



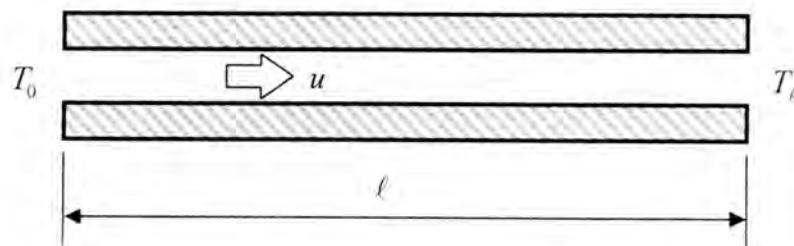
บทที่ 5

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

ในบทนี้จะเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยนำมาทดสอบกับการวิเคราะห์อุณหภูมิของปัญหาในแบบต่าง ๆ ทั้งปัญหาภายใต้สถานะอยู่ตัว (steady state problem) และสถานะชั่วครู่ (transient problem) ได้แก่ ปัญหาการวิเคราะห์อุณหภูมิในของไหลแบบหนึ่งมิติ ปัญหาการวิเคราะห์อุณหภูมิในของแข็งแบบสองมิติ และปัญหาการวิเคราะห์อุณหภูมิระหว่างของแข็งกับของไหล นอกจากนี้ยังได้แสดงถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อที่ให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดา

5.1 ปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อ

ของไหลไหลผ่านท่อที่มีความยาว ℓ ด้วยความเร็ว u คงที่ตลอดการไหล อุณหภูมิของไหลที่ทางเข้าและทางออกเท่ากับ T_0 และ T_ℓ ตามลำดับ ก่อให้เกิดปัญหาการไหลที่มีทั้งการพาและการนำความร้อนภายใต้สถานะอยู่ตัว ดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 ลักษณะปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อ

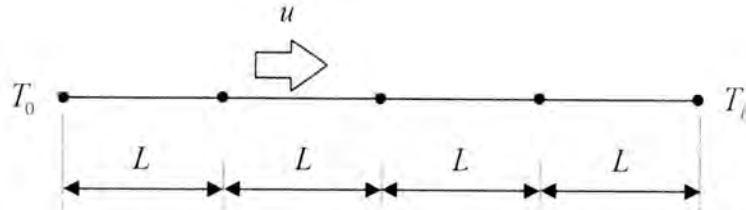
ซึ่งมีสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$-k \frac{d^2 T}{dx^2} + \rho c u \frac{dT}{dx} = 0 \quad (5.1)$$

เริ่มจากการสร้างแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ความยาวเท่ากับ L จำนวน 4 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.2 โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อ โดยกำหนดให้คุณสมบัติต่าง ๆ ที่ใช้มีค่าดังนี้ ท่อมีความยาว ℓ เท่ากับ 4 ของไหลมีสัมประสิทธิ์การนำความร้อน k ความจุความร้อนจำเพาะ c และความหนาแน่น ρ เท่ากับ 1 โดยมีเงื่อนไขขอบเขตของอุณหภูมิที่ปลายทั้งสองข้างของ

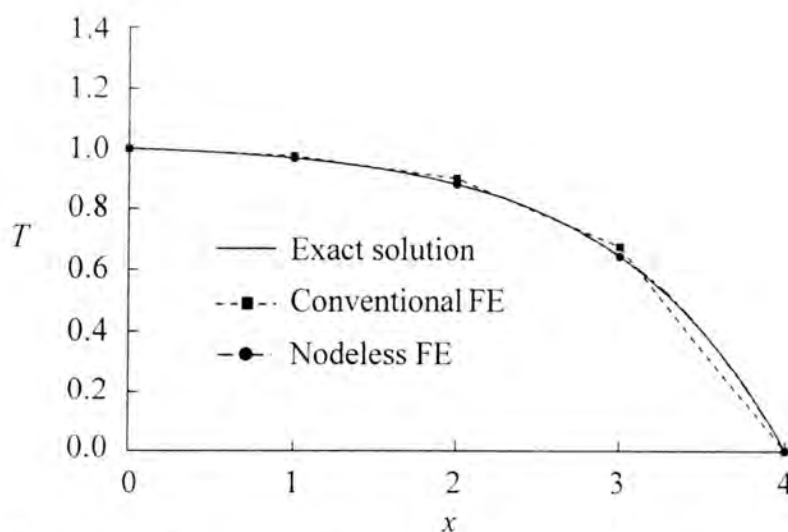
โดเมน T_0 เท่ากับ 1 และ T_l เท่ากับ 0 ผลลัพธ์ที่ได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง [15] คือ

$$T(x) = 1 - \left(\frac{1 - e^{-\frac{\rho c u}{k} x}}{1 - e^{-\frac{\rho c u}{k} l}} \right) \quad (5.2)$$



รูปที่ 5.2 แบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อ

ผลลัพธ์ที่ได้เมื่อ $u=1$ ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 5.3 และตารางที่ 5.1 จากการพิจารณาพบว่า การใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาเล็กน้อย เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของไหลภายในท่อยังมีค่าไม่สูง ผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสองวิธีจึงให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกัน เพื่อแสดงความแตกต่างของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสองวิธีให้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น จึงเพิ่มความเร็วของของไหลให้มากขึ้นเพื่อให้การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิมีค่าสูงขึ้น

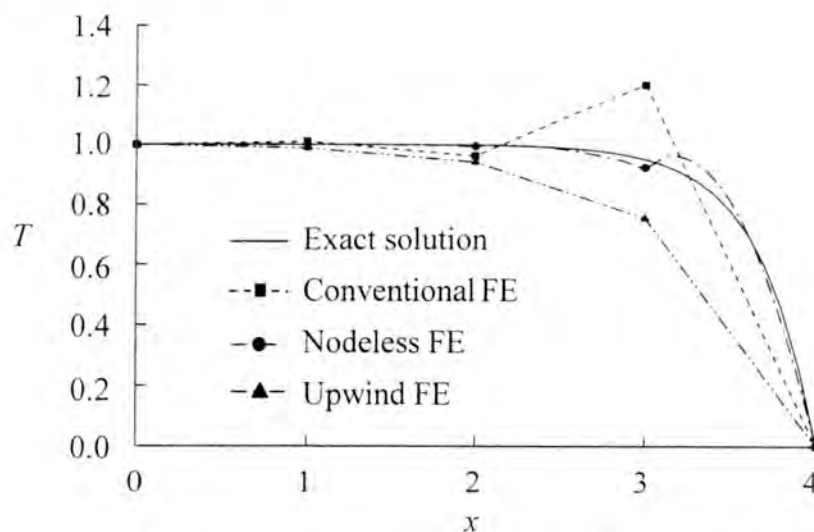


รูปที่ 5.3 อุณหภูมิของไหลสำหรับปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อ เมื่อ $u=1$

ตารางที่ 5.1 การเปรียบเทียบอุณหภูมิของของไหลสำหรับปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อ

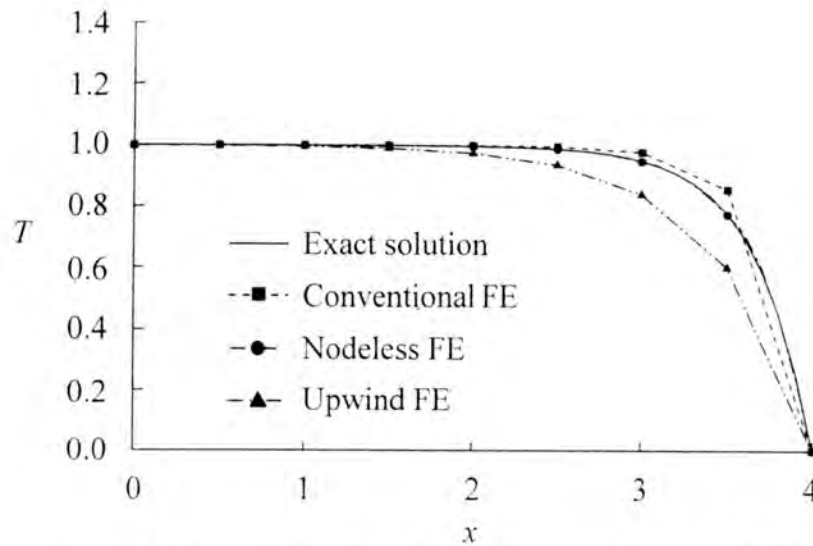
x	Temperature (percentage error)		
	Exact solution	Conventional FE	Nodeless FE
0	1.000	1.000 (0.000)	1.000 (0.000)
1	0.968	0.975 (0.729)	0.967 (0.012)
2	0.881	0.900 (2.180)	0.881 (0.035)
3	0.644	0.675 (4.827)	0.643 (0.074)
4	0.000	0.000 (0.000)	0.000 (0.000)

ผลลัพธ์จากการเพิ่มความเร็ว $u=3$ แสดงในรูปที่ 5.4 พบว่าผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อจะเกิดการสั่นของผลลัพธ์เกิดขึ้น เนื่องจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่ไม่เหมาะสมกับปัญหา โดยเฉพาะผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาคงเกิดการสั่นของผลลัพธ์อย่างชัดเจน ขณะที่ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อเกิดการสั่นของผลลัพธ์เล็กน้อย นอกจากนี้ยังแสดงผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยการใช้ฟังก์ชันน้ำหนักอัปวินด์ (upwind weighting functions) [16] ซึ่งเป็นระเบียบวิธีหนึ่งที่สามารถช่วยลดปัญหาการสั่นของผลลัพธ์ได้ แต่ความแม่นยำที่ได้จากวิธีการนี้ยังไม่ดีเมื่อเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อ

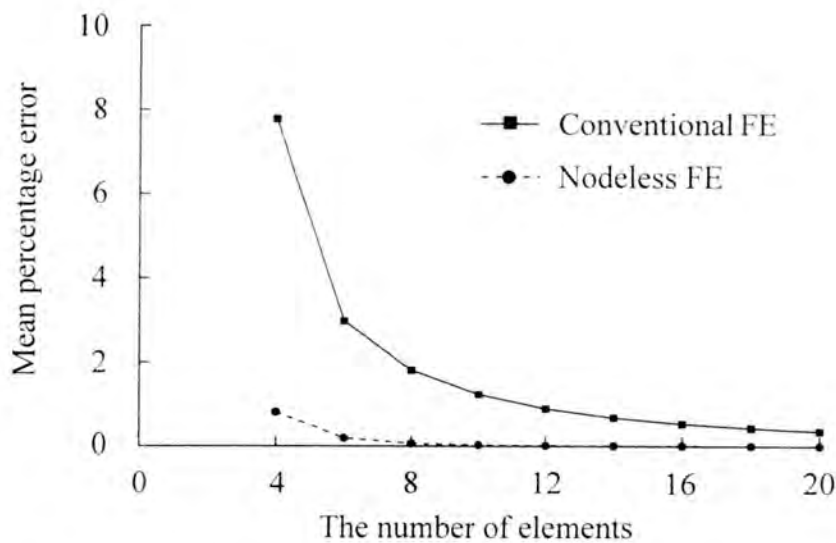


รูปที่ 5.4 อุณหภูมิของไหลสำหรับปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อ เมื่อ $u=3$ ด้วยเอลิเมนต์ 4 เอลิเมนต์

หากทำการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์เป็นสองเท่าโดยยังคงใช้ $u = 3$ เช่นเดิม จะพบว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและตัวแปรไร้จุดต่อให้ผลลัพธ์ที่ไม่เกิดการสั่น เนื่องจากได้ใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับปัญหา ผลลัพธ์ที่ได้จึงมีความแม่นยำกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยการใช้ฟังก์ชันน้ำหนักออปวินด์ โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อยังคงให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากที่สุด ดังแสดงในรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.5 คุณทงุมิของไหลสำหรับปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อ เมื่อ $u = 3$ ด้วยเอลิเมนต์ 8 เอลิเมนต์



รูปที่ 5.6 เปอร์เซนต์ความผิดพลาดเฉลี่ยจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ สำหรับปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อ เมื่อ $u = 3$

นอกจากนี้ยังได้ตรวจสอบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยที่เกิดขึ้นจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและตัวแปรไร้จุดต่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ ดังแสดงในรูปที่ 5.6 พบว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อให้ผลลัพธ์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ได้เร็วกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดา

5.2 ปัญหาการไหลรวมของของไหลแบบหนึ่งมิติ

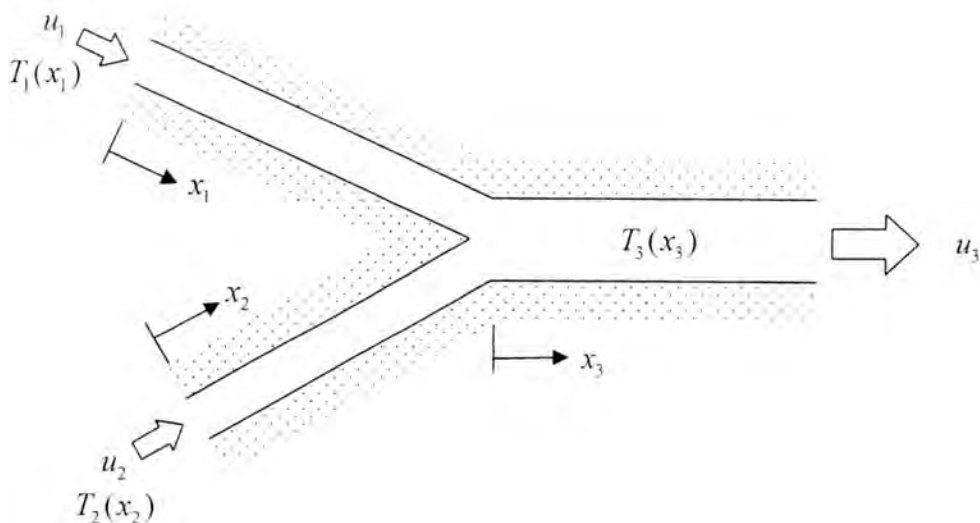
ในข้อนี้ยังคงเป็นปัญหาการไหลในหนึ่งมิติแต่ได้เพิ่มความซับซ้อนยิ่งขึ้น โดยของไหลที่มีอุณหภูมิสูง T_1 , ไหลเข้ามายังภายในท่อที่หนึ่งและของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำ T_2 , ไหลเข้ามายังภายในท่อที่สอง ของไหลทั้งสองไหลเข้ามารวมกันภายในท่อที่สามทำให้อุณหภูมิที่ทางออกของท่อที่สามมีค่าเป็น T_3 ดังแสดงในรูปที่ 5.7 เมื่อพิจารณาเป็นปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของแต่ละท่อคือ

$$-kA \frac{d^2 T}{dx^2} + \rho c u A \frac{dT}{dx} = 0 \quad (5.3)$$

ปัญหาดังกล่าวมีเงื่อนไขที่เป็นจุดเชื่อมต่อของท่อทั้งสามคือ

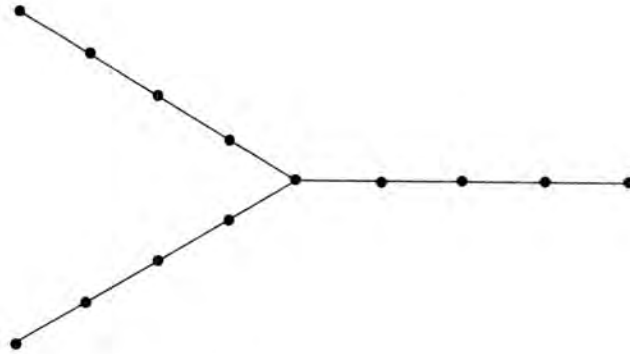
$$T_{1,o} = T_{2,o} = T_{3,i} \quad (5.4)$$

$$k_1 A_1 \frac{d^2 T_1(\ell)}{dx_1^2} + k_2 A_2 \frac{d^2 T_2(\ell)}{dx_2^2} = k_3 A_3 \frac{d^2 T_3(0)}{dx_3^2} \quad (5.5)$$



รูปที่ 5.7 ลักษณะปัญหาการไหลรวมของของไหลแบบหนึ่งมิติ

กำหนดให้ทุกท่อมีความยาว $\ell = 4$ พื้นที่หน้าตัดภายในท่อที่หนึ่งและสอง $A_1 = A_2 = 1$ ท่อที่สามมีขนาดเป็นสองเท่า $A_3 = 2$ ของไหลไหลด้วยอัตราการไหล $\dot{m}_1 = 2$ กับ $\dot{m}_2 = 1$ อุณหภูมิทางเข้า $T_{1i} = 3$ และ $T_{2i} = 1$ และอุณหภูมิทางออก $T_{3o} = 2$ โดยมีค่าคุณสมบัติต่างๆ ของของไหลดังนี้ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน $k = 1$ ความจุความร้อนจำเพาะ $c = 1$ และความหนาแน่น $\rho = 1$



รูปที่ 5.8 แบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลรวมของของไหลแบบหนึ่งมิติ

ทำการสร้างแบบไฟไนต์เอลิเมนต์โดยแต่ละท่อประกอบไปด้วยจำนวนเอลิเมนต์ 4 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.8 จากนั้นทำการหาผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาที่ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ซึ่งหาได้จาก

$$T_1(x_1) = T_{1,i} + (e^{ax_1} - 1)C_1 \quad (5.6)$$

$$T_2(x_2) = T_{2,i} + (e^{bx_2} - 1)C_2 \quad (5.7)$$

$$T_3(x_3) = T_{3,o} + (e^{cx_3} - e^{c\ell_3})C_3 \quad (5.8)$$

โดยที่

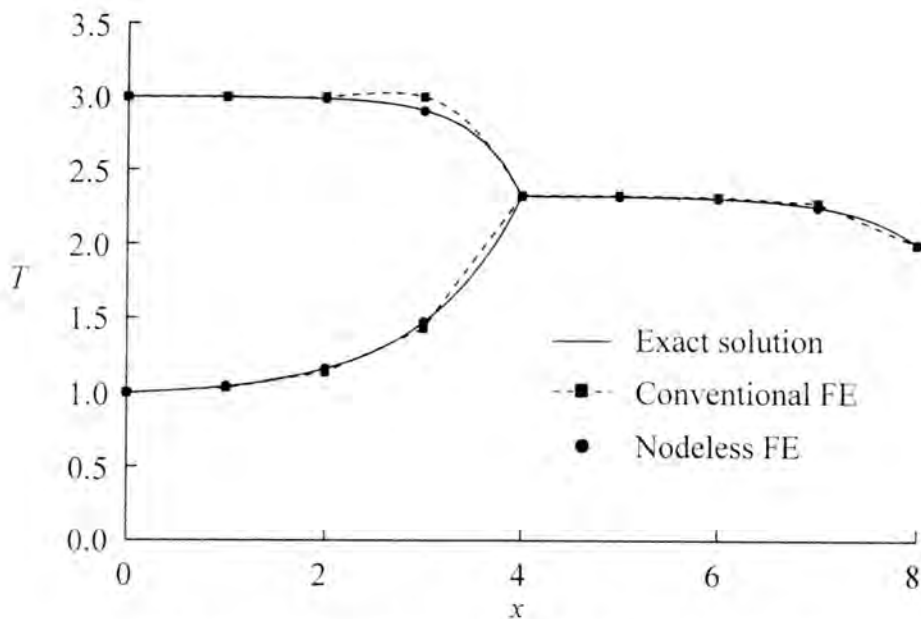
$$a = \left(\frac{\rho c u}{k}\right)_1, \quad b = \left(\frac{\rho c u}{k}\right)_2, \quad c = \left(\frac{\rho c u}{k}\right)_3 \quad (5.9)$$

$$C_1 = \frac{T_{3,o} - T_{1,i} + (1 - e^{c\ell_3})C_3}{e^{a\ell_1} - 1} \quad (5.10)$$

$$C_2 = \frac{T_{3,o} - T_{2,i} + (1 - e^{c\ell_3})C_3}{e^{b\ell_2} - 1} \quad (5.11)$$

$$C_3 = \frac{\frac{k_1 A_1 a e^{a\ell_1} (T_{3,out} - T_{1,m})}{(e^{a\ell_1} - 1)} + \frac{k_2 A_2 b e^{b\ell_2} (T_{3,out} - T_{2,m})}{(e^{b\ell_2} - 1)}}{k_3 A_3 c - (1 - e^{c\ell_3}) \left[\frac{k_1 A_1 a e^{a\ell_1}}{(e^{a\ell_1} - 1)} + \frac{k_2 A_2 b e^{b\ell_2}}{(e^{b\ell_2} - 1)} \right]} \quad (5.12)$$

