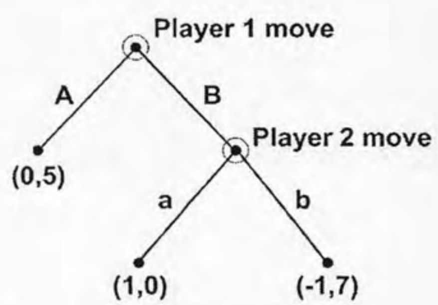
บทที่ 2

ทฤษฎีและความรู้พื้นฐาน

2.1 ทฤษฎีเกม

ทฤษฎีเกม [21] กล่าวถึงผลได้และผลเสียของการแข่งขัน ซึ่งผู้เล่นอาจเป็นบุคคลหรือกลุ่มบุคคลตั้งแต่ 2 กลุ่มขึ้นไป โดยผลลัพธ์ของการแข่งขันจะถูกควบคุมด้วยการตัดสินใจของทุกกลุ่มที่เข้าร่วม ในทุกรอบของการแข่งขัน ผู้เล่นจะตัดสินใจโดยคำนึงถึงลักษณะการเล่นที่สามารถให้ผลประโยชน์กับตนเองได้มากที่สุด รูปแบบของเกมแบ่งเป็นรูปแบบหลักได้ 2 ประเภท [21] คือ

1. เกมแบบครอบคลุม (extensive form game) เป็นเกมที่ผู้เล่นแต่ละคนตัดสินใจเลือกทางเลือกต่าง ๆ โดยผู้เล่นแต่ละคนจะทราบถึงการตัดสินใจของผู้เล่นอีกฝ่ายในรอบก่อนหน้าตนเอง เกมประเภทนี้สามารถเขียนได้ในรูปแผนภูมิต้นไม้ โดยผู้เล่นจะทราบถึงข้อมูลของตำแหน่ง (position) และการย้ายตำแหน่ง (move) ทั้งหมดที่เป็นไปได้



รูปที่ 2.1 แผนภาพต้นไม้ของเกมแบบครอบคลุม

2. เกมแบบปกติ (normal form or strategic form game) เป็นเกมที่ผู้เล่นไม่ทราบถึงการตัดสินใจของผู้เล่นคนอื่น ซึ่งทำให้ข้อมูลของเกมไม่ครบในบางส่วน เช่น ข้อมูลของตำแหน่งและการย้ายตำแหน่งของเกม ในการเล่นเกมแต่ละรอบผู้เล่นแต่ละคนจะต้องเลือกแผนการในการเล่นของตนเองพร้อม ๆ กัน จากนั้นเกมจะจบลงโดยผู้เล่นแต่ละคนจะได้รับผลได้หรือผลเสียที่เกิดขึ้น ขึ้นอยู่กับลักษณะการเลือกแผนการของผู้เล่นทั้งหมด การเลือกแผนการเล่นนั้นผู้เล่นแต่ละคนจะทำการเลือกจากเซตของแผนการทั้งหมด (strategic set) ซึ่งเซตของแผนการเล่นนี้จะถูกสร้างขึ้นจากผู้เล่นแต่ละคนโดยคำนึงถึงผลจากผู้เล่นคนอื่น ๆ และตัวเลือกในการเลือกแผนการเล่นของตนเอง

กลยุทธ์การแข่งขันมี 2 ประเภท คือ

1. กลยุทธ์แบบบริสุทธิ์ (pure strategy) คือกลยุทธ์ซึ่งผู้แข่งขันจะตัดสินใจเลือกแผนการใดแผนการหนึ่งเพียงแผนการเดียวเท่านั้นในการเข้าแข่งขันแต่ละครั้ง โดยแผนการที่ใช้จะขึ้นกับผลรับที่จะได้รับและข้อมูลการเล่นเกมของฝ่ายตรงข้าม

2. กลยุทธ์แบบผสม (mixed strategy) คือกลยุทธ์ซึ่งผู้แข่งขันนำแผนการออกมาใช้ในแต่ละครั้ง โดยขึ้นกับการกระจายความน่าจะเป็น (probability distribution) นั่นคือในแต่ละครั้งของการแข่งขัน ผู้เข้าร่วมแข่งขันจะเลือกใช้แผนการที่มีมากกว่าหนึ่งแผนการตามความน่าจะเป็นที่แผนการนั้น ๆ จะถูกเลือก

2.1.1 เกมการแข่งขันสองคน โดยผลรวมเป็นศูนย์

เกมการเล่นผลรวมเป็นศูนย์เป็นกรณีเฉพาะของเกมการเล่นผลรวมคงที่ (ซึ่งผู้เล่นแต่ละฝ่ายไม่สามารถที่จะเพิ่มหรือลดปริมาณผลประโยชน์จากการแข่งขันได้) ในเกมการแข่งขันสองคน โดยผลรวมเป็นศูนย์นั้นผู้เล่นทั้งสองฝ่ายจะได้รับผลประโยชน์จากเกมรวมกันเท่ากับศูนย์เสมอ ไม่ว่าจะเลือกแผนการในการเล่นเกมอย่างไรก็ตาม หรือกล่าวได้ว่าปริมาณผลประโยชน์ที่เสียจากผู้เล่นคนหนึ่ง จะเป็นผลประโยชน์ที่ผู้เล่นอีกฝ่ายหนึ่งได้รับเสมอ ตัวอย่างของเกมลักษณะนี้ได้แก่ เกมโป๊กเกอร์ เกมโยนเหรียญ และ เกมหมากรุก

