	-0.00180	2	0
4	0.0	2.0	0.0000	-0.00120	-3	0
5	0.4	0.4	0.0008	-0.00024	0	0
6	1.4	0.6	0.0028	-0.00036	0	0
7	1.5	2.0	0.0030	-0.00120	0	0
8	0.3	1.6	0.0006	-0.00096	0	0

6.4 ปัญหาแผ่นที่ใช้เอลิเมนต์ที่มีรูปร่างต่างกัน

แผ่นซึ่งถูกยึดติดกับผนังด้านหนึ่งสามารถให้ตัวได้ในแนวความสูง รับภาระแรงสองรูปแบบ บริเวณปลายอีกด้าน คือ แรงดึงทั้งสองแรง และแรงดึงกับแรงกด [39] ดังแสดงในรูปที่ 6.3 แผ่นนี้ถูกกำหนดคุณสมบัติวัสดุทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 1000$ และอัตราส่วนปัวซองส์ $\nu = 0.25$

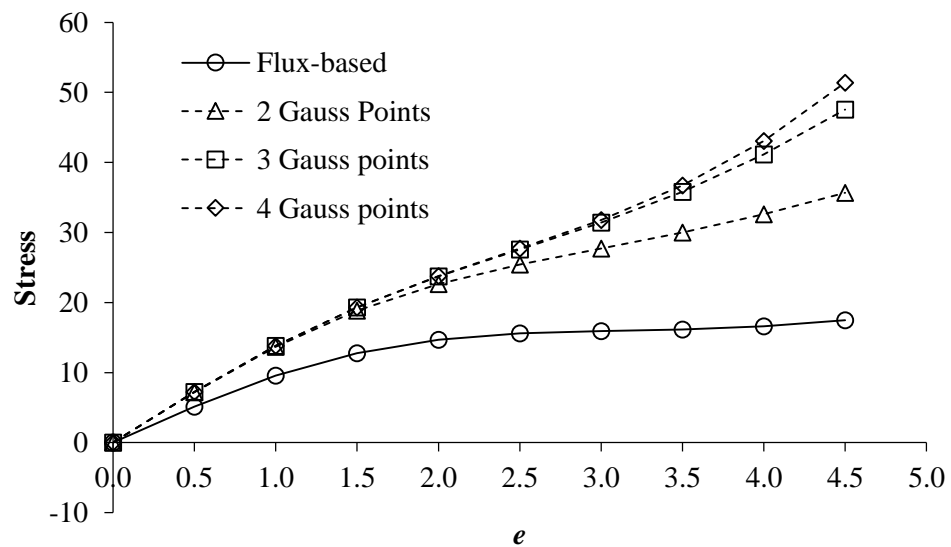


รูปที่ 6.3 แผ่นที่ใช้เอลิเมนต์ที่มีรูปร่างต่างกัน

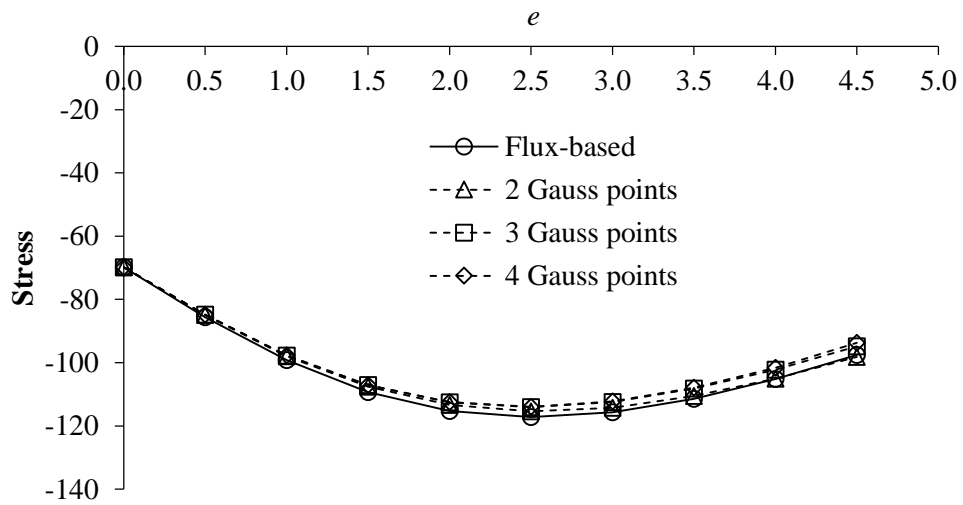
ปัญหานี้มีชุดแรงภาระ 2 รูปแบบ คือแรงดึงทั้งสองแรง (Type I) และแรงดึงกับแรงกด (Type II) โดเมนของปัญหาจะถูกแบ่งด้วยเอลิเมนต์สองเอลิเมนต์ ซึ่งเอลิเมนต์ทั้งสองนั้นจะเปลี่ยนรูปร่างจากสี่เหลี่ยมผืนผ้า และเปลี่ยนรูปไปตามค่า e ซึ่งกำหนดให้มีทั้งหมด 10 ค่า ดังนั้นจึงมีแบบจำลองทั้งหมด 10 แบบจำลอง เมื่อทำการคำนวณปัญหานี้ที่รับแรงชุดแรก คือ แรงดึงทั้งสองแรง โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสอง สามารถให้คำตอบที่เท่ากันในทุกแบบจำลอง เมื่อพิจารณาความเค้นที่เกิดขึ้นที่เอลิเมนต์ A และค่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B ดังแสดงในตารางที่ 6.3 แต่เมื่อทำการคำนวณปัญหานี้ที่รับแรงชุดที่สอง คือ แรงดึงและแรงกด ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นกลับไม่เท่ากันดังเช่นเดิม โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเป็นแบบจำลองที่มีการเปลี่ยนรูปของเอลิเมนต์มากขึ้น สำหรับปัญหาในกรณีเช่นนี้ซึ่งไม่มีผลเฉลยแม่นยำ สูตรการอินทิเกรตของเกาส์เลอ-จอร์ดที่มีความแม่นยำเพิ่มมากขึ้นเมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์เพิ่มมากขึ้นจะถูกนำมาเปรียบเทียบ โดยใช้จำนวนจุดเกาส์เพิ่มเป็น 3 และ 4 จุดในแต่ละทิศทาง พบว่าค่าผลลัพธ์ก็จะเปลี่ยนแปลงไปจากการใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุดในแต่ละทิศทาง ดังแสดงในรูปที่ 6.4-6.8

ตารางที่ 6.3 ผลลัพธ์ที่คำนวณได้เมื่อปัญหารับภาระแรงดึงทั้งสองแรง

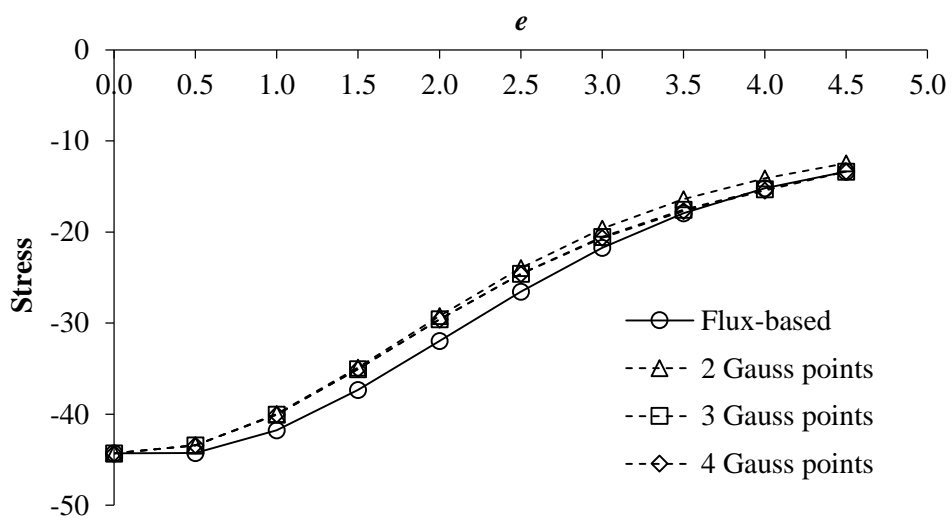
e	เอลิเมนต์ A			จุดต่อ B	
	σ_x	σ_y	τ_{xy}	u	v
0.0	400	0	0	2.66667	-0.33333
0.5	400	0	0	2.66667	-0.33333
1.0	400	0	0	2.66667	-0.33333
1.5	400	0	0	2.66667	-0.33333
2.0	400	0	0	2.66667	-0.33333
2.5	400	0	0	2.66667	-0.33333
3.0	400	0	0	2.66667	-0.33333
3.5	400	0	0	2.66667	-0.33333
4.0	400	0	0	2.66667	-0.33333
4.5	400	0	0	2.66667	-0.33333



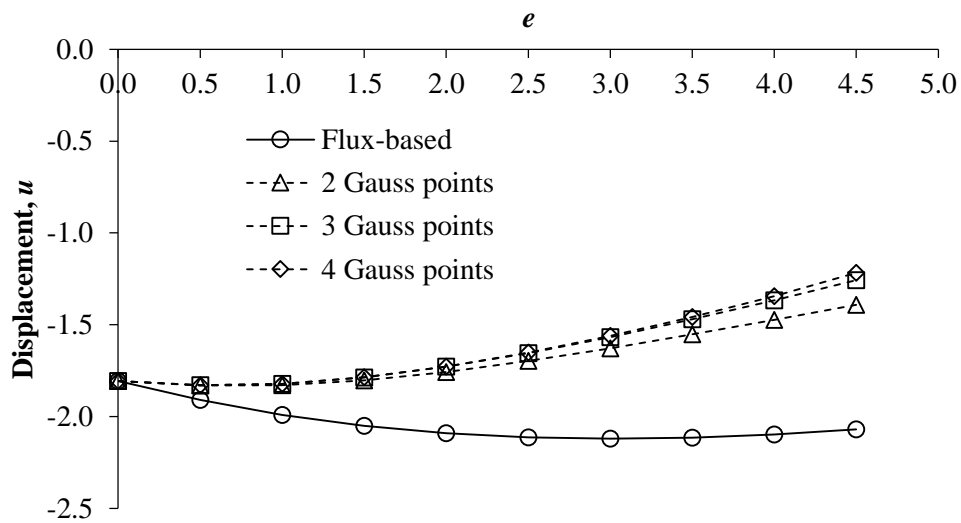
รูปที่ 6.4 ความเค้นบนเอลิเมนต์ A (σ_x) ที่คำนวณได้เมื่อปัญหารับภาระแรงดึงกับแรงกด



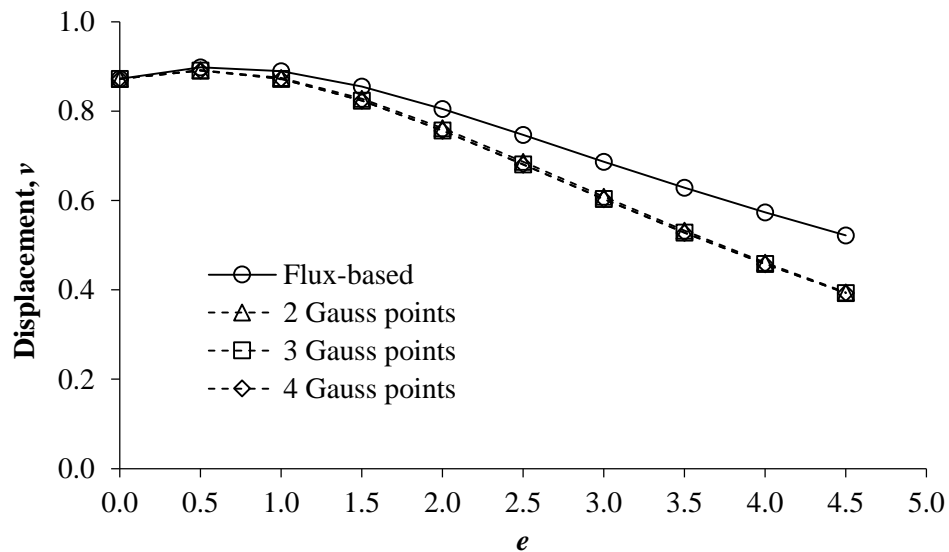
รูปที่ 6.5 ความเค้นบนเอลิเมนต์ A (σ_y) ที่คำนวณได้เมื่อปัญหาได้รับภาระแรงดิ่งกับแรงกด



รูปที่ 6.6 ความเค้นบนเอลิเมนต์ A (τ_{xy}) ที่คำนวณได้เมื่อปัญหาได้รับภาระแรงดิ่งกับแรงกด



รูปที่ 6.7 ค่าการเคลื่อนที่ของจุดต่อ B (u) ที่คำนวณได้เมื่อปัญหาไร้ภาระแรงดิ่งกับแรงกด



รูปที่ 6.8 ค่าการเคลื่อนที่ของจุดต่อ B (v) ที่คำนวณได้เมื่อปัญหาไร้ภาระแรงดิ่งกับแรงกด

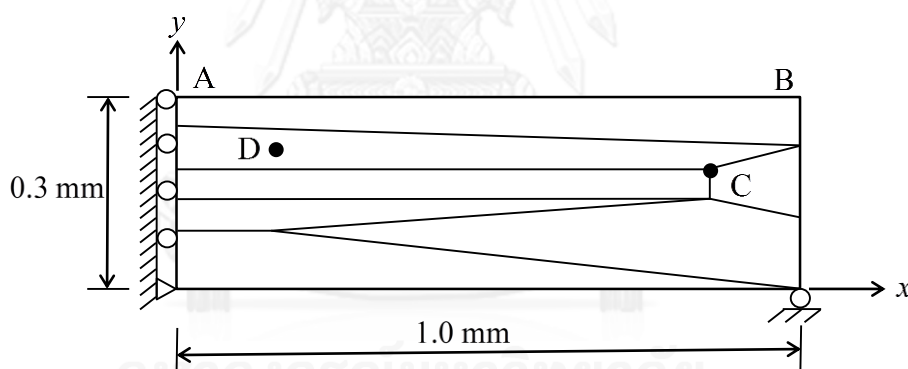
ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นสามารถสรุปได้ว่า โปรแกรมที่ประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นนั้น สามารถทำการวิเคราะห์ปัญหาที่รับภาระไปในทิศทางเดียวกันได้ดี แม้จะใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ดังจะเห็นได้จากกรณีหนึ่งที่ปัญหาไร้ภาระแรงดิ่งในทิศทางเดียวกัน แต่สำหรับกรณีที่สองที่เป็นปัญหาที่รับภาระแรงสวนทิศทางกันบนเอลิเมนต์เดียวกันนั้น แม้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมที่ประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นจะสอดคล้องกับผลลัพธ์จากโปรแกรมที่ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ แต่ผลลัพธ์ที่แตกต่างกันเมื่อเอลิเมนต์เปลี่ยนรูปมากขึ้น ทำให้พบว่าโปรแกรมที่ประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น

นั้น จะให้คำตอบที่แตกต่างจากการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ เมื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาที่มีภาระแรงสวนทิศทางกันบนหนึ่งเอลิเมนต์ โดยเฉพาะเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่บิดเบี้ยวไปมาก

แต่เนื่องจากปัญหาในกรณีที่สองนี้ไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรง ดังนั้นจึงไม่อาจสรุปได้ว่าการใช้วิธีการใด จะให้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรงมากกว่ากัน และในทางปฏิบัติการสร้างแบบจำลองจะใช้เอลิเมนต์เป็นจำนวนมาก ปัญหาในกรณีนี้จึงเป็นตัวอย่างที่แสดงถึงความแตกต่างของผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้จากวิธีทั้งสองในกรณีเฉพาะเช่นนี้เท่านั้น

6.5 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่ใช้เอลิเมนต์ที่บิดเบี้ยว

ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยม [12] รับแรงดึงทางด้าน A-B ซึ่งแบ่งเป็นสองชนิด คือ แรงดึงสม่ำเสมอ (Uniform tension) ซึ่งมีลักษณะแรงดึงที่จุด A และ B เท่ากัน และแรงดึงไม่สม่ำเสมอ (Non-Uniform tension) ซึ่งมีลักษณะแรงดึงที่จุด A และ B ไม่เท่ากัน ถูกจับยึดดังแสดงในรูปที่ 6.9 มีคุณสมบัติวัสดุทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 1500$ และอัตราส่วนปัวซองส์ $\nu = 0.25$



รูปที่ 6.9 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่ใช้เอลิเมนต์ที่บิดเบี้ยว

ปัญหานี้จะถูกสร้างแบบจำลองด้วยเอลิเมนต์จำนวน 7 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.9 เอลิเมนต์ส่วนใหญ่ล้วนเป็นเอลิเมนต์ที่เกิดการบิดเบี้ยวไปมาก ปัญหานี้แบ่งการทดสอบออกเป็น 2 รูปแบบ ตามภาระแรงที่กระทำด้าน A-B เมื่อใช้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นทั้งสองในการวิเคราะห์ปัญหานี้ โดยโปรแกรมที่ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ทำการเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ขึ้นไปถึง 4 จุดในแต่ละทิศทาง จากนั้นพิจารณาผลลัพธ์ของค่าการเคลื่อนที่ที่จุดต่อ C และพิจารณาความเค้นที่เกิดขึ้นที่เอลิเมนต์ D จะได้ผลลัพธ์ดังแสดงในตารางที่ 6.4-6.5 จากผลลัพธ์ที่ได้พบว่าโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น มีประสิทธิภาพเทียบเท่าโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ เมื่อนำมาวิเคราะห์ปัญหาที่รับภาระสม่ำเสมอด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม

ด้านไม่เท่า ในขณะที่จะได้ผลลัพธ์ที่ต่างกัน เมื่อนำมาวิเคราะห์ปัญหาที่รับภาระไม่สม่ำเสมอด้วย
 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า เมื่อเปรียบเทียบกับโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้สูตรการอินทิเกรตของ
 เกาส์-จอร์จด์ที่ใช้จำนวนจุดเกาส์ต่าง ๆ กัน

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นสามารถสรุปได้ว่า โปรแกรมที่ประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นนั้น เมื่อวิเคราะห์
 ปัญหาที่รับภาระที่ไม่สม่ำเสมอบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าเอลิเมนต์หนึ่งนั้น แม้ว่าจะได้ผลลัพธ์ที่
 สอดคล้องกับผลลัพธ์จากโปรแกรมที่ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ แต่ก็มีค่าที่แตกต่างกัน