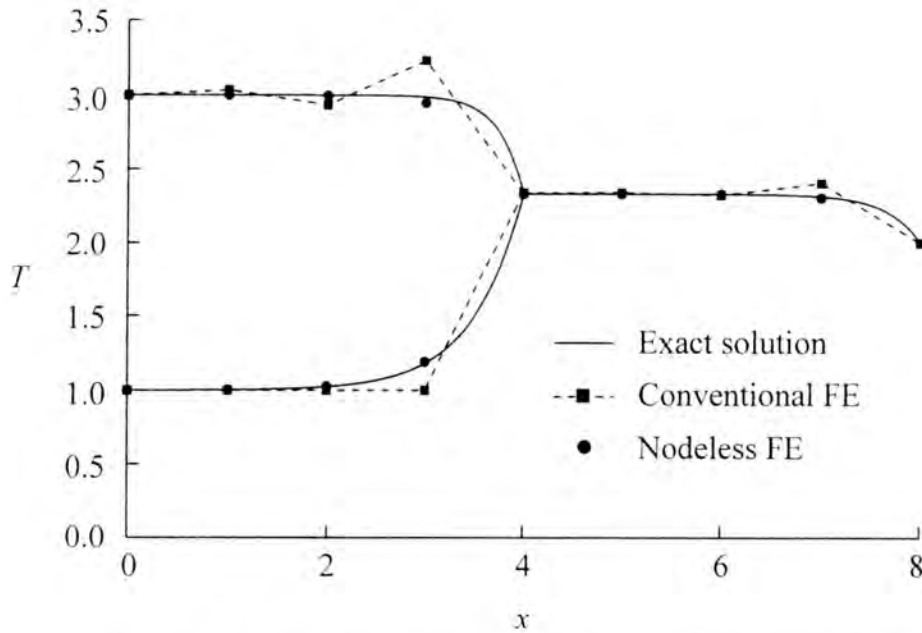
รูปที่ 5.9 แสดงอุณหภูมิของไหลภายในท่อที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ โดยทั้งสองวิธีให้ผลที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำทั้งคู่แต่วิธีระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อให้ผลลัพธ์ที่คิดว่าเล็กน้อย



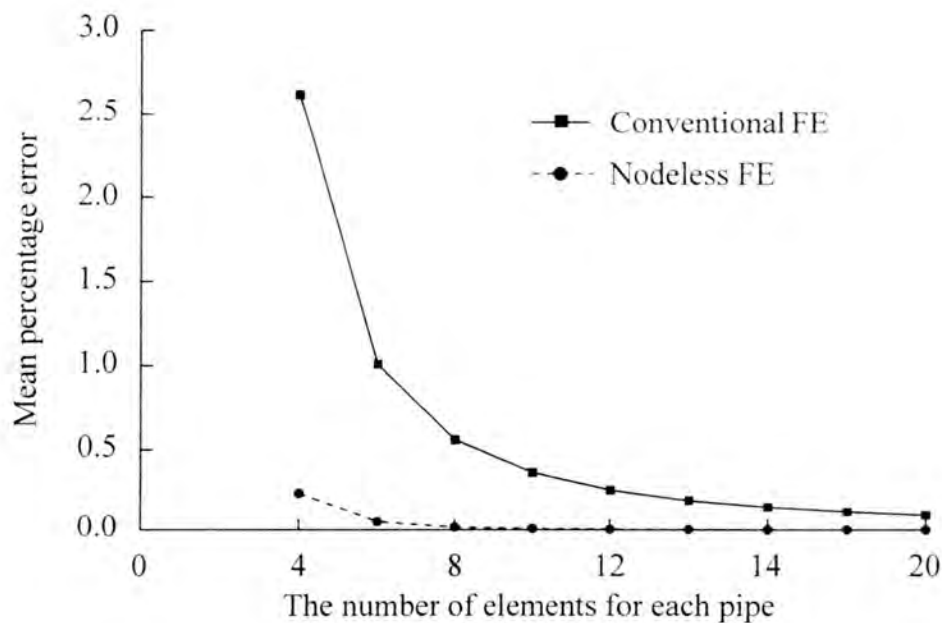
รูปที่ 5.9 อุณหภูมิของไหลภายในท่อสำหรับปัญหาการไหลรวมของไหลแบบหนึ่งมิติ เมื่อ $m_1 = 2$ และ $m_2 = 1$

ในรูปที่ 5.10 แสดงอุณหภูมิของไหลภายในท่อที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ เมื่ออัตราการไหลเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า $m_1 = 4$ และ $m_2 = 2$ จะพบว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาจะเกิดการสั่นของอุณหภูมิในท่อที่หนึ่งและสามเนื่องจากของไหลไหลด้วยความเร็วสูงทำให้จำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในท่อนี้มีจำนวนไม่เพียงพอ ส่วนอุณหภูมิในท่อที่สองถึงแม้จะไม่เกิดการสั่นแต่อุณหภูมิที่ได้ก็ยังไม่แม่นยำ ในขณะที่ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อให้อุณหภูมิที่มีความถูกต้องมากกว่า และในรูป 5.11 แสดงเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยที่เกิดขึ้นจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ ในแต่ละท่อ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและตัวแปรไร้จุด

ต่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ พบว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อให้ผลลัพธ์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ได้เร็วกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดา



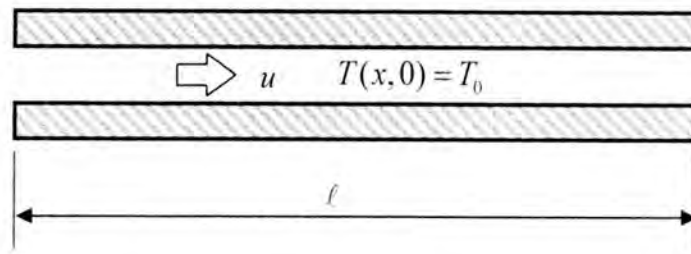
รูปที่ 5.10 อุณหภูมิของไหลภายในท่อสำหรับปัญหาการไหลรวมของของไหลแบบหนึ่งมิติ เมื่อ $m_1 = 4$ และ $m_2 = 2$



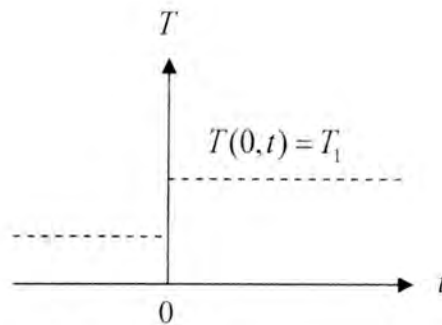
รูปที่ 5.11 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ สำหรับปัญหาการไหลรวมของของไหลแบบหนึ่งมิติ เมื่อ $m_1 = 4$ และ $m_2 = 2$

5.3 ปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อภายใต้สถานะชั่วครู่

ปัญหานี้เป็นการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อ โดยเริ่มต้นของไหลเข้ามาด้วยความเร็ว u และทุก ๆ ตำแหน่งของของไหลภายในท่อมียุณหภูมิเท่ากับ T_0 ดังแสดงในรูป 5.12 จากนั้นของไหลที่ทางเข้าถูกทำให้มีอุณหภูมิสูงขึ้นเท่ากับ T_1 ตลอดทุกช่วงเวลาการไหลดังแสดงในรูปที่ 5.13 ทำให้อุณหภูมิของไหลที่ตำแหน่งอื่น ๆ เกิดการเปลี่ยนแปลงในลักษณะปัญหาภายใต้สถานะชั่วครู่



รูปที่ 5.12 ลักษณะปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อภายใต้สถานะชั่วครู่



รูปที่ 5.13 อุณหภูมิของไหลที่ตำแหน่งทางเข้าสำหรับปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อภายใต้สถานะชั่วครู่

ซึ่งมีสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาดังนี้

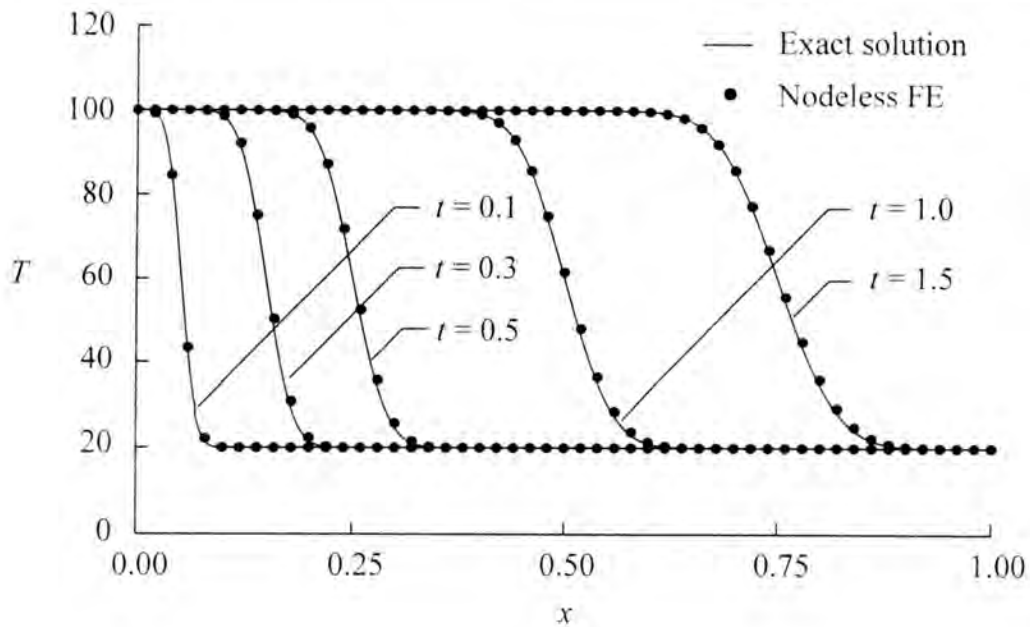
$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \bar{k} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell \quad (5.13)$$

เมื่อ $\bar{k} = \frac{k}{\rho c}$

และมีผลเฉลยแน่นอนตรง [17] คือ

$$T(x,t) = T_0 + \frac{1}{2}(T_1 - T_0) \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-ut}{2\sqrt{kt}} \right) + e^{ux/k} \operatorname{erfc} \left(\frac{x+ut}{2\sqrt{kt}} \right) \right] \quad (5.14)$$

กำหนดให้ท่อมีพื้นที่หน้าตัดภายใน $A = 1$ และความยาว $l = 1$ ของไหลไหลเข้ามาด้วยความเร็ว $u = 0.5$ โดยมีคุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหลดังนี้ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน $k = 1$ ความจุความร้อนจำเพาะ $c = 10$ ความหนาแน่น $\rho = 100$ และใช้ค่าช่วงเวลา $\Delta t = 0.0001$ ทำการสร้างแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วยเอลิเมนต์ 100 เอลิเมนต์