ลักษณะโดยทั่วไปของเกมการแข่งขันสองคน โดยผลรวมเป็นศูนย์ที่มีจำนวนแผนการเล่นจำกัดจะมีลักษณะดังนี้

- มีผู้เล่นสองคนเป็นผู้เล่นคนที่ 1 และผู้เล่นคนที่ 2
- ผู้เล่นคนที่ 1 มีเซตของแผนการเล่นเป็น $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ จากแผนการเล่นที่เป็นไปได้ทั้งหมด m แผนการ
- ผู้เล่นคนที่ 2 มีเซตของแผนการเล่นเป็น $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ จากแผนการเล่นที่เป็นไปได้ทั้งหมด n แผนการ
- ผู้เล่นแต่ละคนจะมีค่าผลรับที่แตกต่างกันสำหรับคู่การกระทำ (α_i, β_j) ค่าผลรับสำหรับผู้เล่นคนที่ 1 ซึ่งเป็นค่าผลรับที่ผู้เล่นคนที่ 1 จะได้รับจากผู้เล่นคนที่ 2 จะสามารถแสดงได้ด้วยสัญลักษณ์ $M(\alpha_i, \beta_j)$ โดยเขียนย่อเป็น a_{ij} ดังนั้นค่าผลรับสำหรับผู้เล่นคนที่ 2 ซึ่งเป็นค่าผลรับที่ผู้เล่นคนที่ 2 จะได้รับจากผู้เล่นคนที่ 1 จะมีค่าเป็น $-a_{ij}$ และเนื่องจากค่าผลรับนั้นมีผลรวมเป็น 0 สำหรับทุกคู่การกระทำ (α_i, β_j) ดังนั้นเกมนี้จึงเรียกว่าเกมผลรวมเป็นศูนย์ (zero sum game)

โดยทั่วไปแล้ว เกมการแข่งขันสองคนโดยผลรวมเป็นศูนย์นั้นจะนิยมแสดงผลรับจากการเล่นเกมด้วยเมทริกซ์ ซึ่งเรียกว่า ตารางผลรับ (payoff matrix) โดยกำหนดให้ผู้เล่นคนที่ 1 เป็นผู้เล่นแถว และผู้เล่นคนที่ 2 เป็นผู้เล่นหลัก ผู้เล่นแต่ละคนจะมีแผนการเล่นของตนเองตามจำนวนแถวหรือหลักที่ปรากฏบนตารางผลรับ ผลลัพธ์จากการเล่นจะถูกแสดงด้วยค่าตัวเลขที่อยู่ในแต่ละตำแหน่งของตาราง โดยค่าที่ปรากฏในตาราง จะถือว่าเป็นค่าผลรับที่ผู้เล่นคนที่ 1 จะได้รับจากผู้เล่นคนที่ 2 ดังตัวอย่างแสดงในรูปที่ 2.2 ซึ่งกำหนดให้ผู้เล่นคนที่ 1 เป็นผู้เล่น A และผู้เล่นคนที่ 2 เป็นผู้เล่น B

ตารางผลรับข้างต้น แสดงตัวอย่างของรูปแบบการเล่นเกมและผลรับ โดยมีผลรับของเกมคือ $M(1,1) = -2, M(1,2) = 0, M(2,1) = 2, M(2,2) = 10$

		B	
		1	2
A	1	-2	0
	2	2	10

รูปที่ 2.2 ตัวอย่างตารางผลรับ

- ผู้เล่นคนที่ 1 สามารถเลือกแผนการเล่นผสม ด้วยการใช้แผนการ α_1 ด้วยค่าความน่าจะเป็น x_1, α_2 ด้วยความน่าจะเป็น $x_2, \ldots, \alpha_m$ ด้วยค่าความน่าจะเป็น x_m โดยที่

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \text{ และ } x_i \geq 0 \tag{2.1}$$

โดยทั่วไป เราสามารถเขียนแผนการเล่นดังแสดงข้างต้นด้วยแผนการสุ่ม $\mathbf{x} = (x_1\alpha_1, x_2\alpha_2, \ldots, x_m\alpha_m)$ และเราจะเรียกแผนการที่ให้น้ำหนักกับแผนการใดแผนการหนึ่ง $(0\alpha_1, 0\alpha_2, \ldots, 1\alpha_i, \ldots, 0\alpha_m)$ ว่าเป็นแผนการบริสุทธิ์ α_i เราสามารถเขียนเซตของแผนการเล่นสุ่มที่เป็นไปได้ทั้งหมดของผู้เล่นคนที่ 1 ได้ด้วยสัญลักษณ์ X_m (เมื่อ m เป็นจำนวนแผนการทั้งหมดที่ผู้เล่นคนที่ 1 สามารถเลือกได้)

- แผนการสุ่มของผู้เล่นคนที่ 2 จะสามารถเขียนได้เป็น $\mathbf{y} = (y_1\beta_1, y_2\beta_2, \ldots, y_n\beta_n)$ โดยที่

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \text{ และ } y_j \geq 0 \tag{2.2}$$

