บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความนำ

คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือชนิดหนึ่งซึ่งมีบทบาทอย่างมากในงานทางด้านวิศวกรรม เช่นงานออกแบบ และงานวิเคราะห์โครงสร้าง เป็นต้น คอมพิวเตอร์ได้รับการพัฒนาอยู่เสมอ เพื่อให้มีประสิทธิภาพสูงและมีราคาที่ถูกลง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในปัจจุบันนี้คอมพิวเตอร์ที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายเรียกกันว่าไมโครคอมพิวเตอร์ เนื่องจากราคาไม่แพงและมีประสิทธิภาพในการทำงานสูง ทั้งนี้เพื่อประโยชน์สูงสุดจากเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ก็ย่อมต้องมีซอฟท์แวร์ที่ดีเหมาะสมกับเครื่องและงานที่ใช้ด้วย

สำหรับงานวิจัยนี้เขียนขึ้นโดยใช้ภาษาไมโครซอฟท์ควิกเบสิค (Microsoft Quick BASIC Version 4.0) ซึ่งเป็นภาษาที่ง่ายในการศึกษาและเขียนโปรแกรม โดยใช้กับเครื่อง IBM PC XT Compatible เป็นเครื่องแบบ 16 บิท มีหน่วยความจำหลัก 640 กิโลไบท์หน่วยประมวลผลกลางมีความเร็วในการประมวลผล 4.77 MHz หน่วยความจำสำรองประกอบด้วยแผ่นจานแม่เหล็กมีความจุ 320 กิโลไบท์

อนึ่งสาเหตุที่เลือกใช้ภาษาไมโครซอฟท์ควิกเบสิคซึ่งเป็นการปรับปรุงล่าสุดที่มีในท้องตลาดเนื่องจากเป็นภาษาที่มีข้อดีหลายประการ เช่น สามารถเรียกใช้หน่วยความจำหลักได้เต็มความสามารถของเครื่อง สามารถเรียกใช้โปรแกรมภาษาอื่นได้ สามารถแบ่งเป็นโปรแกรมย่อยและเรียกใช้จากแผ่นจานแม่เหล็กได้ทุกขณะ และง่ายต่อการศึกษาโปรแกรม เป็นต้น

สาเหตุที่เลือกใช้เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ IBM PC XT Compatible ขนาด 16 บิท เพราะว่ามีราคาถูก มีใช้กันแพร่หลาย ความเร็วในการประมวลผลกลางสามารถเลือกได้หลายขนาดและเพิ่มเติมได้ภายหลัง 4.77, 8, 10, 12, 15, 20 MHz. รวมทั้ง math coprocessor ช่วยให้มีความเร็วเพิ่มขึ้นในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ หน่วยความจำสำรองมีหลายขนาด แผ่นจานแม่เหล็กอ่อน 320 kbyte, hard disk 10, 20, 30 mbyte นอกจากนี้ยังได้รับการพัฒนาให้มีความสามารถเพิ่มขึ้นอยู่เสมอ ๆ รวมทั้งยังสามารถทำงานเชื่อมโยงกับ

ไมโครคอมพิวเตอร์หรือคอมพิวเตอร์เครื่องอื่น ๆ ได้

1.2 ความเป็นมาของปัญหา

ในการวิเคราะห์โครงสร้างชนิดโครงระนาบ (Plane Frame) อันได้แก่ โครงข้อแข็ง (Frame) โครงข้อหมุน (Truss) และโครงข้อแข็งรวมกับโครงข้อหมุนประกอบด้วยชิ้นส่วนหลาย ๆ ชิ้นส่วนมายึดติดกันที่จุดต่อ (Joint) เป็นที่นิยมกันมาก การวิเคราะห์โครงสร้างมักใช้วิธีรวมสติฟเนสโดยตรง (Direct Stiffness Method) โครงสร้างชนิดนี้แต่ละชิ้นส่วนจะประกอบด้วยจุดต่อเพียงสองจุด