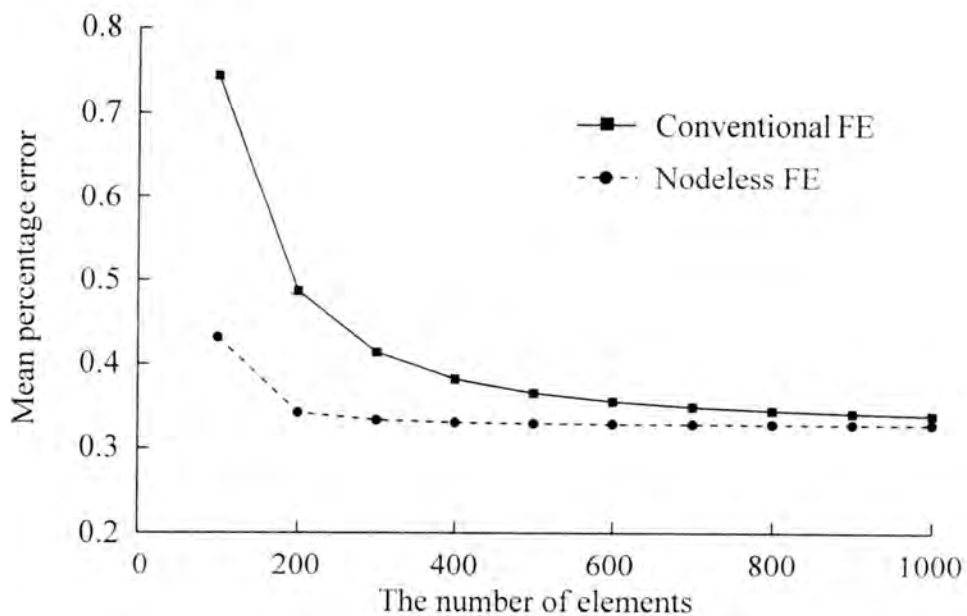
รูปที่ 5.14 อุณหภูมิของไหลภายในท่อสำหรับปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติ ภายในท่อภายใต้สถานะชั่วคราว ที่เวลาต่าง ๆ

อุณหภูมิจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อถูกนำไปพล็อตกราฟที่ช่วงเวลาต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 5.14 จะเห็นว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อให้ผลที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงได้ดีทุก ๆ เวลาที่ทำกรวิเคราะห์ ในตารางที่ 5.2 แสดงเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยของอุณหภูมิที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจะสังเกตเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อให้เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยที่น้อยกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ธรรมดาในทุก ๆ เวลา

ตารางที่ 5.2 การเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยสำหรับปัญหา
การไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อภายใต้สถานะชั่วครู่

Time	Mean percentage error	
	Conventional FE	Nodeless FE
0.1	0.433	0.048
0.3	0.420	0.096
0.5	0.717	0.363
1.0	0.716	-0.372
1.5	0.712	0.372

รูปที่ 5.15 แสดงเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยที่เกิดขึ้นจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและตัวแปรไร้อัดต่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ เมื่อ $t = 0.5$ พบว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้อัดต่อให้ผลลัพธ์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ได้เร็วกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดา



รูปที่ 5.15 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ สำหรับ
ปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติภายในท่อภายใต้สถานะชั่วครู่ เมื่อ $t = 0.5$

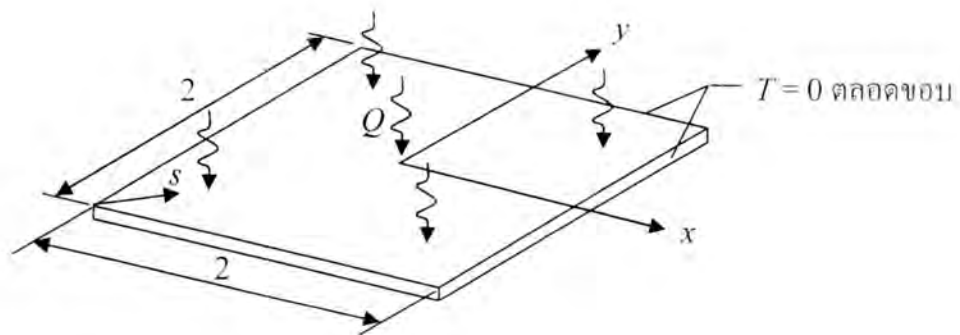
5.4 ปัญหาแผ่นโลหะผลิตความร้อนได้เอง

แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 2×2 หนา $t = 0.1$ ที่ตลอดขอบภายนอกมีอุณหภูมิเท่ากับศูนย์ทั้งสี่ด้านและแผ่นโลหะสามารถผลิตความร้อนได้เอง $Q = 1$ ดังแสดงในรูปที่ 5.16 กำหนดให้สัมประสิทธิ์การนำความร้อน $k = 1$ ซึ่งมีสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาคือ

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = Q \quad (5.15)$$

ทำการสร้างแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ 20×20 เอลิเมนต์ประกอบไปด้วย 441 จุดต่อ ดังแสดงในรูป 5.17 จากนั้นนำอุณหภูมิที่ได้จากโปรแกรมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ โดยที่มีผลเฉลยแม่นยำของอุณหภูมิบนแผ่นโลหะนี้คือ [18]

$$T(x, y) = \frac{1-x^2}{2} - \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \cos((2n+1)\pi x/2) \cosh((2n+1)\pi y/2)}{(2n+1)^3 \cosh((2n+1)\pi/2)} \right) \quad (5.16)$$

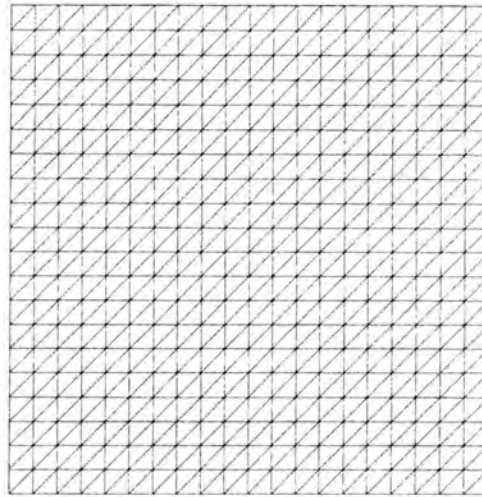


รูปที่ 5.16 ลักษณะปัญหาแผ่นโลหะที่ผลิตความร้อนได้เอง

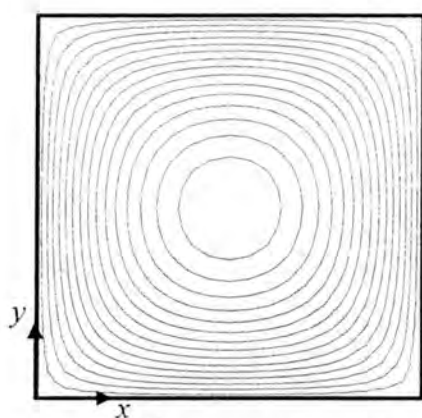
รูปที่ 5.18 แสดงเส้นชั้นอุณหภูมิที่เกิดขึ้นบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมจัตุรัสในแบบสองมิติและสามมิติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อ ส่วนในรูปที่ 5.19 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวทแยงมุมจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อซึ่งให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำ

ในรูปที่ 5.20 แสดงเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของอุณหภูมิตามแนวทแยงมุมที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและตัวแปรไร้จุดต่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ พบว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำกว่าอย่างชัดเจนและในรูปที่ 5.21

แสดงเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยที่เกิดขึ้นจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและตัวแปรไร้อัดต่อ พบว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้อัดต่อให้ผลลัพธ์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ได้เร็วกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดา



รูปที่ 5.17 แบบไฟไนต์เอลิเมนต์ 20×20 เอลิเมนต์ 441 จุดต่อ
สำหรับปัญหาแผ่นโลหะผลิตความร้อนได้เอง