แต่เนื่องจากปัญหาในกรณีที่สองนี้ไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรง ดังนั้นจึงไม่อาจสรุปได้ว่าการใช้
 วิธีการใด จะให้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรงมากกว่ากัน และในทางปฏิบัติการสร้างแบบจำลองจะใช้เอลิเมนต์
 เป็นจำนวนมาก ความแตกต่างของผลลัพธ์นี้จึงอาจน้อยมากในทางปฏิบัติและไม่ส่งผลกระทบต่อผลลัพธ์ใน
 ภาพรวมของปัญหา

ตารางที่ 6.4 ค่าการเคลื่อนที่ที่จุดต่อ C ที่คำนวณได้จากโปรแกรมทั้งสอง

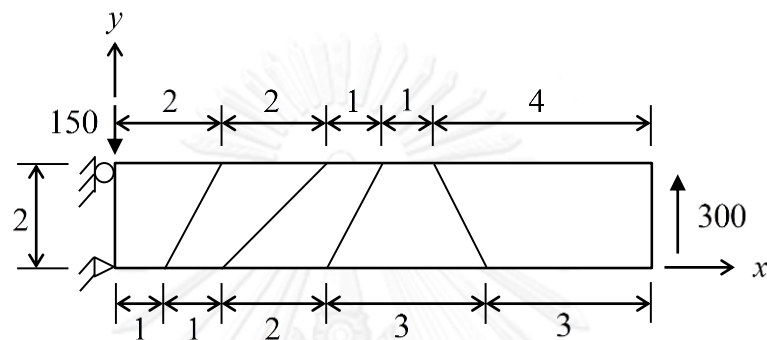
	Uniform tension		Non-Uniform tension	
	u	v	u	v
Flux-based	-29.6667	24	-31.11630	10.27060
2 Gauss pts	-29.6667	24	-31.32770	10.83760
3 Gauss pts	-29.6667	24	-31.25050	10.83380
4 Gauss pts	-29.6667	24	-31.24180	10.84120

ตารางที่ 6.5 ค่าความเค้นที่เอลิเมนต์ D ที่คำนวณได้จากโปรแกรมทั้งสอง

	Uniform tension			Non-Uniform tension		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
Flux-based	0	200000	0	4094	214140	-5369
2 Gauss pts	0	200000	0	13313	250249	-8408
3 Gauss pts	0	200000	0	13332	250189	-8660
4 Gauss pts	0	200000	0	13342	250297	-8670

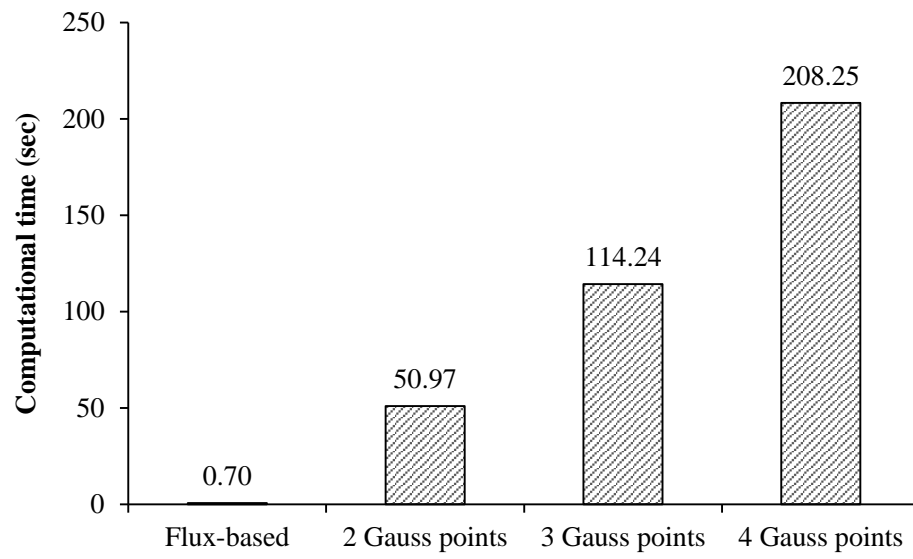
6.6 การทดสอบเวลาที่ใช้ในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ของปัญหาคานยี่น

ปัญหาคานยี่นนี้จะถูกนำมาทดสอบเวลาที่โปรแกรมใช้ในการสร้างเอลิเมนต์เมทริกซ์ [17] โดยตัวปัญหาจะถูกจำลองด้วยเอลิเมนต์จำนวน 5 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.10 คานยี่นนี้มีคุณสมบัติทางกลดังต่อไปนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 1000$ และอัตราส่วนปัวซองส์ $\nu = 0.3$



รูปที่ 6.10 ปัญหาคานยี่น

เฉพาะเวลาที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์เมทริกซ์เท่านั้นที่จะถูกบันทึก และจะทำการคำนวณซ้ำจำนวน 5000 รอบ เพื่อให้เห็นค่าที่ชัดเจนและลดผลกระทบจากกระบวนการอื่นๆ ในการคำนวณ เช่น การรวมเมทริกซ์ เพื่อให้ได้ค่าที่เที่ยงตรงที่สุด ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้น และโปรแกรมที่ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ด้วยจำนวนจุดเกาส์ 2, 3 และ 4 ในแต่ละทิศทาง แสดงดังรูปที่ 6.11 จะเห็นได้ว่าโปรแกรมที่ประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้นใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าโปรแกรมที่ใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์เป็นจำนวนมาก และแตกต่างกันมากเมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์มากขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุดในแต่ละทิศทาง พบว่าโปรแกรมที่ประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้นสามารถลดเวลาในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ได้ถึง 98.63% ซึ่งประสิทธิภาพในด้านเวลาที่ใช้ในการคำนวณที่ดีเช่นนี้นั้นตรงกับแนวคิดในการหลีกเลี่ยงการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข โดยการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทำให้สามารถประดิษฐ์เอลิเมนต์เมทริกซ์ให้อยู่ในรูปแบบปิดได้ ทำให้สามารถคำนวณได้โดยตรงจึงเป็นผลให้ลดเวลาในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ลง เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข



รูปที่ 6.11 เปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ในแต่ละวิธี

บทที่ 7

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

7.1 การปรับขนาดเอลิเมนต์

เพื่อเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์จะถูกนำมาใช้ร่วมในกระบวนการวิเคราะห์ปัญหาของแข็ง การปรับขนาดเอลิเมนต์ที่ใช้กับปัญหาของแข็งนี้ ใช้การสร้างรูปแบบและขนาดของเอลิเมนต์ใหม่ (Remeshing) โดยที่ใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เดิม (h -Refinement) [32] ซึ่งมีหลักการคือ จะปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของค่าความชันของคำตอบ (Change of gradient) สูง เพื่อให้ได้ความแม่นยำของคำตอบสูง และปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น เพื่อจะได้ลดการคำนวณในบริเวณที่ไม่จำเป็น โดยสามารถตรวจสอบบริเวณต่างๆ ได้จากค่าอนุพันธ์อันดับสองของคำตอบ ซึ่งแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของค่าความชันของคำตอบ [40, 41] สำหรับปัญหาของแข็ง คำตอบของค่าความเค้นวอนมิส จะถูกนำมาใช้เป็นพารามิเตอร์หลักในการปรับขนาดเอลิเมนต์

สำหรับปัญหาสองมิติ ค่าอนุพันธ์อันดับสองของคำตอบนั้นมี 3 ค่า คือ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ และ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ เพื่อที่จะทราบค่าอนุพันธ์อันดับสองเหล่านี้ สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมลักษณะการกระจายของคำตอบบนเอลิเมนต์ตามสมการ (3.8) คือ

$$\phi^{(e)} = [N] \{\phi\} \quad (7.1)$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{\phi\} \quad (7.2)$$

ซึ่งมีค่าคงที่และรู้ค่าสำหรับเอลิเมนต์นั้น ในขณะที่เดียวกันหากมองโดเมนของคำตอบในภาพรวมแล้ว สมมุติว่าค่าความชันของคำตอบบนเอลิเมนต์นั้นมีลักษณะการกระจายแบบเชิงเส้นคู่ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าความชันที่จุดต่อ ดังนี้

$$\frac{\partial \hat{\phi}^{(e)}}{\partial x} = [N] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \quad (7.3)$$

จากนั้นนำสมการ (7.3) ลบออกจากสมการ (7.2) แล้วประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจะได้

$$\int_A \{N\} \left(\frac{\partial \hat{\phi}^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} \right) dA = 0 \quad (7.4)$$

เมื่อแทนสมการ (7.2) – (7.3) ลงในสมการ (7.4) จะได้

$$\int_A \{N\} [N] dA \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \{\phi\} \quad (7.5)$$

นั่นคือ

$$[M] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \{\phi\} \quad (7.6)$$

โดย $[M]$ แทนเมทริกซ์มวล (Mass matrix) ซึ่งเป็นเมทริกซ์แบบเต็ม (Consistent matrix) และค่าทางด้านขวาของสมการสามารถหาได้ง่าย สมการนี้เป็นสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงต้องคำนวณสำหรับทุกๆ เอลิเมนต์แล้วรวมกันเข้าเป็นระบบสมการรวมเพื่อหาค่าความชันของคำตอบที่จุดต่อ แต่ระบบสมการรวมสามารถแก้ได้โดยสะดวกหากเมทริกซ์มวล $[M]$ นี้ ถูกแปลงให้อยู่ในรูปแบบรวมตัวกันที่จุดต่อ (Lumped mass matrix) [40] เนื่องจากคำนวณได้โดยตรง ซึ่งสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมอยู่ในรูปแบบ

$$[M] = \frac{A}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

โดย A คือพื้นที่ของเอลิเมนต์

จะพบว่า ค่าความชันของคำตอบที่จุดต่อในระบบสมการรวมของสมการ (7.6) นี้ ได้มาจากค่าความชันของคำตอบ ซึ่งเฉลี่ยมาจากทุกๆ เอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อนั้น โดยมีพื้นที่ของเอลิเมนต์เป็นตัวถ่วงน้ำหนัก

การคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับสองสามารถคำนวณได้ในลักษณะเดียวกัน โดยหลังจากทราบค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อแล้ว สามารถคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับสองได้จาก

$$\frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \quad (7.8)$$

และ

$$\frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} = [N] \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} \quad (7.9)$$

จากนั้นค่าอนุพันธ์อันดับสองของคำตอบที่จุดต่อจึงคำนวณได้ต่อเนื่องจาก

$$\int_A \{N\} [N] dA \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \quad (7.10)$$

นั่นคือ

$$[M] \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \quad (7.11)$$

ขั้นตอนเดียวกันนี้สามารถใช้เพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองอีก 2 ค่าที่เหลือ $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right)$ สำหรับจุดต่อต่างๆ ได้

อนึ่ง เนื่องจากเอลิเมนต์เป็นสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า จึงต้องแปลงสมการที่อยู่พิกัด $x-y$ ให้อยู่ในพิกัด $\xi-\eta$ เมื่อจะทำการคำนวณ โดยการแปลงพิกัดมีหลักการเช่นเดียวกับที่ใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ จึงจะไม่แสดงในหัวข้อนี้

ค่าอนุพันธ์อันดับสองของคำตอบทั้ง 3 ค่านี้ มีความคล้ายคลึงกับค่าความเค้นย่อย σ_x, σ_y และ τ_{xy} ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (Solid mechanics) ซึ่งหากรู้ค่าความเค้นย่อยทั้งสามนี้แล้ว สามารถคำนวณหาค่าความเค้นหลัก (Principal stress) ในแนวแกนหลักได้โดยใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (7.14)$$

จากนั้นเราจะเลือกค่าที่มากที่สุดและน้อยที่สุดในแนวแกนหลัก เพื่อใช้ในการพิจารณาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมต่อไป

$$\lambda = \max \left(\left| \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} \right| \right) \quad (7.15)$$

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่แบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์เล็กๆ เมื่อใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กลงเรื่อยๆ ก็จะสามารถแทนผลเฉลยแม่นยำตรงได้สำหรับปัญหาหนึ่งๆ และในขณะเดียวกัน หากใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับผลเฉลยแม่นยำตรง ก็สามารถคำนวณได้ผลเฉลยแม่นยำตรงแม้จะใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ ดังนั้นจึงสามารถประมาณการเข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำตรงได้จากการพิจารณาฟังก์ชันการประมาณที่ใช้อนุกรมของเทย์เลอร์ ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยค่าความเครียดหรือค่าความเค้นในเอลิเมนต์ใดๆ จะแปรผันกับขนาดเอลิเมนต์ h เป็น $O(h^{p+1-m})$ [32, 42] โดยที่ p แทนอันดับของฟังก์ชันการประมาณภายในที่ใช้ในเอลิเมนต์ และ m แทนอันดับของอนุพันธ์ของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเคลื่อนที่

สำหรับงานวิจัยนี้ซึ่งใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ซึ่งใช้การกระจายของฟังก์ชันการประมาณภายในเป็นเส้นตรงนั้น จะได้ ($p=1$) และอันดับของอนุพันธ์ของความสัมพันธ์ระหว่าง

ความเครียดและค่าการเคลื่อนที่เท่ากับหนึ่ง ($m = 1$) ดังนั้น ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยของค่าความเครียดและค่าความเค้นในเอลิเมนต์จะแปรผันกับขนาดของเอลิเมนต์เป็น $O(h)$ ฉะนั้น

$$O(h) \rightarrow \lambda h \quad (7.16)$$

เมื่อกำหนดให้ค่าความผิดพลาดในแต่ละเอลิเมนต์มีค่าคงที่ ดังนั้นจึงสามารถคำนวณขนาดของเอลิเมนต์เปรียบเทียบกับในแต่ละบริเวณของปัญหาได้เป็น

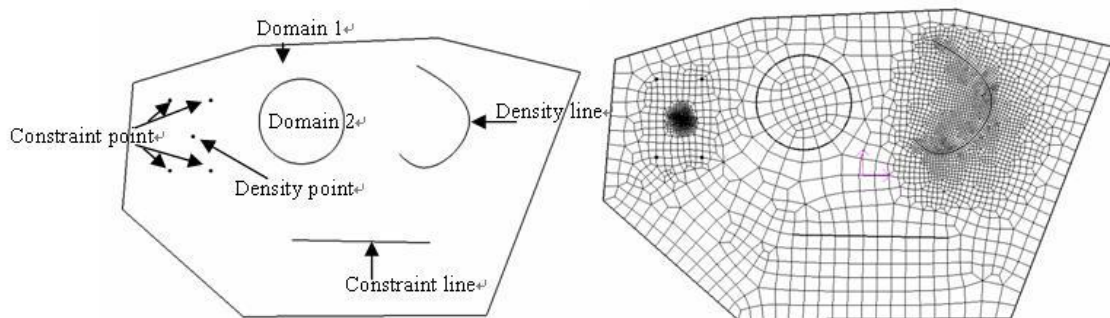
$$\lambda h = \lambda_{\max} h_{\min} = \text{constant} \quad (7.17)$$

โดย h_{\min} แทนขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดที่กำหนดโดยผู้ใช้

λ_{\max} แทนขนาดของค่าเจาะจงที่มีค่ามากที่สุดในโดเมนปัญหา

7.2 การประยุกต์ใช้การปรับขนาดเอลิเมนต์กับโปรแกรม AUTOMESH-2D

โปรแกรม AUTOMESH-2D Mono-Domain V1.0 [33] ถูกประดิษฐ์ขึ้นโดย ดร. ซินหวู มา (Dr.Xinwu Ma) จากมหาวิทยาลัยซานตง (Shandong University) ประเทศจีน ตัวโปรแกรมมีความสามารถในการสร้างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยสามารถกำหนดให้เอลิเมนต์มีขนาดเล็กที่บริเวณหนึ่ง และขนาดใหญ่อีกบริเวณหนึ่ง ซึ่งสอดคล้องกับการทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ โดยวิธีที่เลือกใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์บนโปรแกรม AUTOMESH-2D มีหลายวิธี ดังแสดงในรูปที่ 7.1



รูปที่ 7.1 วิธีในการปรับขนาดเอลิเมนต์ของโปรแกรม AUTOMESH-2D

สำหรับวิธีที่เลือกใช้สำหรับงานวิจัยนี้ คือ การใส่จุดความหนาแน่น (Density point) และจุดควบคุม (Constraint point) ลงไปในโดเมนของปัญหา โดยที่จุดความหนาแน่นนี้จะเป็นตัวแปรที่ระบุว่าบริเวณใดจะมีเอลิเมนต์ขนาดเล็กและจุดควบคุมจะเป็นตัวแปรที่ระบุว่าบริเวณใดจะมีเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ ซึ่งในการใช้งาน จุดทั้งสองไม่ได้แบ่งแยกประเภท แต่จะระบุด้วยค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ (Relative density) ที่แตกต่างกัน อนึ่ง โปรแกรมสามารถรับค่าจุดเหล่านี้ได้สูงสุดประมาณ 10,000 จุด

ตำแหน่งของจุดความหนาแน่นจะใช้ตำแหน่งของจุดต่อจากแบบจำลองเดิมเพื่อความสะดวก เมื่อทราบค่า h ของแต่ละจุดจากสมการ (7.17) แล้ว ค่านี้จะถูกแปลงให้กลายเป็นค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์สำหรับโปรแกรม AUTOMESH-2D โดยเมื่อพิจารณาความหมายของตัวแปรทั้งสองแล้วจะพบว่ามีความหมายในลักษณะตรงข้ามกัน ซึ่ง h นั้นเมื่อมีค่าน้อยจะแสดงถึงเอลิเมนต์ขนาดเล็ก ในขณะที่ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ (d) เมื่อมีค่าน้อยจะแสดงถึงเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ (เมื่อเปรียบเทียบกับค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ที่มีค่าสูงกว่า) และในทางกลับกันเมื่อ h มีค่ามากจะแสดงถึงเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ ในขณะที่ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ (d) จะแสดงถึงเอลิเมนต์ขนาดเล็ก ดังนั้นค่าทั้งสองจึงเป็นส่วนกลับของกันและกัน แต่เนื่องจากการใส่ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ที่แตกต่างกันมากเกินไปในโดเมนหนึ่ง จะทำให้โปรแกรมไม่สามารถสร้างเอลิเมนต์ได้ในบางครั้ง ฉะนั้นจึงต้องกำหนดค่าสูงสุดของค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์สูงสุดค่าหนึ่ง (d_{\max}) ทำให้ได้สมการสำหรับแปลงค่าดังนี้

$$d_i = d_{\max} - \left(\frac{(d_{\max} - 1)(h_i - 1)}{(h_{\max} - 1)} \right), i = 1, 2, 3 \dots \text{node} \quad (7.18)$$