แต่ในการวิเคราะห์โครงสร้างชนิดอื่นเช่น ผนังต้านแรงเฉือนของโครงสร้างอาคารหลายชั้น เชื่อน แผ่นพื้น เป็นต้น นิยมใช้วิธีไฟไนต์เอเลเมนต์เป็นวิธีวิเคราะห์ร่วมกับวิธีรวมสติฟเนสโดยตรง นั่นคือโครงสร้างจริงจะถูกแทนด้วยโครงสร้างสมมุติซึ่งได้จากการรวมกันของชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกันตรงจุดต่อ โครงสร้างสมมุติจะมีพฤติกรรมเหมือนโครงสร้างจริงได้มากน้อยเพียงไรขึ้นอยู่กับจำนวนชิ้นส่วนที่ถูกแบ่งให้เล็กลง ถ้ามีจำนวนชิ้นส่วนมาก (ชิ้นส่วนมีขนาดเล็กลง) พฤติกรรมของโครงสร้างสมมุติจะใกล้เคียงกับโครงสร้างจริงมากขึ้น ดังนั้นจำนวนจุดต่อจะมีมากขึ้นด้วยเช่นกัน

ในการวิเคราะห์นั้นจะต้องมีการแก้สมการ จำนวนสมการหรือจำนวนสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างขึ้นกับจุดต่อของโครงสร้าง ถ้าจุดต่อมีมาก จำนวนสมการก็มีมากขึ้นด้วย สัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างจะมีขนาดใหญ่ ด้วยขนาดที่ใหญ่มากขึ้นของ สัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างนี้ ทำให้ต้องคำนึงถึงวิธีการที่ดีที่สุดในการรวมสติฟเนสโดยตรงลงในหน่วยความจำหลักและการแก้สมการ ด้วยวิธีการฟรอนทัลแล้วไม่ว่าไมโครคอมพิวเตอร์จะมีหน่วยความจำหลักมากเพียงไรก็ตามยังต้องการการติดต่อกับหน่วยความจำสำรองเท่าเดิม (จำนวนคำในการอ่านและบันทึก) เนื่องจากในอดีตนั้นไมโครคอมพิวเตอร์ที่ใช้กันมีหน่วยความจำหลักน้อยทำให้มีความจำเป็นที่จะต้องใช้วิธีฟรอนทัลเพราะต้องการใช้หน่วยความจำหลักให้น้อยที่สุด ดังนั้นการนำวิธีฟรอนทัลมาใช้กับไมโครคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันนี้ซึ่งมีหน่วยความจำหลักมากทำให้เสียเวลาในการวิเคราะห์มากเช่นเดียวกับไมโครคอมพิวเตอร์ที่มีหน่วยความจำหลักน้อย ในขณะที่ยังมีหน่วยความจำหลักที่ยังไม่ได้ใช้งานเหลืออยู่

อีกมาก ด้วยเหตุนี้การใช้หน่วยความจำหลักของไมโครคอมพิวเตอร์ให้มีประโยชน์มากที่สุดก็น่าจะเป็นการลดเวลาการทำงานให้น้อยลงได้ ซึ่งจะเห็นได้ชัดเจนในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างทั้งหมดสามารถบรรจุไว้ในหน่วยความจำหลักได้อย่างเพียงพอ อีกประการหนึ่งคือรูปแบบของการเก็บค่าสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมตริกซ์ เพื่อการใช้หน่วยความจำให้เป็นประโยชน์มากที่สุดโดยเก็บค่าสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมตริกซ์เท่าที่จำเป็นในการแก้สมการ การเก็บแบบสกายลายน์ร่วมกับการจัดเรียงลำดับค่าระดับขั้นความเสรีเป็นวิธีหนึ่งซึ่งทำให้ความต้องการหน่วยความจำน้อยลง นั่นคือจะสามารถใช้เนื้อที่หน่วยความจำหลักให้มีประโยชน์มากที่สุด

1.3 ภูมิหลังงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปี 2513 B.M. Irons (1) ได้ทำการศึกษาค้นคว้าวิธีฟรอนทัลขึ้นมา เพื่อใช้สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างชนิดไฟไนต์เอเลเมนต์ เขียนโปรแกรมเป็นภาษาฟอร์แทรน ใช้แก้ปัญหาของเมตริกซ์ที่สมมาตร และเป็นชนิดบวกแน่นอน (Positive Definite)