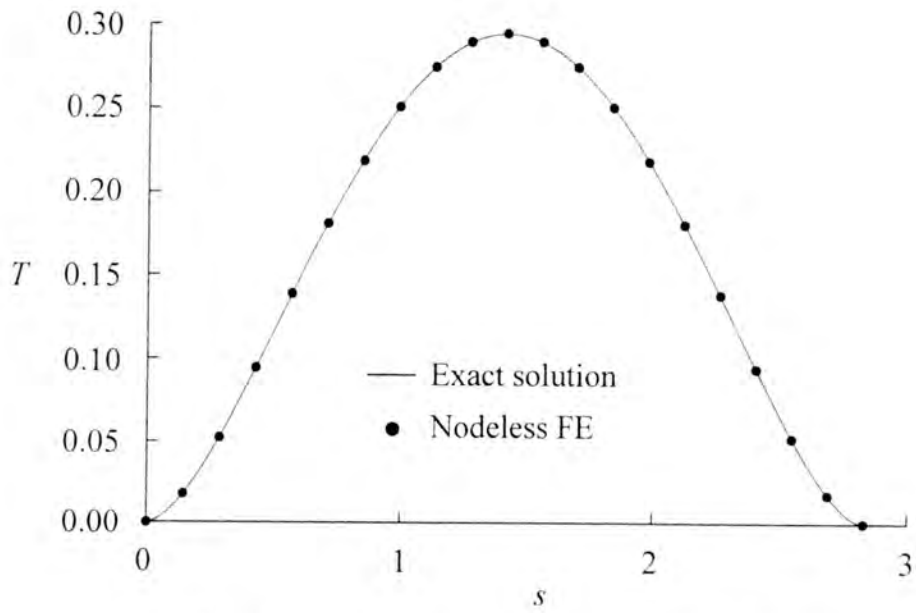


(ก) เส้นชั้นอุณหภูมิในสองมิติ

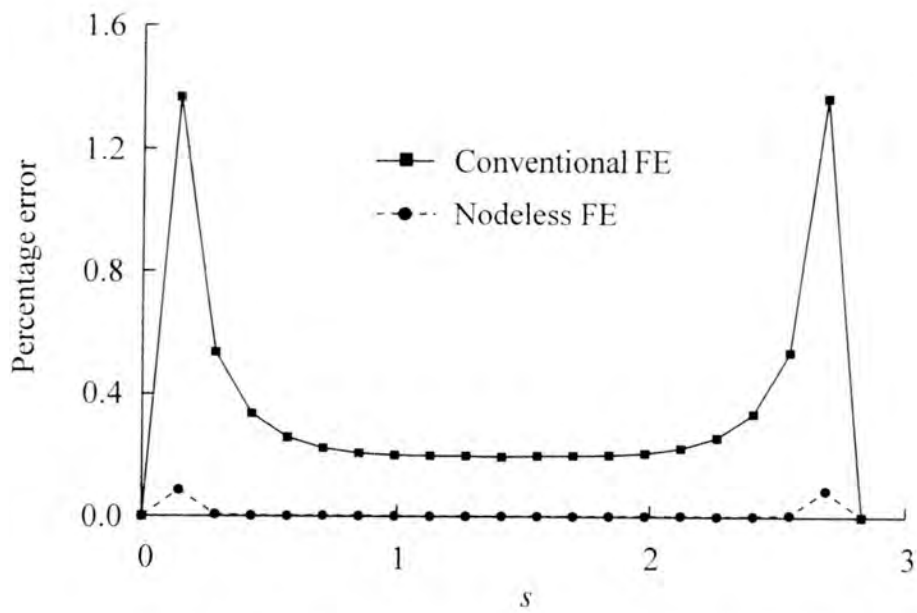


(ข) เส้นชั้นอุณหภูมิในสามมิติ

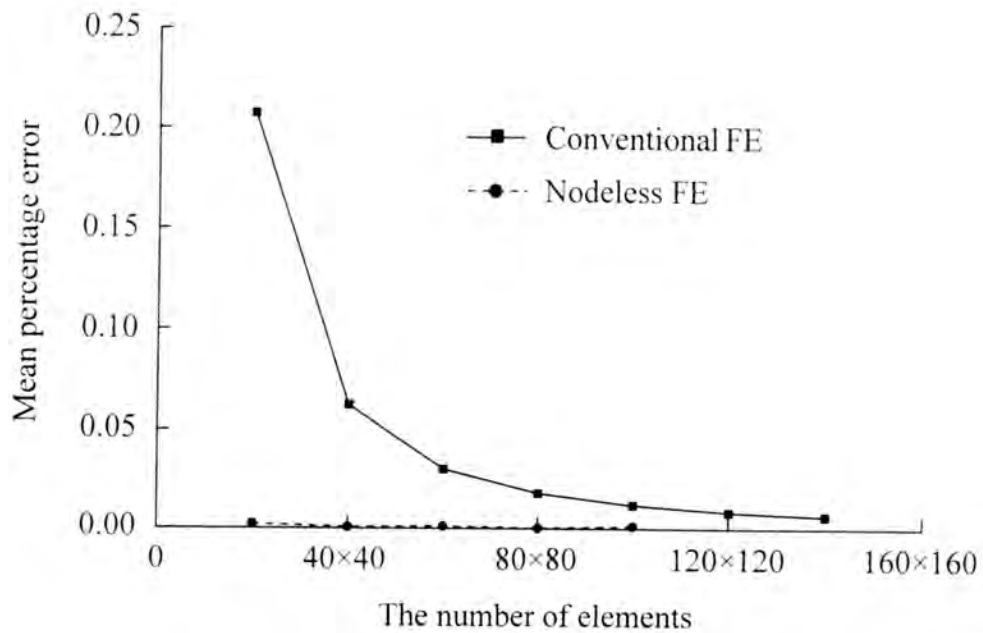
รูปที่ 5.18 เส้นชั้นอุณหภูมิสำหรับปัญหาแผ่นโลหะผลิตความร้อนได้เอง



รูปที่ 5.19 การกระจายตัวของอุณหภูมิตลอดแนวทแยงมุม
สำหรับปัญหาแผ่นโลหะผลิตความร้อนได้เอง



รูปที่ 5.20 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดตามแนวทแยงมุมสำหรับ
ปัญหาแผ่นโลหะผลิตความร้อนได้เอง



รูปที่ 5.21 เปรูเซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ สำหรับปัญหาแผ่นโลหะผลิตความร้อนได้เอง

5.5 ปัญหาการนำความร้อนในของแข็งภายใต้สถานะชั่วคราว

แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมที่มีอุณหภูมิสูงเท่ากันตลอดทั้งแผ่น ถูกทำให้เย็นตัวลงด้วยการกำหนดค่าให้อุณหภูมิที่ขอบด้านซ้ายและด้านขวาของแผ่นโลหะมีค่าต่ำลงที่ตลอดเวลาและที่ขอบด้านบนและด้านล่างถูกหุ้มด้วยฉนวน ทำให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อนผ่านขอบทั้งสองนี้ ดังแสดงในรูปที่ 5.22 ปัญหาดังกล่าวมีสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.17)$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = \frac{k}{\rho c}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตและอุณหภูมิเริ่มต้นคือ

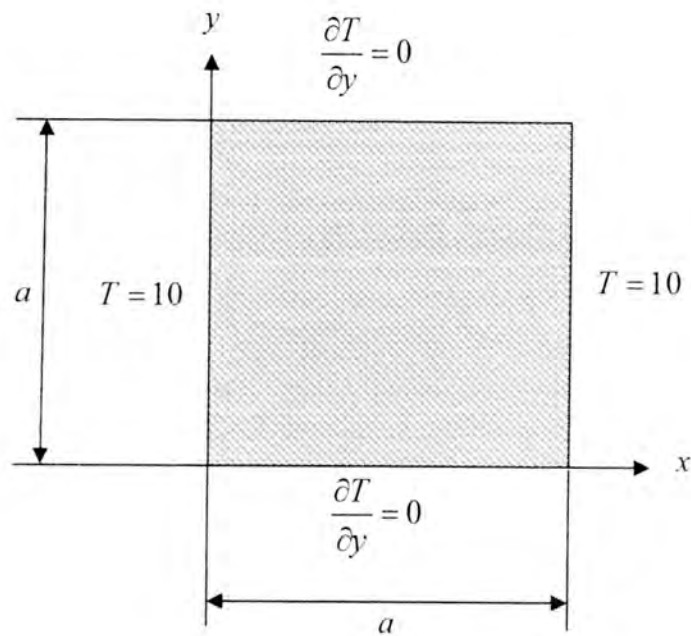
$$x = 0, x = a, y = 0, y = a, \quad T(x, y) = T_0 = 100, \quad t = 0 \quad (5.18)$$

$$y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.19)$$

$$y = a, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.20)$$

$$x = 0, \quad T(0, y) = T_1 = 10, \quad t > 0 \quad (5.21)$$

$$x = a, \quad T(a, y) = T_1 = 10, \quad t > 0 \quad (5.22)$$



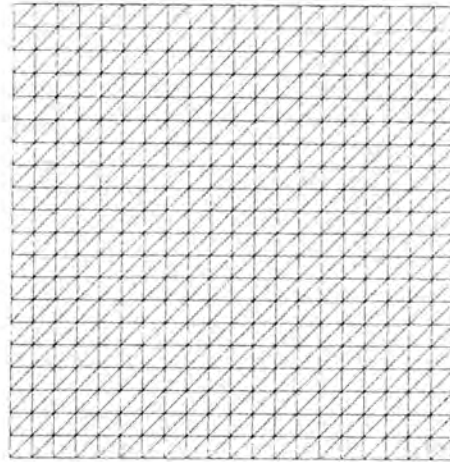
รูปที่ 5.22 โดเมนและเงื่อนไขขอบเขต สำหรับปัญหาการนำความร้อนในของแข็งภายใต้สถานะชั่วคราว ที่ $t > 0$

ซึ่งมีผลเฉลยแม่นยำตรง [19] คือ

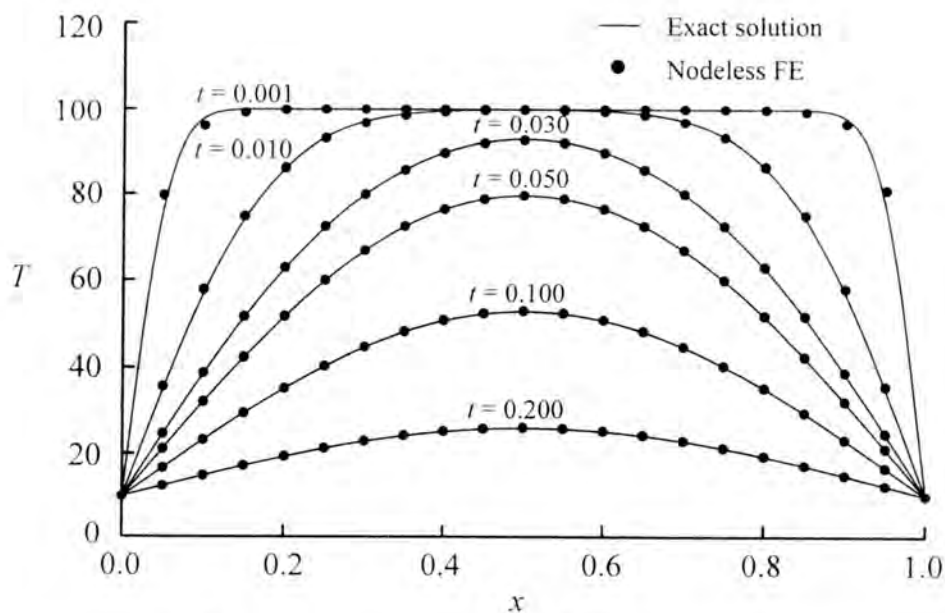
$$T(x, t) = T_1 + \frac{4(T_0 - T_1)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{a}\right]}{2k+1} \exp\left[-\alpha\pi^2 \frac{(2k+1)^2 t}{a^2}\right] \quad (5.23)$$

จากผลเฉลยแม่นยำตรงจะเห็นว่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในของแข็งเป็นลักษณะของปัญหาแบบหนึ่งมิติ ดังนั้นหากนำมาตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบสองมิติ อุณหภูมิที่ได้ตลอดแนวแกน y ที่ x ต่าง ๆ ต้องมีค่าใกล้เคียงหรือเท่ากัน

การวิเคราะห์ปัญหาจะเริ่มจากการสร้างแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ 20×20 เอลิเมนต์ 441 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 5.23 จากนั้นหาผลลัพธ์โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อ กำหนดให้ของแข็งนี้มีความหนา $t = 1$ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน $k = 1$ ความจุความร้อนจำเพาะ $c = 1$ และความหนาแน่น $\rho = 1$ โดยใช้ค่าช่วงเวลา $\Delta t = 0.0001$ ในการหาค่าอุณหภูมิที่เวลาต่าง ๆ



รูปที่ 5.23 แบบไฟไนต์เอลิเมนต์ 20×20 เอลิเมนต์ 441 จุดต่อ สำหรับปัญหาการนำความร้อนในของแข็งภายใต้สถานะชั่วคราว

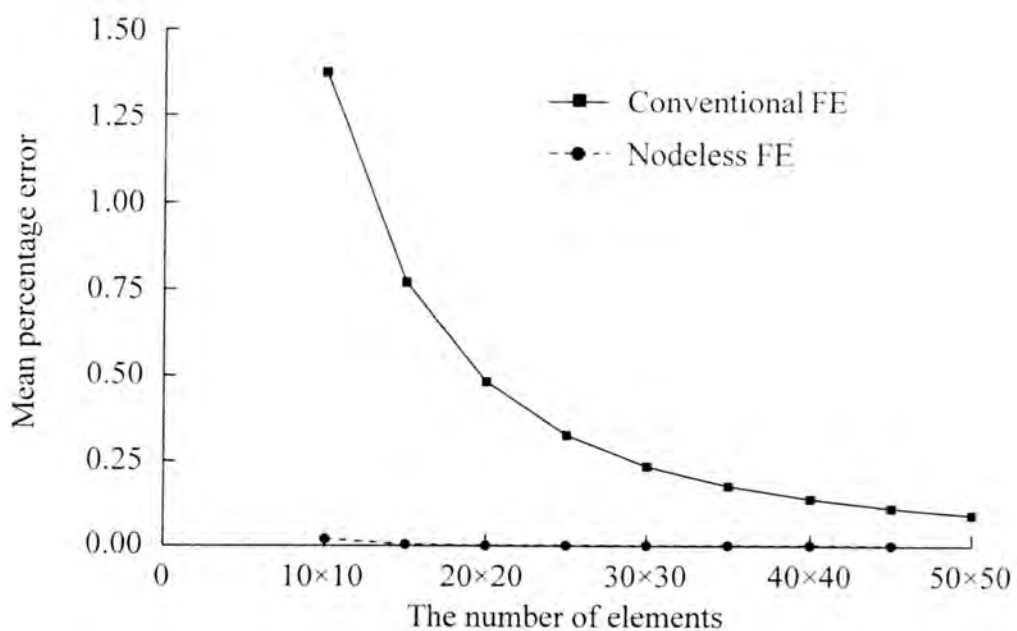


รูปที่ 5.24 อุณหภูมิของแผ่น โลหะที่เวลาต่าง ๆ สำหรับปัญหาการนำความร้อนในของแข็งภายใต้สถานะชั่วคราว