โดยที่ h_{\max} แทนค่าสูงสุดของค่า h แต่ในทางปฏิบัติจะไม่ใช้ค่าสูงสุดของทุกข้อมูล แม้ว่าจะทำให้ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ (d_i) กระจายค่าได้เหมาะสม แต่โปรแกรม AUTOMESH-2D กลับไม่สามารถสร้างเอลิเมนต์ได้บ่อยครั้ง เนื่องจากค่ามีการกระจายตัวมากเกินไป ดังนั้นจึงเลือกใช้ค่า h_{\max} ที่ค่า h ของข้อมูลตัวหนึ่ง ซึ่งหาโดยเรียงค่า h ทั้งหมดจากน้อยไปมาก และเลือกค่าจำนวน 10% ของข้อมูลทั้งหมดที่น้อยที่สุดออกมา จากนั้นเลือกใช้ค่า h_{\max} จากค่า h ของข้อมูลกลุ่มนี้ การเลือกใช้ข้อมูลเช่นนี้มีความหมายคือจะเลือกปรับขนาดเอลิเมนต์ที่บริเวณที่มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กสูงสุดจำนวน 10% แรก ซึ่งก็จะทำให้การปรับขนาดเอลิเมนต์กระทำที่บริเวณที่ถูกต้องยิ่งขึ้น แต่ก็สามารถปรับค่าได้ตามความเหมาะสมสำหรับปัญหานั้นๆ

อนึ่ง วิธีใช้โปรแกรม AUTOMESH-2D แสดงในภาคผนวก ข

7.2.1 ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับปรับขนาดเอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม AUTOMESH-2D

โปรแกรม AUTOMESH-2D สามารถรับไฟล์ข้อมูลนำเข้าเพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ได้ โดยที่ไฟล์ข้อมูลนำเข้าจะมีนามสกุล “.DST” โดยบรรทัดแรกจะบอกจำนวนจุดความหนาแน่นทั้งหมด บรรทัดต่อๆ มาจะแสดงรายละเอียดของจุดความหนาแน่นแต่ละจุด ซึ่งจุดเหล่านี้คือจุดต่อของแบบจำลองเดิม ในแต่ละบรรทัดจะมีข้อมูล 4 ชนิด ซึ่งประกอบด้วย

- 1) ค่าระบุชนิด (0 คือ จุดที่ขอบเขตของโดเมน และ 1 คือจุดในโดเมน)
- 2) ค่าโคออร์ดิเนต x
- 3) ค่าโคออร์ดิเนต y
- 4) ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ (d_i)

ดังเช่นรายละเอียดในไฟล์ดังนี้

260			
0	50	64.990059	1
0	50	66.739525	1
1	47.954214	66.63887	5
:	:	:	:



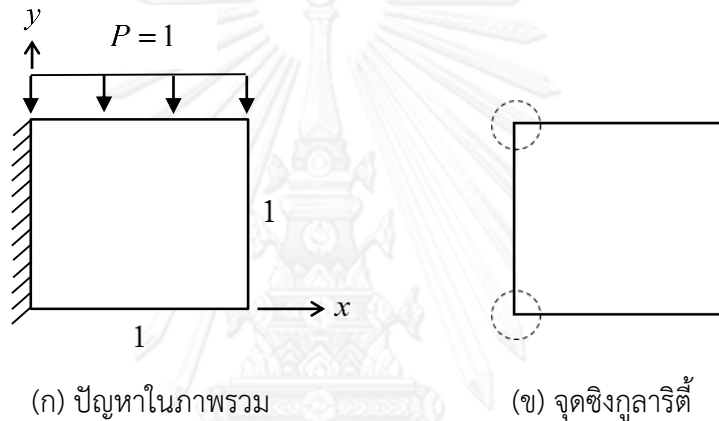
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

บทที่ 8

การวิเคราะห์ปัญหาของแข็งร่วมกับการปรับขนาดเอลิเมนต์

8.1 ปัญหากล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

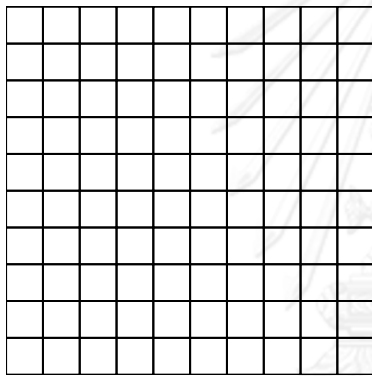
ปัญหานี้เป็นปัญหาความเครียดระนาบที่ไร้หน่วย กล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์รับภาระแรงกด (P) ที่ผิวด้านบนดังแสดงในรูป 8.1 [43] กล่องสี่เหลี่ยมนี้กำหนดให้มีคุณสมบัติของวัสดุทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E=1$ และค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง $\nu=0.3$



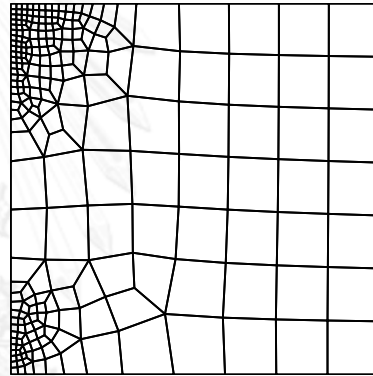
รูปที่ 8.1 ปัญหากล่องสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

ปัญหานี้เป็นปัญหาสมมติที่ใช้ทำการทดสอบการปรับขนาดเอลิเมนต์ได้เป็นอย่างดี เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีจุดซิงกูลาริตี (Singularity point) 2 จุด ดังแสดงในรูป 8.1(ข) คือเกิดความเค้นสูงไม่สิ้นสุดที่บางจุดในโดเมนของปัญหาเมื่อใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหา ซึ่งจะใช้ในการตรวจสอบประสิทธิภาพของการปรับขนาดเอลิเมนต์ได้ดี เริ่มทำการวิเคราะห์ครั้งแรกด้วยแบบจำลองที่มีเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันจำนวน 100 เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 8.2(ก) จากนั้นนำผลลัพธ์ที่ได้ไปทำการคำนวณหาเกรเดียนท์อันดับสองด้วยโปรแกรม SECONDGRADIENT ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น สำหรับปัญหาของแข็งนี้นิยมใช้ความเค้นวอนมิสเป็นพารามิเตอร์ในการคำนวณหาเกรเดียนท์อันดับสอง ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมที่ใช้คำนวณแสดงในบทที่ 4 จากนั้นทำการคำนวณหาค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ดังที่ได้อธิบายในบทที่ 7 เพื่อนำไปใช้ในโปรแกรม AUTOMESH-2D ให้สร้างเอลิเมนต์ใหม่ที่มีการปรับขนาดตามค่าเกรเดียนท์อันดับสองหรือการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบเดิม โดยกำหนดให้ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์สูงสุดเท่ากับ 10 และทำการปรับเอลิเมนต์ในช่วง 10% ของค่า h ที่สูงที่สุด และเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ประมาณ 2 เท่าจากแบบจำลองเริ่มต้น จึงได้เอลิเมนต์ใหม่จากการปรับขนาดครั้งที่หนึ่งดังแสดงในรูปที่ 8.2(ข) โดยที่เอลิเมนต์ใหม่นี้เพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ขึ้น

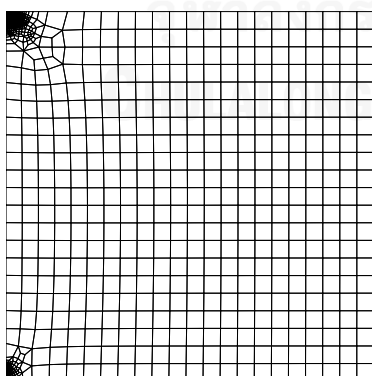
เป็น 243 เอลิเมนต์ จากนั้นจึงทำการปรับขนาดเอลิเมนต์อีกครั้ง เพื่อยืนยันว่าการปรับขนาดครั้งก่อนหน้ามีความถูกต้อง โดยกำหนดให้ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์สูงสุดเท่ากับ 20 และทำการปรับเอลิเมนต์ในช่วง 10% ของค่า h ที่สูงที่สุด และเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ขึ้นเป็น 8 เท่าจากแบบจำลองเริ่มต้น การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ขึ้นเป็น 850 เอลิเมนต์ เพื่อให้สามารถใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กลงอีกบริเวณที่มีเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบสูง ดังแสดงในรูปที่ 8.2(ค) ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นบริเวณเดิมกับการปรับขนาดครั้งแรก แสดงว่าการปรับขนาดครั้งแรกสามารถหาบริเวณที่จะปรับขนาดเอลิเมนต์ได้ถูกต้องแล้ว คือเกิดความเค้นขึ้นสูงที่บริเวณมุมด้านซ้ายทั้งด้านบนและล่าง ซึ่งเป็นจุดซิงกูลาริตี้ เมื่อเปรียบเทียบความเค้นวอนมิสที่คำนวณได้จากการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้น บริเวณจุดซิงกูลาริตี้ทั้งสอง พบว่าความเค้นวอนมิสที่คำนวณได้มีค่าสูงขึ้นเรื่อยๆ ดังแสดงในตารางที่ 8.1



(ก) เอลิเมนต์เริ่มต้น (100 เอลิเมนต์)



(ข) ปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง (243 เอลิเมนต์)



(ค) ปรับขนาดครั้งที่สอง (850 เอลิเมนต์)

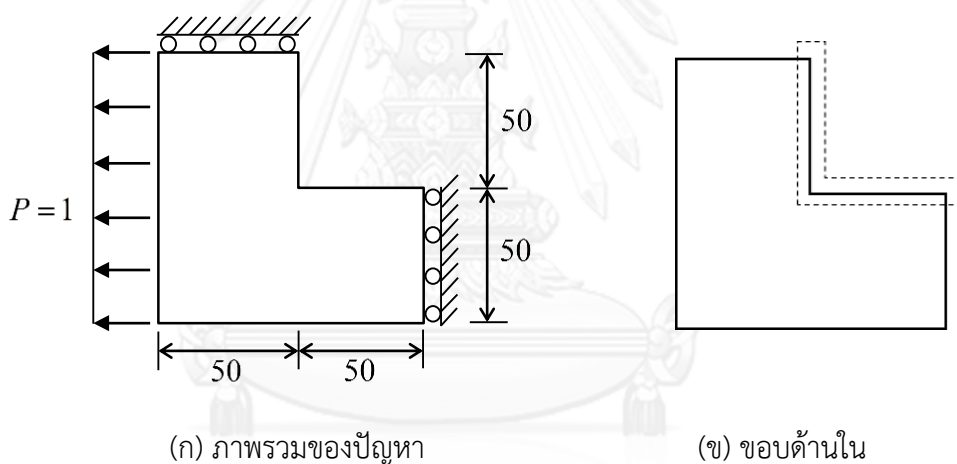
รูปที่ 8.2 ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล

ตารางที่ 8.1 เปรียบเทียบความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้นที่จุดซิงกูลาริตี

แบบจำลอง	จำนวนเอลิเมนต์	ความเค้นวอนมิสที่จุดซิงกูลาริตี	
		มุมซ้ายด้านบน	มุมซ้ายด้านล่าง
เอลิเมนต์เริ่มต้น	100	3.87	2.90
ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่ง	243	8.07	5.12
ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง	850	12.74	7.20

8.2 ปัญหาแผ่นรูปตัวแอล

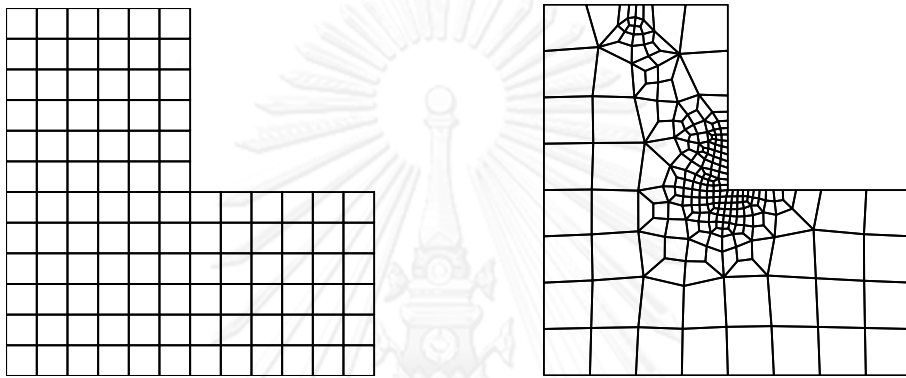
ปัญหานี้เป็นปัญหาความเค้นระนาบที่ไร้หน่วย แผ่นรูปตัวแอลรับภาระแรงดิ่งที่ขอบด้านซ้าย ดังแสดงในรูปที่ 8.3 [44] ตัวแผ่นกำหนดให้มีคุณสมบัติของวัสดุทางกลดังนี้ คือ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 1$ และค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง $\nu = 0.3$



รูปที่ 8.3 ปัญหาแผ่นรูปตัวแอล

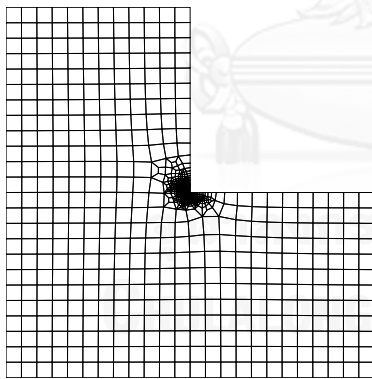
ปัญหานี้เป็นปัญหาที่นิยมใช้ทำการทดสอบการปรับขนาดเอลิเมนต์อีกปัญหาหนึ่ง เพราะเป็นปัญหาที่มีจุดซิงกูลาริตี เกิดความเค้นขึ้นสูงที่บริเวณมุมของขอบด้านในของแผ่นรูปตัวแอล เริ่มทำการคำนวณเบื้องต้นจากแบบจำลองที่มีเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่ากันจำนวน 108 เอลิเมนต์ จากนั้นเริ่มทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยใช้การกำหนดค่าต่าง ๆ เช่นเดียวกับปัญหาตัวอย่างแรก ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรกจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มเป็น 231 เอลิเมนต์ และทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มเป็น 852 เอลิเมนต์ พบว่าเอลิเมนต์ที่ทำการปรับขนาดครั้งแรกพยายามที่จะใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กบริเวณส่วนบนของรูปตัวแอล และบริเวณมุมของรูปตัวแอลดังแสดงในรูปที่ 8.4(ข) แต่เมื่อปรับขนาดครั้งที่สองกลับเหลือเฉพาะบริเวณมุมของรูปตัวแอลดังแสดงในรูปที่ 8.4(ค) สาเหตุที่ไม่เกิดการปรับขนาดเอลิเมนต์บริเวณส่วนบนของรูปตัวแอลอีก เนื่องจากเอลิ

เมนต์ที่ใช้ในครั้งที่สองนั้นมีขนาดเล็กพอแล้ว และบริเวณจุดมุมของรูปตัวแอลเกิดความเค้นสูงกว่ามาก เมื่อเปรียบเทียบความเค้นวอนนิสที่คำนวณได้จากการประยุกต์ใช้วิธี ฟลักซ์เชิงเส้นของแบบจำลองทั้งสามบริเวณขอบด้านใน พบว่าค่าความเค้นวอนนิสมีค่าสูงชันขึ้นบริเวณมุมของขอบด้านในเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 8.5 ซึ่งบริเวณดังกล่าวเป็นจุดซิงกูลาริตี้ ดังนั้นจึงแสดงว่าการปรับขนาดเอลิเมนต์สามารถกระทำลงบนบริเวณที่ถูกต้อง



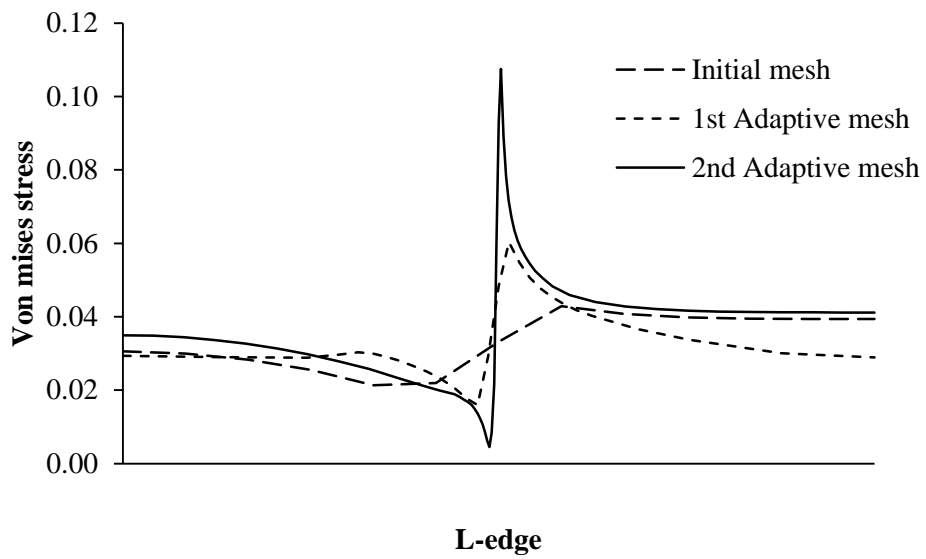
(ก) เอลิเมนต์เริ่มต้น (108 เอลิเมนต์)

(ข) ปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง (231 เอลิเมนต์)



(ค) ปรับขนาดครั้งที่สอง (852 เอลิเมนต์)

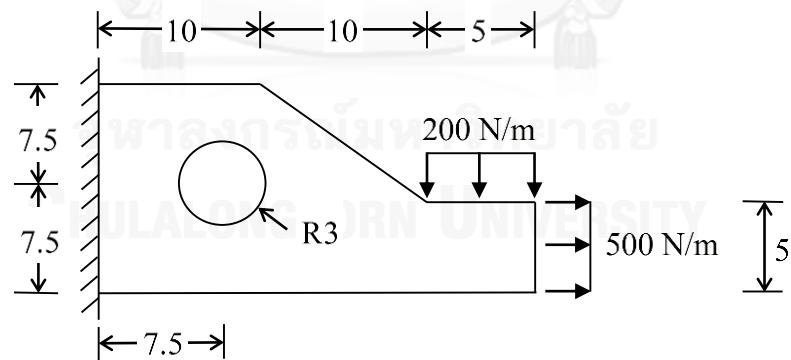
รูปที่ 8.4 ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล



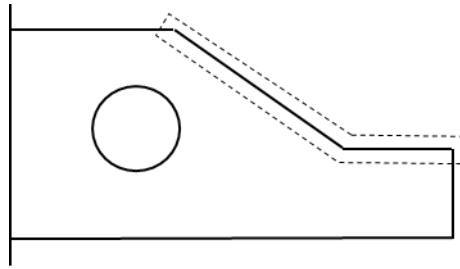
รูปที่ 8.5 ความเค้นวอนมิสบริเวณขอบด้านใน

8.3 ปัญหาแผ่นโลหะ

แผ่นโลหะมีหน่วยเป็นเซนติเมตร หนา 0.3 เซนติเมตร ถูกตรึงตลอดขอบด้านซ้ายและรับภาระโหลดดังแสดงในรูปที่ 8.6 [45] กำหนดให้แผ่นนี้มีคุณสมบัติของวัสดุทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 80 \text{ GPa}$ และค่าอัตราส่วนปัวส์ซง $\nu = 0.32$



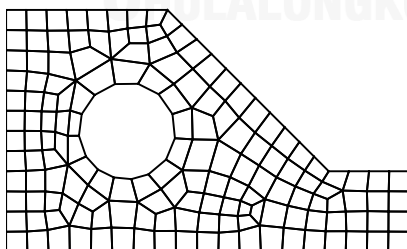
(ก) ปัญหาในภาพรวม



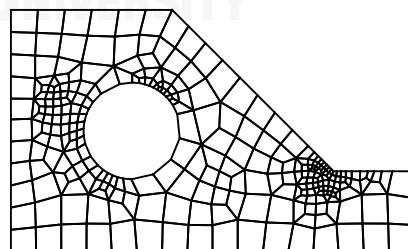
(ข) ขอบเอียง

รูปที่ 8.6 ปัญหาแผ่นโลหะ

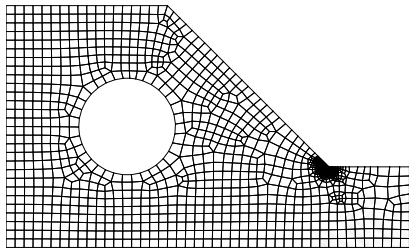
ปัญหานี้เป็นอีกปัญหาที่มีจุดซิงกูลาริตีที่บริเวณมุมของขอบเอียงของโดเมน เริ่มทำการวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองที่มีเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจำนวน 149 เอลิเมนต์ จากนั้นเริ่มทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยใช้การกำหนดค่าต่าง ๆ เช่นเดียวกับตัวอย่างแรก เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรกจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มเป็น 273 เอลิเมนต์ และทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มเป็น 1256 เอลิเมนต์ พบว่าในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรก มีการปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กบริเวณรอบรูวงกลม และบริเวณมุมของขอบเอียง ดังแสดงในรูปที่ 8.7(ข) แต่เมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ในครั้งที่สองเหลือเฉพาะบริเวณมุมของขอบเอียง ดังแสดงในรูปที่ 8.7(ค) เนื่องจากเอลิเมนต์ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองบริเวณรอบวงกลมมีขนาดเล็กพอแล้ว และบริเวณมุมของขอบเอียงเกิดความเค้นสูงกว่ามาก เมื่อเปรียบเทียบความเค้นวอนนิสที่คำนวณได้จากการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้นของแบบจำลองทั้งสามบริเวณขอบเอียง พบว่าค่าความเค้นวอนนิสมีค่าสูงขึ้นขึ้นบริเวณมุมของขอบเอียงเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 8.8 ซึ่งบริเวณดังกล่าวเป็นจุดซิงกูลาริตี ดังนั้นจึงแสดงว่าการปรับขนาดเอลิเมนต์สามารถกระทำลงบนบริเวณที่ต้องการ



(ก) เอลิเมนต์เริ่มต้น (149 เอลิเมนต์)

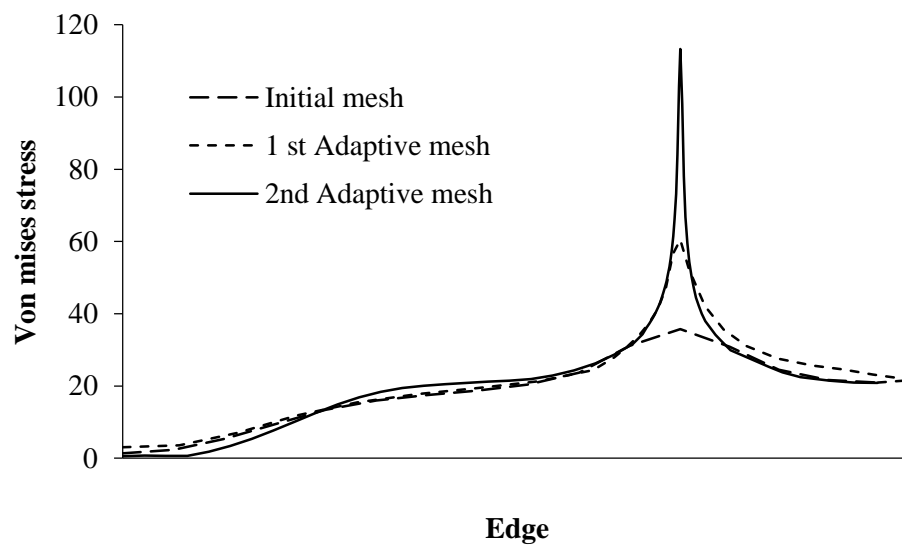


(ข) ปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง (273 เอลิเมนต์)



(ค) ปรับขนาดครั้งที่สอง (1256 เอลิเมนต์)

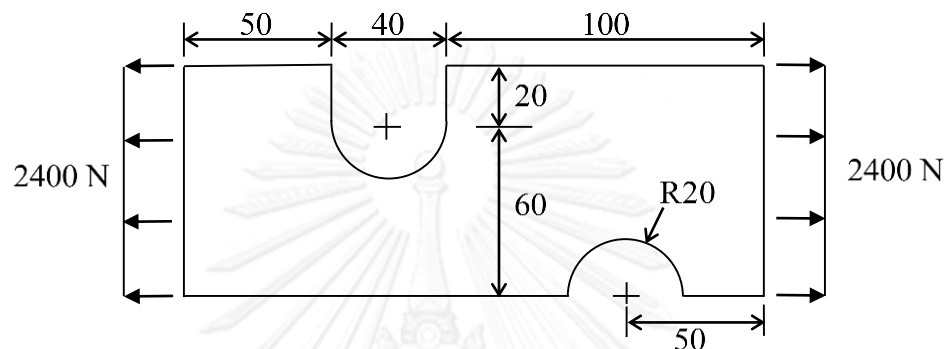
รูปที่ 8.7 ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล



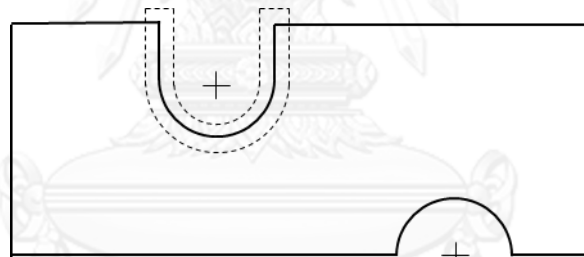
รูปที่ 8.8 ความเค้นวอนมิสบริเวณขอบเอียง

8.4 ปัญหาแผ่นทองเหลือง

แผ่นทองเหลืองมีหน่วยเป็นมิลลิเมตร มีขนาดดังแสดงในรูปที่ 8.9 รับภาระแรงดึงตลอดขอบทั้งสองด้าน [45] แผ่นทองเหลืองนี้มีความหนา 2 มิลลิเมตร กำหนดให้แผ่นทองเหลืองนี้มีคุณสมบัติของวัสดุทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 190 \text{ GPa}$ และค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง $\nu = 0.33$



(ก) ปัญหาในภาพรวม

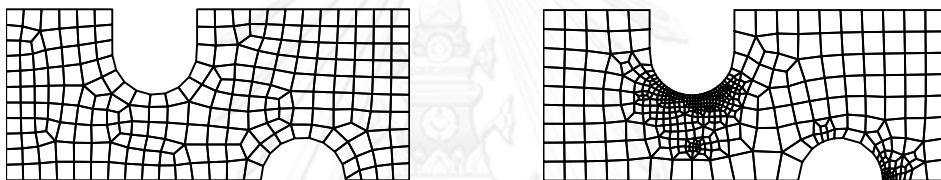


(ข) ขอบรอยเว้าด้านบน

รูปที่ 8.9 ปัญหาแผ่นทองเหลือง

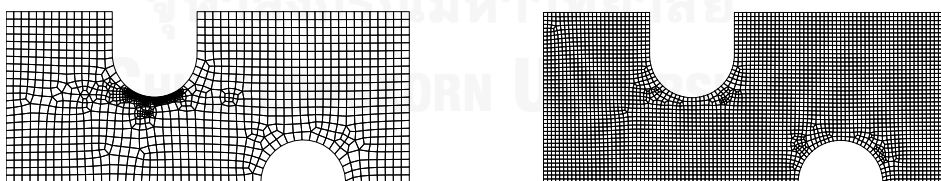
ปัญหาแผ่นทองเหลืองนี้ไม่มีจุดซิงกูลาริตีที่ชัดเจน จึงถูกนำมาทดสอบการปรับขนาดเอลิเมนต์ว่ามีประสิทธิภาพเพียงใด เริ่มทำการวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองที่มีเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจำนวน 213 เอลิเมนต์ จากนั้นเริ่มทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยกำหนดค่าต่าง ๆ เช่นเดียวกับตัวอย่างแรก เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรกจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มเป็น 457 เอลิเมนต์ และเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองจำนวนเอลิเมนต์เพิ่มเป็น 1638 เอลิเมนต์ พบว่าในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรก เอลิเมนต์ขนาดเล็กกระจุกตัวอยู่ที่บริเวณส่วนโค้งของรอยเว้าด้านบนและบริเวณมุมของรอยเว้าด้านล่าง ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง จะเหลือเพียงบริเวณส่วนโค้งของรอยเว้าด้านบน ดังแสดงในรูปที่ 8.10 เพื่อตรวจสอบความถูกต้องนี้ แบบจำลองที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าขนาดเท่าๆ กันจำนวน 3637 เอลิเมนต์ กระจายทั่วโดเมนของปัญหาถูกนำมาคำนวณเพื่อ

เปรียบเทียบรูปแบบของความเค้นวอนมิตที่เกิดขึ้น ซึ่งความเค้นวอนมิตที่เกิดขึ้นบนแผ่นของแต่ละแบบจำลองมีรูปแบบสอดคล้องตรงกันแต่มีค่าสูงต่ำที่ไม่เท่ากัน ดังแสดงในรูปที่ 8.11 แสดงว่าการปรับขนาดเอลิเมนต์ไม่ได้ทำให้รูปแบบของผลลัพธ์ผิดพลาดไป เมื่อเปรียบเทียบความเค้นวอนมิตที่คำนวณได้จากการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้นของแบบจำลองทั้งสี่บริเวณขอบของรอยเว้าด้านบนพบว่าค่าความเค้นวอนมิตมีค่าสูงชันขึ้นบริเวณขอบรอยเว้าด้านบนเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 8.12 ดังนั้นจึงแสดงว่าการปรับขนาดเอลิเมนต์กระทำในบริเวณที่ถูกต้อง และช่วยปรับปรุงความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ให้ดีขึ้น



(ก) เอลิเมนต์เริ่มต้น (213 เอลิเมนต์)

(ข) ปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง (457 เอลิเมนต์)



(ค) ปรับขนาดครั้งที่สอง (1638 เอลิเมนต์)

(ง) เอลิเมนต์ละเอียด (3637 เอลิเมนต์)

รูปที่ 8.10 ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล



(ก) เอลิเมนต์เริ่มต้น (213 เอลิเมนต์)

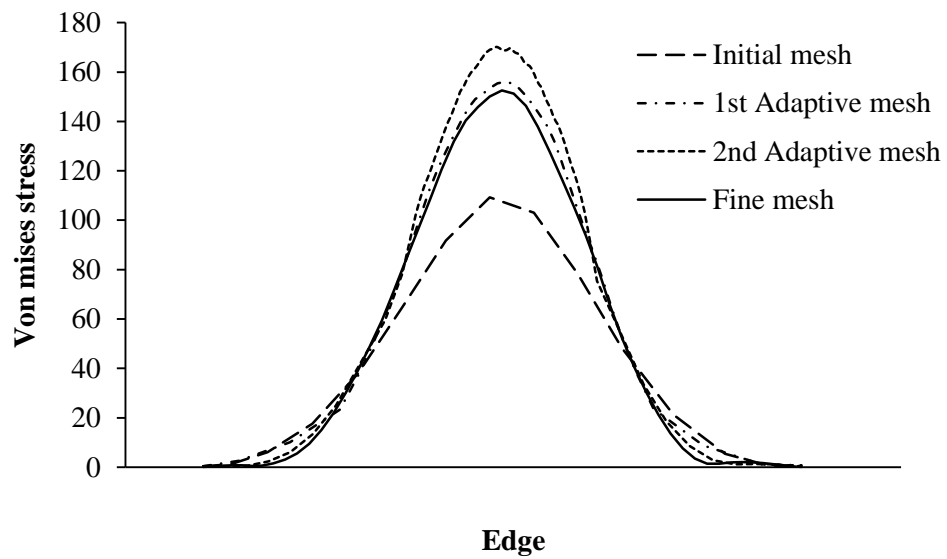
(ข) ปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง (457 เอลิเมนต์)



(ค) ปรับขนาดครั้งที่สอง (1638 เอลิเมนต์)

(ง) เอลิเมนต์ละเอียด (3637 เอลิเมนต์)

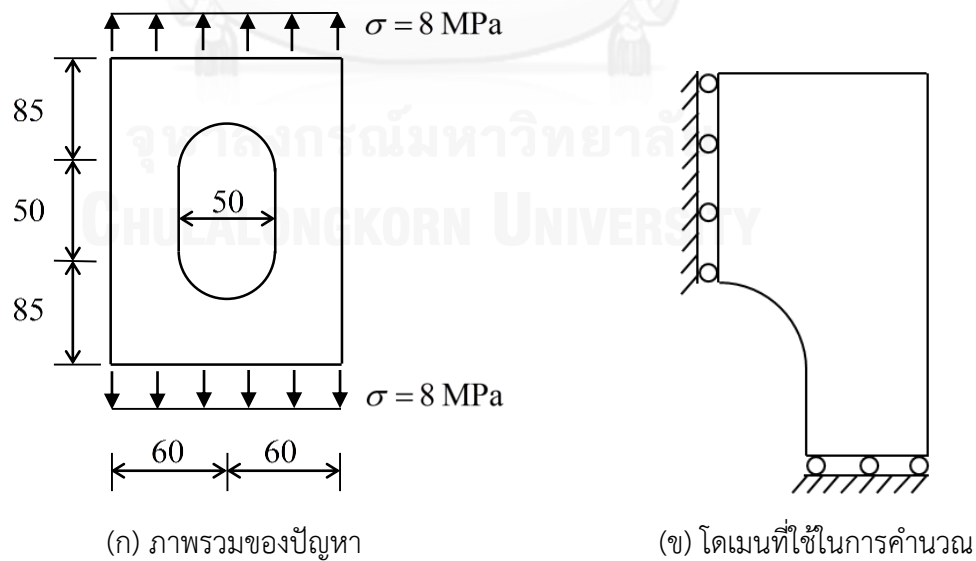
รูปที่ 8.11 ความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้นบนไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล

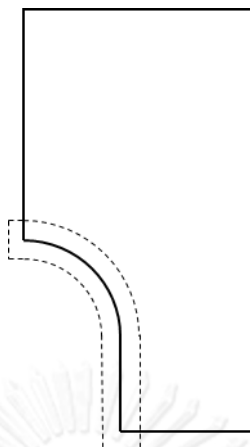


รูปที่ 8.12 ความเค้นวอนมิสบนขอบรอยเว้าด้านบน

8.5 ปัญหาแผ่นเหล็ก

แผ่นเหล็กมีหน่วยเป็นมิลลิเมตร มีความหนา 0.5 มิลลิเมตร มีรูปร่างดังแสดงในรูปที่ 8.13(ก) รับภาระแรงดึงสม่ำเสมอตลอดขอบบนและล่าง [45] กำหนดให้แผ่นเหล็กนี้มีคุณสมบัติของวัสดุทางกลดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น $E = 70 \text{ GPa}$ และค่าอัตราส่วนปัวส์ซง $\nu = 0.33$