เช่นเดียวกับผู้เล่นคนที่ 1 ผู้เล่นคนที่ 2 สามารถใช้แผนการบริสุทธิ์ β_j ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแผนการผสมได้เป็น $(0\beta_1, 0\beta_2, \ldots, 1\beta_j, \ldots, 0\beta_n)$ และเซตของแผนการเล่นสุ่มที่เป็นไปได้ทั้งหมดของผู้เล่นคนที่ 2 จะเขียนได้ด้วยสัญลักษณ์ Y_n (เมื่อ n เป็นจำนวนแผนการทั้งหมดที่ผู้เล่นคนที่ 2 สามารถเลือกได้)

- สำหรับแต่ละคู่ของแผนการสุ่ม $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ค่าผลรับ $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ที่ผู้เล่นคนที่ 1 ได้รับจากผู้

เล่นคนที่ 2 จะนิยามโดย

$$M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \tag{2.3}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} y_j (\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}) \tag{2.4}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j) \tag{2.5}$$

โดยที่ค่าผลรับที่ผู้เล่นคนที่สองจะได้รับคือ $-M(\mathbf{x},\mathbf{y})$ กำหนดให้

$$M(\alpha_i,\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \tag{2.6}$$

แทนค่าผลรับที่ผู้เล่นคนที่ 1 จะได้รับจากผู้เล่นคนที่ 2 เมื่อผู้เล่นคนที่ 1 เล่นแผนการบริสุทธิ์ α_i และ ผู้เล่นคนที่ 2 เล่นแผนการสุ่ม $\mathbf{y}$ ในทางกลับกัน เมื่อผู้เล่นคนที่ 1 เลือกเล่นแผนการสุ่ม $\mathbf{x}$ และผู้เล่นคนที่ 2 เลือกเล่นแผนการบริสุทธิ์ β_j ค่าผลรับที่ผู้เล่นคนที่ 1 จะได้รับจากผู้เล่นคนที่ 2 จะสามารถเขียนได้เป็น

$$M(\mathbf{x},\beta_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \tag{2.7}$$

และจะเห็นได้ว่า

$$M(\alpha_i,\beta_j) = a_{ij} \tag{2.8}$$

2.1.2 ทฤษฎีขีดต่ำสุดของขั้นสูง

ในเกมการแข่งขันสองคน ผลรวมเป็นศูนย์ ที่มีผู้เล่นสองคน เป็นผู้เล่นคนที่ 1 และผู้เล่นคนที่ 2 หากแผนการเล่นของผู้เล่นทั้งสองมีจำนวนจำกัดเราจะเรียกเกมประเภทนี้ว่าเป็นเกมการแข่งขันสองคน ผลรวมเป็นศูนย์แบบจำกัด (finite two-person zero-sum game) ซึ่งในเกมประเภทนี้ สามารถที่จะใช้ทฤษฎีขีดต่ำสุดของขั้นสูงในการหาจุดสมดุลของเกมได้ [21] โดยทฤษฎีกล่าวว่า ถ้าเกมการแข่งขันสองคนโดยผลรวมเป็นศูนย์เป็นแบบจำกัดแล้ว

1. จะมีค่า V ซึ่งเป็นค่าของเกม (value of game) โดยค่าของเกมนี้เป็นค่าที่ผู้เล่นทั้งสองพอใจและเป็นค่าที่รับประกันผู้เล่นทั้งสองฝ่ายว่า ในการเล่นทั้งหมดโดยเฉลี่ยแล้วจะได้รับค่าผลรับไม่แย่ไปกว่าค่านี้

2. จะมีแผนการเล่นผสมสำหรับผู้เล่นคนที่ 1 ซึ่งทำให้ผู้เล่นคนที่ 1 ได้รับผลประโยชน์โดยเฉลี่ยอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ V ไม่ว่าผู้เล่นคนที่ 2 จะเลือกใช้แผนการเล่นใดก็ตาม ซึ่งแผนของผู้เล่นคนที่ 1 เป็นการหาค่ามากที่สุดจากผลได้น้อยที่สุด (maximize the minimum gain)

3. จะมีแผนการเล่นผสมสำหรับผู้เล่นคนที่ 2 ซึ่งทำให้ผู้เล่นคนที่ 2 เสียผลประโยชน์โดยเฉลี่ยอย่างมากที่สุดเท่ากับ V ไม่ว่าผู้เล่น คนที่ 1 จะเลือกใช้แผนการเล่นใดก็ตาม ซึ่งแผนของผู้เล่นคนที่ 2 เป็นการหาค่าน้อยที่สุดจากผลเสียที่มากที่สุด (minimize the maximum loss)

จากหลักเกณฑ์ข้างต้น จะเห็นได้ว่าทุกเกมการแข่งขันสองคนผลรวมเป็นศูนย์แบบจำกัด นั้นผู้เล่นคนที่ 1 และคนที่ 2 จะมีแผนการเล่นที่สอดคล้องกับค่าของเกมที่ทำให้ทั้งผู้เล่นคนที่ 1 และ 2 พอใจในผลรับจากการแข่งขัน โดยแผนที่ทั้งคู่นำมาเล่นนี้เรียกว่าแผนการเล่นแบบขีดต่ำสุดของขั้นสูง (minimax strategy) หรือแผนการเล่นที่เหมาะสมที่สุด (optimal strategy) เราสามารถอธิบายถึงทฤษฎีบทขีดต่ำสุดของขั้นสูง ได้ดังนี้ [21]