หลังจากนั้นได้มีผู้วิจัยหลายท่านนำวิธีฟรอนทัลโดยอาศัยหลักการของ B.M. Irons ไปประยุกต์กับการวิเคราะห์โครงสร้างชนิดต่าง ๆ ทั้งทางสถิตย์ศาสตร์และพลศาสตร์

ปี 2520 C.P. Johnson (2) ได้ทำการศึกษาแบ่งฟรอนต์เมตริกซ์ให้มีขนาดเล็กเพื่อลดหน่วยความจำของเครื่องเมนเฟรม ในการวิเคราะห์โครงสร้างไฟไนต์เอเลเมนต์โดยเก็บข้อมูลแต่ละเมตริกซ์ย่อยลงในเทป

ปี 2520 A. Bykat (3) ได้เสนอวิธีการจัดลำดับของชิ้นส่วนย่อยเสียใหม่เพื่อต้องการประหยัดเนื้อที่หน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์

ปี 2523 E. Thompson และ Y. Shimazaki (4) ได้ทำการศึกษาดัดแปลงวิธีฟรอนทัลของ B.M. Irons โดยเก็บค่าสัมประสิทธิ์ของสติฟเนสเมตริกซ์แบบสกายลายน์ (Skyline) พบว่าความต้องการในหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์น้อยพอ ๆ กับวิธีฟรอนทัล ส่วนการอ่านและการเก็บข้อมูลบนแผ่นแม่เหล็กน้อยกว่าวิธี บล๊อคสกายลายน์ (Blocked - Skyline)

ปี 2525 G.Beer และ W.Haas (11) เขียนโปรแกรมทำการแบ่งฟรอนต์เมตริกซ์

(สติฟเนสเมตริกซ์) ให้มีขนาดเล็กลง ดังนั้นในการทำงานแต่ละรอบ จำนวนสัมประสิทธิ์ของฟรอนต์เมตริกซ์จึงน้อยลง ทั้งนี้เพื่อให้เหมาะสำหรับใช้กับเครื่องมินิคอมพิวเตอร์

ปี 2526 ทักษิณ เทพชาตรี (12) ได้เขียนโปรแกรมไมโครคอมพิวเตอร์เพื่อใช้สำหรับวิเคราะห์โครงข้อแข็งและโครงข้อหมุนชั้น โดยใช้วิธีเก็บสติฟเนสเมตริกซ์รวมแบบเมตริกซ์แถบที่สมมาตร (Banded Symmetric Matrix)

ปี 2526 เริงเดชา รัชตโพธิ์ (14) พัฒนาโปรแกรมไมโครคอมพิวเตอร์สำหรับระบบไฟไนต์เอเลเมนต์ โดยอาศัยวิธีฟรอนทัลร่วมกับการใช้โครงสร้างย่อยหลายระดับ

ปี 2527 นายภาณุวัฒน์ คุรุรัตน์ (5) ได้นำเอาวิธีฟรอนทัลของ B.M. Irons มาประยุกต์กับไมโครคอมพิวเตอร์ Apple II ในการวิเคราะห์โครงสร้างชนิดโครงระนาบ พบว่าข้อมูลส่วนใหญ่เก็บอยู่ในจานแม่เหล็ก ต้องใช้เนื้อที่เก็บมากและจะเสียเนื้อที่ว่างไปโดยเปล่าประโยชน์ เพราะว่ามีบางไฟล์ต้องเก็บข้อมูลแบบแฟ้มข้อมูลเข้าถึงได้โดยตรงซึ่งจะต้องจองเนื้อที่สำหรับเก็บข้อมูลนี้แต่ละชุดเท่า ๆ กัน โดยเอาชุดตัวเลขที่มีจำนวนข้อมูลมากที่สุดเป็นตัวกำหนดความยาวของข้อมูลแต่ละชุด และจะเสียเวลาในการวิเคราะห์มาก

ปี 2529 นายนิวัฒน์ นิลสิทธานุเคราะห์ (15) ได้นำเอาวิธีฟรอนทัลและวิธีโครงสร้างย่อยมาประยุกต์กับไมโครคอมพิวเตอร์ Apple II ในการวิเคราะห์ผนังต้านแรงเฉือน

