



ความรู้เกี่ยวกับวิชาอากาศพลศาสตร์ (Aerodynamics)

เนื่องจากของเหลวมีระยะห่างระหว่างโมเลกุลมาก และแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลก็มีมาก แต่พฤติกรรมการเคลื่อนไหว (Movement) ของโมเลกุลของเหลวเป็นเหมือนกับของไหล (Fluidity) ส่วนก๊าซ (Gas) มีช่องว่าง (Spacing) หรือระยะห่างระหว่างโมเลกุลมากกว่าของเหลว อิทธิพลของแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลมีน้อย แต่การเคลื่อนไหวของโมเลกุลเป็นไปอย่างอิสระ ดังนั้น การเคลื่อนไหวของโมเลกุลของก๊าซ และของเหลว จึงมีลักษณะทางกายภาพคล้ายคลึงกัน (Similar physical characteristics) ด้วยเหตุนี้จึงทำให้มีการศึกษาสภาวะการเคลื่อนไหวของก๊าซและของของเหลว ภายใต้หัวข้อและกฎเกณฑ์ทั่วไปเหมือนกัน เรียกว่าวิชาที่ศึกษาดังกล่าว ว่า ของไหลพลศาสตร์ (Fluid dynamics) โดยแบ่งย่อยเป็น 3 แขนงตามเนื้อหาที่ศึกษา คือ (6)

- ก. ของเหลวพลศาสตร์ (Hydrodynamics) ศึกษาเกี่ยวกับการไหลของของเหลว (Liquid)
- ข. ก๊าซพลศาสตร์ (Gas dynamics) ศึกษาเกี่ยวกับการไหลของก๊าซ
- ค. อากาศพลศาสตร์ (Aerodynamics) ศึกษาเกี่ยวกับการไหลของอากาศ

ทั้ง 3 แขนงนี้มีลักษณะของปรากฏการณ์ (Phenomena) ที่เหมือนกัน จึงสามารถศึกษา ร่วมกันได้

ในการศึกษาเกี่ยวกับแรงและโมเมนต์ทางอากาศพลศาสตร์ ที่กระทำต่อวัตถุที่ลอยหรือเคลื่อนที่ในอากาศ จำเป็นที่จะต้องอธิบายเกี่ยวกับรูปแบบของการไหล (Pattern of flow) รอบรูปร่าง (Configuration) ของวัตถุนั้น ซึ่งจะขึ้นกับรูปร่างทางเรขาคณิตของวัตถุด้วย กฎเบื้องต้นที่ใช้ในการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของของไหล คือ

- ก. กฎการทรงมวล (Law of conservative of mass)
- ข. กฎการทรงโมเมนตัม (Law of conservative of momentum)
- ค. กฎการทรงพลังงาน (Law of conservative of energy)

รูปแบบการไหลของของไหล มีความซับซ้อนมาก จำเป็นที่จะต้องวิเคราะห์ทั้งในเชิงทฤษฎี และเชิงการทดลอง เพื่อที่จะอธิบายผลลัพธ์ เนื่องจากการไหลของของไหล สิ่งที่สำคัญคือว่า จะต้องเข้าใจ กฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการเคลื่อนไหวของของไหล (Fluid motion) จึงจะทำให้สามารถใช้ทฤษฎีวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับของไหลได้ และยังสามารถอธิบายในเชิงการทดลองได้อีกเช่นกัน

3.1 คุณสมบัติของของไหล (Fluid properties)

ของไหลเป็นสารที่มีการเสียรูปร่างแบบต่อเนื่อง ภายใต้การกระทำของแรงเฉือน (Shearing force) ใต้ง่าย ส่วนประกอบของของไหลจะประกอบด้วยโมเลกุลมากมาย แต่ละโมเลกุลจะมีตำแหน่ง (Position) ความเร็ว (Velocity) และพลังงาน (Energy) ประจำตัว โดยปริมาณเหล่านี้จะมีค่าแปรเปลี่ยนตาม การชน (Collision) ที่เกิดขึ้นกับโมเลกุล เนื่องจากของไหลเป็นสารที่มีลักษณะต่อเนื่อง (Continuous material) จึงทำให้สามารถกำหนดค่าปริมาณต่าง ๆ ที่บอกสถานะของของไหลได้จากค่าเฉลี่ยทางสถิติ (Statistical average) ซึ่งมีความสัมพันธ์อยู่ในรูปของสมการ

เนื่องจากของไหลมีคุณสมบัติของความต่อเนื่อง จึงสามารถอธิบายพฤติกรรม (Behavior) ทั่วไปของของไหลที่เกี่ยวกับการเคลื่อนไหวได้ โดยใช้ปริมาณเหล่านี้ เช่น อุณหภูมิ ความดัน ความหนาแน่น และความหนืด เป็นข้อมูลในการพิจารณา (3)

1. อุณหภูมิ (Temperature) เป็นปริมาณที่คุ้นเคยกันดี โดยทั่วไปจะเป็นตัวบ่งบอกความร้อน เย็น ของสิ่งทั่วไปสัมผัส แต่การกำหนดนิยามของอุณหภูมินั้นมีความลำบากมาก
2. ความดัน (Pressure) เพราะว่าการเคลื่อนที่ของของไหลเป็นไปแบบสุ่ม (Random motion) และมีการชนกับผนังที่วางในของเหลวอย่างต่อเนื่อง เป็นผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของโมเลกุลของของไหล ทำให้เกิดแรงกระทำบนผนังดังกล่าว แรงที่เกิดจากทุกโมเลกุลที่ชนผนังในแนวตั้งฉากต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ของผนัง จะเป็นค่าความดัน เขียนเป็นสมการได้ว่า

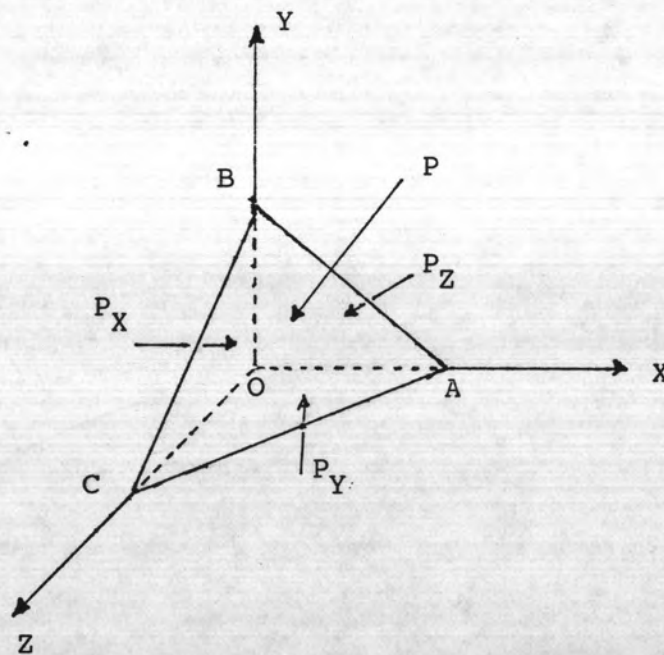
$$P = \frac{F}{A} \quad (3.1)$$

P แทนความดันที่ผนัง

- F แทนแรงที่กระทำตั้งฉากกับผนัง
A แทนพื้นที่ของผนัง

สำหรับความดันในของของไหลจะแสดงถึงความเค้นกด (Normal Stress) ที่จุดใดจุดหนึ่งในของของไหล ความดันจะมีค่าเท่ากันทุกทิศทาง พิสูจน์ได้ดังนี้

พิจารณาส່วนย่อย (Element) ของของไหล รูปจตุรมุข (Tetrahedron) อันหนึ่ง ซึ่งอยู่ในสภาวะสมดุลสถิต แรงลัพธ์ในทิศทางใด ๆ จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ (8)



รูปที่ 3.1 แสดงส่วนย่อยของของไหลรูปจตุรมุขในสภาวะสมดุลสถิต

ให้ด้าน OA, OB และ OC มีค่า δ_x , δ_y และ δ_z ตามลำดับ P เป็นความดันที่กระทำตั้งฉากกับระนาบ ABC ซึ่งมีพื้นที่เป็น δA ทำมุมกับแกน x y และ z เป็น α , β และ γ ตามลำดับ และ P_x , P_y กับ P_z เป็นความดันในทิศ x y และ z ตามลำดับ

$$\text{เพราะว่า } \sum F_x = 0$$

$$\text{ดังนั้น } P_x \left(\frac{1}{2} \delta_y \delta_z \right) = P (\delta A \cos \alpha)$$

เนื่องจาก $\delta A \cos \alpha$ เป็นภาพฉาย (Projection) ของ δA บนระนาบตั้งฉาก

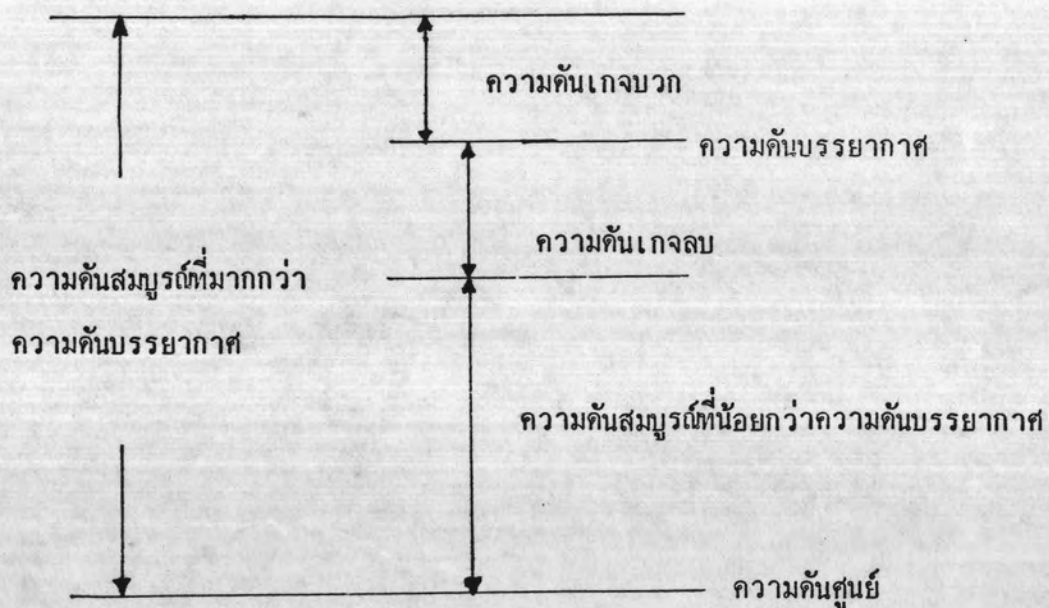
กับแกน x ซึ่งก็คือพื้นที่ของของไหล ด้านที่ P_x กระทำนั่นเอง

$$\text{ดังนั้น} \quad \delta A \cos \alpha = \frac{1}{2} \delta_y \delta_z$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad P_x = P$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $P_y = P$ และ $P_z = P$ นั่นคือเมื่อ $\delta_x \delta_y$ และ δ_z มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่าความดันที่จุดใด ๆ ในของไหลจะมีค่าเท่ากันทุกทิศทาง

ในทางอากาศพลศาสตร์ ความดันที่สนใจจะเป็นผลต่างระหว่างความดันประจำที่ (Local pressure) และความดันบรรยากาศ (Atmospheric pressure) ซึ่งก่อให้เกิดแรงต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับอากาศพลศาสตร์ นอกจากนี้ยังมีความดันที่เกิดจากผลต่างระหว่างความดันสมบูรณ์ (Absolute pressure) กับความดันบรรยากาศ เรียกว่า ความดันเกจ (Gauge pressure) ซึ่งเป็นความดันที่เกิดขึ้นมาเองโดยเฉพาะตัวจากวัตถุนั้น ลักษณะของความดันโดยทั่วไปสามารถอธิบายได้ตามแผนภาพในรูปที่ 3.2 (3)



รูปที่ 3.2 แผนภาพแสดงความดันที่เกิดขึ้น

3. ความหนาแน่น (Density) ความหนาแน่นของของไหลที่จุดใด ๆ คือ มวลของของไหลที่บรรจุในปริมาตรส่วนเล็ก ๆ (Incremental volume) ที่ล้อมรอบจุดนั้นอยู่ เนื่องจากของไหลมีคุณสมบัติเป็นสสารที่มีเนื้อของสารต่อเนื่อง (Continuous) ดังนั้นความหนาแน่นที่จุดใด ๆ จะเป็นไปตามสมการ

$$\rho = \lim_{\delta(\text{ปริมาตร}) \rightarrow 0} \frac{\delta(\text{มวล})}{\delta(\text{ปริมาตร})} \quad (3.2.1)$$

เมื่อ ρ แทนความหนาแน่นของของไหล

δ (มวล) แทนมวลของของไหลส่วนเล็ก ๆ

δ (ปริมาตร) แทนปริมาตรส่วนเล็ก ๆ ของของไหล

โดยทั่วไป ความหนาแน่นของของไหลจะขึ้นอยู่กับส่วนประกอบของของไหล อุณหภูมิและความดันของของไหล

ถ้าให้ ความดัน ปริมาตร อุณหภูมิ และความหนาแน่นที่เวลาหนึ่งเป็น P_1 V_1 T_1 และ ρ_1 ตามลำดับ ต่อมาเปลี่ยนเป็น P_2 V_2 T_2 และ ρ_2 ตามลำดับ (8)

เพราะว่ามวลของของไหลไม่มีการเปลี่ยนแปลง ดังนั้น

$$M = V_1 \rho_1 = V_2 \rho_2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \quad (3.2.2)$$

จากกฎของกาซจะได้

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (3.2.3)$$

จาก (3.2.2) และ (3.2.3) จะได้

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} \quad (3.2.4)$$

สำหรับอากาศที่ความดันและอุณหภูมิปกติ คือ ที่ 76 cm.of Hg และ 0°C ความหนาแน่นจะมีค่า 1.293 Kg/m³ ดังนั้นความหนาแน่นของอากาศที่อุณหภูมิ t°C และความดัน P cm.of Hg จะมีค่า

$$\rho_t = 1.293 \times \frac{P}{76} \times \frac{273}{(273+t)}$$

$$\rho_t = \frac{4.6 P}{(273+t)} \quad (3.2.5)$$

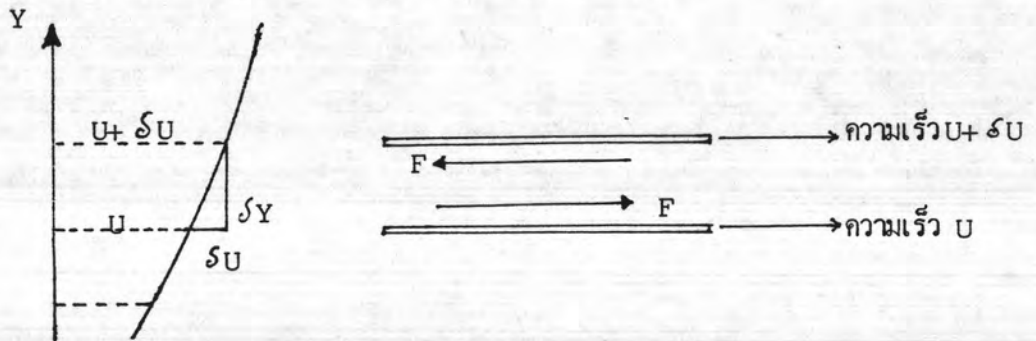
ตัวอย่างความหนาแน่นที่อุณหภูมิต่าง ๆ ของอากาศ ณ ระดับความสูงจากน้ำทะเล (Altitude) ต่าง ๆ กัน ดังแสดงในตารางที่ 3.1 (3)