ในรูปที่ 5.24 แสดงอุณหภูมิจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบตัวแปรไร้จุดต่อโดยพบว่าที่เวลาเพิ่มขึ้นอุณหภูมิของแผ่นโลหะจะเย็นตัวลงจนกระทั่งมีค่าเท่ากับอุณหภูมิที่ขอบและในตารางที่ 5.3 แสดงการเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิสูงสุดที่เกิดขึ้นบริเวณตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นโลหะและเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบตัวแปรไร้จุดต่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง

ตารางที่ 5.3 การเปรียบเทียบอุณหภูมิเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับปัญหาการนำความร้อนในของแข็งภายใต้สถานะชั่วคราว

time	Maximum temperature (percentage error)		
	Exact solution	Conventional FE	Nodeless FE
0.001	100.00	100.00 (0.000)	100.00 (0.000)
0.010	99.93	99.81 (0.113)	99.92 (0.012)
0.030	92.58	92.39 (0.201)	92.56 (0.019)
0.050	79.51	79.54 (0.046)	79.52 (0.010)
0.100	52.70	52.87 (0.306)	52.73 (0.039)
0.200	25.92	26.05 (0.503)	25.93 (0.059)

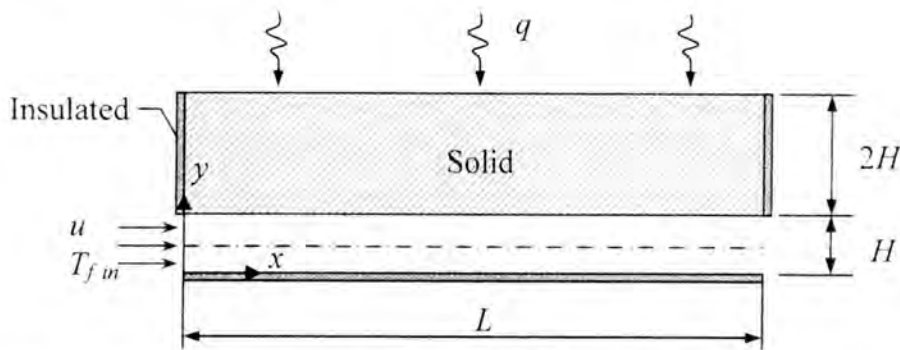


รูปที่ 5.25 เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่างๆ สำหรับปัญหาการนำความร้อนในของแข็งภายใต้สถานะชั่วคราว เมื่อ $t = 0.01$

รูปที่ 5.25 แสดงเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดเฉลี่ยที่เกิดขึ้นจากการใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและตัวแปรไร้จุดต่อ เมื่อ $t = 0.01$ พบว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อให้ผลลัพธ์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ได้เร็วกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดา

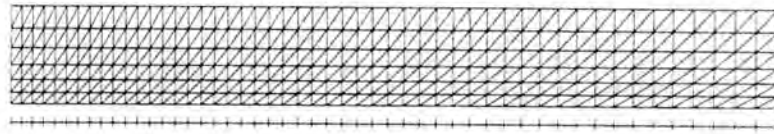
5.6 ปัญหาการหล่อเย็นของแข็งที่ได้รับพลังความร้อนตลอดขอบบน

ลักษณะของปัญหานี้เป็นของแข็งที่ได้รับพลังความร้อนคงที่ตลอดขอบบน และที่ขอบด้านล่างจะมีของไหลที่ทำหน้าที่ระบายความร้อนออกจากของแข็งด้วยการพาความร้อน ของไหลไหลเข้ามาด้วยความเร็ว u และมีอุณหภูมิ $T_{f,m}$ ดังแสดงในรูปที่ 5.26 โดยนำผลลัพธ์จาก โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม SUPG [11] ที่ใช้สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes) มาวิเคราะห์ในส่วนที่เป็นของไหล

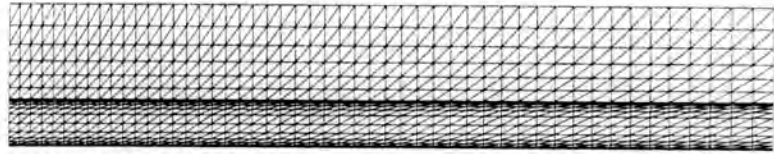


รูปที่ 5.26 ลักษณะปัญหาการหล่อเย็นของแข็งที่ได้รับพลังความร้อนตลอดขอบบน

กำหนดให้ช่องการไหล H เท่ากับ 0.1 m ความหนาของของแข็งเท่ากับ $2H$ ยาว L เท่ากับ 2 m พลังความร้อน q เท่ากับ 8000 W/m^2 สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็ง k_s และของไหล k_f เท่ากับ 1000 W/m-K และ 10 W/m-K ตามลำดับ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน h สามารถหาได้จากตารางสัมประสิทธิ์การพาความร้อน [20] โดยสัมประสิทธิ์การพาความร้อนจะมีค่ามากที่สุดบริเวณตำแหน่งทางเข้าของของไหลและลดลงจนกระทั่งมีค่าคงที่เมื่อของไหลเข้าสู่การไหลพัฒนาเต็มขั้น (fully developed flow) ส่วนอุณหภูมิของไหลที่ทางเข้า $T_{f,m}$ เท่ากับ 25°C พรีนดท์เทิลนัมเบอร์ Pr เท่ากับ 0.7 จากนั้นทำการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่วิเคราะห์การไหลแบบหนึ่งมิติประกอบด้วย 650 เอลิเมนต์ 408 จุดต่อ เปรียบเทียบกับแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่วิเคราะห์การไหลแบบสองมิติซึ่งประกอบไปด้วย 1800 เอลิเมนต์ 696 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 5.27 แบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสองแบบให้ผลลัพธ์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ ดังนั้นการใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่มากขึ้นจึงไม่ส่งผลต่อผลลัพธ์ที่ได้



(ก) วิเคราะห์ในส่วนของไหลแบบหนึ่งมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อ



(ข) วิเคราะห์ในส่วนของไหลแบบสองมิติด้วยโปรแกรม SUPG

รูปที่ 5.27 แบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการหล่อเย็น
ของแข็งที่ได้รับฟลักซ์ความร้อนตลอดขอบบน

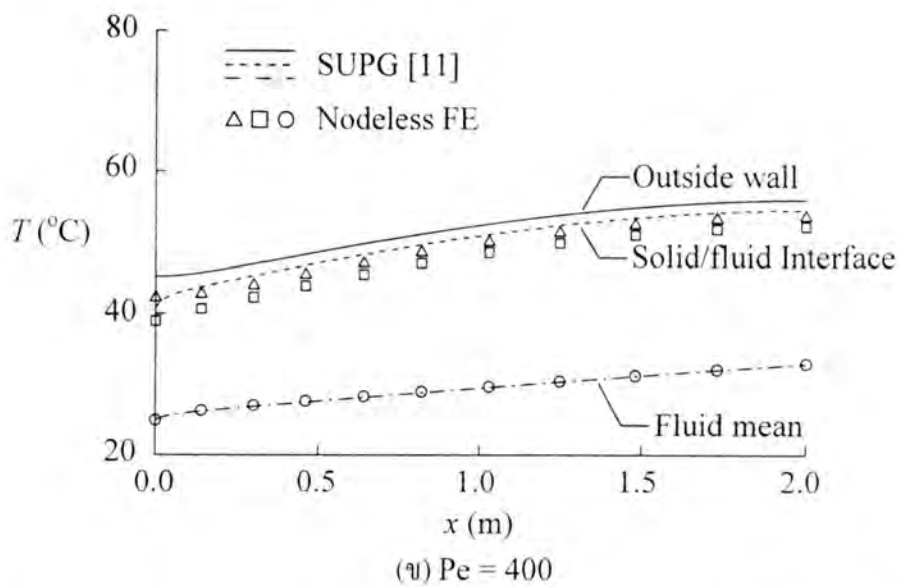
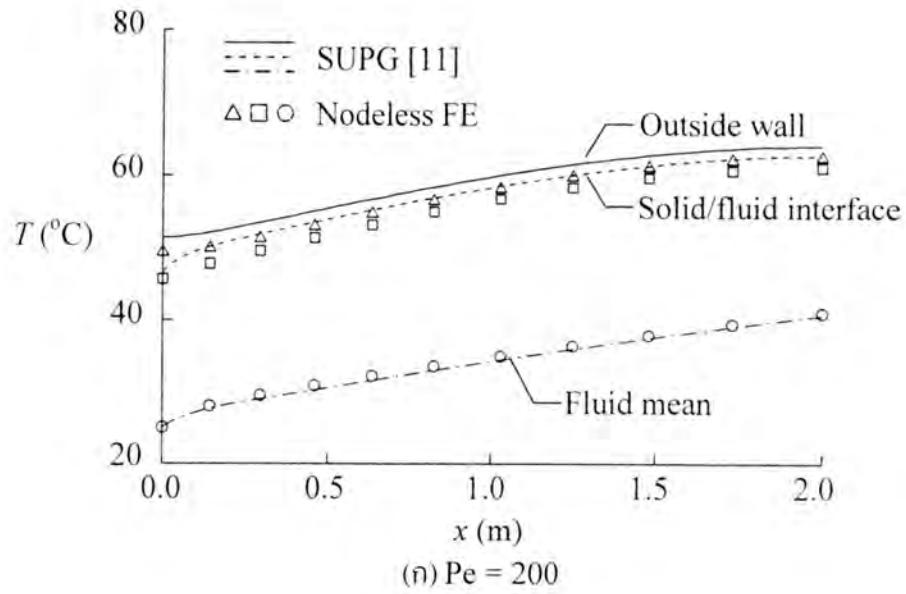
อุณหภูมิที่ได้จากทั้งสองวิธีจะถูกนำมาเปรียบเทียบกัน แต่เนื่องจากอุณหภูมิของที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่ออยู่ในรูปของอุณหภูมิเฉลี่ย จึงต้องนำอุณหภูมิที่ได้จากโปรแกรม SUPG [11] มาคำนวณให้อยู่ในรูปอุณหภูมิเฉลี่ย โดยสมการที่ใช้หาอุณหภูมิเฉลี่ยหาได้จาก