- เป้าหมายของผู้เล่นคนที่ 1 คือการเลือกแผนการสุ่ม $\mathbf{x}$ จาก X_m เพื่อที่จะทำให้ค่าผลรับ $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ มีค่ามากที่สุด ในขณะเดียวกัน ผู้เล่นคนที่ 2 ก็จะมีเป้าหมายในการเลือกแผนการสุ่ม $\mathbf{y}$ จาก Y_n เพื่อที่จะทำให้ค่าผลรับ $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ มีค่าน้อยที่สุด โดยที่ผู้เล่นแต่ละฝ่ายจะเลือกแผนการที่เหมาะสมโดยปราศจากการพิจารณาถึงการเลือกแผนการของผู้แข่งขันฝ่ายตรงข้าม

- สำหรับแต่ละแผนการสุ่ม $\mathbf{x}$ ที่เป็นสมาชิกของเซต X_m ระดับความปลอดภัยของผู้เล่นคนที่ 1 จะถูกนิยามโดย

$$v_1(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}} M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{2.9}$$

เนื่องจาก

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} y_j (\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} y_j M(\mathbf{x}, \beta_j) \tag{2.10}$$

เป็นผลรวมของค่าผลรับโดยเฉลี่ยของแต่ละแผนการเล่นบริสุทธิ์ n แผนการ ของผู้เล่นคนที่ 2 $(M(\mathbf{x}, \beta_j), j = 1, 2, \ldots, n)$ ดังนั้นค่าระดับความปลอดภัยของผู้เล่นคนที่ 1 จะเป็นค่าที่น้อยที่สุดเมื่อผู้เล่นคนที่ 2 เลือกแผนการในรูปแบบของแผนการเล่นบริสุทธิ์ที่ให้ค่าผลรับน้อยที่สุด นั่นคือ

$$v_1(\mathbf{x}) = min[M(\mathbf{x}, \beta_1), M(\mathbf{x}, \beta_2), \ldots, M(\mathbf{x}, \beta_n)] \tag{2.11}$$

เราสามารถตีความได้ว่าค่า $v_1(\mathbf{x})$ เป็นค่าผลรับที่ผู้เล่นคนที่ 1 จะได้รับเมื่อผู้เล่นคนที่ 1 เปิดเผยแผนการเล่นของตัวเอง $\mathbf{x}$ ให้กับผู้เล่นคนที่ 2 และผู้เล่นคนที่ 2 สามารถที่จะเลือกแผนการตอบโต้ที่เหมาะสมที่สุดกับแผนการ $\mathbf{x}$ ดังนั้น ถ้าหากผู้เล่นคนที่ 1 ต้องการที่จะทำให้ค่าระดับความปลอดภัยของตนเองมีค่ามากที่สุดแล้ว ผู้เล่นคนที่ 1 จะต้องเลือกแผนการ $\mathbf{x}^*$ ที่

$$v_1(\mathbf{x}^*) \geq v_1(\mathbf{x}), \text{สำหรับทุก ๆ ค่า } \mathbf{x} \text{ ที่เป็นไปได้ใน } X_m \tag{2.12}$$

ดังนั้นถ้าให้ $v_1(\mathbf{x}^*) = v_1$ จะได้ว่า

$$v_1 = v_1(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}} v_1(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad (2.13)$$

จะเห็นได้ว่า $v_1(\mathbf{x}^*) = v_1$ จะหมายถึง $M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq v_1$ สำหรับทุก ๆ แผนการผสม $\mathbf{y}$ ที่เป็นไปได้ด้วย เราจะเรียกแผนการสุ่ม $\mathbf{x}^*$ ซึ่งพยายามทำให้ค่าระดับความปลอดภัยของผู้เล่นคนที่ 1 มีค่าสูงที่สุด ว่าแผนการสุ่มขีดสูงสุดของขั้นต่ำ (maximin strategy) สำหรับผู้เล่นคนที่ 1 แผนการสุ่มขีดสูงสุดของขั้นต่ำ จะมีเสมอสำหรับทุกเกมการแข่งขัน *แต่ไม่จำเป็นที่จะมีได้เพียงแค่รูปแบบเดียว* เมื่อให้ θ_1 แทนเซตของชุดแผนการขีดสูงสุดของขั้นต่ำ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดแล้ว ค่า $\mathbf{x}^*$ จะมีค่าระดับความปลอดภัยเป็น v_1 ดังนั้นถ้า $\mathbf{x}'$ ไม่ได้อยู่ในเซต θ_1 แล้ว $\mathbf{x}'$ จะมีค่าระดับความปลอดภัยที่น้อยกว่า v_1

- ในทางตรงกันข้าม เป้าหมายของผู้เล่นคนที่ 2 คือการทำให้ค่าผลรับที่ผู้เล่นคนที่ 1 จะได้รับมีค่าน้อยที่สุด ถ้าผู้เล่นคนที่ 2 เลือกแผนการเล่นสุ่ม $\mathbf{y}$ ผู้เล่นคนที่ 1 จะไม่สามารถได้รับค่าผลรับที่มากกว่า

$$v_2(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}} M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad (2.14)$$