1.4 สมมุติฐานในการวิจัย

สมมุติฐานที่กำหนดขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์มีดังต่อไปนี้

1. วัสดุมีพฤติกรรมเชิงเส้น ไอโซทรอปิก (Isotropic) และอีลาสติก (Elastic)
2. ให้แรงกระทำกระทำที่ชิ้วของชิ้นส่วน

1.5 วิธีไฟไนต์เอเลเมนต์ (Finite Element Method)

วิธีไฟไนต์เอเลเมนต์เป็นวิธีการหาคำตอบโดยประมาณในการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยคอมพิวเตอร์ เป็นวิธีที่นิยมกันมากโดยมีหลักการเบื้องต้นคือโครงสร้างจริงจะถูกแทนที่ด้วยโครงสร้างสมมุติซึ่งได้จากการรวมกันของชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกันตรงจุดต่อที่กำหนดให้เรียกว่าชิ้ว

(Nodal Points) และกำหนดฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ (Displacement Functions) ของจุดต่อต่าง ๆ ของชิ้นส่วนเพื่อใช้แสดงพฤติกรรมของโครงสร้างสมมุติ ฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ที่กำหนดจะต้องมีคุณสมบัติดังนี้คือ

1.5.1 เป็นฟังก์ชั่นที่มีความต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วนข้างเคียง (Continuity with Adjacent Elements)

1.5.2 ประกอบด้วยการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งอนันต์ (Rigid Body Displacement)

1.5.3 ประกอบด้วยความเครียดคงที่ตลอดทั้งชิ้นส่วน (Constant Strain)

ด้วยหลักการของพลังงานศักย์รวม (Total Potential Energy) เมื่อพลังงานศักย์รวมของโครงสร้างมีค่าต่ำสุดเทียบกับการเคลื่อนที่ที่ขั้ว โครงสร้างจะอยู่ในสภาวะสมดุลย์ พลังงานศักย์รวมของชิ้นส่วนสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$U_e = \tfrac{1}{2}\int_V [\sigma]^T \varepsilon dV - \int_V [u]^T p dV - \int_S q dS \qquad (1.1)$$

โดยที่ σ = ความเค้น

ε = ความเครียด

u = การเคลื่อนที่ที่จุดใด ๆ ภายในชิ้นส่วน

p = น้ำหนักของวัตถุต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร (Body forces)

q = แรงกระทำที่ผิว (Applied surface tractions)

v = ปริมาตร

s = พื้นที่ผิว

วิธีไฟไนต์เอเลเมนต์จะสมมุติว่าทราบค่าการเคลื่อนที่ที่ขั้ว การเคลื่อนที่ ณ จุดใด ๆ ภายในชิ้นส่วนสามารถหาได้ในเทอมของการเคลื่อนที่ที่ขั้ว ในรูปของสมการจะได้

$$u = N r \qquad (1.2)$$

โดยที่ r = เวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ที่ขั้ว

N = เวกเตอร์ของฟังก์ชั่นสัณฐาน (Shape Function)

(สำหรับฟังก์ชั่นสัณฐานจะได้กล่าวในภายหลัง)

เมื่อทราบค่าการเคลื่อนที่ที่ขั้วแล้ว สามารถหาความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนได้ ในรูปของสมการ

$$\varepsilon = Br \qquad (1.3)$$

โดยที่ ε = เวกเตอร์ของความเครียด ณ จุดใด ๆ ในชิ้นส่วน

B = เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนที่

จากทฤษฎีความยืดหยุ่น จะได้

$$\sigma = D\varepsilon \tag{1.4}$$

โดยที่ σ = เวกเตอร์ของความเค้น ณ จุดใด ๆ ในชิ้นส่วน

D = เมตริกซ์ความยืดหยุ่น (Elasticity Matrix)

ดังนั้น สามารถเขียนพลังงานศักย์รวมของชิ้นส่วนในรูปของการเคลื่อนที่ที่ขั้วได้

$$U_e = \tfrac{1}{2}\int_V [r]^T[B]^T DBr\,dV - \int_V [r]^T[N]^T p\,dV - \int_S [r]^T[N]^T q\,dS \tag{1.5}$$