ตารางที่ 3.1 แสดงค่าความดัน อุณหภูมิ และความหนาแน่นของอากาศ ณ ระดับความสูงจากน้ำทะเลต่าง ๆ กัน

Altitude (km)	Pressure (mm Hg)	Temperature (K)	Density (kg/m ³)	Viscosity (kg/s·m) × 10 ⁵	Speed of Sound (m/s)
0	760.000	288.150	1.2250	1.7894	340.294
1	674.127	281.651	1.1117	1.7579	336.435
2	596.309	275.154	1.0066	1.7260	332.532
3	525.952	268.659	0.9092	1.6938	328.583
4	462.491	262.166	0.8194	1.6612	324.589
5	405.395	255.676	0.7364	1.6282	320.545
6	354.161	249.187	0.6601	1.5949	316.452
7	308.315	242.700	0.5900	1.5612	312.306
8	267.409	236.215	0.5258	1.5271	308.105
9	231.024	229.733	0.4671	1.4926	303.848
10	198.765	223.252	0.4135	1.4577	299.532
11	170.263	216.774	0.3648	1.4223	295.154
12	145.508	216.650	0.3119	1.4216	295.069
13	124.357	216.650	0.2666	1.4216	295.069
14	106.286	216.650	0.2279	1.4216	295.069
15	90.846	216.650	0.1948	1.4216	295.069
16	77.653	216.650	0.1665	1.4216	295.069
17	66.378	216.650	0.1423	1.4216	295.069
18	56.744	216.650	0.1216	1.4216	295.069
19	48.510	216.650	0.1040	1.4216	295.069
20	41.473	216.650	0.0889	1.4216	295.069
21	35.470	217.581	0.0757	1.4267	295.703
22	30.359	218.574	0.0645	1.4322	296.377
23	26.004	219.567	0.0550	1.4376	297.049
24	22.290	220.560	0.0469	1.4430	297.720
25	19.121	221.552	0.0401	1.4484	298.389
26	16.414	222.544	0.0343	1.4538	299.056
27	14.101	223.536	0.0293	1.4592	299.722
28	12.123	224.527	0.0251	1.4646	300.386
29	10.429	225.518	0.0215	1.4699	301.048
30	8.978	226.509	0.0184	1.4753	301.709

4. ความหนืด (Viscosity) ความหนืดเป็นคุณสมบัติอย่างหนึ่งในการต่อต้านการเสียรูปหรือการไหลของของไหล โดยถ้ามองของไหล ประกอบไปด้วยชั้นบาง ๆ (Layer) เรียงซ้อนติดต่อกันไป ขณะที่แผ่นบางแผ่นหนึ่งเคลื่อนไปบนอีกแผ่นหนึ่ง จะก่อให้เกิดแรงต้านต่อต้านแรงเฉือนที่เกิดขึ้นระหว่างแผ่น แรงต้านนี้เองที่บ่งถึงการเกิดความหนืดในของไหล

นิวตัน (1642-1727) ได้แสดงให้เห็นว่า การเคลื่อนที่ของแผ่นบางของของไหล 2 แผ่นที่ติดกัน (Adjacent) และขนานกัน ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 การเคลื่อนที่ของแผ่นบางของของไหล 2 แผ่นที่ติด

จะก่อให้เกิดความเค้นเฉือนระหว่างแผ่นบนพื้นที่ A และจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับการเปลี่ยนแปลงความเร็ว (Velocity gradient) ระหว่างแผ่นบาง การเปลี่ยนแปลงความเร็วจะมีทิศทางฉากกับแผ่นบาง จะได้ว่า

$$\tau = \frac{F}{A} \propto \frac{\partial u}{\partial y}$$

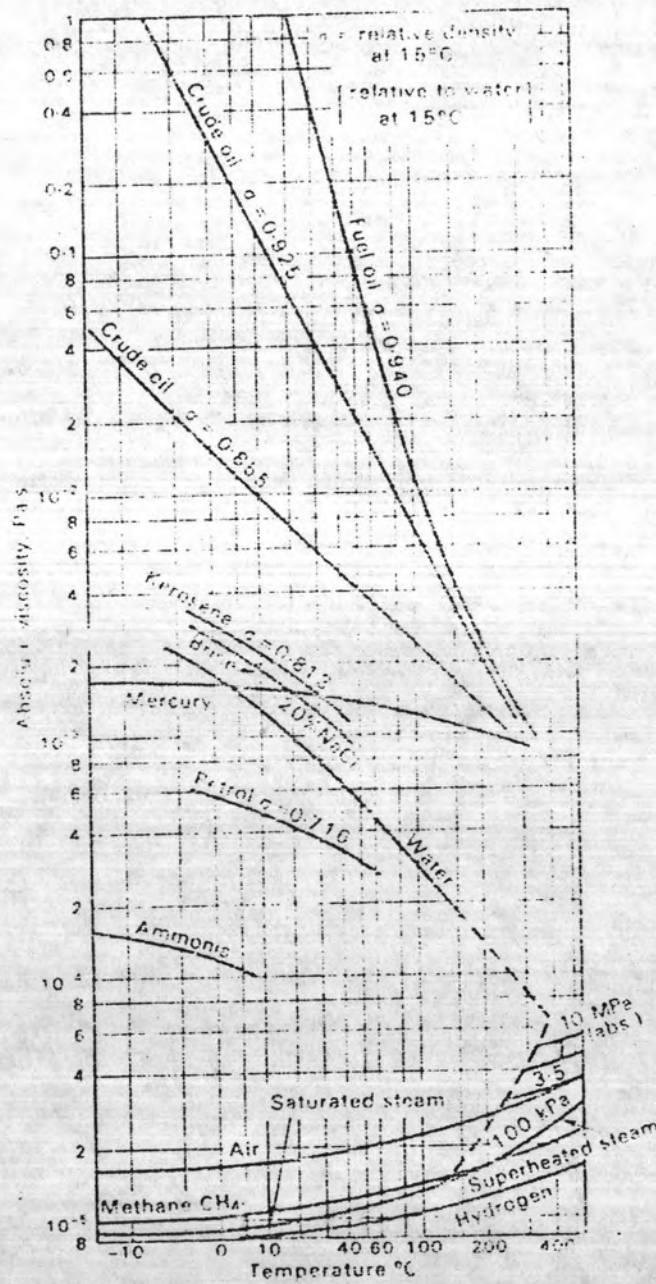
หรือ
$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.3)$$

เมื่อ τ แทนความเค้น

μ แทนสัมประสิทธิ์ความหนืด (Coefficient of viscosity) ซึ่งบางครั้งเรียกว่า ความหนืด

อุณหภูมิมีอิทธิพลต่อความหนืดมาก เพราะเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น ความหนืดของของเหลวส่วนใหญ่จะลดลง แต่ความหนืดของก๊าซจะเพิ่มขึ้น สำหรับการเคลื่อนที่ของของไหลอุดมคติ (Ideal fluid)

จะถือว่าไม่มีความหนืด ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างกราฟแสดงความหนืดของของไหลที่อุณหภูมิต่าง ๆ



รูปที่ 3.4 ความหนืดสมบูรณ์ของของไหลที่อุณหภูมิต่าง ๆ

3.2 แรงอากาศพลศาสตร์และโมเมนต์ (Aerodynamic forces and moment)

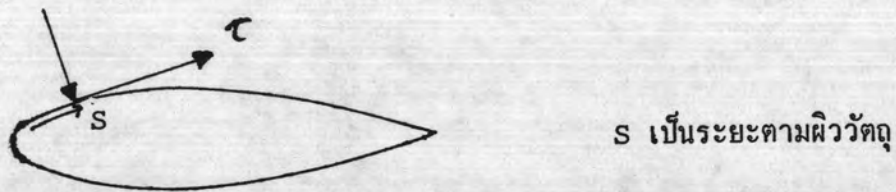
แรงอากาศพลศาสตร์และโมเมนต์ปกติจะเกิดบนวัตถุที่มีการเคลื่อนที่ในอากาศ หรือของไหล โดยเป็นผลมาจากการกระทำของ ปริมาณ 2 อย่างต่อไปนี้ (6)

1. การกระจายความดัน (Pressure distribution) บนผิววัตถุ
2. การกระจายความเค้นเฉือน (Shear stress distribution) บนผิววัตถุ

ไม่ว่ารูปร่างของวัตถุจะมีความซับซ้อนอย่างไรก็ตาม พื้นฐานเบื้องต้นของการเกิดแรงอากาศพลศาสตร์ และโมเมนต์ จะมาจากแหล่งกำเนิดทั้งสองอย่างนี้

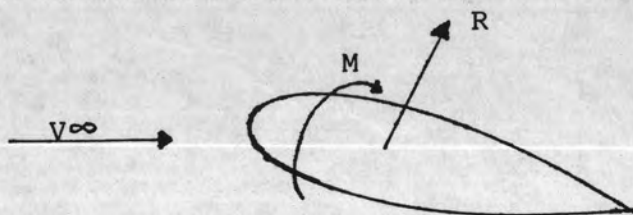
ถ้ากำหนดให้ p แทนความดันที่กระทำบนผิววัตถุ
 τ แทนความเค้นเฉือนที่กระทำบนผิววัตถุ

โดย p กระทำในลักษณะตั้งฉากกับผิววัตถุ และ τ กระทำในแนวสัมผัสกับผิววัตถุ ความเค้นเฉือนนี้เกิดเนื่องมาจากความเสียดทาน (Friction) ระหว่างวัตถุกับอากาศหรือของไหล ดังแสดงในรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 ภาพแสดงความดัน และความเค้นเฉือนบนผิววัตถุรูปปีกเฮลิคอปเตอร์

ผลจากการกระจายความดันและความเค้นเฉือนบนผิววัตถุที่เคลื่อนที่ในของไหล จะทำให้เกิดแรงลัพธ์ R และโมเมนต์ M บนตัววัตถุ ดังแสดงในรูปที่ 3.6

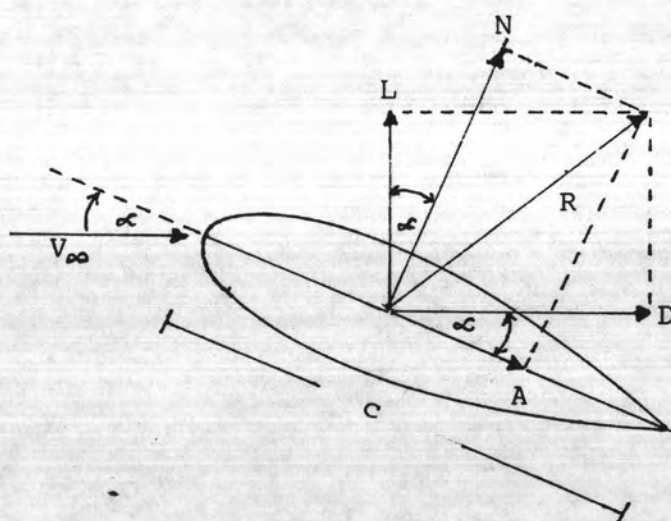


รูปที่ 3.6 ภาพแสดงแรงอากาศพลศาสตร์ลัพธ์ และโมเมนต์บนตัววัตถุ

แรงลัพธ์ R สามารถจะแยกออกเป็นองค์ประกอบได้ 2 แรง ดังแสดงในรูปที่ 3.7 ตามรูปที่ 3.6 และ 3.7 V_{∞} เป็นความเร็วลมสัมพัทธ์ (Relative velocity) เทียบกับความเร็วของตัววัตถุ แรงองค์ประกอบ 2 แรงดังกล่าวกำหนดได้ดังนี้

L = แรงแยก (Lift force) เป็นองค์ประกอบของแรง R ในทิศตั้งฉากกับความเร็ว V_{∞}

D = แรงครูด (Drag force) เป็นองค์ประกอบของแรง R ในทิศขนานกับความเร็ว V_{∞}



รูปที่ 3.7 แรงอากาศพลศาสตร์ลัพธ์ และแรงองค์ประกอบ

คอร์ด (Chord) c เป็นระยะห่างในแนวเส้นตรง จากปลายบ้านส่วนหัว (Leading edge) จนถึง ปลายแหลมส่วนหาง (Trailing edge) บางครั้งแรง R สามารถแยกออกเป็นแรงองค์ประกอบในแนวตั้งฉากและแนวขนานกับคอร์ดได้ดังในรูปที่ 3.7

N = แรงทิศตั้งฉาก (Normal force) เป็นองค์ประกอบของแรง ในทิศตั้งฉากกับแนวคอร์ด

A = แรงตามแนวแกน (Axial force) เป็นองค์ประกอบของแรง ในแนวขนานกับคอร์ด

α เป็นมุมปะทะ (Angle of attack) ซึ่งเป็นมุมระหว่างแนวคอร์ดกับแนวความเร็ว V_{∞} ดังนั้น α จึงเป็นมุมระหว่าง L กับ N และ D กับ A ด้วย ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ

ตั้งกล่าวนี้ เขียนเป็นสมการได้ว่า

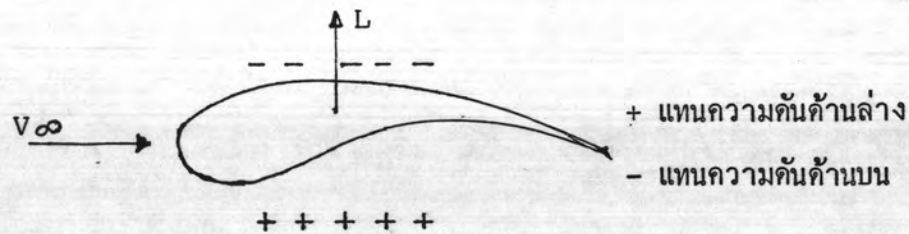
$$L = N \cos \alpha - A \sin \alpha \quad (3.4.1)$$

$$D = N \sin \alpha + A \cos \alpha \quad (3.4.2)$$

ความหมายของแรงยกและแรงครูด

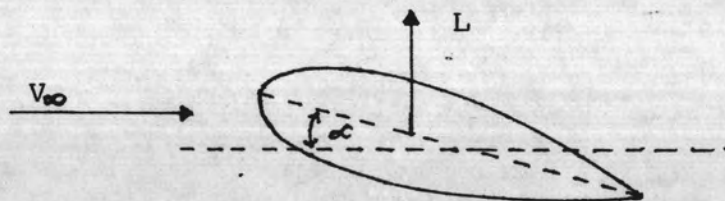
1. แรงยก (Lift force) เป็นแรงที่เกิดกับวัตถุที่วางตัวอยู่ในของไหล สาเหตุของการเกิดแรงยกอาจเป็นได้ 2 กรณี คือ (4)

ก. รูปร่างของวัตถุไม่สมมาตร (Asymmetrical shape) ทำให้เกิดความแตกต่างของความดันด้านล่างและด้านบน ก่อให้เกิดแรงยกตามทฤษฎีของเบอร์นูลลี ดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 การเปลี่ยนแปลงความดันตามสมการของเบอร์นูลลี ทำให้เกิดแรงยก

ข. รูปร่างของวัตถุสมมาตร (Symmetrical shape) แต่วางตัวทำมุมเอียงกับแนวการไหลของของไหล ดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 วัตถุรูปสมมาตรแต่วางตัวในแนวเอียง