ซึ่งเราจะนิยามค่า v_2 เป็นค่าระดับความปลอดภัยของผู้เล่นคนที่ 2 โดยผู้เล่นคนที่ 2 จะพยายามทำให้ค่าระดับความปลอดภัยมีค่าน้อยที่สุด โดยกำหนดให้ $\mathbf{y}^*$ เป็น

$$\begin{aligned} v_2(\mathbf{y}^*) &\leq v_2(\mathbf{y}), \text{สำหรับทุกแผนการสุ่ม } \mathbf{y} \text{ ที่เป็นสมาชิกของ } Y_n && (2.15)\\ v_2(\mathbf{y}^*) &= \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) && (2.16)\end{aligned}$$

เมื่อกำหนดให้ $v_2 = v_2(\mathbf{y}^*)$ และจะได้ว่า

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq v_2, \text{ สำหรับทุกแผนการสุ่ม } \mathbf{x} \qquad (2.17)$$

สำหรับผู้เล่นคนที่ 2 แผนการสุ่ม $\mathbf{y}^*$ จะเรียกว่าแผนการสุ่มขีดต่ำสุดของขั้นสูง (minimax strategy) กำหนดให้ θ_2 แทนเซตของแผนการสุ่มขีดต่ำสุดของขั้นสูง ทั้งหมดที่เป็นไปได้สำหรับผู้เล่นคนที่ 2 ดังนั้นถ้า $\mathbf{y}^*$ เป็นสมาชิกของเซต θ_2 ผู้เล่นคนที่ 1 จะสามารถทำให้ค่าผลรับที่ตนจะได้รับสูงที่สุดไม่เกินค่าระดับความปลอดภัย v_2 โดยการเล่นแผนการสุ่ม $\mathbf{y}^*$ สำหรับผู้เล่นคนที่ 2 อย่างไรก็ตาม ถ้าหากผู้เล่นคนที่ 2 เล่นแผนการสุ่ม $\mathbf{y}'$ ซึ่งไม่ได้อยู่ในเซตของ θ_2 ผู้เล่นคนที่ 1 สามารถที่จะหาแผนการสุ่มที่ดีที่สุดเพื่อทำให้ผู้เล่นคนที่ 1 ได้ค่าผลรับที่มากกว่า v_2 ได้

- ดังนั้นถ้าผู้เล่นคนที่ 1 ใช้แผนการสุ่มขีดสูงสุดของขั้นต่ำ ผู้เล่นคนที่ 1 จะสามารถรับประกันได้ว่าค่าผลรับที่ตนเองจะได้รับจะมีค่าไม่น้อยกว่า v_1 และเช่นเดียวกันกับผู้เล่นคนที่ 2 ถ้าผู้เล่นคนที่ 2 เลือกเล่นแผนการสุ่มขีดต่ำสุดของขั้นสูง แล้วผู้เล่นคนที่ 2

จะสามารถรับประกันได้ว่าค่าผลรับที่ผู้เล่นคนที่ 1 จะได้รับจากผู้เล่นคนที่ 2 จะมีค่าไม่มากไปกว่า v_2 ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq v_2; \forall \mathbf{x} \in X_m \quad (2.18)$$

$$M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq v_2 \quad (2.19)$$

$$v_1 \leq M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}); \forall \mathbf{y} \in Y_n \quad (2.20)$$

$$v_1 \leq M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad (2.21)$$

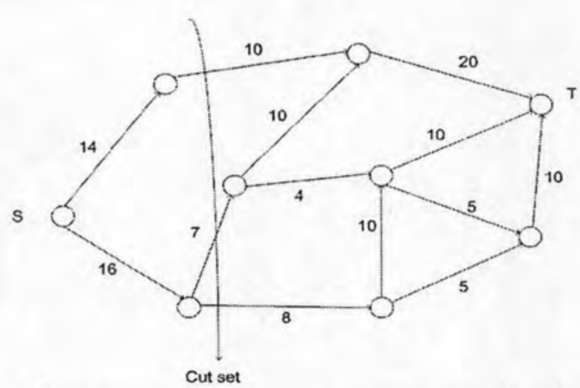
$$v_1 \leq v_2 \quad (2.22)$$

- คู่ของแผนการสุ่ม $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ จะเป็นแผนการที่อยู่ในจุดสมดุลของแนช (Nash equilibrium) ก็ต่อเมื่อแผนการสุ่ม $\mathbf{x}'$ นั้นดีเท่ากับแผนการสุ่ม $\mathbf{y}'$ โดยที่

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \leq M(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \leq M(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \quad (2.23)$$

จะเห็นได้ว่าแผนการสุ่ม $\mathbf{x}'$ และ แผนการสุ่ม $\mathbf{y}'$ จะอยู่ในจุดสมดุลถ้าผู้เล่นทั้งสองคนไม่ต้องการเปลี่ยนแปลงรูปแบบแผนการสุ่มที่ตนใช้อยู่ เนื่องจากผู้เล่นทั้งสองคนต่างพอใจกับค่าผลรับที่ตนได้รับ หรืออาจกล่าวได้ว่า จุดสมดุลของแนชก็คือคู่คำตอบของแผนการสุ่มที่ไม่มีผู้เล่นใดมีเหตุผลโน้มน้าวใจให้เปลี่ยนการเลือกแผนการสุ่มที่ตนใช้อยู่นั่นเอง