พลังงานศักย์รวมต่ำสุดของชิ้นส่วนเมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่ที่ขั้วของชิ้นส่วนจะได้

$$\frac{\partial U_e}{\partial r} = \int_V ([B]^T DB)r\,dV - \int_V [N]^T p\,dV - \int_S [N]^T q\,dS \tag{1.6}$$

$$= K_e r - F_e$$

โดยที่ $K_e = \int_V [B]^T DB\,dV$

$F_e = \int_V [N]^T p\,dV + \int_S [N]^T q\,dS$

B^T = เมตริกซ์สลับเปลี่ยนของ B

K_e = สติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วน

F_e = เวกเตอร์ของแรงของชิ้นส่วน

ในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้ชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริก (Isoparametric Elements) ในการวิเคราะห์ โดยมีอยู่ 2 แบบ คือ ชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกเชิงเส้น (Linear Isoparametric Elements) และชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกกำลังสอง (Quadratic Isoparametric Elements) ดังแสดงในรูปที่ 1.1 ฟังก์ชั่นสัณฐานแต่ละขั้วสามารถเขียนได้ดังนี้

สำหรับชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกเชิงเส้นในระนาบ (Q4)

$$N1 = (1-s)(1-t)/4$$

$$N2 = (1+s)(1-t)/4$$

$$N3 = (1+s)(1+t)/4$$

$$N4 = (1-s)(1+t)/4$$

สำหรับชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกกำลังสองในระนาบ (Q8)

$$N1 = (1-s)(1-t)(-s-t-1)/4$$

$$N2 = (1-s^2)(1-t)/2$$

$$N3 = (1+s)(1-t)(s-t-1)/4$$

$$N4 = (1+s)(1-t^2)/2$$

$$N5 = (1+s)(1+t)(s+t-1)/4$$

$$N6 = (1-s^2)(1+t)/2$$

$$N7 = (1-s)(1+t)(-s+t-1)/4$$

$$N8 = (1-s)(1-t^2)/2$$

สำหรับชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกเชิงเส้นลูกบาศก์

$$N1 = (1+r)(1-s)(1-t)/8$$

$$N2 = (1+r)(1+s)(1-t)/8$$

$$N3 = (1-r)(1+s)(1-t)/8$$

$$N4 = (1-r)(1-s)(1-t)/8$$

$$N5 = (1+r)(1-s)(1+t)/8$$

$$N6 = (1+r)(1+s)(1+t)/8$$

$$N7 = (1-r)(1+s)(1+t)/8$$

$$N8 = (1-r)(1-s)(1+t)/8$$

โดยที่ r,s,t = พิกัดของชิ้นส่วน

x,y,z = พิกัดของโครงสร้าง

เมตริกซ์ความยืดหยุ่น [D]

สำหรับชิ้นส่วนชนิดความเค้นในระนาบ

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

สำหรับชิ้นส่วนชนิดความเครียดในระนาบ

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

สำหรับชิ้นส่วนชนิดแผ่นบางรับแรงตัด

$$D = \begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)} & & & \\ \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & & & \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}\cdot\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & & \\ & & & \frac{Et}{2.4(1+\nu)} & 0 \\ & & & & \frac{Et}{2.4(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สำหรับชิ้นส่วนชนิดลูกบาศก์

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

โดยที่ E = โมดูลัสความยืดหยุ่น

ν = อัตราส่วนพอยซอง

จากงานวิจัยที่ผ่านมา สรุปได้ว่าชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกให้ผลลัพธ์ถูกต้องและมีความสะดวกในการใช้มากกว่าชิ้นส่วนสามเหลี่ยมเมื่อใช้จำนวนระดับชั้นความเสรีเท่ากัน ชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกกำลังสองมีพฤติกรรมในการรับแรงดัดที่ดีกว่าชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกเชิงเส้น

วิธีไฟไนต์เอเลเมนต์จะให้ผลลัพธ์ถูกต้องมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับ การสมมุติลักษณะการเคลื่อนที่ของจุดต่าง ๆ ภายในชิ้นส่วนว่าจะใกล้เคียงกับลักษณะการเคลื่อนที่จริงหรือไม่ และขึ้นอยู่กับจำนวนของชิ้นส่วนที่ประกอบรวมกันเป็นโครงสร้าง โดยชิ้นส่วนมีจำนวนมากเท่าไร พฤติกรรมของโครงสร้างสมมุติก็จะใกล้เคียงกับโครงสร้างจริงมากยิ่งขึ้นเท่านั้น