โดยทั่วไป แรงยกจะมีทิศทางตั้งฉากกับทิศทางการไหลของของไหลเสมอ

2. แรงครูด (Drag force) เป็นปริมาณที่มีความสำคัญปริมาณหนึ่งที่เกิดจากการเคลื่อนที่สัมพันธ์กันระหว่างวัตถุและของไหล เป็นเหตุทำให้เกิดแรงชนิดหนึ่งขึ้นมาเพื่อที่จะทำให้

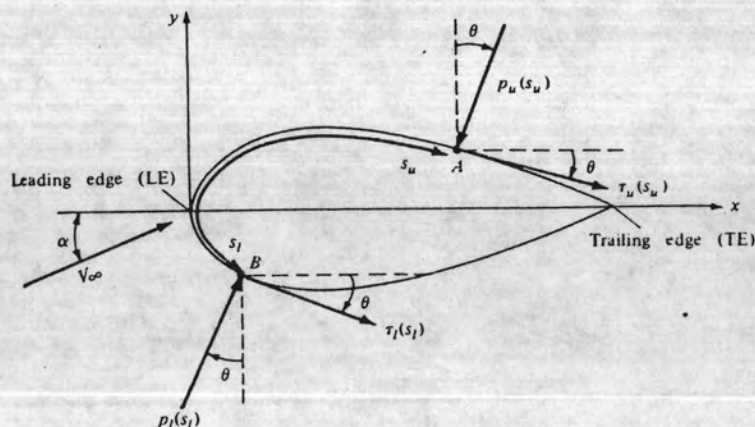
วัตถุเคลื่อนที่ไปตามทิศของของไหล แรงนี้มีทิศทางตรงข้ามกับแรงที่วัตถุกระทำต่อของไหล เรียกว่า แรงครูด

3.3 การกระจายความดันและความเค้นเฉือนที่ทำให้เกิดแรงอากาศพลศาสตร์และโมเมนต์

พิจารณารูปที่ 3.10 เส้นคอร์คอยู่ในแนวนอน โดยมีความเร็วลมสัมพัทธ์ ทำมุมเอียงกับตัววัตถุโดยมีมุมปะทะ α ระบบอยู่ในแนวโคออร์ดิเนต xy ซึ่งวางอยู่ในแนวขนาน และตั้งฉาก ตามลำดับ (6)

- s_u เป็นระยะจากขอบหน้า (Leading edge) วัดตามแนวผิวด้านบน (Upper surface) ไปยังจุด A ใด ๆ
- s_l เป็นระยะจากขอบหน้า วัดตามแนวผิวด้านล่าง (Lower surface) ไปยังจุด B ใด ๆ
- p_u, τ_u เป็นความดันและความเค้นเฉือน บนผิวด้านบนซึ่งเป็นฟังก์ชันของ s_u
- และ p_l, τ_l เป็นความดันและความเค้นเฉือนบนผิวด้านล่างซึ่งเป็นฟังก์ชันของ s_l

เพราะว่า ความดันกระทำตั้งฉากกับผิววัตถุ แนวความดันทำมุม θ เทียบกับแนวตั้ง (Vertical line) วัดในทิศตามเข็มนาฬิกา (Clockwise)

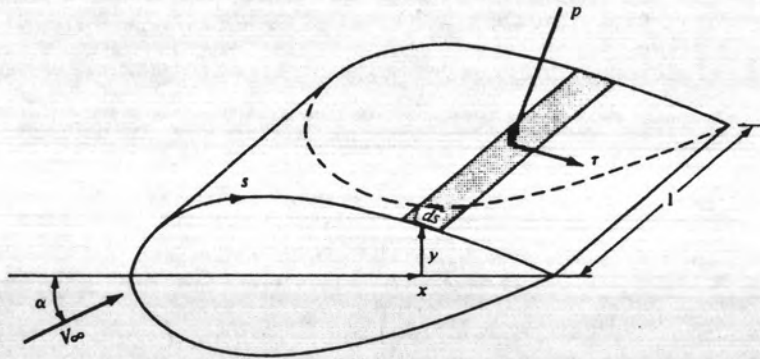


รูปที่ 3.10 ทิศทางการกระทำของความดันและความเค้นเฉือนที่กระจายตามผิววัตถุ

สมมติให้ที่จุด A ในรูปที่ 3.10 ซึ่งสอดคล้องกับรูปที่ 3.11 มีลักษณะเป็นรูปแผ่นแบนราบ ยาวสม่ำเสมอ และให้ dS เป็นพื้นที่ผิวราบ ดังที่แสดงในรูปที่ 3.11 โดย

$$dS = ds \cdot l$$

l เป็นความยาวของวัตถุรูปปีกเฮลิคอปเตอร์
 ds เป็นระยะความยาวตามผิวส่วนที่พิจารณา



รูปที่ 3.11 แรงอากาศพลศาสตร์บนส่วนย่อยเล็ก ๆ บนผิวตัวโบ

- กำหนด N' เป็นแรงทิศตั้งฉากทั้งหมด (Total normal force) บนพื้นที่เล็ก ๆ dS
 A' เป็นแรงตามแนวแกนทั้งหมด (Total axial force) บนพื้นที่เล็ก ๆ dS

จากรูปที่ 3.10 และ 3.11 แรงตามแนวตั้งฉากและแนวแกนที่กระทำบนผิวเล็ก ๆ dS ที่ด้านบน (upper) ของผิววัตถุ มีสมการดังนี้

$$dN'_u = -P_u dS_u \cos\theta - \tau_u dS_u \sin\theta \quad (3.5.1)$$

$$dA'_u = -P_u dS_u \sin\theta + \tau_u dS_u \cos\theta \quad (3.5.2)$$

และผิววัตถุด้านล่าง (lower)

$$dN'_l = P_l dS_l \cos\theta - \tau_l dS_l \sin\theta \quad (3.5.3)$$

$$dA'_l = P_l dS_l \sin\theta + \tau_l dS_l \cos\theta \quad (3.5.4)$$

แรงที่ติดตั้งฉากและแนวแกนทั้งหมด สามารถทำได้โดยการ อินทิเกรต (Integrate) สมการ (3.5.1) ถึง (3.5.4) โดยมีขอบเขตจากขอบด้านบน (LE) จนถึงขอบด้านล่าง (TE) จะได้สมการของ N' และ A' ดังนี้

$$N' = - \int_{LE}^{TE} (P_u \cos\theta + \tau_u \sin\theta) dS_u + \int_{LE}^{TE} (P_l \cos\theta - \tau_l \sin\theta) dS_l \quad (3.5.5)$$

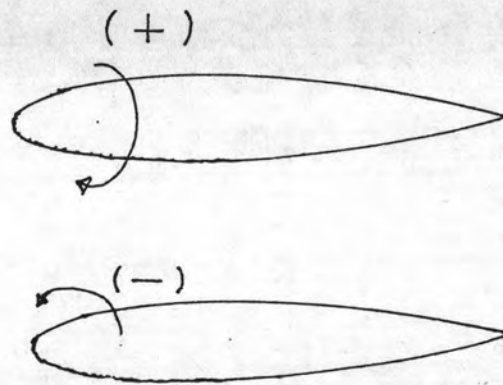
$$A' = \int_{LE}^{TE} (P_u \sin\theta + \tau_u \cos\theta) dS_u + \int_{LE}^{TE} (P_l \sin\theta + \tau_l \cos\theta) dS_l \quad (3.5.6)$$

ถ้าต้องการจะหาแรงยกหรือแรงครูด ก็สามารถทำได้โดยการนำสมการ (3.5.5) และ (3.5.6) ไปแทนในสมการ (3.4.1) และ (3.4.2)

ในการหาโมเมนต์เนื่องจากอากาศพลศาสตร์ ที่กระทำบนวัตถุ กระทำได้โดยการเลือกจุดหมุนก่อนว่า ต้องการให้หมุนรอบจุดอะไร ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะหมุนรอบขอบด้านบน (Leading edge)

- การกำหนดเครื่องหมาย
1. โมเมนต์ที่ทำให้มุม α เพิ่มขึ้น (Pitch up)
ให้มีเครื่องหมายเป็น บวก (+)
 2. โมเมนต์ที่ทำให้มุมมีแนวโน้มลดลง (Pitch down)
ให้มีเครื่องหมายเป็น ลบ (-)

ดังแสดงในรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 แสดงสัญลักษณ์เครื่องหมายเนื่องจากโมเมนต์ของอากาศพลศาสตร์

ตามรูปที่ 3.11 และ 3.12 เป็น โมเมนต์ รอบจุดขอบด้านหน้า เนื่องจากความดัน และความเค้น-เฉือนบนพื้นที่ ds ที่ผิวด้านบน คือ

$$\begin{aligned} dM'_u &= (P_u \cos \theta + \tau_u \sin \theta) x ds_u \\ &\quad + (-P_u \sin \theta + \tau_u \cos \theta) y ds_u \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

และที่ผิวด้านล่าง

$$\begin{aligned} dM'_l &= (-P_l \cos \theta + \tau_l \sin \theta) x ds_l \\ &\quad + (P_l \sin \theta + \tau_l \cos \theta) y ds_l \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

เมื่ออินทิเกรตสมการ (3.6.1) และ (3.6.2) โดยมีขอบเขตจากขอบด้านหน้า (LE) ถึงขอบด้านหลัง (TE) จะได้ค่าโมเมนต์ทั้งหมดรอบขอบด้านหน้า ดังนี้

$$M'_{LE} = \int_{LE}^{TE} [(P_u \cos \theta + \tau_u \sin \theta) X - (P_u \sin \theta - \tau_u \cos \theta) Y] dS_u$$

$$+ \int_{LE}^{TE} [(-P_l \cos \theta + \tau_l \sin \theta) X + (P_l \sin \theta + \tau_l \cos \theta) Y] dS_l$$

(3.6.3)

ในสมการ (3.5.5) (3.5.6) และ (3.6.3) θ X และ Y เป็นฟังก์ชันของ s โดย s เป็นระยะตามรูปร่างของวัตถุ ส่วน P_u P_l τ_u และ τ_l อยู่ในรูปฟังก์ชันของ s เช่นกัน ดังนั้นจึงสามารถหาค่าของ N' A' และ M'_{LE} ได้โดยการอินทิเกรตสมการ (3.5.5) (3.5.6) และ (3.6.3)

3.4 สัมประสิทธิ์ของแรงอากาศพลศาสตร์และโมเมนต์

พบว่า ยังมีปริมาณที่เป็นธรรมชาติพื้นฐานมากกว่าของแรงอากาศพลศาสตร์ และโมเมนต์ ปริมาณนั้น คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของแรง และโมเมนต์ ซึ่งปริมาณนี้ไม่มีมิติ (Dimensionless) ถ้าให้ (4)

ρ_∞ แทน ความหนาแน่นของของไหลที่อยู่ห่างวัตถุ
 V_∞ แทน ความเร็วของของไหลที่อยู่ห่างจากวัตถุ
 และนิยาม q_∞ เป็นปริมาณที่มีมิติ ซึ่งเรียกว่า ความดันพลศาสตร์ (Dynamical pressure) มีหน่วยเป็นหน่วยของความดัน

โดย $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$ (3.7)

ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงและโมเมนต์ เนื่องจากอากาศพลศาสตร์ สามารถนิยามได้ ดังนี้

ก. สัมประสิทธิ์ของแรงยก (Lift coefficient) $C_L = \frac{L}{q_\infty S}$ (3.7.1)

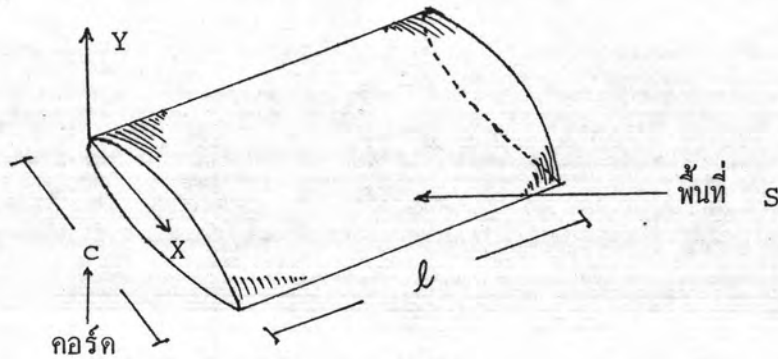
ข. สัมประสิทธิ์ของแรงครูด (Drag coefficient) $C_D = \frac{D}{q_\infty S}$ (3.7.2)

ค. สัมประสิทธิ์แรงตั้งฉาก (Normal force coefficient) $C_N = \frac{N}{q_\infty S}$ (3.7.3)

ง. สัมประสิทธิ์แรงตามแนวแกน (Axial force coefficient) $C_A = \frac{A}{q_\infty S}$ (3.7.4)

และ จ. สัมประสิทธิ์โมเมนต์ (Moment coefficient) $C_M = \frac{M}{\rho_\infty S l} \quad (3.7.5)$

โดยพื้นที่ S เป็นพื้นที่ของผิววัตถุ และ l เป็นความยาวของลำตัววัตถุที่อยู่ในของไหล
 ดังแสดงในรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 แสดงพื้นที่ S และความยาวลำตัว l

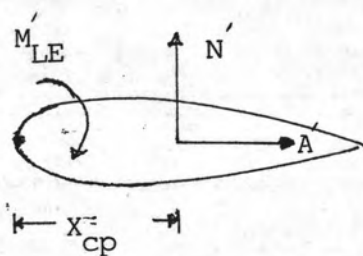
3.5 ศูนย์กลางของความดัน (Center of pressure)

จากสมการ (3.5.5) และ (3.5.6) พบว่า แรงที่ตั้งฉากและแรงตามแนวแกนเกิดจากการกระจายความดันและความเค้นเฉือนบนตัววัตถุ ซึ่งก่อให้เกิดโมเมนต์ รอบขอบด้านหน้าของวัตถุรูปปีกเฮลิคอปเตอร์ ดังในรูปที่ 3.12 ตามสมการ (3.6.3) ถ้าพิจารณาแรงอากาศพลศาสตร์ บนตัววัตถุอยู่ในรูปของแรงลัพธ์ R ซึ่งมีแรงองค์ประกอบของมัน คือ แรง N และ แรง A ตำแหน่งที่แรง R กระทำควรจะต้องตรงไหนบนตัววัตถุ คำตอบก็คือควรอยู่ที่ตำแหน่งที่ก่อให้เกิดโมเมนต์เท่ากับโมเมนต์ของน้ำหนักวัตถุ ดังนั้นแรง N' และ A' ในสมการ (3.5.5) และ (3.5.6) ซึ่งเป็นองค์ประกอบของ R เช่นเดียวกัน ก็ควรอยู่ที่ตำแหน่งที่ก่อให้เกิดโมเมนต์ รอบขอบด้านหน้าเท่ากับโมเมนต์ของแรง R ตามรูปที่ 3.14 แรง A' อยู่ในแนวเส้นคอร์ด ส่วนแรง N' อยู่ที่ตำแหน่งห่างจากขอบด้านหน้า x_{cp} ซึ่งก่อให้เกิดโมเมนต์ ดังสมการ

$$M'_{LE} = - (x_{cp}) N'$$

ดังนั้น $x_{cp} = - \frac{M'_{LE}}{N'} \quad (3.8)$

ระยะ x_{cp} พิจารณารูปที่ 3.14



รูปที่ 3.14 ศูนย์กลางของความดันบนตัววัตถุ

ตามรูปที่ 3.14 ทิศของหัวลูกศรหมุน (Curled arrow) แสดงทิศของโมเมนต์ M'_{LE} ซึ่งมีทิศเป็นทศบวก แต่แรง N' ทำให้เกิดโมเมนต์ทิศลบรอบขอบด้านหน้า ดังนั้น เครื่องหมายลบในสมการ (3.8) จึงมาจากโมเมนต์ของแรง N' นี้เอง