2.2 ทฤษฎีการไหลสูงสุด



รูปที่ 2.3 ระบบโครงข่ายและความจุของข่ายเชื่อมโยง

ทฤษฎีการไหลสูงสุด [19] กล่าวว่าปริมาณข้อมูลที่จะสามารถไหลได้สูงสุดจากโหนดต้นทาง S ไปยังโหนดปลายทาง T ในระบบโครงข่าย จะเท่ากับผลรวมความจุที่น้อยที่สุดของชุดข่ายเชื่อมโยงที่เป็นเซตตัดระหว่างจุด S และจุด T โดยเซตตัดหมายถึงชุดของข่ายเชื่อมโยงที่เมื่อนำออกจากระบบโครงข่ายแล้ว จะทำให้โหนดต้นทางและโหนดปลายทางแยกออกจากกันและไม่สามารถที่จะเชื่อมต่อกันได้ ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 2.3

จากรูปที่ 2.3 จะเห็นได้ว่าปริมาณข้อมูลที่จะสามารถไหลไปได้ทั้งหมดจากจุด S ไปยังจุด T นั้นจะถูกจำกัดที่ขนาดปริมาณข้อมูล ไม่เกินค่าผลรวมความจุของกลุ่มข่ายเชื่อมโยงที่เป็นเซตตัดที่มีค่ารวมกันน้อยที่สุดคือ 10 + 7 + 8 = 25 หน่วย

2.3 การส่งข้อมูลหลายวิถี

เมื่อโหนดหนึ่งต้องการที่จะส่งข้อมูลไปสู่โหนดอื่นบนโครงข่ายเดียวกันนั้น โครงข่ายจำเป็นที่จะต้องมีกระบวนการจัดหาเส้นทางการส่งข้อมูล (routing) เพื่อที่จะทำการส่งข้อมูลไปบนเส้นทางที่ถูกต้องรวดเร็ว และเชื่อถือได้ โดยทั่วไปนั้น เราเตอร์จะส่งข้อมูลไปบนเส้นทางที่สั้นที่สุดเส้นทางเดียวจากต้นทางไปยังปลายทาง ซึ่งหมายความว่าถ้าหากมีความเสียหายของข่ายเชื่อมโยงที่เป็นทางผ่านของข้อมูลแล้ว (เกิดจากอุบัติเหตุหรือการโจมตีด้วยความตั้งใจ) การส่งข้อมูลในขณะนั้น ก็จะใช้งานไม่ได้และเกิดการสูญหายของข้อมูลขึ้น ถึงแม้ว่าโพรโตคอลจัดหาเส้นทางจะสามารถรับรู้ถึงความเสียหาย และเปลี่ยนแปลงไปใช้เส้นทางอื่นเพื่อหลีกเลี่ยงเส้นทางนั้น แต่การทำเช่นนี้ก็ยังต้องใช้เวลาที่ขึ้นอยู่กับความถี่ของการตรวจสอบและเปลี่ยนแปลงตารางการจัดเส้นทางของเราเตอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับระบบโครงข่ายที่ใช้วิธีการปรับปรุงตารางการส่งข้อมูล (routing table) ที่ใช้โพรโตคอลการจัดสรรเส้นทางแบบรู้เวกเตอร์ระยะทาง (distance vector routing protocol) ซึ่งเป็นโพรโตคอลการจัดสรรเส้นทางที่ใช้เวลาในการปรับปรุงตารางการส่งข้อมูลเป็นเวลานานโดยเวลาที่ใช้จะขึ้นกับสภาพการเชื่อมต่อและปริมาณการใช้งานของระบบโครงข่าย ดังนั้นปัญหาดังกล่าวจึงมีความสำคัญโดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับระบบโครงข่ายที่มีโอกาสเกิดความเสียหายบ่อยครั้งหรือมีการดูแลที่จำเป็นต้องปิดข่ายเชื่อมโยงเพื่อทำการตรวจสอบเป็นประจำ วิธีการแก้ปัญหาการสูญหายของข้อมูลในขณะที่ระบบถูกโจมตีวิธีหนึ่งคือการใช้เส้นทางมากกว่า 1 เส้นทางในการส่งข้อมูล หรือที่เรียกกันว่าวิธีการส่งข้อมูลหลายวิถี (multi-path routing) [20] ซึ่งสามารถทำได้ 2 วิธีด้วยกันดังนี้

2.3.1 การกระจายข้อมูล

การกระจายข้อมูล (flooding) เป็นวิธีการส่งข้อมูลให้แต่ละแพ็กเก็ตใช้เส้นทางผ่านที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายที่สุดของการส่งข้อมูลหลายเส้นทาง ที่จะทำให้การส่งข้อมูลมีความทนทานต่อความเสียหายของอุปกรณ์บนระบบโครงข่ายอย่างดีที่สุด อย่างไรก็ตามวิธีการกระจายข้อมูลนั้น มีข้อเสียที่สำคัญคือ การทำให้เกิดปริมาณทราฟฟิกอย่างมากบนระบบโครงข่าย และข้อมูลสามารถถูกดักฟังได้ง่าย ซึ่งส่งผลกระทบต่อความปลอดภัยของข้อมูล