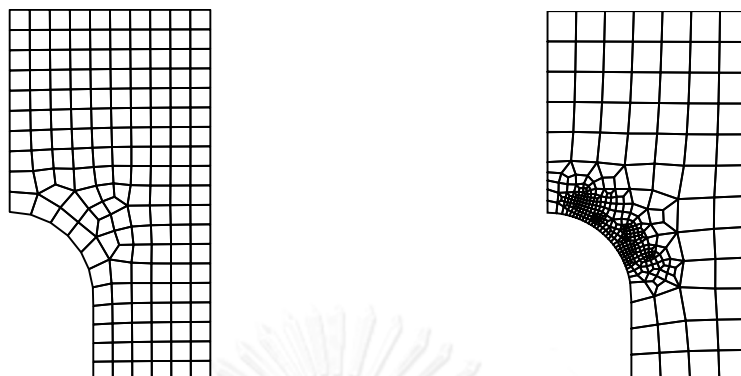




(ค) ขอบโค้ง

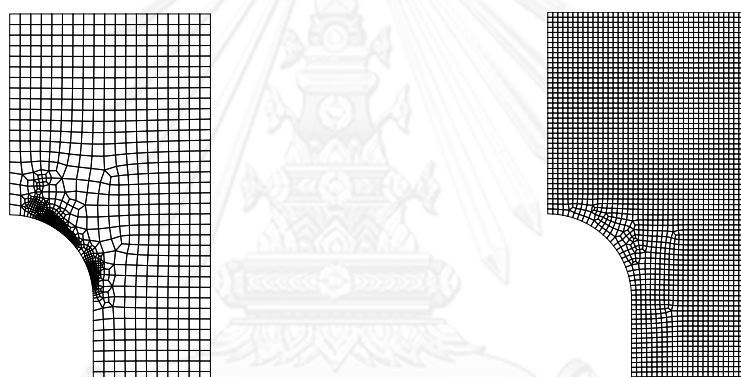
รูปที่ 8.13 ปัญหาแผ่นเหล็ก

ปัญหาแผ่นเหล็กนี้ เป็นอีกปัญหาที่ไม่มีจุดซิงกูลาริตีที่ชัดเจน จึงถูกนำมาทดสอบประสิทธิภาพของการปรับขนาดเอลิเมนต์ เนื่องจากปัญหามีความสมมาตรจึงทำการคำนวณเพียงบริเวณควอรันต์ที่หนึ่งเพื่อลดขนาดการคำนวณ ดังแสดงในรูปที่ 8.13(ข) เริ่มทำการวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองที่มีเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจำนวน 160 เอลิเมนต์ จากนั้นเริ่มทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรกโดยกำหนดให้ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์สูงสุดเท่ากับ 10 และทำการปรับเอลิเมนต์ในช่วง 10% ของค่า h ที่สูงที่สุด และเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ประมาณ 2 เท่าจากแบบจำลองเริ่มต้น เมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรก จำนวนเอลิเมนต์เพิ่มเป็น 370 เอลิเมนต์ และทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สองโดยกำหนดให้ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์สูงสุดเท่ากับ 20 และทำการปรับเอลิเมนต์ในช่วง 20% ของค่า h ที่สูงที่สุด และเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ประมาณ 8 เท่าจากแบบจำลองเริ่มต้น เมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง จำนวนเอลิเมนต์เพิ่มเป็น 1309 เอลิเมนต์ พบว่าการปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กที่บริเวณขอบโค้งของโดเมนดังแสดงในรูปที่ 8.14 เพื่อตรวจสอบความถูกต้องนี้ แบบจำลองที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจำนวน 2443 เอลิเมนต์ขนาดเท่าๆ กันกระจายทั่วโดเมนของปัญหา จะถูกนำมาคำนวณเพื่อเปรียบเทียบรูปแบบของความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้น ซึ่งความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้นบนแผ่นเหล็กของแต่ละแบบจำลองมีรูปแบบสอดคล้องตรงกันแต่มีค่าสูงต่ำที่ไม่เท่ากันดังแสดงในรูปที่ 8.15 แสดงว่าการปรับขนาดเอลิเมนต์ไม่ได้ทำให้รูปแบบของผลลัพธ์ผิดพลาดไป เมื่อเปรียบเทียบความเค้นวอนมิสที่คำนวณได้จากการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้นของแบบจำลองทั้งสี่บริเวณขอบโค้ง พบว่าค่าความเค้นวอนมิสมีค่าสูงชันขึ้นบริเวณขอบโค้งเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 8.16 ดังนั้นจึงแสดงว่าการปรับขนาดเอลิเมนต์กระทำในบริเวณที่ถูกต้อง และช่วยปรับปรุงความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ให้ดีขึ้น



(ก) เอลิเมนต์เริ่มต้น (160 เอลิเมนต์)

(ข) ปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง (370 เอลิเมนต์)

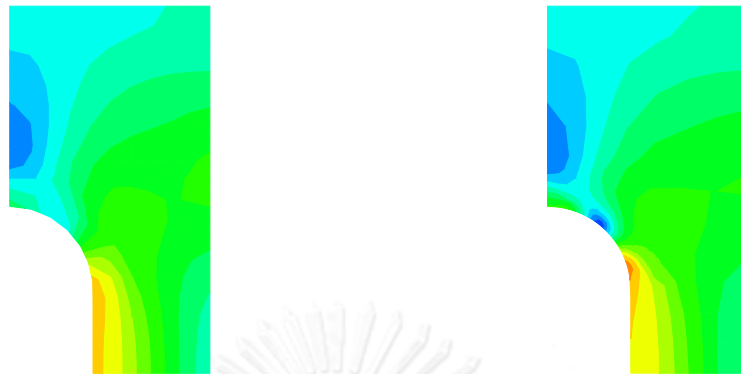


(ค) ปรับขนาดครั้งที่สอง (1269 เอลิเมนต์)

(ง) เอลิเมนต์ละเอียด (2443 เอลิเมนต์)

รูปที่ 8.14 ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY



(ก) เอลิเมนต์เริ่มต้น (160 เอลิเมนต์)

(ข) ปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง (370 เอลิเมนต์)

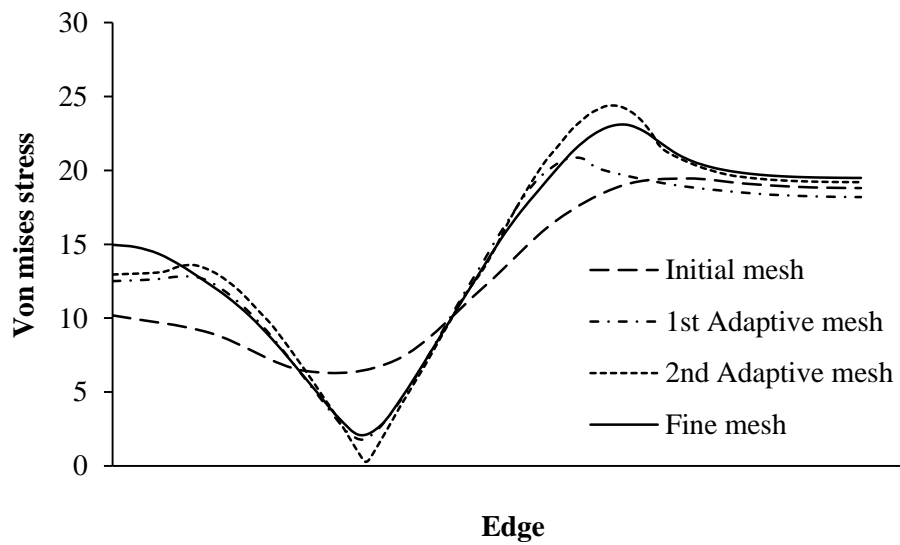


(ค) ปรับขนาดครั้งที่สอง (1269 เอลิเมนต์)

(ง) เอลิเมนต์ละเอียด (2443 เอลิเมนต์)

รูปที่ 8.15 ความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้นบนไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล

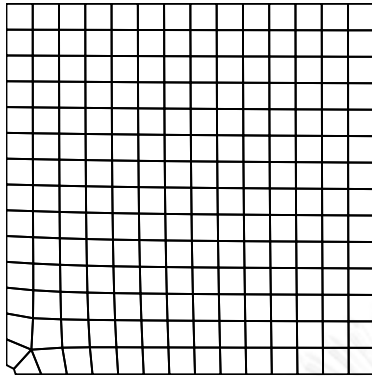
CHULALONGKORN UNIVERSITY



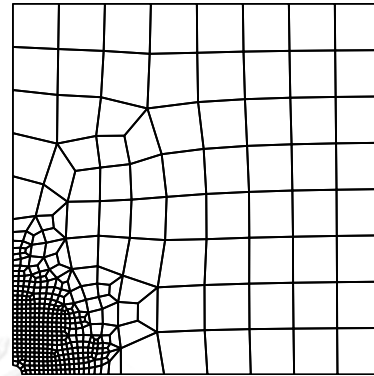
รูปที่ 8.16 ความเค้นวอนมิสบนขอบโค้ง

8.6 ปัญหาแผ่นมีรู

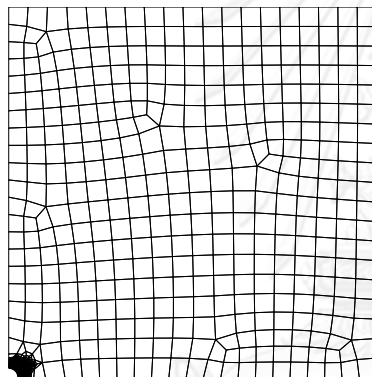
ปัญหาในบทที่ 5 หัวข้อ 5.3 จะถูกนำมาวิเคราะห์อีกครั้ง โดยใช้การปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ามาช่วยในกระบวนการวิเคราะห์ปัญหา ในครั้งแรกแบบจำลองจะถูกสร้างขึ้นด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจำนวน 197 เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 8.17(ก) จากนั้นเริ่มทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรกโดยกำหนดให้ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์สูงสุดเท่ากับ 10 และทำการปรับเอลิเมนต์ในช่วง 10% ของค่า h ที่สูงที่สุด และเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ประมาณ 2 เท่าจากแบบจำลองเริ่มต้น ทำให้ได้แบบจำลองจากการปรับเอลิเมนต์ครั้งแรกที่มีจำนวนเอลิเมนต์ 435 เอลิเมนต์ ซึ่งพบว่ามี การปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กบริเวณส่วนโค้งของรูดังแสดงในรูปที่ 8.17(ข) จากนั้นเริ่มทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง โดยใช้การกำหนดค่าเช่นเดิมแต่เพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ขึ้นเป็น 4 เท่าจากแบบจำลองเริ่มต้น ทำให้ได้แบบจำลองจากการปรับเอลิเมนต์ครั้งที่สองที่มีจำนวนเอลิเมนต์ 823 เอลิเมนต์ ซึ่งมีการปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กบริเวณส่วนโค้งของรูเช่นเดิมดังแสดงในรูป 8.17(ค) แสดงให้เห็นว่าบริเวณส่วนโค้งของรูเกิดการเปลี่ยนแปลงของความเค้นสูงกว่าบริเวณอื่น โดยสามารถเปรียบเทียบความเค้นวอนมิสที่เกิดขึ้นบนส่วนโค้งที่เกิดจากรูของแผ่น ดังแสดงในรูปที่ 8.18



(ก) เอลิเมนต์เริ่มต้น (197 เอลิเมนต์)



(ข) ปรับขนาดครั้งที่หนึ่ง (435 เอลิเมนต์)

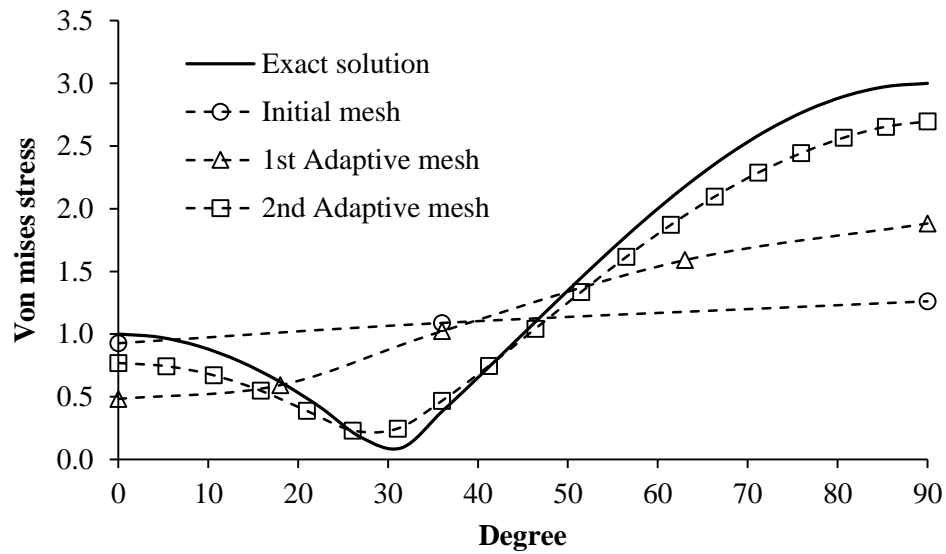


(ค) ปรับขนาดครั้งที่สอง (823 เอลิเมนต์)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 8.17 ไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล

CHULALONGKORN UNIVERSITY

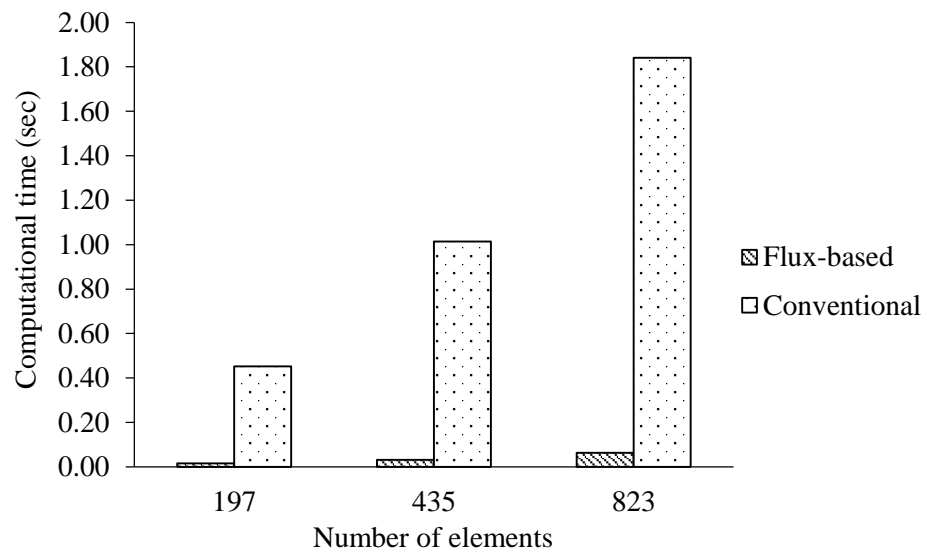


รูปที่ 8.18 ความเค้นวอนมิสบนส่วนโค้งที่เกิดจากรู

เนื่องจากปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นยำ จึงจะพิจารณาค่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ (Relative energy norm error) ที่เกิดขึ้นจากผลลัพธ์ที่ได้จากการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้นของแบบจำลอง ทั้งสามโดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ ความผิดพลาดสัมพัทธ์จะถูกคำนวณจากทั้งโดเมนของ ปัญหา พบว่าความผิดพลาดสัมพัทธ์ลดลงเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ ดังแสดงในตารางที่ 8.2 ซึ่ง แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการปรับขนาดเอลิเมนต์ และเมื่อพิจารณาเวลาที่ใช้ในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์เปรียบเทียบกับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จุดเกาส์จำนวน 2 จุด ในแต่ละทิศทาง พบว่าใช้เวลาในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ลดลง ดังแสดงในรูปที่ 8.19 แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นร่วมกับการปรับขนาดเอลิเมนต์

ตารางที่ 8.2 เปรียบเทียบความผิดพลาดสัมพัทธ์ที่เกิดขึ้น

	จำนวนเอลิเมนต์	ความผิดพลาดสัมพัทธ์ (η)
เอลิเมนต์เริ่มต้น	197	1.4888 %
ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่หนึ่ง	435	0.2894 %
ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่สอง	823	0.1568 %



รูปที่ 8.19 เปรียบเทียบเวลาที่ใช้คำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์

บทที่ 9

สรุปการวิจัย ปัญหา และข้อเสนอแนะ

9.1 สรุปการวิจัย

วิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็ง เนื่องจากกระบวนการปกติของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะทำการอินทิเกรตบนโดเมนของเอลิเมนต์ เพื่อคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ ซึ่งสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแล้ว ความซับซ้อนของรูปร่างเอลิเมนต์ จะทำให้สมการไม่สามารถทำการอินทิเกรตโดยตรงได้ วิธีที่มีประสิทธิภาพและได้รับความนิยมเดิมคือ การทำการอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ แต่กระบวนการในการคำนวณนั้นจะต้องมีการทำซ้ำทำให้ใช้เวลาในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์เป็นจำนวนมากเมื่อใช้เอลิเมนต์จำนวนมาก การประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นนั้น เริ่มต้นมาจากกระบวนการเทย์เลอร์-กาเลอร์คินที่ใช้สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของไหล ซึ่งต้องใช้เอลิเมนต์จำนวนมากในการคำนวณ กระบวนการนี้ทำให้สามารถคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ได้โดยตรง เนื่องจากสามารถหาสมการในรูปแบบปิดของเอลิเมนต์เมทริกซ์ ข้อดีนี้ทำให้มีการนำแนวคิดนี้มาใช้สำหรับแก้ปัญหาชนิดอื่นๆ ที่มีการใช้เอลิเมนต์ที่มีความซับซ้อน วิทยานิพนธ์นี้จึงได้นำการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น เพื่อนำมาวิเคราะห์ปัญหาของแข็ง ที่ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ ซึ่งมีการสมมติการกระจายตัวของผลเฉลยบนเอลิเมนต์เป็นเชิงเส้นตรง และวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์ได้ถูกนำมาใช้ร่วมกันในวิทยานิพนธ์นี้ ซึ่งจะช่วยให้คำตอบมีความเที่ยงตรงสูงขึ้นเมื่อใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กลงในบริเวณที่เหมาะสม โดยทำการหาค่าความชันของการเปลี่ยนแปลงของคำตอบ เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ไปใช้กับโปรแกรม AUTOMESH-2D ช่วยในการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ที่มีการปรับขนาดแล้ว โดยมีรายละเอียดที่สำคัญในแต่ละบทดังนี้

บทที่ 2 นำเสนอเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ในการพัฒนาวิธีการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ เพื่อหลีกเลี่ยงการใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ที่ใช้โดยทั่วไป เนื่องจากต้องการลดเวลาการคำนวณที่เกิดจากขั้นตอนการอินทิเกรตเชิงตัวเลข วิธีการต่างๆ สามารถจัดกลุ่มได้ 3 กลุ่ม โดยเริ่มแรกเป็นการพัฒนาการหาสมการแบบชัดแจ้งจากสมการที่อยู่ในรูปการอินทิเกรตโดยตรง กลุ่มที่สองเป็นการพัฒนาโดยใช้โปรแกรมการคำนวณคณิตศาสตร์สัญลักษณ์มาช่วยในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ และกลุ่มสุดท้ายเป็นการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์ เข้ามาช่วยสร้างเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบปิด ทำให้สามารถทำการคำนวณได้โดยสะดวก ซึ่งงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้วิธีการประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์ เนื่องจากสามารถทำความเข้าใจได้ง่าย สามารถใช้กับเอลิเมนต์ชนิดต่างๆ ได้โดยสะดวก เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ

บทที่ 3 อธิบายถึงลักษณะของปัญหาของแข็งในสองมิติที่ทำการวิเคราะห์ ซึ่งใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของสภาวะสมดุลในรูปแบบของสมการ (3.1) เป็นสมการหลักที่อธิบายพฤติกรรมของปัญหาของแข็งนี้ โดยที่ขอบนอกของปัญหาอาจประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตของการกำหนดค่า