ในรูปที่ 3.14 และสมการ (3.8) แสดง x_{cp} ซึ่งเป็นระยะที่บอกตำแหน่งของจุดศูนย์กลางความดัน ณ ตำแหน่งนี้ โมเมนต์ของแรงอากาศพลศาสตร์ที่กระทำต่อระบบ จะมีค่าเป็นศูนย์

เมื่อพิจารณากรณีที่มุมปะทะของวัตถุมีค่าน้อยมาก จะได้ว่า

$$\sin \alpha \approx 0$$

และ $\cos \alpha \approx 1$

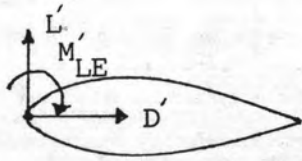
จากสมการ (3.6.3) จะได้ว่า $L' \approx N'$

ดังนั้นสมการ (3.8) จะกลายเป็น

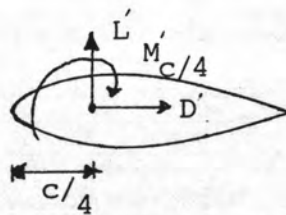
$$x_{cp} \approx - \frac{M'_{LE}}{L'} \quad (3.9)$$

พิจารณารูปที่ 3.15 ข้างล่าง ซึ่งแสดงผลจากกระทำของแรงและโมเมนต์ เนื่องจากอากาศพลศาสตร์ บนวัตถุรูปปีกเฮลิคอปเตอร์ใน 3 ลักษณะ รูปด้านซ้าย แรงลัพธ์กระทำที่ขอบด้านหน้า ก่อให้เกิดโมเมนต์ M'_{LE} จากค่าหนึ่ง รูปกลาง แรงลัพธ์กระทำที่ตำแหน่งหนึ่งใ

ของความยาวคอรัค จะให้ค่าโมเมนต์ $M'_{c/4}$ จำกัดค่าหนึ่ง ส่วนรูปขวา แรงลัพท์กระทำที่จุดศูนย์กลางความคั้น ทำให้โมเมนต์รอบจุดนี้ มีค่าเป็นศูนย์

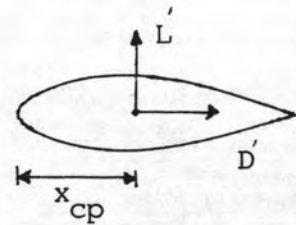


แรงลัพท์อยู่ที่ขอบด้านหน้า



แรงลัพท์อยู่ที่ตำแหน่ง

$\frac{1}{4}$ ของความยาวคอรัค



แรงลัพท์อยู่ที่จุดศูนย์

กลางความคั้น

รูปที่ 3.15 แสดง 3 ลักษณะที่เป็นผลจากการกระทำของแรงและโมเมนต์ บนวัตถุรูปปีกเฮลิคอปเตอร์

3.6 การกระจายความคั้นบนตัววัตถุที่อยู่ในของไหล

เมื่อกระแสของไหลไหลผ่านวัตถุ จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความเร็วรอบตัววัตถุ และยังผลให้เกิดการเปลี่ยนความคั้นสถิต (Static pressure) รอบตัววัตถุด้วย ตามทฤษฎีของเบอร์นูลลี (Bernoulli's Theorem) ปกติการแสดงความคั้นบนผิววัตถุ จะแสดงในเทอมของสัมประสิทธิ์ความคั้นซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้ (3)

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty v^2} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 \quad (3.10)$$

โดย

- C_p แทนสัมประสิทธิ์ความคั้น
- p แทนความคั้นสถิตที่จุดพิจารณา
- p_∞ แทนความคั้นสถิตที่ระยะห่างจากวัตถุ
- v แทนความเร็วที่จุดพิจารณา
- v_∞ แทนความเร็วที่ระยะห่างจากวัตถุ

จากสมการ (3.70) จะให้ความหมายว่า

1. ที่จุดนิ่ง (Stagnation point) หรือ ตำแหน่งที่ความเร็วของของไหลมีค่าเป็นศูนย์ ณ ตำแหน่งนี้จะให้ค่า C_p สูงสุดเท่ากับ 1 ซึ่งค่า C_p ค่านี้ จะเป็นค่าที่สูงที่สุด และจะไม่สูงกว่านี้อีก

2. ค่าสัมประสิทธิ์ความดันเป็นบวกแสดงว่าค่าความดันที่ตำแหน่งพิจารณา มีค่าสูงกว่าความดันของกระแสอิสระ (Free stream) ของของไหลที่ระยะห่างจากวัตถุ แต่ค่าสัมประสิทธิ์ความดันเป็นลบ แสดงว่าความดันที่จุดนั้นมีค่าน้อยกว่าความดันของกระแสอิสระ ทำให้ตำแหน่งนั้นเป็นตำแหน่งที่เรียกว่า ตำแหน่งดูด (Suction)

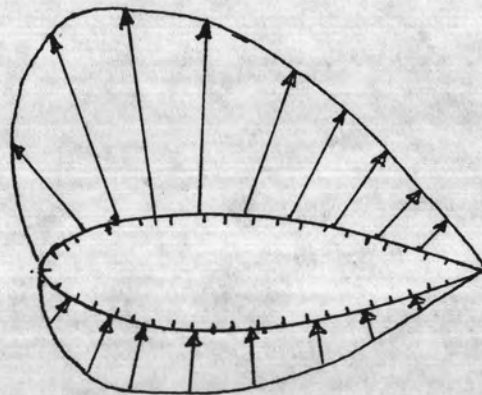
การเขียนหัวลูกศรแทนทิศของความดันที่กระทำบนวัตถุที่วางในของไหลมี 2 แบบ คือ

ก. ถ้าสัมประสิทธิ์ความดันเป็นบวก จะใช้หัวลูกศรชี้เข้า (Pointing inward)

ข. ถ้าสัมประสิทธิ์ความดันเป็นลบ จะใช้หัวลูกศรชี้ออก (Pointing outward) ซึ่ง

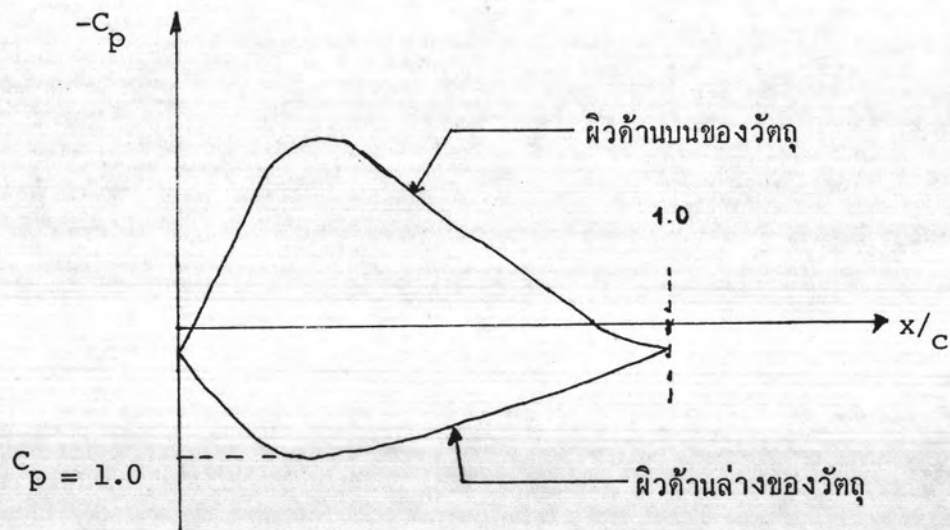
จะเป็นตำแหน่งดูด

ดังแสดงในรูปที่ 3.16



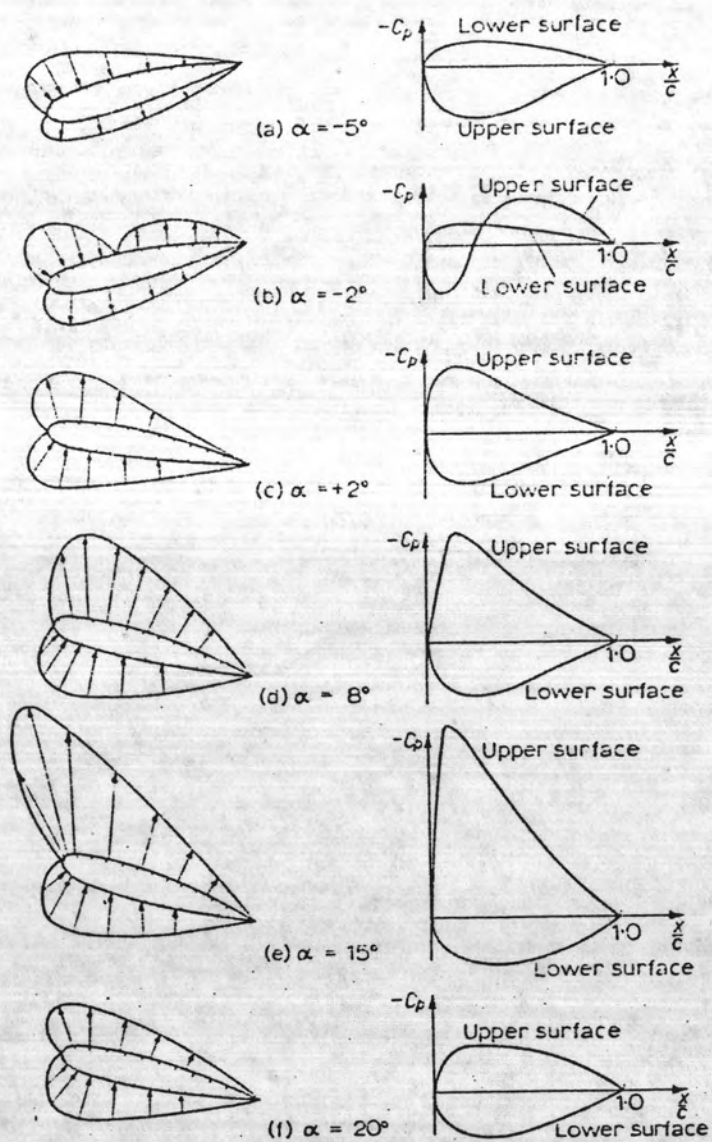
รูปที่ 3.16 แสดงการกระจายความดัน

จากรูปที่ 3.16 ถ้าต้องการเขียนกราฟแสดงการกระจายความดัน สามารถทำได้โดยเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ความดันกับ x/c โดย x แทนระยะห่างตามแนวคอร์ดจากขอบด้านหน้า เครื่องหมายของ C_p ถ้าเป็นลบให้เขียนไว้เหนือแกนของกราฟ ดังแสดงในรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า C_p และ x/c

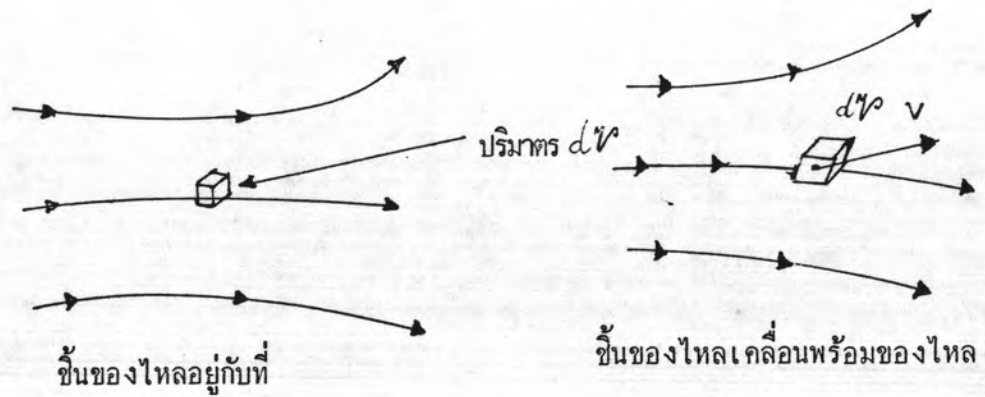
การกระจายความดันและกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง C_p และ x/c ที่มุมปะทะบางค่า ดังแสดงในรูปที่ 3.18



รูปที่ 3.18 แสดงการกระจายความดันที่มุมปะทะบางค่า

3.7 หลักพื้นฐานและสมการเกี่ยวกับของไหล

สนามของของไหลปกติจะแทนด้วย เส้นกระแส (streamlines) ดังแสดงในรูปที่ 3.19

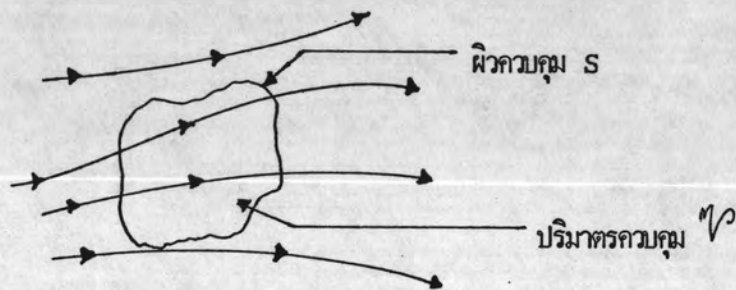


รูปที่ 3.19 ชั้นของไหลในสนามของไหล

ในสนามของไหลจะมีชิ้นส่วน (fluid element) ของของไหลอยู่โดยมีปริมาตรเท่ากับ dV ในปริมาตรดังกล่าวจะบรรจุด้วยโมเลกุลของของไหลเป็นจำนวนมาก จนทำให้มีเนื้อต่อเนื่องกัน และมีความกลมกลืนกับของของไหลนั้น ชิ้นส่วนเล็ก ๆ นี้ อาจจะอยู่กับที่ โดยมีของไหลเคลื่อนที่หรืออาจจะเคลื่อนที่ตามแนวเส้นกระแสด้วยความเร็วเท่ากับความเร็วของของไหล โดยทั่วไปแล้ว หลักพื้นฐานทางฟิสิกส์ของของไหลจะมีลักษณะเช่นนี้ และนำไปสู่สมการเกี่ยวกับของไหล

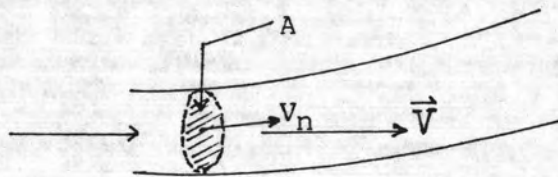
สมการต่อเนื่อง (Continuity equation)

ในการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของของไหล จะพิจารณาปริมาตรของไหลที่จำกัดค่าหนึ่งซึ่งอยู่ในสนามของไหล เรียกว่า ปริมาตรควบคุม (control volume) ดังในรูปที่ 3.20



รูปที่ 3.20 แสดงปริมาตรควบคุมและผิวควบคุมของของไหล

เป็นปริมาตรที่อยู่กับที่โดยมีของไหลเคลื่อนผ่าน และมีปริมาตรเท่ากับ V ผิดของ ปริมาตรที่เรียกว่า ผิดควบคุม มีพื้นที่เท่ากับ S ปริมาตรทั้งหมดมีค่าคงที่เมื่อเวลาผ่านไป ส่วนมวล ของไหลที่บรรจุอยู่ในปริมาตรนี้ จะเปลี่ยนแปลงตามเวลา พิจารณารูปที่ 3.21 ข้างล่าง



รูปที่ 3.21 แสดงการไหลของมวลผ่านพื้นที่ A

A เป็นพื้นที่เล็ก ๆ ที่มีของไหลซึ่งมีความเร็ว \vec{V} เคลื่อนผ่านอย่างสม่ำเสมอ ตามรูป ในช่วงเวลา dt ของไหลจะเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $v dt$ ขณะที่พื้นที่ A จะเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $v_n dt$ โดย v_n เป็นความเร็วที่ตั้งฉากกับพื้นที่ A และเป็นองค์ประกอบของความเร็ว \vec{V} ทำให้เกิดปริมาตรของไหล ดังนี้

$$\text{ปริมาตร} = (v_n dt) A \quad (3.11)$$

มวลที่บรรจุในปริมาตรดังกล่าว โดยของไหลมีความหนาแน่น ρ จะมีค่าเท่ากับ

$$\text{มวล (m)} = \rho (v_n dt) A \quad (3.12)$$

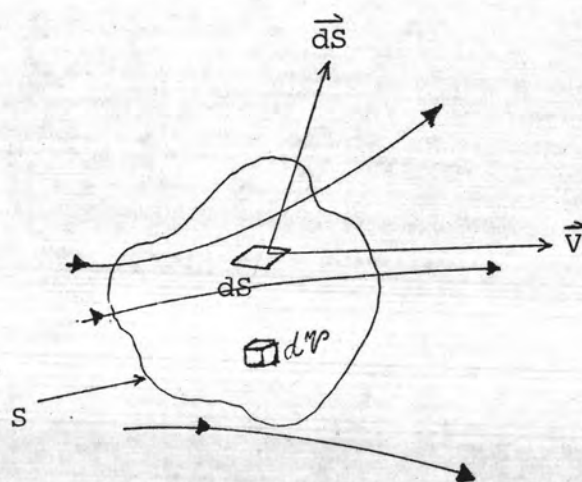
มวลส่วนนี้จะเคลื่อนผ่านพื้นที่ A ในช่วงเวลา dt ทำให้การไหลของมวล (mass flow) ผ่านพื้นที่ A ต่อหนึ่งหน่วยเวลา จะมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{\rho (v_n dt) A}{dt} \\ \dot{m} &= \rho v_n A \end{aligned} \quad (3.13)$$

จากนิยามฟลักซ์ของมวล (mass flux) คือ อัตราการไหลของมวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ ดังนั้น จากสมการ (3.12) จะหาค่าฟลักซ์ของมวล ได้ดังนี้

$$\text{ฟลักซ์ของมวล} = \frac{\dot{m}}{A} = \rho v_n \quad (3.14)$$

เมื่อพิจารณาปริมาตรของไหลในสนามของไหลดังรูปที่ 3.22



รูปที่ 3.22 แสดงจุดบนผิวปริมาตรที่มีพื้นที่ ds และความเร็ว \vec{v}

ซึ่งมีจุดบนผิวปริมาตรที่มีความเร็ว \vec{v} และมีเวกเตอร์พื้นที่เท่ากับ \vec{ds} จากที่กล่าวมาข้างต้น พอสรุปได้ว่า

$$\text{อัตราการไหลออกของมวลสุทธิผ่านพื้นที่ } S = \text{อัตราการลดยของมวลภายในปริมาตร } V \quad (3.15)$$

ถ้าให้ B และ C แทนข้อความทางซ้ายและขวาตามลำดับของสมการ จะได้ว่า B เท่ากับ C จากรูปที่ 3.22 และสมการ (3.13) จะได้อัตราการไหลของมวลผ่านพื้นที่ ds คือ

$$\rho v_n ds = \rho \vec{v} \cdot \vec{ds} \quad (3.17)$$

ความหมายของ $\rho \vec{v} \cdot \vec{ds}$ ถ้ามีเครื่องหมายบวก แสดงว่า ของไหลไหลออก (outflow) แต่ถ้ามีเครื่องหมายเป็นลบ แสดงว่าของไหลไหลเข้า (inflow) ดังนั้นอัตราการไหลออกสุทธิของของไหลในผิวปริมาตร S คือ B ดังที่กล่าวมาแล้วจะมีค่าเท่ากับ

$$B = \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (3.19)$$

เมื่อพิจารณาปริมาตรย่อยเล็ก ๆ dV มวลที่บรรจุอยู่ภายใน คือ ρdV ดังนั้น มวลภายในปริมาตรทั้งหมด V จะมีค่าเท่ากับ

$$\oint_V \rho dV$$

จะได้ว่าอัตราการเพิ่มของมวลภายในปริมาตร V คือ

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho dV$$

ทำนองเดียวกัน อัตราการลดของมวลภายในปริมาตร V จะมีค่าเท่ากับ

$$-\frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho dV = c \quad (3.20)$$

เมื่อแทนสมการ (3.19) และสมการ (3.20) ในสมการ (3.15) จะได้ว่า

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho dV$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho dV + \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.21)$$

สมการ (3.21) คือผลลัพธ์สุดท้ายที่แสดงหลักทางฟิสิกส์ที่ว่ามวลอนุรักษ์ (conservative of mass) เมื่อพิจารณาเทียบกับปริมาตร V ข้างต้น เรียกสมการ (3.21) ว่า สมการต่อเนื่อง (continuity equation) ซึ่งอยู่ในรูปของอินทิกรัล (integral form)

สมการ (3.21) สามารถจะลดรูปให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ได้ เพราะจากทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem) ซึ่งมีว่า

$$\oint_S (\rho \vec{v}) \cdot d\vec{s} = \oint_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad (3.22)$$

เมื่อแทนสมการ (3.22) ในสมการ (3.21) จะได้ว่า

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0$$

จากสมการที่แสดงข้างบนนี้ ให้ความหมายว่า ถ้าปริมาตรที่สนใจ มีค่าน้อยมากจนเกือบใกล้เคียงศูนย์ หรือ เปรียบเสมือนเป็นจุดสมการที่กล่าวนี้ จะเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.23)$$

สมการ (3.23) บอกให้ทราบว่า มวลไม่สามารถจะสร้างหรือทำลายได้

สมการโมเมนตัม (Momentum equation)

กฎข้อที่ 2 ของนิวตันเขียนไว้ว่า

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (3.24)$$

โดยที่ \vec{F} คือแรงที่กระทำต่อมวล m ทำให้มีความเร่ง \vec{a} หรือเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ว่า

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (3.25)$$

ในสมการ (3.25) $m\vec{v}$ คือโมเมนตัมของมวล m

เมื่อประยุกต์สมการ (3.25) ใช้ในรูปที่ 3.22 เพื่อวัตถุประสงค์ที่จะหาความสัมพันธ์ทางด้านซ้ายและขวาของสมการ (3.25) ในเทอมของความดัน (p) ความหนาแน่น (ρ) และความเร็ว \vec{v} เป็นต้น

แรง \vec{F} ในสมการ (3.25) ซึ่งกระทำต่อของไหลที่ไหลผ่านปริมาตรดังในรูปที่ 3.22 มีสาเหตุมาจาก 2 แหล่ง คือ

1. แรงที่วัตถุ (body force) เช่น อาจเป็นแรงเนื่องจากสนามโน้มถ่วง สนามแม่เหล็กไฟฟ้า หรือแรงอื่น ๆ ซึ่งกระทำที่ระยะต่าง ๆ ของไหล
2. แรงที่ผิว (surface force) เป็นแรงเนื่องจากความดันหรือความเค้นเฉือน

บนผิววัตถุ

ถ้าให้ \vec{F} แทนแรงที่วัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลสุทธิที่กระทำต่อของไหลที่บรรจุใน V ดังนั้นแรงที่วัตถุที่กระทำบนปริมาตรย่อย dV คือ

$$\rho \vec{f} dV$$

และแรงที่วัตถุทั้งหมดที่กระทำต่อของไหลในปริมาตร V จะเขียนได้ว่า

$$\text{แรงที่วัตถุ} = \iiint_V \rho \vec{f} dV \quad (3.26)$$

ขณะที่แรงที่ผิวเนื่องจากความดันที่กระทำบนพื้นที่ย่อย dS คือ

$$- p \vec{dS}$$

โดยเครื่องหมายลบ แสดงว่า แรงที่กระทำชี้ที่ตรงข้ามกับเวกเตอร์พื้นที่ \vec{dS} ซึ่งจะได้ว่า แรงเนื่องจากความดันทั้งหมดที่กระทำบนผิวปริมาตร V คือ

$$\text{แรงเนื่องจากความดัน} = - \iint_S p \vec{dS} \quad (3.27)$$

ในของไหลที่มีความหนืด ความเค้น จะมีผล ถ้าให้ $\vec{F}_{\text{หนืด}}$ แทนแรงหนืดทั้งหมดที่กระทำต่อผิวของไหล ทำให้เขียนสมการ (3.25) ด้านซ้ายได้ว่า

$$\vec{F} = \iiint_V \rho \vec{f} dV - \iint_S p \vec{dS} + \vec{F}_{\text{หนืด}} \quad (3.28)$$

พิจารณาด้านขวาของสมการ (3.28) ซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของของไหลที่เคลื่อนผ่านปริมาตร V ในรูปที่ 3.22 โดยมาจาก 2 เทอมต่อไปนี้เป็น

การไหลออกสุทธิของโมเมนตัมของปริมาตร V ผ่านพื้นที่ $S = G$

และ อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเนื่องจากการไหลที่ไม่สม่ำเสมอ = H
ในปริมาตร V

จากอัตราการไหลของมวลผ่านพื้นที่ dS คือ $(\rho \vec{v} \cdot \vec{dS})$ ดังนั้น การไหลของโมเมนตัมต่อหนึ่งหน่วยเวลาผ่านพื้นที่ dS จะเขียนได้ว่า

$$(\rho \vec{v} \cdot \vec{dS}) \vec{v}$$

เพราะฉะนั้นการไหลสุทธิของโมเมนตัม ออกจากปริมาตรผ่านพื้นที่ S คือ

$$G = \oint_S (\rho \vec{v} \cdot d\vec{s}) \vec{v} \quad (3.29)$$

สมการ (3.29) ถ้ามีเครื่องหมายบวก แสดงว่า อัตราการไหลของมวลจะไหลออกจากปริมาตร แต่ถ้าเป็นลบ แสดงว่า อัตราการไหลของมวล จะไหลเข้าปริมาตร

เมื่อพิจารณาโมเมนต์ของของไหล ในปริมาตรเล็ก ๆ dV ตามรูปที่ 3.22 คือ

$$(\rho dV) \vec{v}$$

ดังนั้น โมเมนต์ทั้งหมด ภายในปริมาตร V จะมีค่าเท่ากับ

$$\oint_V \rho \vec{v} dV$$

เพราะฉะนั้นอัตราการเปลี่ยนโมเมนต์เนื่องจากการไหลไม่สม่ำเสมอ คือ

$$H = \frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho \vec{v} dV \quad (3.30)$$

เมื่อรวมสมการ (3.29) และ (3.30) จะได้ อัตราการเปลี่ยนโมเมนต์ทั้งหมดของของไหล ที่เป็นไปตามสมการ (3.25) ดังนี้

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = G+H = \oint_S (\rho \vec{v} \cdot d\vec{s}) \vec{v} + \frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho \vec{v} dV \quad (3.31)$$

จากสมการ (3.28) และ (3.31) จะสามารถเขียนสมการ (3.25) ได้ใหม่ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V \rho \vec{v} dV + \oint_S (\rho \vec{v} \cdot d\vec{s}) \vec{v} = \oint_S \rho d\vec{s} + \oint_V \rho dV + \vec{F} \quad \text{หนัก} \quad (3.32)$$

สมการ (3.32) เป็นสมการโมเมนต์ที่อยู่ในรูปของอินทิกรัล เช่นเดียวกับ สมการต่อเนื่อง สามารถที่จะลดรูปของสมการ (3.32) ให้อยู่ในรูปของสมการของอนุพันธ์ย่อยได้ จาก ทฤษฎีเกรเดียนท์ (gradient theorem) สามารถเขียนสมการ (3.27) ในรูปต่อไปนี้ ได้

$$-\oint_S p \vec{dS} = -\oint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} p d\mathcal{V} \quad (3.33)$$

เนื่องจากปริมาตรในรูปที่ 2.15 อยู่กับที่ ทำให้อนุพันธ์เทียบกับเวลาในสมการ (3.32) เขียนอยู่ในเครื่องหมายอินทิกรัลได้ และถ้าพิจารณาสมการ (3.32) ในระบบแกนตั้งฉาก (Cartesian coordinates) ตามแนวแกน x จะได้ว่า

$$\oint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{dS}) u = - \oint_{\mathcal{V}} \frac{\partial p}{\partial x} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{V}} \rho f_x d\mathcal{V} + (F_x)_{\text{หน้า}} \quad (3.34)$$

เมื่อพิจารณาเทอมที่สองทางด้านซ้ายของสมการ (3.34) และใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ จะได้ว่า

$$\oint_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{dS}) u = \oint_S (\rho u \vec{v}) \cdot \vec{dS} = \oint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{v}) d\mathcal{V} \quad (3.35)$$

แทนสมการ (3.35) ในสมการ (3.34) จะได้ว่า

$$\oint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{v}) + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x - (F_x)_{\text{หน้า}} \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (3.36)$$

เทอม (\mathcal{F}_x) หนัก เป็นองค์ประกอบตามแนว x ของ (F_x) หนัก ที่อยู่ในเครื่องหมายอินทิกรัล ด้วยเหตุผลเช่นเดียวกับสมการ (3.23) เขียนสมการ (3.36) ใหม่ได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + (\mathcal{F}_x) \text{ หนัก} \quad (3.36.1)$$

ทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาองค์ประกอบของสมการ (3.34) ในแนวแกน y และ z จะได้สมการ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + (\mathcal{F}_y) \text{ หนัก} \quad (3.36.2)$$

$$\text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \nabla \cdot (\rho w \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + (\mathcal{F}_z) \text{ หนัก} \quad (3.36.3)$$

โดย v และ w เป็นความเร็วของของไหลในแนว y และ z

สมการ (3.36.1) และ (3.36.2) และ (3.36.3) เป็นสมการโมเมนตัม สำหรับของไหลที่มีความหนืด (viscous flow) เรียกสมการดังกล่าวนี้ว่า สมการเนเวียร์-สโตกซ์ (Navier-Stokes equation)

สำหรับของไหลที่ไม่มี ความหนืด (inviscid flow) และมีการไหลอย่างสม่ำเสมอ (steady) สมการ (3.32) จะเขียนได้เป็น

$$\oint_S (\rho \vec{v} \cdot d\vec{s}) \vec{v} = - \oint_S p d\vec{s}$$



และเมื่อพิจารณาในแนว x y และ z จะได้สมการ ดังนี้

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{v}) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.37.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho v \vec{v}) = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.37.2)$$

และ
$$\vec{\nabla} \cdot (\rho w \vec{v}) = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.37.3)$$

สมการ (3.37.1) (3.37.2) และ (3.37.3) เป็นสมการโมเมนตัมสำหรับของไหลที่ไม่มี ความหนืด เรียกสมการดังกล่าวว่า สมการยูเลอร์ (Euler equation)

สมการพลังงาน (Energy equation)

สำหรับการไหลที่อัดไม่ได้ (incompressible flow) ค่าความหนาแน่นจะคงที่ ตัวแปรที่เกี่ยวข้อง จะมีค่า p และ \vec{v} ทำให้สมการต่อเนื่อง สมการโมเมนตัมที่พิจารณาในตอนแรก อยู่ในเทอมของ p และ \vec{v} แต่สำหรับการไหลที่อัดได้ (compressible flow) ค่าความหนาแน่น ρ จะมีการเปลี่ยนแปลง ทำให้มีตัวแปรเพิ่มขึ้นอีกตัวคือ ρ สมการพื้นฐานข้างต้น จึงต้องมี ρ เกี่ยวข้องด้วย นอกจากสมการที่กล่าวแล้วยังมีความสัมพันธ์พื้นฐานที่สำคัญอีกอย่างคือ สมการพลังงานซึ่งจะพิจารณาในหัวข้อนี้ ในกระบวนการจะมีตัวแปรที่สำคัญ คือ พลังงานภายในต่อหนึ่งหน่วยมวล e และอุณหภูมิ T

ในการไหลแบบอัดได้ กฎเทอร์โมไดนามิกส์ที่มีความจำเป็นต่อกระบวนการ คือ กฎข้อที่ 1 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระบบ (system) กับสิ่งแวดล้อม (Surrounding) ระบบในที่นี้หมายถึงสสารที่บรรจุอยู่ในอาณาบริเวณปิด (closed boundary) สสารก็คือ โมเลกุลหรืออะตอมของของไหลนั่นเอง

ในระบบจะมีพลังงานจำนวนหนึ่ง ถ้าระบบมีมวลหนึ่งหน่วยพลังงานดังกล่าว คือ e และถ้าให้ความร้อน δq แก่ระบบจากสิ่งแวดล้อม จะทำให้ระบบทำงานเท่ากับ δw เป็นผลให้

เกิดการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในระบบจำนวนหนึ่ง de ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ออกมาดังนี้

$$\delta q + \delta W = de \quad (3.38)$$

สมการ (3.38) ที่กล่าวนี้เรียกว่า กฎเทอร์โมไดนามิกส์ข้อที่ 1

จากรูปที่ 3.22 ถ้าประยุกต์กฎข้อที่ 1 ให้กับปริมาตรที่อยู่กับที่ โดยมีของไหลไหลผ่าน และกำหนดให้

$$\begin{aligned} B_1 &= \text{อัตราความร้อนที่ให้แก่ของไหลในปริมาตรจากสิ่งแวดล้อม} \\ B_2 &= \text{อัตราการทำงานของของไหลภายในปริมาตร} \\ B_3 &= \text{อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานของของไหลเมื่อไหลผ่านปริมาตร} \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$B_1 + B_2 = B_3 \quad (3.39)$$

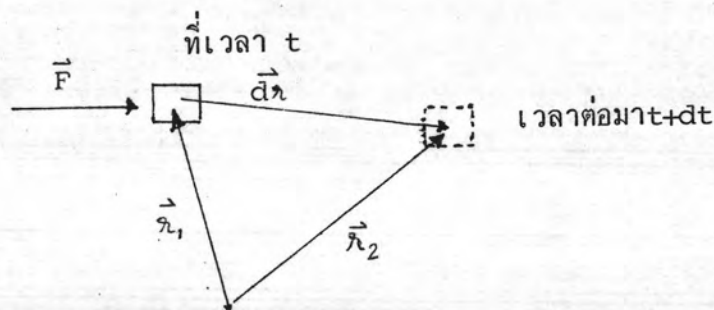
พิจารณาอัตราความร้อนที่ให้หรือออกจากของไหล ซึ่งมองในรูปความร้อนเชิงปริมาตร (Volumetric heating) ของของไหลภายในปริมาตร โดยความร้อนอาจจะมาจากการ ดูดกลืนรังสี จากภายนอกหรือ ระบบอาจจะปลดปล่อยมาเอง อัตราความร้อนเชิงปริมาตรนี้ เมื่อคิดต่อหนึ่งหน่วยมวล จะกำหนดเป็น \dot{q} จากรูปที่ 3.22 มวลภายในปริมาตร dV เท่ากับ ρdV ดังนั้น อัตราความร้อนที่ให้แก่มวลส่วนนี้ จะเท่ากับ $\dot{q} (\rho dV)$ เมื่อรวมทั้งปริมาตรทั้งหมด จะได้ว่า

$$\text{อัตราความร้อนเชิงปริมาตร} = \iiint_V \dot{q} \rho dV \quad (3.40)$$

ถ้าเป็นของไหลที่มีความหนืด ความร้อนที่ให้แก่ปริมาตรจะมาจากการนำความร้อนด้วย กำหนดให้ $\dot{Q}_{\text{หนืด}}$ เป็นความร้อนที่มีผลมาจากความหนืด ดังนั้น

$$B_1 = \oint_C \mathbf{q} \cdot d\mathbf{r} + Q_{\text{พื้นผิว}} \quad (3.41)$$

สำหรับอัตราการทำงานของของไหลภายในปริมาตร พิจารณาได้ดังนี้ รูปที่ 3.23



รูปที่ 3.23 แสดงการทำงานของแรง \vec{F} บนวัตถุ

ให้ \vec{F} เป็นแรงกระทำบนวัตถุ ตำแหน่งของวัตถุอยู่ระยะ \vec{r}_1 จากจุดกำเนิด เมื่อเลื่อนวัตถุจากตำแหน่ง \vec{r}_1 ไปอยู่ที่ \vec{r}_2 ในช่วงเวลา dt จะได้การขจัดเท่ากับ $d\vec{r}$ จากนิยามของงานที่ทำงานบนวัตถุ คือ $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ ดังนั้น

$$\text{อัตราการทำงานบนวัตถุ} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt}$$

หรือ

$$= \vec{F} \cdot \vec{V}$$

พิจารณาพื้นที่ dS บนผิวปริมาตรในรูปที่ 3.22 แรงเนื่องจากความดันที่กระทำบนพื้นที่ $-pd\vec{S}$ และจากผลอันนี้ ทำให้สามารถหาอัตราการทำงานบนของไหลผ่านพื้นที่ dS ด้วยอัตราเร็ว \vec{V} คือ $(-pd\vec{S}) \cdot \vec{V}$ เมื่อคิดทั่วพื้นผิวทั้งหมด จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{อัตราการงานบนของไหลในปริมาตร} &= - \oint_S (\rho \vec{d}\vec{s}) \cdot \vec{v} \quad (3.42) \\ \text{เนื่องจากความดันบนพื้นที่ } S \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาปริมาตร dV ตามในรูปที่ 3.22 และถ้า \vec{F} เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวล จะได้ว่าอัตราการงานบนปริมาตรเนื่องจากแรง \vec{F} คือ $(\rho \vec{F} dV) \cdot \vec{v}$ เมื่อคิดหัวปริมาตร V จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{อัตราการงานบนของไหลในอัตรา } V &= \oint_V (\rho \vec{F} dV) \cdot \vec{v} \\ \text{เนื่องจากแรง } \vec{F} \end{aligned}$$

นอกจากนี้ ถ้าของไหลมีความหนืด แรงเนื่องจากความเค้นเฉือนที่กระทำบนผิวปริมาตร จะทำให้เกิดอัตราการงานเท่ากัน $\dot{W}_{\text{หนืด}}$ ดังนั้นอัตราการงานทั้งหมดบนของไหล ภายในปริมาตร V คือ B_2 ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$B_2 = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{d}\vec{s} + \oint_V \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) dV + \dot{W}_{\text{หนืด}} \quad (3.43)$$

สำหรับพลังงานภายในปริมาตรตามกฎเทอร์โมไดนามิกส์ข้อที่ 1 คือ e ซึ่งเป็นพลังงานเนื่องจากการเคลื่อนที่แบบสุ่ม ของอะตอมและโมเลกุลภายในระบบ เนื่องจากของไหลภายในปริมาตร มีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว \vec{v} จึงมีพลังงานจลน์เกี่ยวข้องด้วย เมื่อคิดเทียบต่อหนึ่งหน่วยมวล จะได้พลังงานจลน์มีค่าเท่ากับ $v^2/2$ ดังนั้นพลังงานทั้งหมดของของไหลภายในปริมาตรเท่ากับ $e + v^2/2$

เพราะว่า B_3 เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานทั้งหมดที่เกิดกับของไหลที่ไหลผ่านปริมาตรตามในรูปที่ 3.22 เมื่อพิจารณาอัตราการไหลของมวลผ่านพื้นที่ dS จะได้ว่า มวลที่ไหลผ่าน dS คือ $\rho \vec{v} \cdot \vec{d}\vec{s}$ และอัตราการไหลของมวลทั้งหมดผ่านพื้นที่ dS จะมีค่าเท่ากับ

$(\rho \vec{v} \cdot d\vec{s})(e + v^2/2)$ เมื่อคิดทั่วผิวทั้งหมด จะได้ว่า

$$\text{อัตราการไหลสุทธิของพลังงานผ่านพื้นที่ } S = \oint_S (\rho \vec{v} \cdot d\vec{s})(e + v^2/2) \quad (3.44)$$

เนื่องจากการไหลเป็นแบบไม่สม่ำเสมอ (unsteady) ขณะหนึ่งพลังงานทั้งหมดที่บรรจุในปริมาตร \mathcal{V} คือ $\rho(e + v^2/2)d\mathcal{V}$ ดังนั้นพลังงานทั้งหมดที่ปริมาตร \mathcal{V} ขณะหนึ่งคือ

$$\oint_{\mathcal{V}} \rho(e + v^2/2) d\mathcal{V}$$

และเมื่อคิดเทียบกับเวลาใดๆ จะได้ว่า

$$\text{อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานทั้งหมดภายใน ปริมาตร } \mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\mathcal{V}} \rho(e + v^2/2) d\mathcal{V} \quad (3.45)$$

จากสมการ(3.43)และ(3.44) ทำให้ได้ค่า B_3 ดังนี้

$$B_3 = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\mathcal{V}} \rho(e + v^2/2) d\mathcal{V} + \oint_S (\rho \vec{v} \cdot d\vec{s})(e + v^2/2) \quad (3.46)$$

จากสมการ(3.39) ซึ่งแสดงหลักการคงที่ของพลังงาน จะได้ว่า

$$\oint_{\mathcal{V}} \dot{q} \rho d\mathcal{V} + \dot{Q}_{\text{หน้าที่}} - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} + \oint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{E} \cdot \vec{v}) d\mathcal{V} + \dot{W}_{\text{หน้าที่}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho (e + v^2/2) dV + \iint_S \rho (e + v^2/2) \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (3.47)$$

สมการ(3.47) แสดงสมการพลังงานในรูปเครื่องหมายอินทิกรัล ซึ่งเป็นการประยุกต์กฎเทอร์โมไดนามิกส์ข้อ 1 ใช้กับการไหลของของไหล

เมื่อใช้ทฤษฎีเคอเวอ์เจนซ์ กับอินทิกรัลเชิงผิวในสมการ(3.47) แล้วพิจารณาในกรณีปริมาตรใกล้ศูนย์ จะสามารถเปลี่ยนสมการ(3.47)อยู่ในรูปดังนี้ได้

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho (e + v^2/2)] + \vec{\nabla} \cdot [\rho (e + v^2/2) \vec{v}] = \rho \dot{q} - \vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) + \dot{Q}'_{\text{หนึ่ด}} + \dot{W}'_{\text{หนึ่ด}} \quad (3.48)$$

โดย $\dot{Q}'_{\text{หนึ่ด}}$ และ $\dot{W}'_{\text{หนึ่ด}}$ แทนอัตราการทำงาน เนื่องจากความหนึ่ดในรูปอินทิแกรนด์ของอินทิกรัลเชิงปริมาตร

สำหรับกรณีการไหลแบบสม่ำเสมอ (steady) ซึ่งไม่มีความหนึ่ด ไม่มีความร้อน และปราศจากแรงกระทำต่อวัตถุ \vec{f} เกี่ยวข้อง สมการ(3.47) และ(3.48) จะกลายเป็น

$$\iint_S \rho (e + v^2/2) \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \iint_S p \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

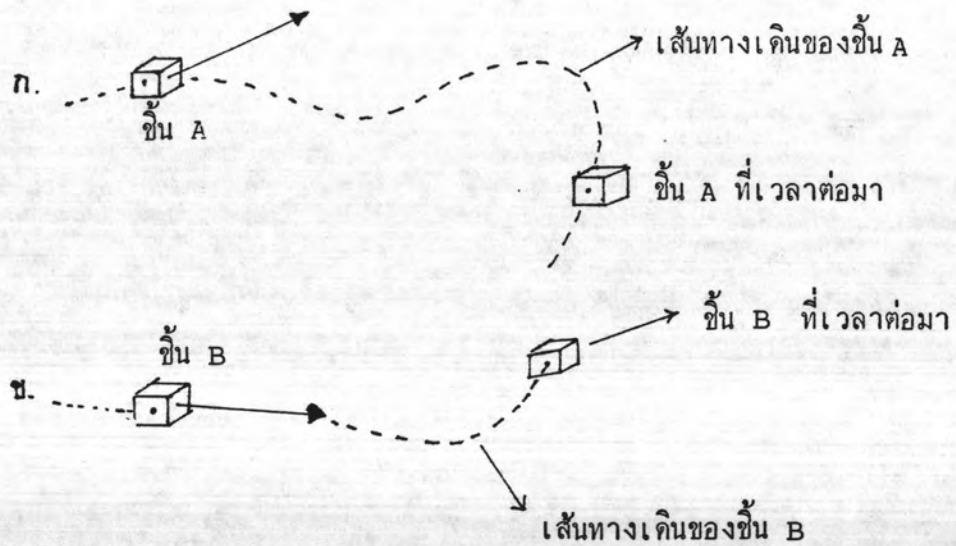
และ

$$\vec{\nabla} \cdot [\rho (e + v^2/2) \vec{v}] = -\vec{\nabla} \cdot (p \vec{v})$$

3.8 เส้นทางเคินและเส้นกระแสของของไหล (Pathline and Streamline of a fluid)

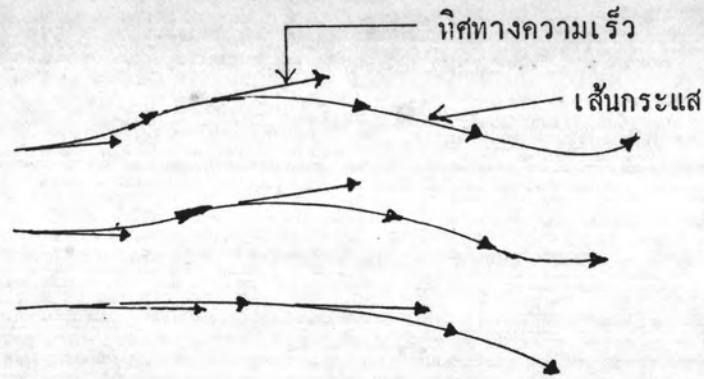
ในการไหลแบบไม่สม่ำเสมอ (unsteady flow) ของชิ้นของไหลเล็ก ๆ (infinitesimal fluid element) ด้วยความเร็ว $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ ผ่านสนาม

การไหล (flow field) ดังในรูปที่ 3.24



รูปที่ 3.24 เส้นทางเดินของชั้นของไหลสองชั้น โดยผ่านจุดเดียวกัน ในสนามการไหลที่ไม่สม่ำเสมอ

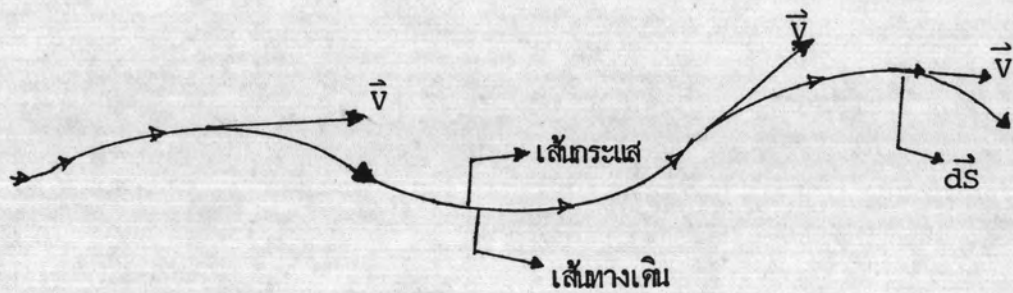
เส้นประที่แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของชั้น A และ B ผ่านจุด 1 ในรูปที่ 3.24 ก และ 3.24 ข เรียกว่า เส้นทางเดิน (path line) ของของไหลโดยทั้งสองชั้น ใช้เวลาต่างกัน สำหรับเส้นทางเดินที่ต่างกัน แม้จะผ่านจุดเดียวกันก็ตาม สำหรับการไหลในสนามที่ไม่สม่ำเสมอ แต่สำหรับเส้นกระแส (Streamline) จะเป็นเส้น ที่สัมผัสกับทิศทางของความเร็ว ณ จุดนั้น ๆ ดังในรูปที่ 3.25



รูปที่ 3.25 แสดงเส้นกระแส

ถ้าเป็นการไหลแบบไม่สม่ำเสมอ รูปแบบของเส้นกระแสจะแตกต่างกันที่เวลาต่าง ๆ เพราะความเร็วมีการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทาง

สำหรับการไหลที่สม่ำเสมอ ขนาดและทิศทางของความเร็วจะมีค่าคงที่ ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ทำให้เส้นทางเคิน และเส้นกระแสกลายเป็นเส้นเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 3.26



รูปที่ 3.26 แสดงเส้นกระแสและเส้นทางเคินสำหรับการไหลแบบสม่ำเสมอ

การวิเคราะห์ สมการเส้นกระแสทำได้โดยให้เวกเตอร์ $d\vec{S}$ เป็นส่วนย่อยส่วนหนึ่งของเส้นกระแสในรูปที่ 3.26 และมี \vec{V} เป็นความเร็วที่จุดนั้น จากนิยามของเส้นกระแส \vec{V} ขนานกับ $d\vec{S}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$d\vec{S} \times \vec{V} = 0 \quad (3.49)$$

จากสมการ(3.49) ถ้าให้ $d\vec{r}$ และ \vec{v} อยู่ในระบบแกนตั้งฉาก จะได้ว่า

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

เมื่อแทนใน(3.49) จะได้ว่า

$$w dy - u dz = 0 \quad (3.50.1)$$

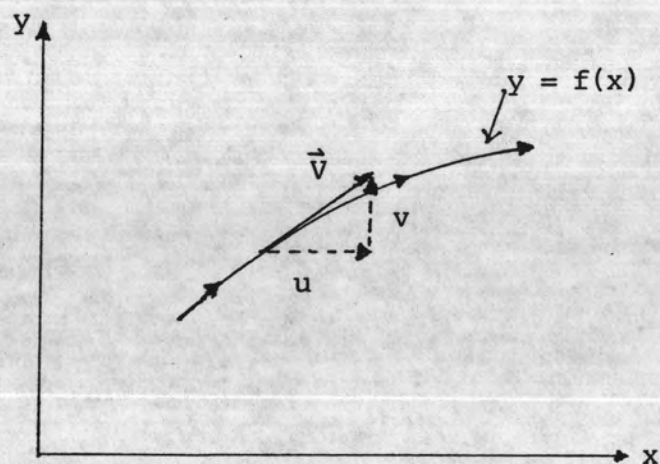
$$u dz - w dx = 0 \quad (3.50.2)$$

$$v dx - u dy = 0 \quad (3.50.3)$$

เมื่อพิจารณาความหมายทางฟิสิกส์ของสมการ(3.50.1) ถึง(3.50.3) เช่น สมการ (3.50.3) ถ้า $y = f(x)$ (พิจารณาใน 2 มิติ) เป็นสมการของเส้นกระแส จะได้ $\frac{dy}{dx}$ เป็น ความชัน (slope) ของเส้นกระแส และ \vec{v} เป็นความเร็วที่สัมผัสกับเส้นกระแส จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (3.51)$$

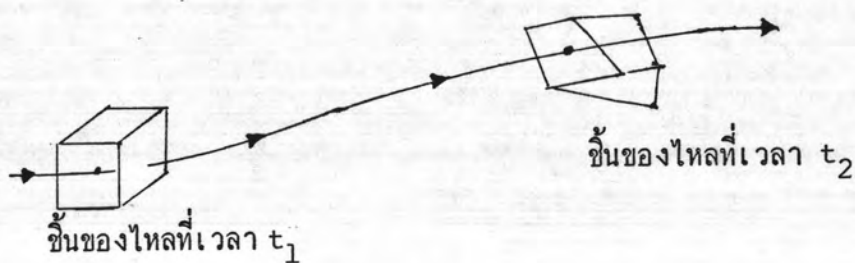
สมการ(3.51) สามารถอธิบายเป็นภาพได้ดังในรูปที่ 3.27



รูปที่ 3.27 แสดงสมการของเส้นกระแสใน 2 มิติ

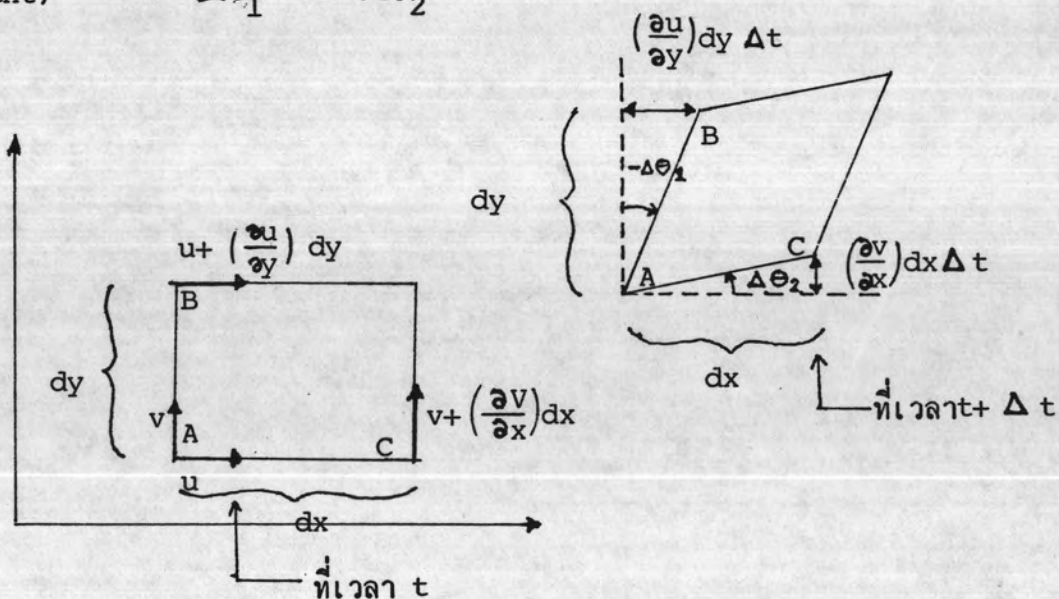
3.9 ความเร็วเชิงมุมและความวนเวียน (Angular Velocity and Vorticity)

ชั้นของไหลที่เคลื่อนอยู่ในสนามการไหล จะมีการเคลื่อนไปตามเส้นกระแส บางครั้ง อาจจะมีการหมุน นอกจากนี้รูปร่างอาจมีการบิดเบี้ยวไปจากเดิม ดังแสดงในรูปที่ 3.28 (6)



รูปที่ 3.28 การเคลื่อนของชั้นของไหลตามเส้นกระแส แล้วมีการหมุนและเปลี่ยนรูปร่าง

พิจารณาการไหลในระนาบ 2 มิติ สมมติว่า ที่เวลา t ชั้นของไหลเป็นดังในรูปที่ 3.29 ด้านซ้าย เมื่อเวลาผ่านไป Δt รูปร่างของชั้นของไหล เปลี่ยนไป ดังในรูปที่ 3.29 ด้านขวา โดยด้าน AB และ AC มีการหมุน ทำให้มีการขจัดของมุม (angular displacement) เป็น $-\Delta\theta_1$ และ $\Delta\theta_2$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.29 แสดงการหมุนและบิดเบี้ยวของชั้นของไหล

จะเห็นว่า เมื่อเวลาผ่านไป Δt จุด C จะเคลื่อนแตกต่างจากแนว A โดยมีความเร็วในแนว y ที่จุด A เมื่อเวลา t จะมีความเร็ว v ส่วนจุด C ซึ่งห่างจากจุด A dx ขณะเมื่อเวลา t จุด C จะมีความเร็วตามแนวตั้ง $v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx$ ดังนั้น

$$\text{ระยะทางตามแนว y ที่ A เคลื่อนเมื่อเวลาผ่านไป } \Delta t = v \Delta t$$

$$\text{ระยะทางตามแนว y ที่ C เคลื่อนเมื่อเวลาผ่านไป } \Delta t = \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) \Delta t$$

และ การขจัดลัพท์ในทิศ y ที่ C เคลื่อนเทียบกับ A = $\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right) \Delta t$

จากความรู้เรขาคณิต จะได้ว่า

$$\tan \Delta \theta_2 = \frac{\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\right] \Delta t}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t$$

เพราะว่า $\Delta \theta_2$ เป็นมุมเล็ก ๆ ดังนั้น $\tan \Delta \theta_2 \approx \Delta \theta_2$ จะได้ว่า

$$\Delta \theta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t \quad (3.52)$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาแนว AB จะได้ว่า

$$\tan (-\Delta \theta_1) = \frac{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy\right] \Delta t}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta t$$

จากเงื่อนไขเดียวกับ $\Delta \theta_2$ จะได้ว่า

$$\Delta \theta_1 = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta t \quad (3.53)$$

เมื่อพิจารณาความเร็วเชิงมุมของแนว AB และ AC ซึ่งก็คือ $\frac{d\theta_1}{dt}$ และ $\frac{d\theta_2}{dt}$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.54)$$

และ

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.55)$$

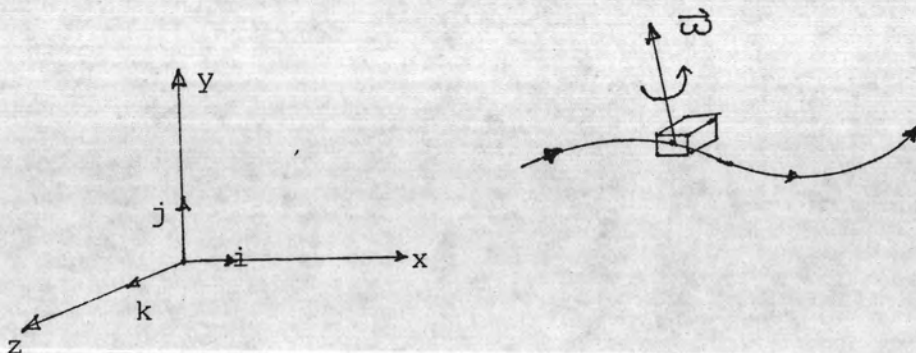
ความเร็วเชิงมุมของชิ้นของไหลในระนาบ xy เป็นค่าเฉลี่ยของอัตราเร็วเชิงมุมของแนว AB และ AC ถ้าให้ ω_z แทนความเร็วเชิงมุมนี้ จะได้ว่า

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t} + \frac{\partial\theta_2}{\partial t} \right) \quad (3.56)$$

เมื่อแทน (3.54) และ (3.55) ใน (3.56)

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.57)$$

ถ้าพิจารณาชิ้นของไหลเคลื่อนในสนามการไหล 3 มิติ โดยให้อัตราเร็วเชิงมุมของชิ้นของไหลแทนด้วยเวกเตอร์ $\vec{\omega}$ ดังในรูปที่ 3.30



รูปที่ 3.30 อัตราเร็วเชิงมุมของชิ้นของไหลใน 3 มิติ

ดังนั้น
$$\vec{\omega} = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

และจะได้ว่า

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k \right] \quad (3.58)$$

อัตราเร็วเชิงมุมมีความสำคัญมากในทฤษฎีอากาศพลศาสตร์ และทำให้เกิดนิยามใหม่ที่
มีชื่อว่า ความวนเวียน (Vorticity) ซึ่งมีค่าเป็น 2 เท่าของอัตราเร็วเชิงมุม ถ้าให้
 $\vec{\zeta}$ แทน ความวนเวียน จะได้ว่า

$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega}$$

จากสมการ (3.58) จะได้ความวนเวียนเป็น

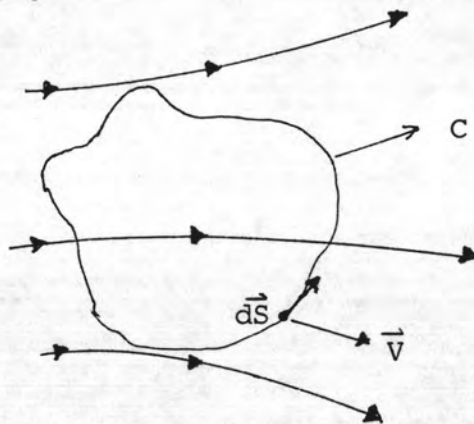
$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{v} \quad (3.59)$$

ความหมายและความสำคัญของความวนเวียน คือ

1. ถ้า $\nabla \times \vec{v} \neq 0$ ทุก ๆ จุดในการไหล จะมีการหมุน (Rotational) และมีอัตราเร็วเชิงมุม
2. ถ้า $\nabla \times \vec{v} = 0$ ทุก ๆ จุดในการไหล จะไม่มีการหมุน (Irrotational) และไม่
มีอัตราเร็วเชิงมุม ในชั้นของไหล มีแต่การเลื่อนตำแหน่งอย่างเดียว

3.10 การไหลเวียน (Circulation)

การไหลเวียน ดังแสดงในรูปที่ 3.31 มีนิยามว่า เป็นค่าลบของอินทิกรัลเชิงเส้นรอบ
เส้นโค้งในสนามการไหล



รูปที่ 3.31 แสดงนิยามของการไหลเวียน

การไหลเวียน มีคุณสมบัติขึ้นกับสนามความเร็วและเส้นโค้ง C ถ้าให้ T แทนการไหลเวียน จะให้ความสัมพันธ์ว่า

$$T = - \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (3.60)$$

\vec{v} เป็นความเร็ว และ $d\vec{s}$ เป็นส่วนย่อยของเส้นโค้ง C ความหมายของอินทิกรัลเชิงเส้นในทางคณิตศาสตร์ ที่ศวกจะมีทิศในลักษณะทวนเข็มนาฬิกา แต่ในทางอากาศพลศาสตร์ จะใช้ทิศตามเข็มนาฬิกา ดังนั้น เครื่องหมายลบในสมการ(3.60) เป็นการกลับทิศเพื่อให้สอดคล้องกับความหมายในเชิงอากาศพลศาสตร์