$$T_{mean} = \frac{1}{H u_{mean}} \int_0^H u T dH \quad (5.24)$$

โดยที่

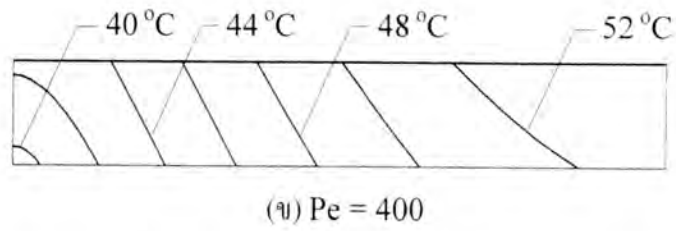
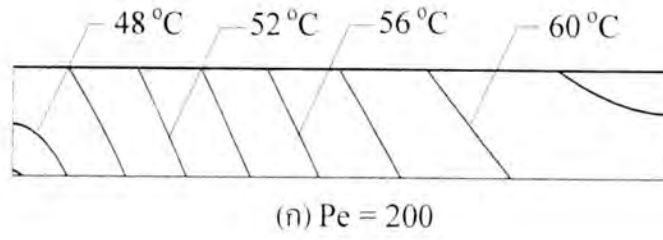
$$u_{mean} = \frac{1}{H} \int_0^H u dH \quad (5.25)$$

รูปที่ 5.28 แสดงอุณหภูมิตลอดผิวด้านนอก ผิวรอยต่อและอุณหภูมิเฉลี่ยของของไหลภายในท่อที่ความเร็ว u เท่ากับ 0.4 และ 0.8 m/s ทำให้เกิดเพกเลตนัมเบอร์ Pe เท่ากับ 200 และ 400 ตามลำดับ โดยทั้งสองวิธีให้อุณหภูมิที่ใกล้เคียงกันและสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อของไหลไหลด้วยความเร็วที่สูงขึ้นจะทำให้ความร้อนถูกระบายออกจากของแข็งได้ดียิ่งขึ้น รูปที่ 5.29 แสดงเส้นชั้นของอุณหภูมิภายในของแข็งที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อที่ค่า Pe เท่ากับ 200 และ 400

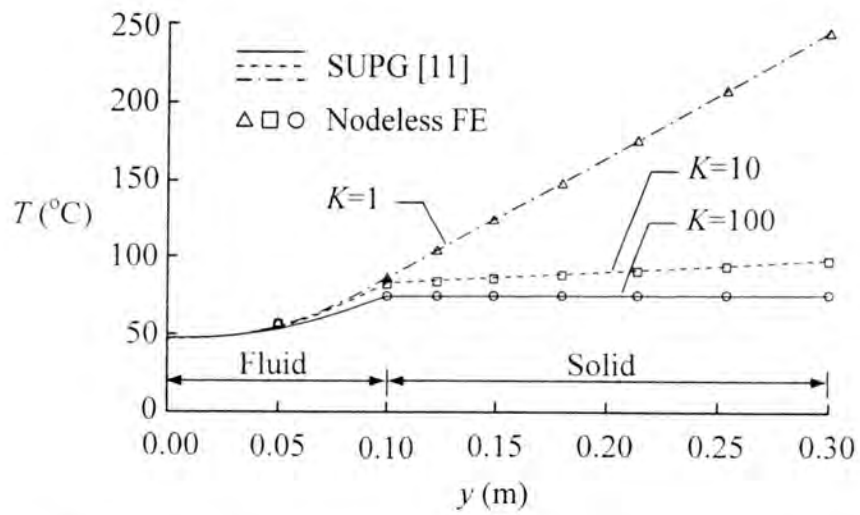


รูปที่ 5.28 อุณหภูมิตลอดผิวด้านนอก ผิวยรอยต่อและอุณหภูมิเฉลี่ยของของไหล สำหรับปัญหาการหล่อเย็นของแข็งที่ได้รับฟลักซ์ความร้อนตลอดขอบบน

รูปที่ 5.30 แสดงอุณหภูมิที่ตลอดขอบทางออก เมื่อเพคเลตน์เบอร์ Pe เท่ากับ 100 ที่ค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของแข็งต่อของไหล K เท่ากับ 1, 10 และ 100 (k_f เท่ากับ 10 W/m-K) ผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสองวิธี ให้ผลที่สอดคล้องกัน โดยความร้อนภายในของแข็งจะถ่ายเทได้ดียิ่งขึ้น เมื่อค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์การนำความร้อน K มีค่าสูงขึ้น



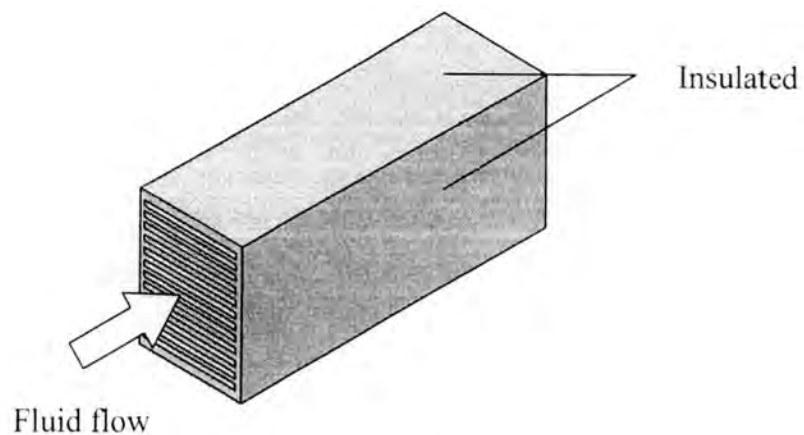
รูปที่ 5.29 เส้นชั้นอุณหภูมิในของแข็งสำหรับปัญหาการหล่อเย็นของแข็งที่ได้รับฟลักซ์ความร้อนตลอดขอบบน



รูปที่ 5.30 อุณหภูมิตลอดขอบทางออกสำหรับปัญหาการหล่อเย็นของแข็งที่ได้รับฟลักซ์ความร้อนตลอดขอบบน เมื่อ $Pe = 100$

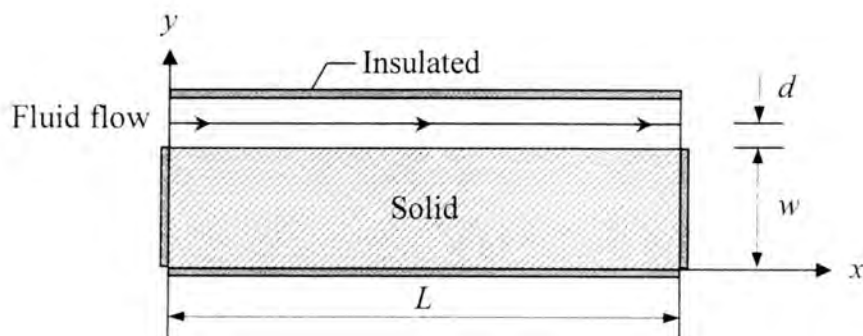
5.7 ปัญหาการวิเคราะห์อุปกรณ์กักเก็บความร้อน

อุปกรณ์กักเก็บความร้อนทำหน้าที่กักเก็บความร้อนที่ได้รับจากของไหลที่มีอุณหภูมิสูงไหลเข้ามา ความร้อนจะถูกถ่ายเทไปยังของแข็งเพื่อกักเก็บพลังงานความร้อน อุปกรณ์ดังกล่าวจะถูกหุ้มฉนวนเพื่อไม่ให้ความร้อนนี้ถูกถ่ายเทสูญเสียไปยังอุณหภูมิภายนอก ดังแสดงในรูปที่ 5.31



รูปที่ 5.31 ลักษณะปัญหาอุปกรณ์กักเก็บความร้อน

ปัญหาอุปกรณ์กักเก็บความร้อนดังกล่าวถูกนำมาวิเคราะห์ในแบบสองมิติ โดยหากของไหลในแต่ละท่อมีอัตราการไหลเท่ากันจะทำให้ปัญหามีความสมมาตร ดังนั้นสามารถพิจารณาปัญหาให้มีของไหลที่ไหลผ่านผิวของแข็งเพียงท่อเดียว ดังแสดงในรูปที่ 5.32 สมการของปัญหาดังกล่าวจะประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สองสมการคือ สมการเชิงอนุพันธ์ของของไหลที่ทำหน้าที่ให้ความร้อน (5.26) และสมการเชิงอนุพันธ์ของของแข็งที่ทำหน้าที่กักเก็บความร้อน (5.27)



รูปที่ 5.32 ลักษณะปัญหาอุปกรณ์กักเก็บความร้อนที่มีของไหลไหลผ่านอุปกรณ์เพียงช่องเดียว

$$\text{fluid,} \quad \rho_f c_f A_f \left[\frac{\partial T_f}{\partial t} + u \frac{\partial T_f}{\partial x} \right] = hp(T_s - T_f) \quad (5.26)$$

$$\text{solid,} \quad \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \quad (5.27)$$

$$\text{โดยที่} \quad \alpha = \frac{k_s}{\rho_s c_s}$$

มีเงื่อนไขเริ่มต้น

$$t = 0, \quad T_f = T_s = T_0 \quad (5.28)$$

$$t > 0, \quad T_f = T_{f,i} \quad \text{ที่ } x = 0 \quad (5.29)$$

และเงื่อนไขขอบเขต

$$x = 0, \quad \frac{\partial T_s}{\partial x} = 0 \quad \text{ที่ } 0 < y < w \quad (5.30)$$

$$x = L, \quad \frac{\partial T_s}{\partial x} = 0 \quad \text{ที่ } 0 < y < w \quad (5.31)$$

$$y = 0, \quad \frac{\partial T_s}{\partial y} = 0 \quad \text{ที่ } 0 \leq x \leq L \quad (5.32)$$

$$y = w, \quad k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} = -h(T_s - T_f) \quad \text{ที่ } 0 \leq x \leq L \quad (5.33)$$

ปัญหาในข้อนี้ใช้แบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วยจำนวนจุดต่อของแข็งในแนวนอน 6 จุดต่อและในแนวตั้ง 4 จุดต่อ รวมกับจำนวนจุดต่อของไหล 6 จุดต่อ ซึ่งเท่ากับจำนวนจุดต่อที่ใช้ในระเบียบวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยมของ Schmidt และ Szego [2] แบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ที่นี่ให้ผลลัพธ์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ ดังนั้นการใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่มากขึ้นจึงไม่ส่งผลกระทบต่อผลลัพธ์ที่ได้ โดยนำอุณหภูมิของไหลที่ทางออก $T_{f,out}$ ที่เวลา t ต่าง ๆ จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้มิติมาทำการจัดให้อยู่ในรูปของอุณหภูมิไร้มิติ $\bar{T}_{f,out}$ ที่เวลาไร้มิติ t^* ต่าง ๆ เพื่อเปรียบเทียบกับอุณหภูมิของ Schmidt และ Szego [2] ที่ค่า $Bi = 1$ และ $Bi = 3$ ในช่วง G^+ / V^+ ตั้งแต่ 0.2 ถึง 10

ทำการจัดรูปให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติตามรูปแบบของ Schmidt และ Szego [2] ดังนี้

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{w} & Y &= \frac{y}{w} \\ V^+ &= \frac{w}{L} & t^* &= \text{Fo} = \frac{\alpha t}{w^2} \\ \text{Bi} &= \frac{hw}{k_s} & \hat{T} &= \frac{T - T_0}{T_{f,m} - T_0} \\ G^+ &= \frac{Wk_s}{E} & E &= \rho_f u A_f c_f \end{aligned}$$

ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปของตัวแปรไร้มิตินี้

$$\text{fluid,} \quad \frac{\alpha}{wv} \frac{\partial T_f}{\partial t^*} + \frac{\partial T_f}{\partial X} + G^+ \text{Bi} (T_f - T_s) = 0 \quad (5.34)$$

$$\text{solid,} \quad \frac{\partial^2 T_s}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial Y^2} = \frac{\partial T_s}{\partial t^*} \quad (5.35)$$

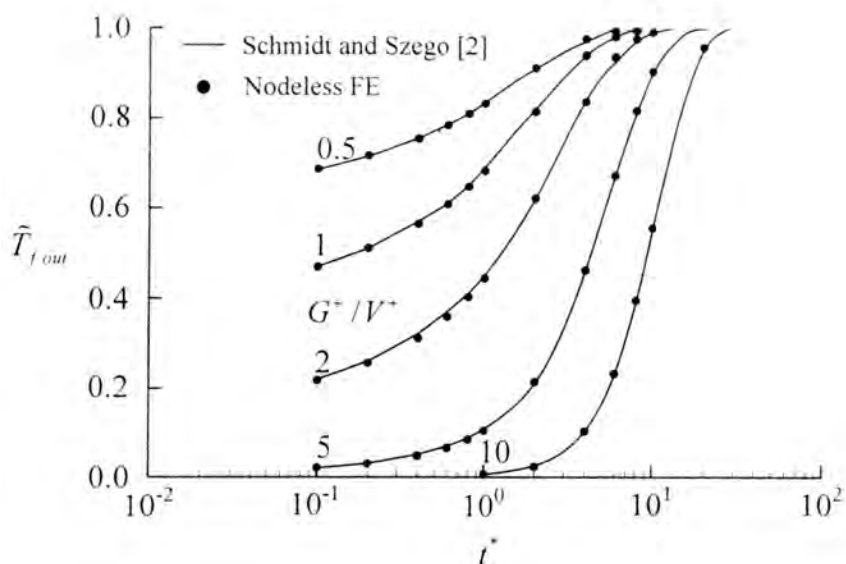
กำหนดค่าต่าง ๆ ของปัญหาดังนี้ อุณหภูมิเริ่มต้นทั้งโดเมน T_0 เท่ากับ 20°C อุณหภูมิของไหลที่ทางเข้า $T_{f,m}$ เท่ากับ 100°C ขนาดของท่อทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าสูง d เท่ากับ 9.5 mm กว้าง W เท่ากับ 430 mm วัสดุของแข็งมีความหนา w เท่ากับ 40 mm ยาว L เท่ากับ 1950 mm ค่าคุณสมบัติวัสดุของของแข็งประกอบไปด้วย สัมประสิทธิ์การนำความร้อนในของแข็ง k_s เท่ากับ $0.0021 \text{ W/mm-}^\circ\text{C}$ ความหนาแน่น ρ_s เท่ากับ $3.9 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ ความจุความร้อนจำเพาะ c_s เท่ากับ $920 \text{ J/kg-}^\circ\text{C}$

โดยที่ค่า $\text{Bi} = 1$ ค่าคุณสมบัติของของไหลประกอบด้วย สัมประสิทธิ์การนำความร้อน k_f เท่ากับ $2.88 \times 10^{-5} \text{ W/mm-}^\circ\text{C}$ ความหนาแน่น ρ_f เท่ากับ $1.06 \times 10^{-9} \text{ kg/mm}^3$ ความจุความร้อนจำเพาะ c_f แสดงไว้ในตารางที่ 5.4 ความเร็วของไหล u เท่ากับ 14913.13 mm/s และสัมประสิทธิ์การพาความร้อน h เท่ากับ $5.25 \times 10^{-5} \text{ kg/mm}^3$ ในขณะที่ค่า $\text{Bi} = 3$ ค่าคุณสมบัติของของไหลประกอบด้วยค่าการนำความร้อน k_f เท่ากับ $2.88 \times 10^{-5} \text{ W/mm-}^\circ\text{C}$ ความหนาแน่น ρ_f เท่ากับ $6.41 \times 10^{-8} \text{ kg/mm}^3$ ความจุความร้อนจำเพาะ c_f แสดงไว้ในตารางที่ 5.4 ความเร็วของไหล u เท่ากับ 20000 mm/s และสัมประสิทธิ์การพาความร้อน h เท่ากับ $1.576 \times 10^{-4} \text{ kg/mm}^3$

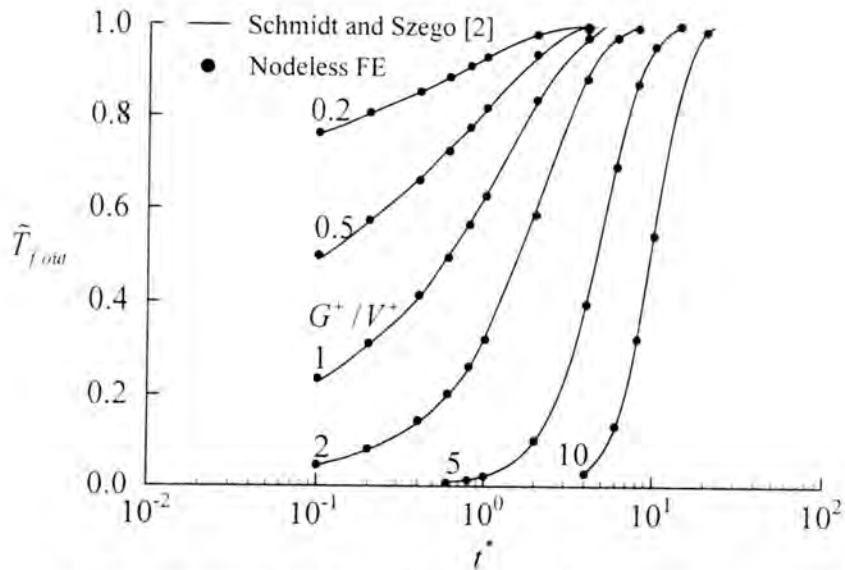
ตารางที่ 5.4 ค่าความจุความร้อนจำเพาะ c_f สำหรับปัญหาอุปกรณ์กักเก็บความร้อน
เมื่อ $Bi=1$ และ $Bi=3$ ในช่วง G^+ / V^+ ตั้งแต่ 0.2 ถึง 10

G^+ / V^+	c_f (J/kg-°C)	
	$Bi=1$	$Bi=3$
0.2	-	2.541×10^{-3}
0.5	1.363×10^{-3}	1.016×10^{-3}
1	6.817×10^{-4}	5.083×10^{-4}
2	3.408×10^{-4}	2.541×10^{-4}
5	1.363×10^{-4}	1.016×10^{-4}
10	6.817×10^{-5}	5.083×10^{-5}

รูปที่ 5.33 และ 5.34 แสดงให้เห็นว่าอุณหภูมิที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปร
ไร้จุดต่อให้ผลที่สอดคล้องกับของ Schmidt และ Szego [2] ได้เป็นอย่างดี และเมื่อ $\tilde{T}_{f out}$ มีค่าเข้า
ใกล้ 1 นั้นหมายถึงปัญหากำลังจะเข้าสู่สถานะอยู่ตัวซึ่งไม่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหล
กับของแข็ง เนื่องจากของแข็งได้รับความร้อนจนกระทั่งมีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิของไหลที่ไหล
เข้ามา



รูปที่ 5.33 อุณหภูมิของไหลบริเวณทางออกที่เวลาต่าง ๆ ในรูปของตัวแปร
ไร้มิติ สำหรับปัญหาอุปกรณ์กักเก็บความร้อน เมื่อ $Bi=1$



รูปที่ 5.34 อุณหภูมิของไหลบริเวณทางออกที่เวลาต่าง ๆ ในรูปของตัวแปรไร้มิติ สำหรับปัญหาอุปกรณั้กักเก็บความร้อน เมื่อ $Bi = 3$

5.8 บทสรุป

ในบทนี้ได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม Nodeless FE ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อพบว่า โปรแกรมมีความถูกต้อง พบว่าโปรแกรม Nodeless FE ให้ประสิทธิภาพความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ดีกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาและยังให้ผลลัพธ์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามการเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ได้เร็วกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดา ในส่วนของปัญหาการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งกับของไหลเมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่วิเคราะห์ในส่วนของไหลแบบสองมิติพบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความใกล้เคียงกัน แต่จำนวนเอลิเมนต์และจุดต่อที่ใช้ในโปรแกรม Nodeless FE มีจำนวนน้อยกว่าอย่างชัดเจน นอกจากนั้นแล้วจำนวนตัวแปรที่ต้องคำนวณก็มีเพียงอุณหภูมิเพียงอย่างเดียว ในขณะที่ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่วิเคราะห์ในส่วนของไหลแบบสองมิติ จำนวนตัวแปรที่ต้องคำนวณมีถึง 4 ตัว ประกอบไปด้วย อุณหภูมิ ความเร็วในทิศทางแกน x ความเร็วในทิศทางแกน y และความดัน ด้วยเหตุนี้ทำให้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมีจุดเด่นในการช่วยลดปัญหาของหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณของคอมพิวเตอร์

ในบทที่ 6 และ 7 จะนำเสนอเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ รวมไปถึงตัวอย่างการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับโปรแกรม Nodeless FE เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการลดหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณของคอมพิวเตอร์ให้ดียิ่งขึ้น นอกจากนั้นแล้วยังช่วยให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำมากขึ้นด้วย