เคลื่อนตัว หรืออาจกำหนดแรงที่ขอบนอก และอาจมีความเครียดขั้นต้นที่เป็นผลมาจากอุณหภูมิตั้งสมการ (3.5) วัสดุที่ทำการวิเคราะห์จะถูกสมมติให้เป็นวัสดุเนื้อเดียว และทำการวิเคราะห์ในช่วงความยืดหยุ่นเชิงเส้นตรง ปัญหาของแข็งในสองมิตินี้สามารถจำแนกเป็นลักษณะความเค้นระนาบตั้งสมการ (3.6) หรือความเครียดระนาบตั้งสมการ (3.7) และอธิบายกระบวนการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า โดยแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ ระเบียบวิธีทั่วไปที่ใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ และ ระเบียบวิธีที่ประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์เชิงเส้น การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเหมือนกันทั้งสองวิธี กระบวนการมีการอธิบายอย่างเป็นขั้นตอนโดยละเอียด ตั้งแต่สมการเชิงอนุพันธ์จนถึงสมการสุดท้ายที่สามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้

บทที่ 4 อธิบายโปรแกรมหลักที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในวิทยานิพนธ์นี้ ซึ่งมีทั้งหมด 3 โปรแกรม คือ

- 1) โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็งในสองมิติ ด้วยระเบียบวิธีทั่วไปที่ใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยสูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์
- 2) โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็งในสองมิติ ด้วยระเบียบวิธีที่ประยุกต์ใช้หลักการของฟลักซ์เชิงเส้น
- 3) โปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณเกรเดียนท์อันดับสอง เพื่อคำนวณค่าพารามิเตอร์ที่จะใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์

โปรแกรมทั้งหมดถูกประดิษฐ์ขึ้นด้วยภาษาฟอร์แทรน กระบวนการทำงานภายในโปรแกรมถูกอธิบายไว้โดยละเอียด ตลอดจนวิธีใช้โปรแกรม ไฟล์ข้อมูลนำเข้า และไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

บทที่ 5 แสดงตัวอย่างปัญหาของแข็งที่นำมาทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น โดยปัญหาของแข็งเหล่านี้เป็นปัญหาที่สามารถใช้การวิเคราะห์โดยการคำนวณโดยตรงได้ ทำให้เป็นปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง เพื่อนำเสนอความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากโปรแกรมทั้งสองเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบแล้วพบว่าโปรแกรมทั้งสองสามารถคำนวณได้ผลลัพธ์ที่เท่ากัน และตรงกับผลเฉลยแม่นยำตรง เมื่อใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือผืนผ้า และเมื่อใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ก็ให้ผลลัพธ์ที่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำตรง สำหรับทุกปัญหาที่รับภาระแรงหรือความแตกต่างของอุณหภูมิ แสดงให้เห็นถึงความถูกต้องของโปรแกรมทั้งสองที่สามารถคำนวณผลลัพธ์ได้ถูกต้อง

บทที่ 6 แสดงตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นเปรียบเทียบกับวิธีทั่วไปที่ใช้สูตรอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ เมื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาที่มีเอลิเมนต์ที่บิดเบี้ยวต่าง ๆ กัน และปัญหาที่รับภาระแรงในรูปแบบต่าง ๆ ผลจากการตรวจสอบพบว่า การประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นจะให้เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่เหมือนกันกับวิธีทั่วไปเมื่อใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านขนาน แต่เมื่อใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่บิดเบี้ยวอื่นๆ การประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้นจะให้เอลิเมนต์เมทริกซ์ ที่เป็นเมทริกซ์ซึ่งไม่สมมาตรขึ้น เมื่อทำการวิเคราะห์ปัญหา พบว่าการประยุกต์ใช้ฟลักซ์เชิงเส้นจะให้ผลลัพธ์ที่เทียบเท่ากับวิธีทั่วไป แม้จะใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่บิดเบี้ยวสำหรับปัญหาที่รับภาระที่สม่ำเสมอ ในขณะที่เมื่อเป็นปัญหาที่

รับภาระแรงที่สวนทางกันหรือไม่สม่ำเสมอบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่บิดเบี้ยวหนึ่งเอลิเมนต์ การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นจะให้ผลลัพธ์ที่ไม่ตรงกับวิธีทั่วไป แต่กรณีเช่นนี้จะเกิดขึ้นได้ไม่บ่อยนักในทางปฏิบัติ เนื่องจากจะใช้เอลิเมนต์เป็นจำนวนมาก ทำให้ผลลัพธ์ที่แตกต่างกันนั้นเกิดขึ้นได้น้อย ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าหากเป็นปัญหาที่สามารถสร้างแบบจำลองได้ดี คือประกอบด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ไม่บิดเบี้ยวเป็นจำนวนมากเกินไปและไม่ได้รับภาระที่ซับซ้อนมาก การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นก็จะให้ผลลัพธ์ที่ดีเทียบเท่ากับวิธีการเดิม จากนั้นเป็นการทดสอบเวลาที่ใช้ในการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ ซึ่งพบว่า การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นสามารถลดเวลาที่ใช้ลงได้เป็นจำนวนมากเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการเดิม

บทที่ 7 เพื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ บทนี้ได้อธิบายถึงวิธีในการทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ โดยเริ่มต้นจากการนำผลลัพธ์ซึ่งได้จากแบบจำลองเริ่มต้นที่จะใช้เป็นพารามิเตอร์ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ สำหรับปัญหาของแข็งนี้ได้เลือก ความเค้นวอนมิสเป็นพารามิเตอร์ จากนั้นนำไปคำนวณหาเกรเดียนท์อันดับสองด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ SECONDGRADIENT ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น เมื่อทราบเกรเดียนท์อันดับสอง ซึ่งบ่งบอกว่าบริเวณใดควรใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กแล้ว ก็จะนำไปแปลงเป็นค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ที่จะใช้สำหรับโปรแกรม AUTOMESH-2D ในการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ที่มีการปรับขนาดเอลิเมนต์ต่อไป กระบวนการที่ใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์เหล่านี้ได้ถูกอธิบายโดยละเอียดในบทนี้

บทที่ 8 แสดงตัวอย่างของการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งร่วมกับการปรับขนาดเอลิเมนต์ โดยที่ปัญหาในกลุ่มแรกจะเป็นปัญหาที่มีจุดซิงกูลาริตี ซึ่งจะใช้ทดสอบการปรับขนาดเอลิเมนต์จากการทดสอบพบว่า การปรับขนาดเอลิเมนต์สามารถระบุบริเวณการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่ตรงกับจุดซิงกูลาริตีได้ถูกต้อง

สำหรับปัญหาในกลุ่มที่สองจะเป็นปัญหาที่ไม่มีจุดซิงกูลาริตีที่ชัดเจน จึงใช้แบบจำลองที่ใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากเป็นตัวเปรียบเทียบลักษณะผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้น เมื่อทำการทดสอบแล้วพบว่า การปรับขนาดเอลิเมนต์ก็สามารถระบุบริเวณที่จะใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กได้สอดคล้องกับแบบจำลองที่ใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมาก และเมื่อทำการเปรียบเทียบความเค้นของแต่ละแบบจำลอง ก็พบว่า การปรับขนาดเอลิเมนต์ทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงขึ้น

และสำหรับปัญหาสุดท้ายซึ่งเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำ การปรับขนาดเอลิเมนต์ก็สามารถกระทำในบริเวณที่ถูกต้องได้ และความผิดพลาดสัมพัทธ์ที่ลดลงเมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ ก็แสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงเพิ่มสูงขึ้นและเข้าสู่ผลเฉลยแม่นยำ

งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้น เมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปซึ่งใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุดในแต่ละทิศทาง พบว่าการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเทียบเท่ากับการใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ในขณะที่สามารถประหยัดเวลาในการคำนวณลงไปได้มาก และสามารถ

ใช้การปรับขนาดเอลิเมนต์ร่วมกับโปรแกรม AUTOMESH-2D เพื่อสร้างแบบจำลองที่เอลิเมนต์ได้รับการปรับขนาดแล้ว ซึ่งช่วยให้เพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ให้มากขึ้นอีกด้วย

9.2 ปัญหาที่พบ

งานวิจัยในครั้งนี้พบปัญหาที่สำคัญ 2 ปัญหา คือ

1) จากการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า พบว่าเอลิเมนต์เมทริกซ์นั้นเกิดเป็นเมทริกซ์ที่ไม่สมมาตร ดังนั้นเมื่อทำการรวมเมทริกซ์และแก้ระบบสมการรวม เมทริกซ์รวมก็จะอยู่ในรูปเมทริกซ์ที่ไม่สมมาตรเช่นกัน การแก้ระบบสมการที่ประกอบด้วยเมทริกซ์ลักษณะเช่นนี้ จะมีความซับซ้อนมากกว่าเมทริกซ์ที่มีความสมมาตร ในงานวิจัยนี้ เลือกใช้การแก้ระบบสมการนี้ด้วยระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์ ซึ่งเป็นวิธีที่มีความสามารถในการคำนวณเมทริกซ์ลักษณะเช่นนี้ แต่ตัววิธีเองมีประสิทธิภาพในการคำนวณค่อนข้างน้อย เนื่องจากต้องใช้เวลาในการคำนวณเป็นจำนวนมาก ทำให้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นใช้เวลาในการคำนวณส่วนนี้มากพอสมควร

2) จากการที่การปรับขนาดเอลิเมนต์นั้นใช้การสร้างเอลิเมนต์ใหม่ด้วยโปรแกรมภายนอก คือ AUTOMESH-2D แม้ตัวโปรแกรมจะมีประสิทธิภาพในการสร้างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ดีมาก แต่ในหลายๆ ครั้งแล้ว ตัวโปรแกรมไม่สามารถสร้างเอลิเมนต์ขึ้นมาได้ เนื่องจากการกำหนดจุดความหนาแน่นสัมพัทธ์ไม่เหมาะสม ทำให้มีความยุ่งยากในการใช้โปรแกรมต้องลองผิดลองถูกในการสร้างเอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมพอสมควร

9.3 ข้อเสนอแนะในการวิจัยในอนาคต

สืบเนื่องจากปัญหาที่พบในการวิจัยทั้ง 2 ข้อ หากสามารถทำการแก้ไขได้ จะทำให้ระเบียบวิธีมีความสมบูรณ์ขึ้นอีก ในปัญหาข้อแรกที่พบความไม่สมมาตรของเอลิเมนต์เมทริกซ์นั้น ในระหว่างการศึกษาวิจัย เกิดแนวคิดที่จะแปลงให้เมทริกซ์กลับมาเป็นเมทริกซ์สมมาตรโดยการคูณกลับด้วยเมทริกซ์สลับเปลี่ยน ในปัญหาข้อที่สองที่พบความยุ่งยากในการใช้โปรแกรมสร้างเอลิเมนต์นั้น เนื่องจากผู้วิจัยขาดความรู้ในการสร้างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า หากมีความรู้ความเข้าใจในส่วนนี้ จะสามารถประดิษฐ์โปรแกรมให้มีความสอดคล้องกันมากที่สุดได้ และจากประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้วิธีฟังก์ชันกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ในการแก้ปัญหาของแข็งที่พบในงานวิจัยนี้แล้ว สามารถนำข้อดีของวิธีการ ขยายแนวคิดนี้ไปสู่เอลิเมนต์ที่มีความซับซ้อนชนิดอื่นได้อีกต่อไป

รายการอ้างอิง

1. Ergatoudis, I., Irons, B.M., and Zienkiewicz, O.C., *Curved, Isoparametric, "Quadrilateral" Elements for Finite Element Analysis*. International Journal of Solids and Structures, 1968. **4**: p. 31-42.
2. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 4. 2550, กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
3. Hacker, W.L. and Schreyer, H.L., *Eigenvalue Analysis of Compatible and Incompatible Rectangular Four-Node Quadrilateral Elements*. International journal for numerical methods in engineering, 1989. **28**: p. 687-703.
4. ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ นิพนธ์ วรรณโสภากย์, ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 7. 2553, กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
5. Okabe, M., *Analytical Integral Formulae Related to Convex Quadrilateral Finite Elements*. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 1981. **29**: p. 201-218.
6. Babu, D.K. and Pinder, G.F., *SHORT COMMUNICATIONS Analytical Integration Formulae for Linear Isoparametric Finite Elements*. International Journal For Numerical Methods in Engineering, 1984. **20**: p. 1153-1166.
7. Mizukami, A., *Some Integration Formlas for A Four-Node Isoparametric Element*. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 1986. **59**: p. 111-121.
8. Rathod, H.T., *Some Analytical Integration Formulae For A Four Node Isoparametric Element*. Computers & Structures, 1988. **30**(5): p. 1101-1109.
9. Rathod, H.T. and Islam, M.S., *Some analytical integration formulas for trapezoidal shape quadrilateral elements of Lagrange family*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2000. **16**(6): p. 423-438.
10. Rathod, H.T. and Islam, M.S., *Technical note: Reduction of rational integrals related to linear and convex quadrilateral finite elements*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2002. **18**(6): p. 759-770.
11. Dasgupta, G., *Stiffness matrices of isoparametric four-node finite elements by exact analytical integration*. Journal of Aerospace Engineering, 2008. **21**(2): p. 45-50.
12. Kikuchi, M., *Application of the Symbolic Mathematics System to the Finite Element Program :Evaluation of the Stiffness matrix of a 4-Nodes Isoparametric Element*. Computational Mechanics, 1989. **5**: p. 41-47.

13. Yagawa, G., Ye, G.W., and Yoshimura, S., *A Numerical Integration Scheme for Finite Element Method Based on Symbolic Manipulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990. **29**: p. 1539-1549.
14. Griffiths, D.V., *Stiffness Matrix of the 4-Node Quadrilateral Element in Closed-Form*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994. **37**(6): p. 1027-1038.
15. Videla, L., Cerrolaza, M., and Aparicio, N., *Explicit integration of the stiffness matrix of a four-noded-plane-elasticity finite element*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1996. **12**(11): p. 731-743.
16. Lozada, I.J., Osorio, J.C., Griffiths, D.V., and Cerrolaza, M., *Semi-analytical integration of the 8-node plane element stiffness matrix using symbolic computation*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2006. **22**(2): p. 296-316.
17. Zhou, C.E. and Vecchio, F.J., *Closed-form stiffness matrix for the four-node quadrilateral element with a fully populated material stiffness*. Journal of Engineering Mechanics-Asce, 2006. **132**(12): p. 1392-1395.
18. Videla, L., Baloa, T., Griffiths, D.V., and Cerrolaza, M., *Exact integration of the stiffness matrix of an 8-node plane elastic finite element by symbolic computation*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2008. **24**(1): p. 249-261.
19. Lozada, I.J., Griffiths, D.V., and Cerrolaza, M., *Semi-Analytical Integration of the Elastic Stiffness Matrix of an Axisymmetric Eight-Noded Finite Element*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2010. **26**(6): p. 1624-1635.
20. Donea, J., *A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984. **20**: p. 101-119.
21. Bey, K.S., Thornton, E.A., Dechaumphai, P., and Ramakrishnan, R. *A New Finite Element Approach for Prediction of Aerothermal Loads-Progress in Inviscid Flow Computations*. in *7th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. 1985. Cincinnati, OH.
22. Thornton, E.A. and Dechaumphai, P., *A Taylor-Galerkin Finite Element Algorithm for Transient Nonlinear Thermal-Structural Analysis*. 1986, Old Dominion University. p. 1-12

23. Pandey, A.K., Dechaumphai, P., and Wieting, A.R. *Thermal-Structural Finite Element Analysis Using Linear Flux Formulation*. in *30th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. 1989. Mobile, Alabama.
24. Polesky, S.P., *Hierarchical Flux-Based Thermal-Structural Finite Element Analysis Method*, in *Engineering Mechanics*. 1992, Old Dominion University. p. 103.
25. Phongthanapanich, S., Traiviatana, S., Boonmaruth, P., and Dechaumphai, P., *Nodeless Variable Finite Element Method for Heat Transfer Analysis by Means of Flux-Based Formulation and Mesh Adaptation*. *Acta Mechanica Sinica*, 2006. **22**: p. 138-147.
26. Phongthanapanich, S., Traiviatana, S., and Dechaumphai, P. *Nodeless Variable Finite Elements with Flux-Based Formulation for Heat Transfer Analysis*. in *The 20th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand*. 2006. Nakhon Ratchasima, Thailand.
27. Traiviatana, S., Phongthanapanich, S., and Dechaumphai, P., *A Posteriori Error Estimation for Combined Adaptive Nodeless Variable Finite Element Method with Flux-based Formulation*. *Asian International Journal of Science and Technology in Production and Manufacturing Engineering*, 2009. **2**(4): p. 21-31.
28. Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P., *Nodeless Variable Finite Element Method for Stress Analysis Using Flux-Based Formulation*. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2008. **22**: p. 639-646.
29. Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P., *Adaptive Nodeless Variable Finite Elements with Flux-Based Formulation for Thermal-Structural Analysis*. *Acta Mechanica Sinica*, 2008. **24**: p. 181-188.
30. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*. 3 ed. 1970, Singapore: McGrawHill.
31. Logan, D.L., *A First Course in the Finite Element Method*. 2 ed. 1993, Boston: PWS.
32. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method Volume 1: The Basis*. 5 ed. 2000, Massachusetts: Butterworth-Heinemann.
33. Ma, X.W., Zhao, G.Q., and Sun, L., *Automesh-2D/3D: robust automatic mesh generator for metal forming simulation*. *Materials Research Innovations*, 2011. **15**(s1): p. s482-s486.
34. Sadd, M.H., *Elasticity : Theory, Application, and Numerics*. 2009, Massachusetts: Academic Press.