การไหลเวียน มีความสัมพันธ์กับความหมุนเวียน ดังจะพิจารณาได้ดังต่อไปนี้ จากทฤษฎี Stokes สามารถเปลี่ยนสมการ(3.60) ได้ว่า

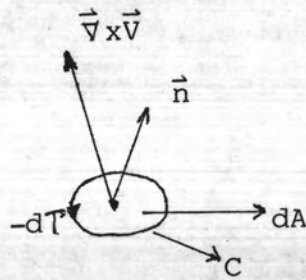
$$T = - \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \iint_A (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{A}$$

ถ้าพิจารณาส่วนโค้ง C ซึ่งมีขนาดเล็กมาก จะได้ว่า การไหลเวียนรอบส่วนโค้งนี้เป็น dT เพราะฉะนั้น

$$dT = - (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = - (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \hat{n} dA$$

หรือ $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \hat{n} = - \frac{dT}{dA}$ (3.61)

dA เป็นพื้นที่เล็ก ๆ ที่ล้อมด้วยส่วนโค้งเล็ก ๆ C ความหมายของสมการ(3.61) แสดงค่าความวนเวียนในทิศตั้งฉากกับพื้นที่ dA มีค่าเท่ากับค่าลบของการไหลเวียนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ ดังแสดงในรูปที่ 3.32



รูปที่ 3.32 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความวนเวียนและการไหลเวียน

3.11 ฟังก์ชันกระแส (Stream function)

พิจารณาการไหลใน 2 มิติ สมการอนุพันธ์ของเส้นกระแสตามสมการ(3.51)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

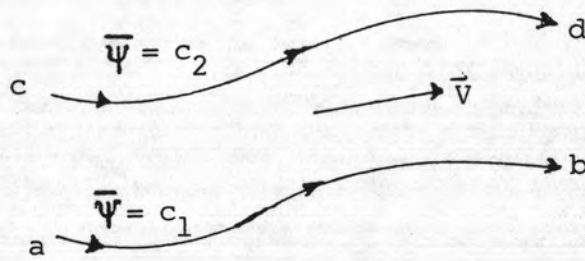
ซึ่ง v และ u เป็นฟังก์ชันของ x และ y ถ้าอินทิเกรตจะได้สมการสำหรับเส้นกระแส เป็น

$$f(x,y) = c$$

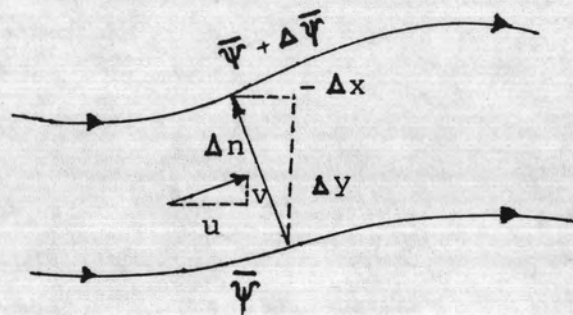
โดย c เป็นค่าคงที่ใด ๆ ถ้ากำหนดฟังก์ชันของ x และ y แทนด้วยสัญลักษณ์ ψ จะเขียนได้ว่า

$$\bar{\Psi}(x,y) = c \tag{3.62}$$

ฟังก์ชัน $\bar{\Psi}(x,y)$ เรียกว่า ฟังก์ชันกระแส (stream function) และจะพบว่าเส้นกระแสแต่ละเส้นจะมีฟังก์ชันกระแสต่าง ๆ กัน ดังแสดงในรูปที่ 3.33



รูปที่ 3.33 แสดงเส้นกระแสที่มีฟังก์ชันกระแสต่างกัน



รูปที่ 3.34 แสดงสนามการไหลของมวลระหว่างเส้นกระแส

จากรูปที่ 3.34 $\Delta\bar{\Psi}$ เป็นผลต่างของฟังก์ชันกระแส $\bar{\Psi} = c_1$ และ $\bar{\Psi} = c_2$ ที่แสดงสนามการไหลของมวลระหว่างเส้นกระแสสองเส้น ค่อนข้างหน่วยของความลึกซึ่งตั้งฉากกับสนามของสนามการไหล ส่วน Δn เป็นระยะตามแนวตั้งฉากระหว่างเส้นกระแส ถ้า ρ เป็นความหนาแน่นของของไหล จะได้ว่า

$$\Delta \bar{\Psi} = \rho v \Delta n \quad (1)$$

พิจารณารูปที่ 3.34 จะได้

$$\text{สนามการไหลของมวล} = \Delta \bar{\Psi} = \rho v \Delta n = \rho u \Delta y + \rho v (-\Delta x)$$

ถ้าเส้นกระแสใกล้กันมาก จะได้ว่า

$$d\bar{\Psi} = \rho u dy - \rho v dx \quad (3.63)$$

เนื่องจาก $\bar{\Psi}$ เป็นฟังก์ชันของ x และ y จาก กฎลูกโซ่ (chain rule) จะได้ว่า

$$d\bar{\Psi} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} dy \quad (3.64)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (2.63) และ (3.64) จะได้ว่า

$$\rho u = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \quad (2.65.1)$$

$$\rho v = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \quad (3.65.2)$$

ฟังก์ชันกระแส $\bar{\Psi}$ จากที่นิยาม สามารถใช้ได้ทั้งการไหลที่อัดได้ และอัดไม่ได้ สำหรับกรณีที่เป็นของไหลแบบอัดไม่ได้ และ ρ มีค่าคงที่ เมื่อกำหนดให้ $\Psi = \bar{\Psi}/\rho$ สามารถเขียนสมการ (3.65.1) และ (3.65.2) ได้ว่า

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (3.66.1)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.66.2)$$

สมการ (3.66.1) และ (3.66.2) ข้างบน เป็นการหาความเร็วของการไหล ได้โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันกระแส

3.12 ศักย์ความเร็ว (Velocity potential)

ในการไหลแบบไม่หมุน ดังที่ได้พิจารณาไปแล้วและทำให้ได้ค่าความวนเวียน (vorticity) มีค่าเป็นศูนย์ทุก ๆ จุดในสนามการไหล ถ้ากำหนดให้ ϕ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ (Scalar function) และใช้นิยามของเอกลักษณ์เวกเตอร์จะได้ว่า

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0 \quad (3.67)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (3.59) และ สมการ (3.67) จะพบว่า

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$$

แสดงว่าในการไหลแบบไม่หมุน จะมีค่าฟังก์ชันสเกลาร์ ϕ ที่แน่นอนค่าหนึ่ง ซึ่งค่าเกรเดียนท์ของ ϕ มีค่าเท่ากับความเร็ว จะเรียกค่าฟังก์ชันสเกลาร์นี้ว่า ศักย์ความเร็ว ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตำแหน่ง เช่น ในระบบแกนตั้งฉาก

$$u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

เมื่อเทียบค่าสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

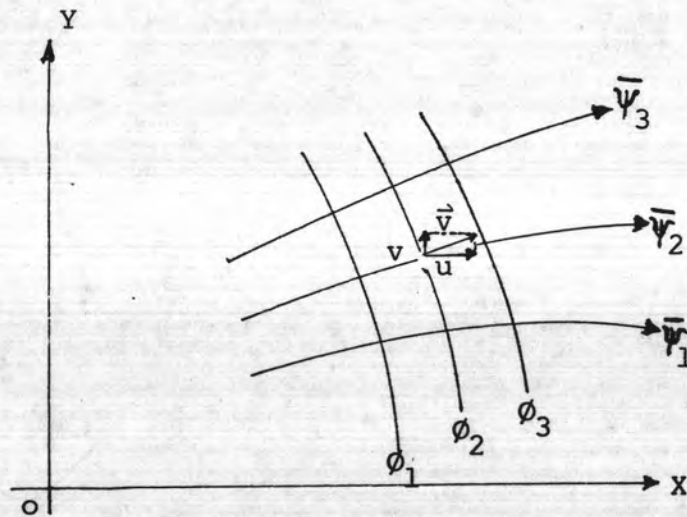
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.68)$$

สมการ (3.68) แสดงการหาค่าองค์ประกอบความเร็ว \vec{v} จากศักย์ความเร็ว

3.13 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกระแสและศักย์ความเร็ว (Relationship between the stream function and velocity potential)

ในสนามการไหลที่ไม่หมุนที่ได้ศึกษามา จะมีค่าศักย์ความเร็ว ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์ที่สำคัญค่าหนึ่งในสนามการไหล เพราะค่าเกรเดียนท์ของมันจะมีค่าเท่ากับความเร็ว ถ้าให้เส้นตรง

ชุดหนึ่งแทนศักย์ความเร็วชุดหนึ่งซึ่งมีค่าศักย์ความเร็วเท่ากัน ชุดของเส้นศักย์ความเร็วนี้เรียกว่า เส้นสมศักย์ (equipotential line) และยังพบอีกต่อไปว่า ค่าเกรเดียนต์ของศักย์ความเร็ว จะเป็นเส้นตรงที่สัมผัสกับเส้นศักย์ ความเร็วเรียกเส้นเกรเดียนต์นี้ว่า เส้นกระแส ซึ่งมีฟังก์ชัน แทนด้วย $\bar{\Psi}$ เรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันกระแส เส้นตรงที่แทนเส้นศักย์ความเร็วและเส้นกระแสจะตั้งฉากกันเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 3.35

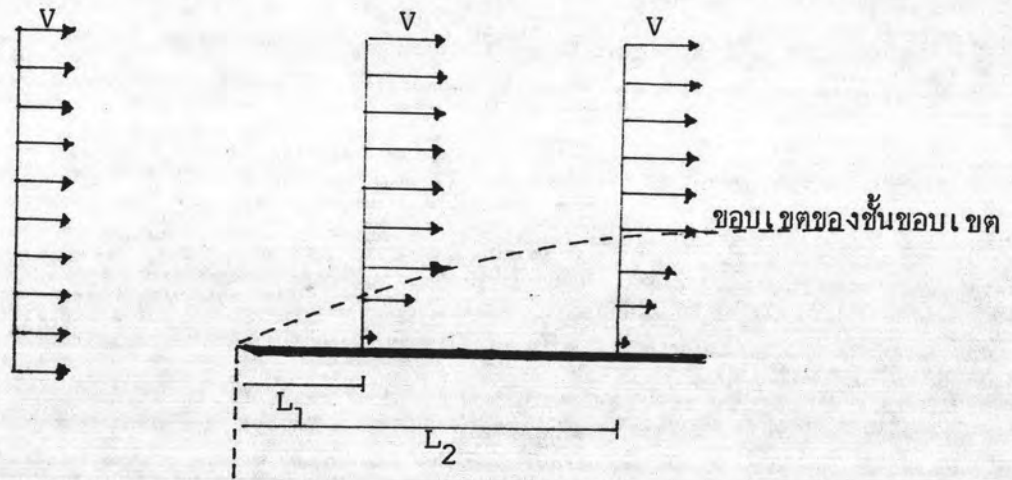


รูปที่ 3.35 แสดงเส้นกระแสและเส้นศักย์ความเร็ว

3.14 ชั้นขอบเขต (Boundary layers)

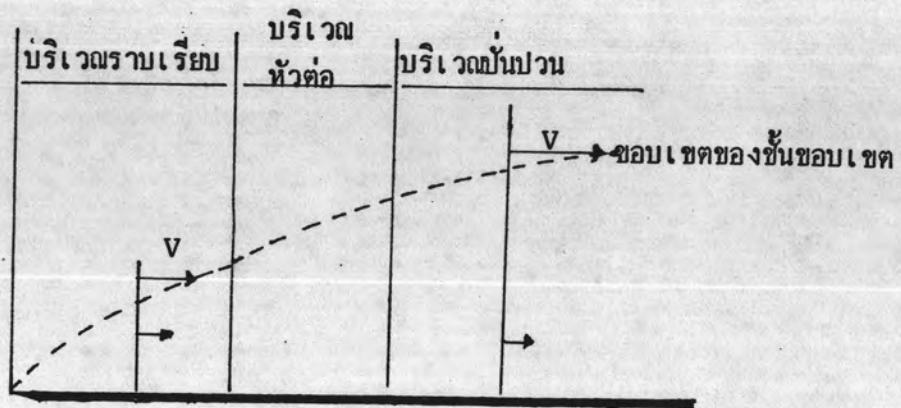
การไหลของของไหลที่มีความหนืด เช่น น้ำและอากาศ เมื่อไหลไปตามยาวของระนาบแผ่นผนังเรียบ ของไหลที่แผ่นผนังจะอยู่นิ่งและความเร็วเพิ่มขึ้นจะอยู่ห่างออกไปในแนวตั้งฉาก จนกระทั่งมีความเร็วคงที่ ช่วงที่เกิดเกรเดียนต์ (gradient) ของความเร็ว จนกระทั่งมีความเร็วคงที่ ช่วงที่เกิดเกรเดียนต์ของความเร็วนี้เรียกว่า "ชั้นขอบเขต" ส่วนบริเวณที่อยู่นอกชั้นขอบเขตออกไปจะไม่เกิดเกรเดียนต์ของความเร็วในทางทฤษฎีชั้นขอบเขต (boundary layer theory) จะคิดให้อิทธิพลของความหนืด ถูกจำกัดขอบเขตด้วยชั้นขอบเขต ส่วนของไหลที่ไหลอยู่นอกชั้นขอบเขตจะคิดให้เป็นของไหลที่ไม่มี ความหนืด ด้วยการใช้อธิบายตัวเองทำให้ได้แบบของการไหล ตัวอย่างที่ง่ายที่สุด คือการไหลอย่างขนานไปตามแผ่นระนาบบางที่อยู่นิ่ง โดยให้ด้านหัวของแผ่นระนาบบาง เป็นปลายแหลม เพื่อให้ของไหลที่ไหลผ่าน จะได้ไม่เกิดการหันเหไป

ผังรูปที่ 3.36



รูปที่ 3.36 แสดงการแผ่กระจายความเร็วของของไหล ผ่านแผ่นระนาบบาง

จากรูปส่วนของไหลที่สัมผัสกับแผ่นระนาบบางจะอยู่นิ่ง เพราะขอบเขตไม่มีการเลื่อนไหล ส่วนของไหลที่อยู่ใกล้แผ่นระนาบบางก็จะถูกหน่วง (retarded) โดยความหนืด ทำให้ความเร็ว น้อยกว่าส่วนของไหลที่อยู่ห่างแผ่นระนาบออกไป ความกว้างของบริเวณที่มีความหน่วงจะเพิ่มขึ้น เมื่อยิ่งห่างจากด้านหัวหรือส่วนแหลมของแผ่นระนาบบางออกไปในแนวตามทางเดินของการไหล บริเวณแรก ๆ ของด้านหัวของแผ่นระนาบบาง จะเป็นการไหลแบบราบเรียบ ชั้นขอบเขตบริเวณนี้ เรียกว่า "ชั้นขอบเขตราบเรียบ" บริเวณถัดไปตามยาวของแผ่นระนาบบางการไหลแบบราบเรียบ จะไม่เสถียรภาพ จะเกิดการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent) ชั้นขอบเขตบริเวณนี้ เรียกว่า "ชั้นขอบเขตปั่นป่วน" สำหรับขอบเขตที่ต่อระหว่างชั้นขอบเขตราบเรียบกับชั้นขอบเขตปั่นป่วน เรียกว่า "ชั้นขอบเขตหัวต่อ" ดังแสดงในรูปที่ 3.37



รูปที่ 3.37 แสดงชั้นขอบเขตของของไหลและบริเวณลักษณะการไหล