2.3.2 การส่งข้อมูลแบบเฟ้นสุ่ม

วิธีการส่งข้อมูลแบบเฟ้นสุ่ม (stochastic routing) [20, 22] เป็นวิธีการส่งข้อมูลโดยการสุ่มเลือกข่ายเชื่อมโยง ที่เป็นทางเลือกทั้งหมดเพื่อหลีกเลี่ยงความเสี่ยงที่จะใช้เส้นทางที่เกิดความเสียหายของอุปกรณ์ในโครงข่าย โดยวิธีนี้จะทำให้ระบบสามารถลดความเสี่ยงต่อความเสียหาย หรือการถูกโจมตีด้วยความตั้งใจได้ ซึ่งจะสามารถช่วยเพิ่มความเชื่อถือได้ของระบบโดยรวม และนอกจากที่จะสุ่มเลือกข่ายเชื่อมโยงในการส่งข้อมูลแล้วเราสามารถที่จะสุ่มเลือกเป็นเส้นทางแทนได้ด้วยเช่นกัน

ในทางปฏิบัติจริง วิธีการส่งข้อมูลหลายวิถี ได้ถูกนำไปใช้ในการตัดสินใจของอุปกรณ์เราเตอร์ เมื่อมีเส้นทางที่ใช้ในการส่งข้อมูลไปหาปลายทางเดียวกันมากกว่า 1 เส้นทาง ซึ่งมีค่าใช้

จ่ายในการเดินทางที่เท่ากัน เราเตอร์จะใช้วิธีการแบ่งปริมาณการส่งข้อมูลไปบนเส้นทางเหล่านั้นอย่างเท่าเทียมกัน ซึ่งเราเรียกวิธีการนี้ว่า การแบ่งภาระงาน (load balancing) นอกจากนั้นในโพรโตคอลการจัดสรรเส้นทางบางประเภท สามารถที่จะทำการส่งข้อมูลแบบหลายวิถีได้ ถึงแม้ว่าเส้นทางในการส่งข้อมูลจะมีค่าใช้จ่ายในการส่งที่แตกต่างกัน ทั้งนี้เพื่อจุดประสงค์ในการแบ่งภาระงานให้กับแต่ละเส้นทางอย่างมีสัดส่วน หรือเพื่อเพิ่มความเชื่อถือได้ให้กับข้อมูลที่ส่ง ซึ่งเป็นลักษณะวิธีการส่งข้อมูลหลายเส้นทางแบบเฟ้นสุ่ม กล่าวได้ว่า วิธีการแบ่งภาระงานเป็นรูปแบบหนึ่งของการส่งข้อมูลหลายเส้นทางแบบเฟ้นสุ่ม ซึ่งจะถูกนำมาใช้ก็ต่อเมื่อมีเส้นทางในการส่งข้อมูลไปยังปลายทางเดียวกันที่มากกว่าหนึ่งเส้นทางนั้นเอง

2.4 กำหนดการเชิงเส้น

ในทางคณิตศาสตร์ ปัญหากำหนดการเชิงเส้น [23] จะเกี่ยวกับการทำการหาค่าเหมาะที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมายที่มีลักษณะเชิงเส้น ภายใต้เงื่อนไขของสมการและอสมการเชิงเส้น ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่สามารถนำมาช่วยในการหารูปแบบที่ดีที่สุดในการที่จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ตัวอย่างเช่น หาค่ากำไรที่มากที่สุด หรือค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด โดยมีเงื่อนไขของความต้องการอยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น รูปแบบทั่วไปของกำหนดการเชิงเส้นจะประกอบไปด้วยส่วนสำคัญ 3 ส่วนด้วยกัน ดังนี้

- ฟังก์ชันเชิงเส้นที่ต้องการที่จะทำให้มีค่ามากที่สุด ตัวอย่างเช่น

$$\text{maximize } c_1x_1 + c_2x_2$$

- เงื่อนไขของปัญหา ตัวอย่างเช่น

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \tag{2.24}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \tag{2.25}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 \tag{2.26}$$

- ตัวแปรที่มีค่าไม่น้อยกว่า 0 ตัวอย่างเช่น

$$x_1 \geq 0 \tag{2.27}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{2.28}$$