35. Heldenfels, R.R. and Roberts, W.M., *Experimental and Theoretical Determination of Thermal Stresses in A Flat Plate*, in *Technical Note*. 1952, National Advisory Committee for Aeronautics.
36. Ugural, A.C. and Fenster, S.K., *Advanced Strength and Applied Elasticity*. 2 ed. 1977, New York: Elsevier North-Holland Publishing Co.,Inc.
37. Traivivatana, S., *Adaptive Nodeless Variable Finite Element Method for Thermal-Structural Analysis using Flux-Based Formulation*, in *Department of Mechanical Engineering*. 2009, Chulalongkorn University.
38. Limtrakarn, W., *Finite element method for high-speed flow-structure interaction*, in *Department of Mechanical Engineering*. 2002, Chulalongkorn University.
39. Yew, C.K., Boyle, J.T., and Mackenzie, D., *Closed-Form Integration of Element Stiffness Matrices Using a Computer Algebra System*. *Computers & Structures*, 1995. **56**(4): p. 529-539.
40. ปราโมทย์ เตชะอำไพ, พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม. พิมพ์ครั้งที่ 2. 2553, กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
41. Dechaumphai, P., *Adaptive Unstructured Meshing for Thermal Stress Analysis of Built-Up Structures*. 1992, National Aeronautics and Space Administration. p. 11.
42. Potjananapasiri, K., *Adaptive Finite Element Method for Elastic-Plastic Fracture Mechanics*, in *Department of Mechanical Engineering*. 2005, Chulalongkorn University.
43. Zhu, J.Z. and Zienkiewicz, O.C., *Adaptive Techniques in The Finite Element Method*. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1988. **4**: p. 197-204.
44. Zhu, J.Z., Hinton, E., and Zienkiewicz, O.C., *Adaptive Finite Element Analysis with Quadrilaterals*. *Computers & Structures*, 1991. **40**(5): p. 1097-1104.
45. Dechaumphai, P. and Phongthanapanich, S., *Easy Finite Element Method with Software*. 2009, Oxford, U.K.: Alpha Science.



ภาคผนวก

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ภาคผนวก ก
รายละเอียดเมทริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบปิด

เมทริกซ์ $[D]$ ที่ใช้ในสมการ (3.54) เมื่อแปลงให้อยู่ในพิกัดฐานธรรมชาติจะได้สมการดังนี้

$$[D] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [N_F(\xi, \eta)] t |J| d\xi d\eta \quad (\text{ก.1})$$

ซึ่งสามารถทำการอินทิเกรตโดยตรง หาค่าที่อยู่ในรูปแบบปิดได้ดังนี้

D(1,1) = $y_2/6 - y_4/6$	D(3,2) = $y_3/6 - y_1/6$
D(1,2) = $y_2/6 - y_3/12 - y_4/12$	D(3,3) = $y_3/6 - y_1/12 - y_4/12$
D(1,3) = $y_2/12 - y_4/12$	D(3,4) = $y_3/12 - y_1/12$
D(1,4) = $y_2/12 + y_3/12 - y_4/6$	D(3,5) = 0
D(1,5) = 0	D(3,6) = 0
D(1,6) = 0	D(3,7) = 0
D(1,7) = 0	D(3,8) = 0
D(1,8) = 0	D(3,9) = $x_1/6 - x_3/12 - x_4/12$
D(1,9) = $x_4/6 - x_2/6$	D(3,10) = $x_1/6 - x_3/6$
D(1,10) = $x_3/12 - x_2/6 + x_4/12$	D(3,11) = $x_1/12 - x_3/6 + x_4/12$
D(1,11) = $x_4/12 - x_2/12$	D(3,12) = $x_1/12 - x_3/12$
D(1,12) = $x_4/6 - x_3/12 - x_2/12$	D(4,1) = 0
D(2,1) = 0	D(4,2) = 0
D(2,2) = 0	D(4,3) = 0
D(2,3) = 0	D(4,4) = 0
D(2,4) = 0	D(4,5) = $x_1/6 - x_3/12 - x_4/12$
D(2,5) = $x_4/6 - x_2/6$	D(4,6) = $x_1/6 - x_3/6$
D(2,6) = $x_3/12 - x_2/6 + x_4/12$	D(4,7) = $x_1/12 - x_3/6 + x_4/12$
D(2,7) = $x_4/12 - x_2/12$	D(4,8) = $x_1/12 - x_3/12$
D(2,8) = $x_4/6 - x_3/12 - x_2/12$	D(4,9) = $y_3/12 - y_1/6 + y_4/12$
D(2,9) = $y_2/6 - y_4/6$	D(4,10) = $y_3/6 - y_1/6$
D(2,10) = $y_2/6 - y_3/12 - y_4/12$	D(4,11) = $y_3/6 - y_1/12 - y_4/12$
D(2,11) = $y_2/12 - y_4/12$	D(4,12) = $y_3/12 - y_1/12$
D(2,12) = $y_2/12 + y_3/12 - y_4/6$	D(5,1) = $y_4/12 - y_2/12$
D(3,1) = $y_3/12 - y_1/6 + y_4/12$	D(5,2) = $y_1/12 - y_2/6 + y_4/12$

$D(5,3) = y4/6 - y2/6$	$D(7,2) = y1/12 - y3/12$
$D(5,4) = y4/6 - y2/12 - y1/12$	$D(7,3) = y1/12 + y2/12 - y3/6$
$D(5,5) = 0$	$D(7,4) = y1/6 - y3/6$
$D(5,6) = 0$	$D(7,5) = 0$
$D(5,7) = 0$	$D(7,6) = 0$
$D(5,8) = 0$	$D(7,7) = 0$
$D(5,9) = x2/12 - x4/12$	$D(7,8) = 0$
$D(5,10) = x2/6 - x1/12 - x4/12$	$D(7,9) = x2/12 - x1/6 + x3/12$
$D(5,11) = x2/6 - x4/6$	$D(7,10) = x3/12 - x1/12$
$D(5,12) = x1/12 + x2/12 - x4/6$	$D(7,11) = x3/6 - x2/12 - x1/12$
$D(6,1) = 0$	$D(7,12) = x3/6 - x1/6$
$D(6,2) = 0$	$D(8,1) = 0$
$D(6,3) = 0$	$D(8,2) = 0$
$D(6,4) = 0$	$D(8,3) = 0$
$D(6,5) = x2/12 - x4/12$	$D(8,4) = 0$
$D(6,6) = x2/6 - x1/12 - x4/12$	$D(8,5) = x2/12 - x1/6 + x3/12$
$D(6,7) = x2/6 - x4/6$	$D(8,6) = x3/12 - x1/12$
$D(6,8) = x1/12 + x2/12 - x4/6$	$D(8,7) = x3/6 - x2/12 - x1/12$
$D(6,9) = y4/12 - y2/12$	$D(8,8) = x3/6 - x1/6$
$D(6,10) = y1/12 - y2/6 + y4/12$	$D(8,9) = y1/6 - y2/12 - y3/12$
$D(6,11) = y4/6 - y2/6$	$D(8,10) = y1/12 - y3/12$
$D(6,12) = y4/6 - y2/12 - y1/12$	$D(8,11) = y1/12 + y2/12 - y3/6$
$D(7,1) = y1/6 - y2/12 - y3/12$	$D(8,12) = y1/6 - y3/6$

และเมทริกซ์ $[P]$ ที่ใช้ในสมการ (3.65) สามารถหาค่าในรูปแบบปิดได้ดังนี้

$P(1,1) = c11*(y2 - y4)/V1$	$P(2,2) = c12*-(x2 - x3)/V2$
$P(1,2) = c12*-(x2 - x4)/V1$	$P(2,3) = c11*-(y1 - y3)/V2$
$P(1,3) = c11*-(y1 - y4)/V1$	$P(2,4) = c12*(x1 - x3)/V2$
$P(1,4) = c12*(x1 - x4)/V1$	$P(2,5) = c11*(y1 - y2)/V2$
$P(1,5) = c11*0$	$P(2,6) = c12*-(x1 - x2)/V2$
$P(1,6) = c12*0$	$P(2,7) = c11*0$
$P(1,7) = c11*(y1 - y2)/V1$	$P(2,8) = c12*0$
$P(1,8) = c12*-(x1 - x2)/V1$	$P(3,1) = c11*0$
$P(2,1) = c11*(y2 - y3)/V2$	$P(3,2) = c12*0$

$$\begin{aligned}
 P(3,3) &= c_{11}*(y_3 - y_4)/V_3 & P(7,8) &= c_{22}*(-(x_2 - x_3)/V_3 \\
 P(3,4) &= c_{12}*(-(x_3 - x_4)/V_3 & P(8,1) &= c_{21}*(y_3 - y_4)/V_4 \\
 P(3,5) &= c_{11}*(-(y_2 - y_4)/V_3 & P(8,2) &= c_{22}*(-(x_3 - x_4)/V_4 \\
 P(3,6) &= c_{12}*(x_2 - x_4)/V_3 & P(8,3) &= c_{21}*0 \\
 P(3,7) &= c_{11}*(y_2 - y_3)/V_3 & P(8,4) &= c_{22}*0 \\
 P(3,8) &= c_{12}*(-(x_2 - x_3)/V_3 & P(8,5) &= c_{21}*(-(y_1 - y_4)/V_4 \\
 P(4,1) &= c_{11}*(y_3 - y_4)/V_4 & P(8,6) &= c_{22}*(x_1 - x_4)/V_4 \\
 P(4,2) &= c_{12}*(-(x_3 - x_4)/V_4 & P(8,7) &= c_{21}*(y_1 - y_3)/V_4 \\
 P(4,3) &= c_{11}*0 & P(8,8) &= c_{22}*(-(x_1 - x_3)/V_4 \\
 P(4,4) &= c_{12}*0 & P(9,1) &= c_{33}*(-(x_2 - x_4)/V_1 \\
 P(4,5) &= c_{11}*(-(y_1 - y_4)/V_4 & P(9,2) &= c_{33}*(y_2 - y_4)/V_1 \\
 P(4,6) &= c_{12}*(x_1 - x_4)/V_4 & P(9,3) &= c_{33}*(x_1 - x_4)/V_1 \\
 P(4,7) &= c_{11}*(y_1 - y_3)/V_4 & P(9,4) &= c_{33}*(-(y_1 - y_4)/V_1 \\
 P(4,8) &= c_{12}*(-(x_1 - x_3)/V_4 & P(9,5) &= c_{33}*0 \\
 P(5,1) &= c_{21}*(y_2 - y_4)/V_1 & P(9,6) &= c_{33}*0 \\
 P(5,2) &= c_{22}*(-(x_2 - x_4)/V_1 & P(9,7) &= c_{33}*(-(x_1 - x_2)/V_1 \\
 P(5,3) &= c_{21}*(-(y_1 - y_4)/V_1 & P(9,8) &= c_{33}*(y_1 - y_2)/V_1 \\
 P(5,4) &= c_{22}*(x_1 - x_4)/V_1 & P(10,1) &= c_{33}*(-(x_2 - x_3)/V_2 \\
 P(5,5) &= c_{21}*0 & P(10,2) &= c_{33}*(y_2 - y_3)/V_2 \\
 P(5,6) &= c_{22}*0 & P(10,3) &= c_{33}*(x_1 - x_3)/V_2 \\
 P(5,7) &= c_{21}*(y_1 - y_2)/V_1 & P(10,4) &= c_{33}*(-(y_1 - y_3)/V_2 \\
 P(5,8) &= c_{22}*(-(x_1 - x_2)/V_1 & P(10,5) &= c_{33}*(-(x_1 - x_2)/V_2 \\
 P(6,1) &= c_{21}*(y_2 - y_3)/V_2 & P(10,6) &= c_{33}*(y_1 - y_2)/V_2 \\
 P(6,2) &= c_{22}*(-(x_2 - x_3)/V_2 & P(10,7) &= c_{33}*0 \\
 P(6,3) &= c_{21}*(-(y_1 - y_3)/V_2 & P(10,8) &= c_{33}*0 \\
 P(6,4) &= c_{22}*(x_1 - x_3)/V_2 & P(11,1) &= c_{33}*0 \\
 P(6,5) &= c_{21}*(y_1 - y_2)/V_2 & P(11,2) &= c_{33}*0 \\
 P(6,6) &= c_{22}*(-(x_1 - x_2)/V_2 & P(11,3) &= c_{33}*(-(x_3 - x_4)/V_3 \\
 P(6,7) &= c_{21}*0 & P(11,4) &= c_{33}*(y_3 - y_4)/V_3 \\
 P(6,8) &= c_{22}*0 & P(11,5) &= c_{33}*(x_2 - x_4)/V_3 \\
 P(7,1) &= c_{21}*0 & P(11,6) &= c_{33}*(-(y_2 - y_4)/V_3 \\
 P(7,2) &= c_{22}*0 & P(11,7) &= c_{33}*(-(x_2 - x_3)/V_3 \\
 P(7,3) &= c_{21}*(y_3 - y_4)/V_3 & P(11,8) &= c_{33}*(y_2 - y_3)/V_3 \\
 P(7,4) &= c_{22}*(-(x_3 - x_4)/V_3 & P(12,1) &= c_{33}*(-(x_3 - x_4)/V_4 \\
 P(7,5) &= c_{21}*(-(y_2 - y_4)/V_3 & P(12,2) &= c_{33}*(y_3 - y_4)/V_4 \\
 P(7,6) &= c_{22}*(x_2 - x_4)/V_3 & P(12,3) &= c_{33}*0 \\
 P(7,7) &= c_{21}*(y_2 - y_3)/V_3 & P(12,4) &= c_{33}*0
 \end{aligned}$$

$$P(12,5) = c_{33}*(x_1 - x_4)/V_4$$

$$P(12,7) = c_{33}*(-(x_1 - x_3)/V_4$$

$$P(12,6) = c_{33}*(y_1 - y_4)/V_4$$

$$P(12,8) = c_{33}*(y_1 - y_3)/V_4$$

โดยที่ $V_{i, i=1, \dots, 4}$ เป็นค่าคงตัว สามารถหาได้จากสมการดังนี้

$$V_1 = (x_1*y_2 - x_2*y_1 - x_1*y_4 + x_4*y_1 + x_2*y_4 - x_4*y_2)$$

$$V_2 = (x_1*y_2 - x_2*y_1 - x_1*y_3 + x_3*y_1 + x_2*y_3 - x_3*y_2)$$

$$V_3 = (x_2*y_3 - x_3*y_2 - x_2*y_4 + x_4*y_2 + x_3*y_4 - x_4*y_3)$$

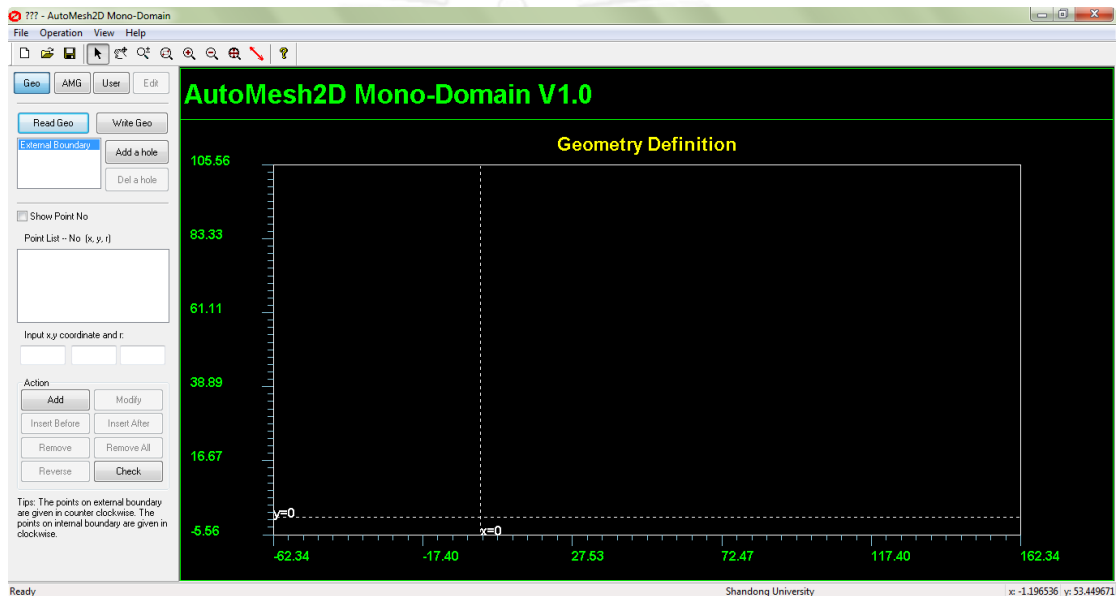
$$V_4 = (x_1*y_3 - x_3*y_1 - x_1*y_4 + x_4*y_1 + x_3*y_4 - x_4*y_3)$$

และค่า c_{ij} คือ ค่าที่อยู่ในเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดตั้งสมการ (3.6) และสมการ (3.7)

ภาคผนวก ข

วิธีใช้โปรแกรม AUTOMESH-2D

การใช้งานโปรแกรม AUTOMESH-2D เพื่อสร้างเอลิเมนต์และปรับขนาดเอลิเมนต์ เริ่มจากเมื่อเปิดโปรแกรม โปรแกรมจะอยู่ในส่วนของการสร้างรูปร่างของโดเมนที่จะทำการแบ่งเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ ข.1 โปรแกรมจะประกอบด้วย 3 ส่วนหลักคือ เมนูและเครื่องมือด้านบน แถบข้อมูลคำสั่งด้านซ้าย และหน้าต่างสีด้าแสดงผลด้านขวา



รูปที่ ข.1 หน้าต่างทำงานการสร้างรูปร่างของโดเมนปัญหา

หากมีรูปร่างที่สร้างเก็บไว้แล้ว สามารถเรียกใช้ได้จากปุ่ม [Read Geo] ในขณะที่หากทำการสร้างรูปร่างเสร็จแล้วและต้องการบันทึกเก็บไว้สามารถบันทึกได้โดยกดที่ปุ่ม [Write Geo] รูปร่างจะถูกสร้างจากขอบเขตภายนอกของโดเมนก่อน ดังจะสังเกตเห็นได้จากการไฮไลท์ข้อความที่ External Boundary ถ้ารูปร่างที่ต้องการสร้างมีรูอยู่ภายในสามารถสร้างโดยกดปุ่ม [Add a hole] เพื่อให้ไฮไลท์ขึ้นที่ Hole No. 1 ซึ่งจะหมายความว่า การสร้างรูปร่างใดๆ ในขณะนั้นเป็นการสร้างรู และสามารถเพิ่มรูได้อีกตามต้องการ หากต้องการจะกลับมาแก้ไขรูปร่างขอบเขตภายนอกให้เลือกไฮไลท์กลับมาที่ External Boundary

การสร้างรูปร่างทำโดยกำหนดแต่ละจุดของรูปร่างนั้นๆ โดยที่ต้องใส่ค่าพิกัด x ค่าพิกัด y และรัศมีของจุดนั้นหากจุดนั้นเป็นส่วนโค้ง ลงในช่องว่างสามช่อง เมื่อต้องการจะเพิ่มจุดนี้สามารถทำได้โดยกดปุ่ม [Add] โดยที่เมื่อเพิ่มแล้วจุดจะขึ้นเป็นกราฟิกบนหน้าต่างทำงานทางด้านขวา หากต้องการจะแก้ไข หรือลบจุด สามารถทำได้โดยปุ่มที่อยู่ใกล้ๆ กันซึ่งมีความหมายของแต่ละปุ่มดังนี้