1.6 วัตถุประสงค์และขอบเขตของการวิจัย

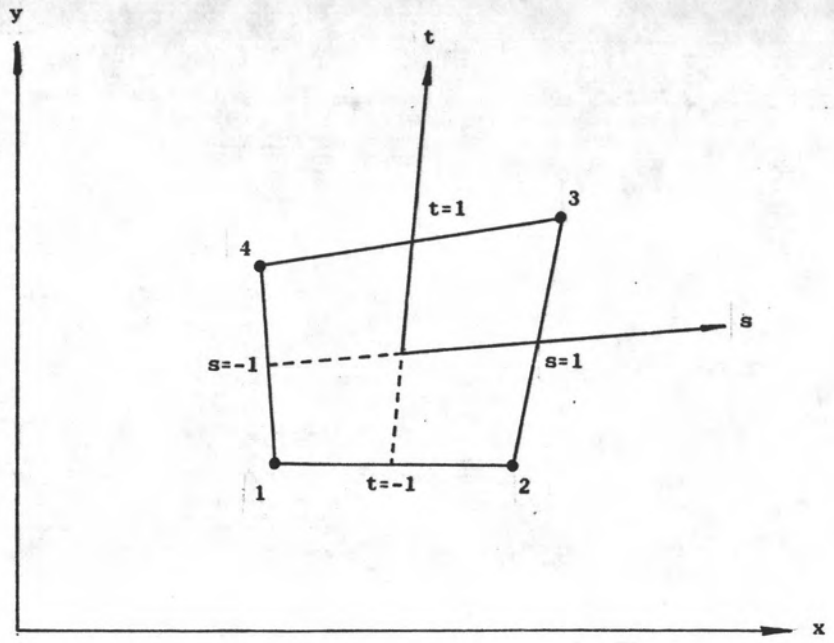
วัตถุประสงค์ของการวิจัยมีดังต่อไปนี้

1.6.1 ศึกษานำเอาไมโครคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ในการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์

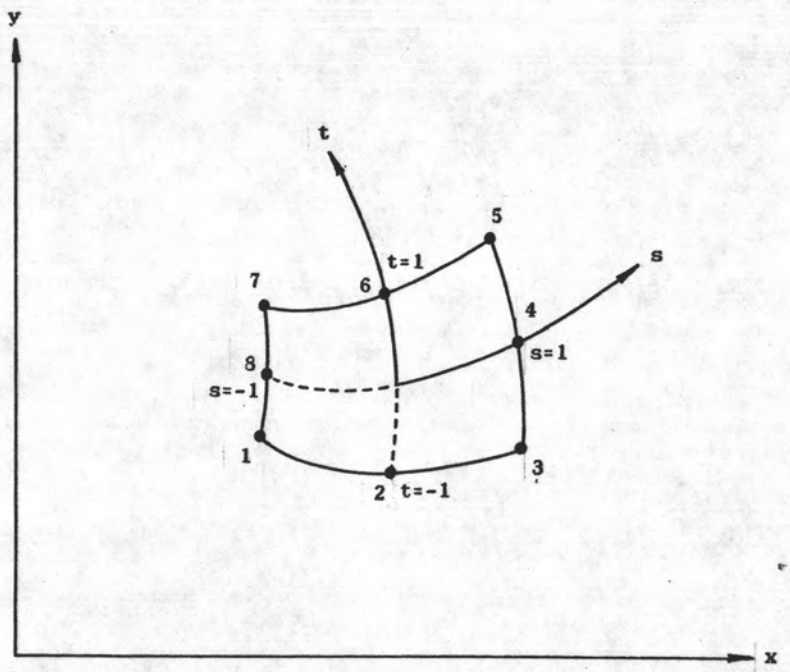
1.6.2 พัฒนาวิธีสกายลายน์ฟรอนทัลให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น นำมาประยุกต์กับไมโครคอมพิวเตอร์

1.6.3 ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพกับวิธีฟรอนทัล

1.6.4 เปรียบเทียบความถูกต้องกับผลที่ได้จากเครื่องมินิคอมพิวเตอร์

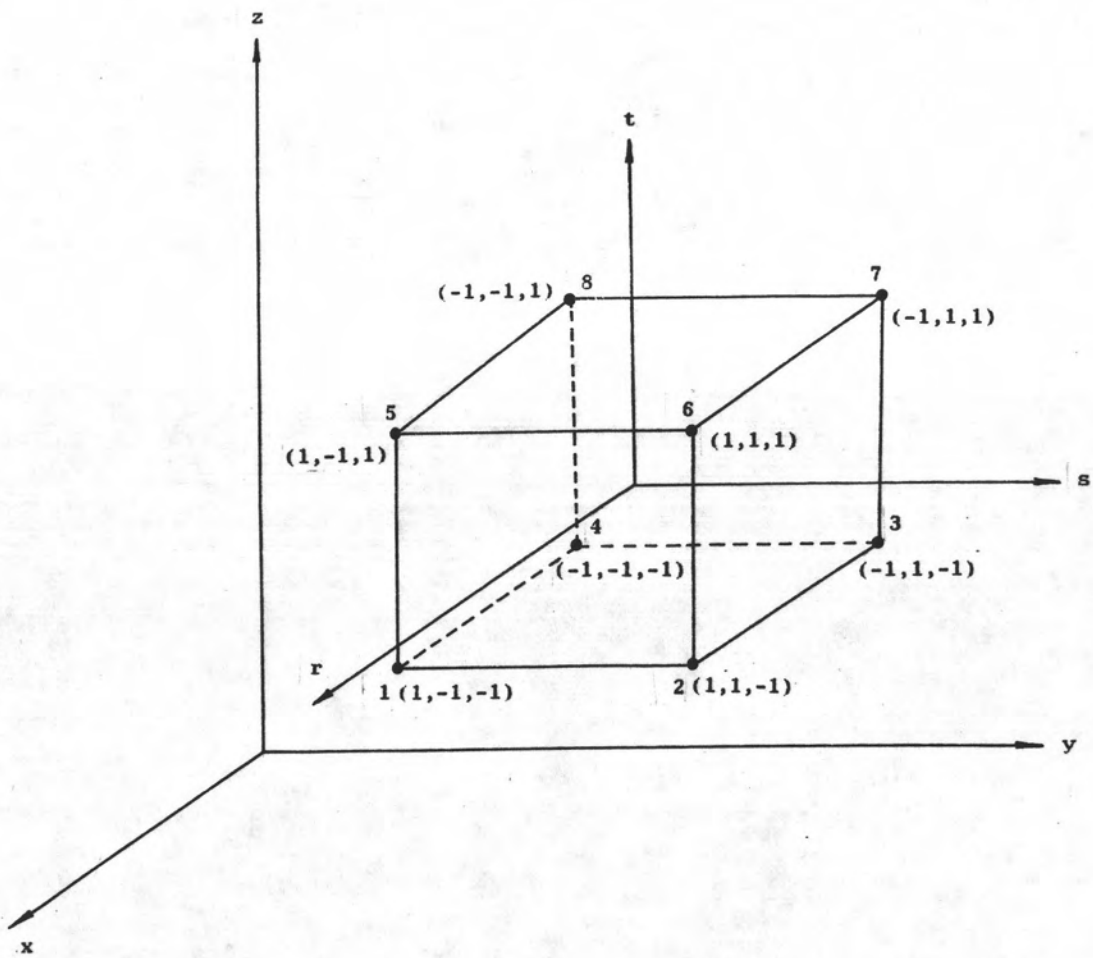


(ก) ชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกเชิงเส้นในระนาบ (Q4)



(ข) ชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกกำลังสองในระนาบ (Q8)

รูปที่ 1.1 แสดงรูปร่างชิ้นส่วน



(ค) ชิ้นส่วนไอโซพาราเมตริกเชิงเส้นลูกบาศก์

รูปที่ 1.1 แสดงรูปร่างชิ้นส่วน (ต่อ)