โดยทั่วไป การเขียนปัญหากำหนดการเชิงเส้น นิยมที่จะแสดงอยู่ในรูปของเมทริกซ์ดังนี้

$$\text{maximize } \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

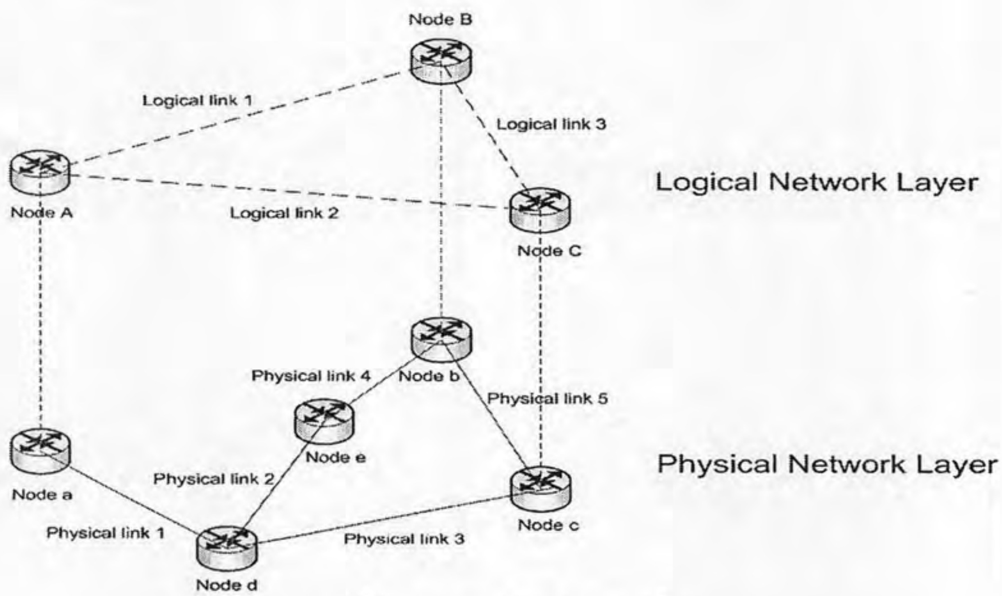
ภายใต้เงื่อนไข

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

โดยที่ $\mathbf{x}$ แทนเวกเตอร์ของตัวแปร ในขณะที่ $\mathbf{c}$ และ $\mathbf{b}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธิ์และ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์ของค่าสัมประสิทธิ์ โดยที่นิพจน์ที่ต้องทำให้มีค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุดจะถูกเรียกว่า ฟังก์ชันเป้าหมาย (objective function) ซึ่งในที่นี้คือ $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ และสมการ $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ที่เป็นเงื่อนไขการกำหนดขอบเขตของค่าตัวแปรต่าง ๆ ในการทำค่าฟังก์ชันเป้าหมายให้เหมาะสมที่สุด

ระเบียบวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นสามารถนำไปใช้ได้ในการศึกษาในหลายแขนง โดยส่วนใหญ่แล้วจะใช้ในการวิเคราะห์วางแผนธุรกิจหรือในทางเศรษฐศาสตร์ อย่างไรก็ตาม ระเบียบวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นยังสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมได้อีกด้วย เช่น วิศวกรรมการขนส่ง วิศวกรรมพลังงาน วิศวกรรมสื่อสาร และ วิศวกรรมการผลิต ในทางวิศวกรรมการสื่อสาร การแก้ปัญหาเชิงเส้นได้รับการยอมรับ และถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหาการวางแผนระบบโครงข่าย รวมทั้งการจัดหาเส้นทางข้อมูลที่ดีที่สุด

2.5 ระบบโครงข่ายหลายชั้น



รูปที่ 2.4 ระบบโครงข่ายสองชั้น

ระบบโครงข่ายสื่อสารที่ทำการส่งข้อมูลในทางปฏิบัติจริงนั้น จะมีลักษณะเป็นโครงข่ายหลายชั้น (multi-layer network) ซึ่งในที่นี้จะขอเสนอเพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ โดยพิจารณาแค่สองชั้นเท่านั้นซึ่งระบบโครงข่ายจะมีลักษณะดังในรูปที่ 2.4 โดยชั้นบนเรียกว่าโครงข่ายชั้นตรรกะซึ่งเป็นชั้นที่มองการเชื่อมต่อของข้อมูลจากจุดต้นกำเนิดไปยังจุดปลายทาง ในขณะที่ชั้นล่างเรียกว่าโครงข่ายชั้นกายภาพ โดยคู่โหนดที่ทำการเชื่อมต่อในชั้นตรรกะจำเป็นที่จะต้องใช้เส้นทางในการส่งข้อมูลในชั้นกายภาพ ในการส่งผ่านข้อมูลไปสู่คู่โหนดที่อยู่ในชั้นตรรกะปลายทาง จากรูปจะเห็นได้ว่าการที่โหนด A บนโครงข่ายชั้นตรรกะ จะทำการส่งข้อมูลไปสู่โหนด B ซึ่งเป็นปลายทางนั้นจะต้องส่งข้อมูลผ่านเส้นทางการส่งข้อมูลชั้นกายภาพที่ $1 \rightarrow 2$

→ 4 หรือ 1 → 3 → 5 ดังนั้นหากข่ายเชื่อมโยงที่ 1 บนระบบโครงข่ายชั้นกายภาพเกิดความเสียหายขึ้น หรือปิดการใช้งานเพื่อการซ่อมบำรุงแล้ว การเชื่อมต่อระหว่างโหนด A และโหนด B จะไม่มีทางเกิดขึ้นได้เลย

สำหรับระบบโครงข่ายขนาดใหญ่ที่มีการเชื่อมต่อมากกว่า 1 คู่โหนด ความเสียหายของข่ายเชื่อมโยงเพียงข่ายเชื่อมโยงเดียวที่อยู่ในชั้นกายภาพ ก็สามารถทำให้คู่โหนดหลายคู่ ในชั้นตรรกะ ทำให้ไม่สามารถที่จะเชื่อมต่อได้เช่นกัน โดยในทางปฏิบัติจริงนั้นการเชื่อมต่อที่เกิดขึ้นจริงอาจจะมีได้มากกว่าระบบโครงข่ายเพียงแค่ 2 ชั้น ขึ้นอยู่กับว่าระบบนั้นจะถูกออกแบบมาอย่างไร