[Modify] หมายถึงแก้ไขข้อมูลของจุดนั้นๆ [Insert Before] หมายถึงเพิ่มจุดไปก่อนหน้าจุดที่ไฮไลท์อยู่ [Insert After] หมายถึงเพิ่มจุดไปต่อจากจุดที่ไฮไลท์อยู่ [Remove] หมายถึงลบจุดที่ไฮไลท์อยู่ ออก และ [Remove All] หมายถึงลบจุดทุกจุดออก ดังแสดงในรูปที่ ข.2 เมื่อทำการสร้างเสร็จแล้ว จะทำการตรวจสอบรูปร่างโดยกดปุ่ม [Check] เพื่อให้โปรแกรมตรวจสอบการเรียงตัวของจุดว่า ถูกต้องแล้ว หากไม่ถูกต้องโปรแกรมจะแจ้งให้ทำการแก้ไข โดยสามารถแก้ไขลำดับของจุดได้ โดยกดที่ ปุ่ม [Reverse]

No	x	y	r
1	0	0	0
2	1	0	0.5
3	1	1	0
4	0	1	0

Input x,y coordinate and r:

1 0 0.5

Action

Add Modify

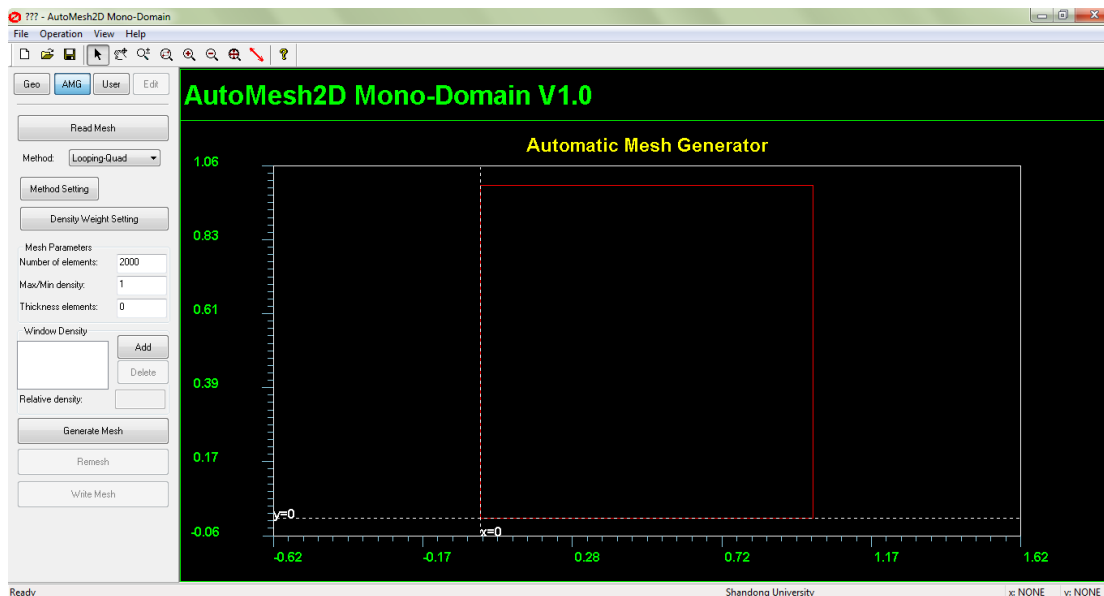
Insert Before Insert After

Remove Remove All

Reverse Check

รูปที่ ข.2 ส่วนแสดงพิกัดจุดในการสร้างโดเมน และการแก้ไข

เมื่อทำการสร้างรูปร่างที่จะทำการแบ่งเอลิเมนต์เสร็จแล้ว สามารถทำการกดปุ่ม [AMG] จากนั้นหน้าต่างทำงานจะอยู่ในส่วนของการแบ่งเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ ข.3 ในส่วนของการสร้าง เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม โปรแกรมสามารถสร้างได้ 2 วิธี คือ Looping Quad และ Paving Quad โดยสามารถเลือกได้จากลิสต์ที่อยู่ข้าง Method ซึ่งจะแสดงวิธีที่เลือกใช้อยู่ในปัจจุบัน การสร้างเอลิเมนต์ ในงานวิจัยนี้ใช้วิธี Looping Quad ตามที่แสดงในโปรแกรม เมื่อต้องการที่จะแบ่งเอลิเมนต์ จะเริ่มจากการกำหนดจำนวนเอลิเมนต์ที่ต้องการ โดยใส่ค่าลงในช่อง Number of elements ส่วนช่องอื่นๆ ใช้ค่าที่โปรแกรมกำหนดให้เริ่มต้น คือ ช่อง Max/Min density มีค่า 1 และช่อง Thickness elements มีค่า 0 จากนั้นกดปุ่ม [Generate Mesh] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์ หากต้องการที่จะนำ ข้อมูลเอลิเมนต์ออก สามารถกดปุ่ม [Write Mesh] เพื่อบันทึกข้อมูลเอลิเมนต์ออกไป อนึ่ง ในส่วน ของ Window density จะเป็นการกำหนดการปรับขนาดเอลิเมนต์อีกรูปแบบหนึ่งซึ่งไม่ได้ใช้ใน งานวิจัยในครั้งนี้



รูปที่ ข.3 หน้าต่างทำงานการแบ่งเอลิเมนต์

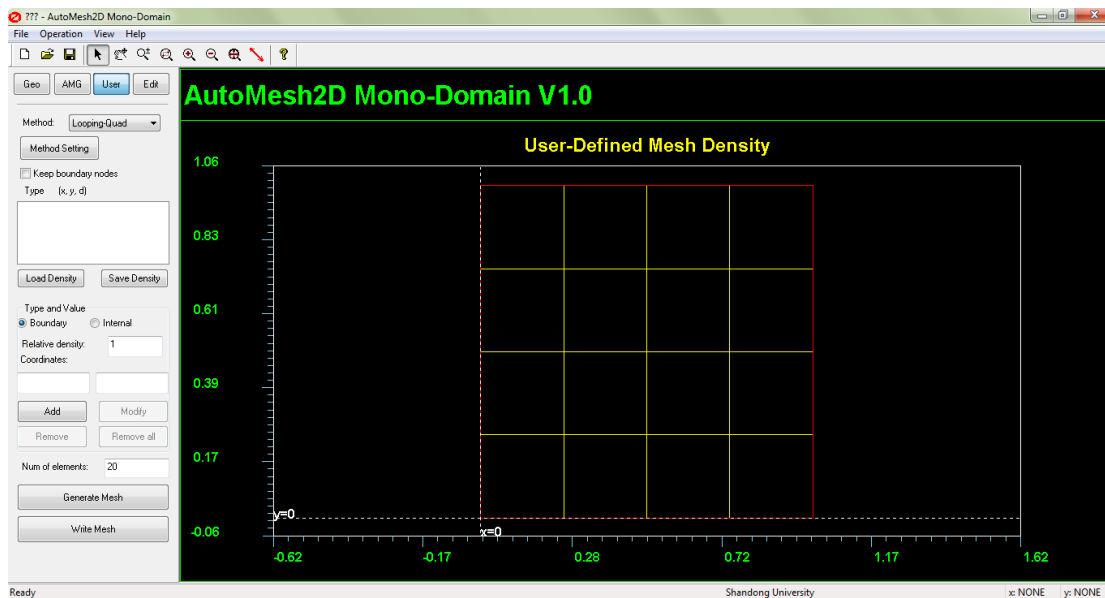
เมื่อต้องการที่จะปรับขนาดเอลิเมนต์ สามารถทำการกดปุ่ม [User] จากนั้นหน้าต่างทำงาน จะอยู่ในส่วนของการปรับขนาดเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ ข.4 ค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ที่จะใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ซึ่งได้ถูกคำนวณไว้แล้วตามรายละเอียดในบทที่ 7 จะถูกจัดเก็บไว้เป็นแฟ้มข้อมูล ซึ่งถูกตั้งชื่อให้มีนามสกุลไฟล์เป็น ".DST" โดยที่มีรายละเอียดในไฟล์ คือ บรรทัดแรกจะแสดงจำนวนจุดความหนาแน่น บรรทัดต่อมาจะเป็นข้อมูลของแต่ละจุด ซึ่งประกอบด้วยข้อมูล 4 ส่วน ส่วนแรกจะระบุว่าจุดความหนาแน่นนั้นเป็นจุดที่อยู่ขอบเขตของโดเมนซึ่งจะแทนค่าด้วย 0 หรือเป็นจุดที่อยู่ภายในโดเมนซึ่งจะแทนค่าด้วย 1 ส่วนที่สองจะระบุพิกัด x ส่วนที่สามจะระบุพิกัด y และส่วนสุดท้ายจะระบุค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ของจุดนั้น ดังตัวอย่างที่แสดงนี้

121

0	0	0	9
0	0	0.1	1
0	0	0.2	6

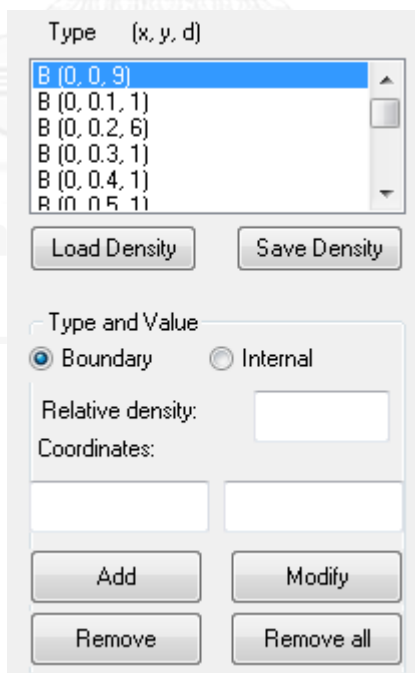
.

.



รูปที่ ข.4 หน้าต่างทำงานการปรับขนาดเอลิเมนต์

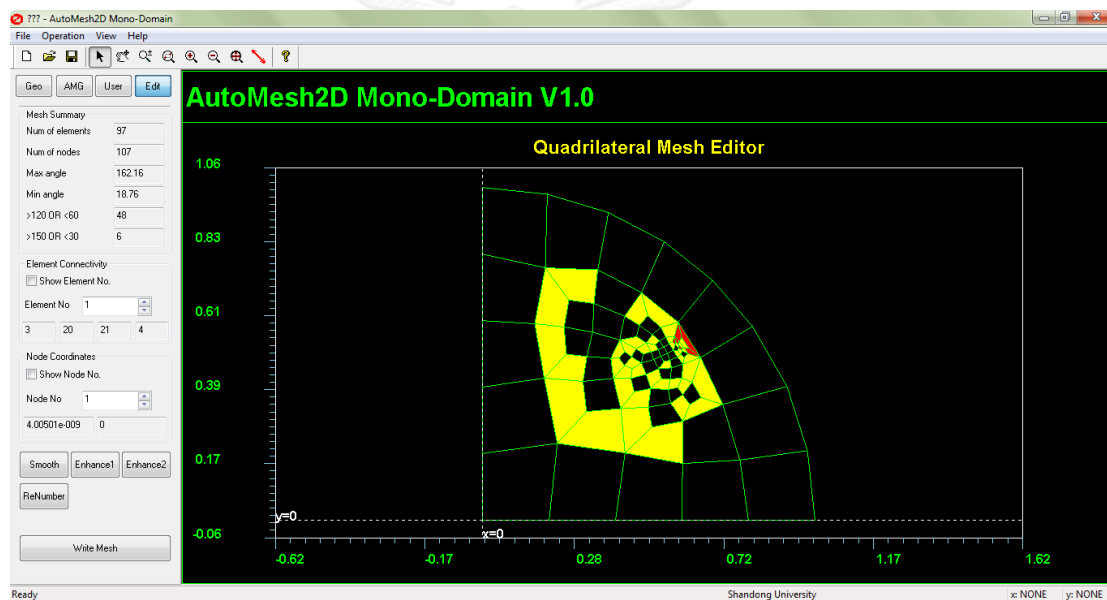
เมื่อมีไฟล์จุดความหนาแน่นที่เตรียมไว้แล้ว สามารถนำข้อมูลเข้าสู่โปรแกรมโดยกดปุ่ม [Load Density] และเลือกไฟล์ที่เตรียมไว้ ข้อมูลจุดความหนาแน่นสัมพัทธ์จะปรากฏที่ส่วนแสดงจุดความหนาแน่นสัมพัทธ์ ดังแสดงในรูปที่ ข.5 ซึ่งสามารถแก้ไขข้อมูลในแต่ละจุดได้



รูปที่ ข.5 ส่วนแสดงจุดความหนาแน่นสัมพัทธ์

จากนั้นทำการแบ่งเอลิเมนต์ซึ่งสามารถระบุจำนวนเอลิเมนต์ได้โดยใส่ค่าลงในช่อง Num of elements และกดสร้างเอลิเมนต์ที่ปุ่ม [Generate Mesh] เมื่อต้องการบันทึกข้อมูลของเอลิเมนต์ออก สามารถทำได้โดยกดปุ่ม [Write Mesh]

คุณภาพของเอลิเมนต์สามารถดูได้ โดยกดเลือก [Edit] จากนั้นหน้าต่างทำงานจะเปลี่ยนไปอยู่ในส่วนของคุณภาพเอลิเมนต์ ซึ่งจะแสดงจำนวนเอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อ มุมที่มากที่สุดของเอลิเมนต์ และมุมที่น้อยที่สุดของเอลิเมนต์ รวมถึงจำนวนเอลิเมนต์ที่มีคุณภาพต่ำ (>120 or <60) ซึ่งจะแทนด้วยเอลิเมนต์สีเหลือง และจำนวนเอลิเมนต์ที่มีคุณภาพไม่ดี (>150 or <30) ซึ่งจะแทนด้วยเอลิเมนต์สีแดง ดังแสดงในรูปที่ ข.6



รูปที่ ข.6 หน้าต่างทำงานแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์

หากมีเอลิเมนต์ที่มีคุณภาพต่ำหรือไม่ดีเป็นจำนวนมาก สามารถให้โปรแกรมทำการปรับให้เอลิเมนต์ดีขึ้น โดยการกดที่ปุ่ม [Smooth] หรือ [Enhance1] หรือ [Enhance2] ซึ่งโปรแกรมจะช่วยปรับให้เอลิเมนต์มีคุณภาพที่ดีขึ้น ตามความสามารถของโปรแกรมที่จะทำได้ เมื่อได้เอลิเมนต์ที่ต้องการแล้ว สามารถบันทึกข้อมูลออกโดยกดที่ปุ่ม [Write Mesh]

รายละเอียดการใช้งานอื่นๆ และตัวโปรแกรม ผู้ใช้งานสามารถศึกษาได้จาก www.automesh2d.com

ภาคผนวก ค

การประมาณความผิดพลาดสัมพัทธ์

ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ (Error, e) สามารถหาได้จากความแตกต่างของผลลัพธ์ที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นยำ ดังนั้นสำหรับค่าการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นผลลัพธ์พื้นฐานของปัญหาของแข็งสามารถคำนวณความผิดพลาดของผลลัพธ์ได้ดังนี้

$$e = u - \hat{u} \quad (\text{ค.1})$$

โดย u คือ ค่าการเคลื่อนที่ที่เป็นผลเฉลยแม่นยำ

\hat{u} คือ ค่าการเคลื่อนที่ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้น

ดังนั้น จึงสามารถคำนวณได้ความผิดพลาดของความเครียดและความเค้นได้จากวิธีเดียวกัน

$$e_\varepsilon = \varepsilon - \hat{\varepsilon} \quad (\text{ค.2})$$

โดย ε คือ ความเครียดที่เป็นผลเฉลยแม่นยำ

$\hat{\varepsilon}$ คือ ความเครียดที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้น

$$e_\sigma = \sigma - \hat{\sigma} \quad (\text{ค.3})$$

โดย σ คือ ความเค้นที่เป็นผลเฉลยแม่นยำ

$\hat{\sigma}$ คือ ความเค้นที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประยุกต์ใช้วิธีฟลักซ์เชิงเส้น

แต่ความผิดพลาดเหล่านี้เป็นความผิดพลาดเฉพาะตำแหน่ง จึงไม่สะดวกในการนำไปใช้คำนวณความผิดพลาดของทั้งโดเมน ดังนั้นจึงนิยมใช้มาตรฐานอื่นๆ เข้ามาช่วย เช่น Energy norm

สำหรับปัญหาของแข็งหรือปัญหาความยืดหยุ่น (Elasticity problem) สามารถหาความผิดพลาดด้วย Energy norm ได้เป็น

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} (Se)^T D(Se) d\Omega \right)^{1/2} \quad (\text{ค.4})$$

โดย S หาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าเคลื่อนที่ $\varepsilon = Su$ และ $\hat{\varepsilon} = S\hat{u}$

และ D หาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด $\sigma = D\varepsilon$ และ $\hat{\sigma} = D\hat{\varepsilon}$

ดังนั้นจึงสามารถหาความผิดพลาดด้วย Energy norm ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\|e\| &= \left(\int_{\Omega} (\varepsilon - \hat{\varepsilon})^T D (\varepsilon - \hat{\varepsilon}) d\Omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\Omega} (\varepsilon - \hat{\varepsilon})^T (\sigma - \hat{\sigma}) d\Omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^T D^{-1} (\sigma - \hat{\sigma}) d\Omega \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{ค.5}$$

ความผิดพลาด $\|e\|$ นี้จะถูกคำนวณขึ้นมาสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ ดังนั้นสำหรับทั้งโดเมนของปัญหาสามารถรวมความผิดพลาดของแต่ละเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e\|_i^2, \quad i=1,2,\dots,m \text{ elements} \tag{ค.6}$$

จากนั้นความผิดพลาดสัมพัทธ์ (η) สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \times 100\% \tag{ค.7}$$

โดย

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \left(\int_{\Omega} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{ค.8}$$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายณัฐชนนทร์ ประสมสุข เกิดเมื่อวันที่ 23 เดือนมิถุนายน พุทธศักราช 2529 จังหวัดอุบลราชธานี สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้าเครื่องกลการผลิต คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ เมื่อปีการศึกษา 2551 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2553



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY