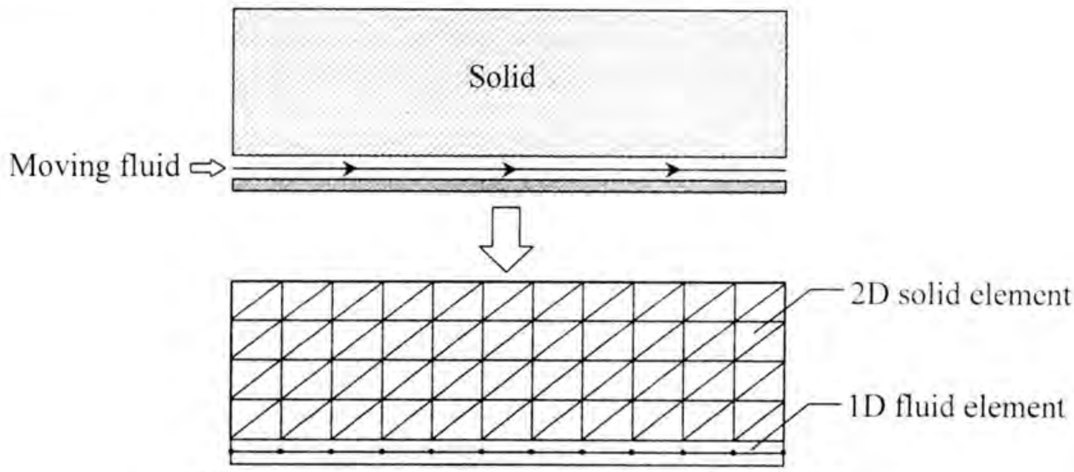
บทที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในบทนี้จะแสดงการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อมาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์อุณหภูมิของโครงสร้างหล่อเย็นด้วยการพาความร้อนด้วยการใช้เอลิเมนต์หนึ่งมิติในของไหลและเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสองมิติในของแข็ง ดังแสดงในรูปที่ 3.1 โดยจะเริ่มอธิบายตั้งแต่ขั้นตอนการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อจนกระทั่งได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อที่สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง



รูปที่ 3.1 ภาพตัวอย่างการใช้เอลิเมนต์ในของแข็งและของไหล

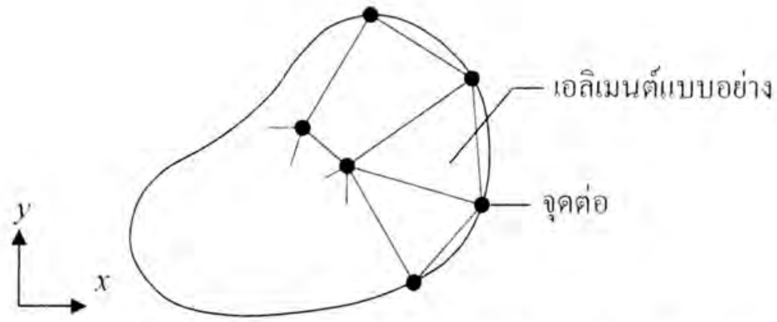
3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ขั้นตอนปกติทั่วไปจะประกอบด้วย 6 ขั้นตอนหลัก [7] ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 จากนั้นทำการหาสมการอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

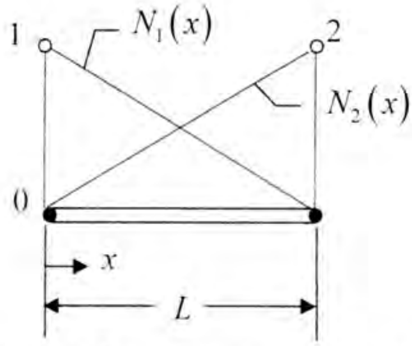
$$D(\phi') = 0 \tag{3.1}$$

โดย D คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) และ ϕ' คือผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 3.2 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาเป็นเอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 2 เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ (element interpolation functions) ยกตัวอย่างเช่น ในส่วนของของไหลเลือกใช้เอลิเมนต์หนึ่งมิติแบบสองจุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ดังนั้นฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์คือ

$$\phi(x) = N_1(x)\phi_1 + N_2(x)\phi_2 \tag{3.2}$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$\phi(x) = \lfloor N_1(x) \quad N_2(x) \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

$$= \lfloor N_i(x) \rfloor \{\phi_i\} \tag{3.4}$$

โดยที่ ϕ คือผลเฉลยโดยประมาณ

ϕ_i คือตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์

N_i คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equations) ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residual) โดยใช้หลักการที่ว่า หากทำการแทนผลเฉลยโดยประมาณดังที่แสดงในสมการ (3.2) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่กำลังพิจารณาอยู่นั้น

$D(\phi)$ จะไม่เท่ากับ 0 แต่จะเท่ากับ R

โดยที่ R คือ เศษตกค้าง (residual) นั่นหมายถึง

$$R = D(\phi) = D(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i) \tag{3.5}$$

โดย m คือจำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

จากวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin) ซึ่งมีขั้นตอนโดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighted function; W) จากนั้นทำการอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์แล้วกำหนดให้ผลลัพธ์ที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ ซึ่งคือ

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = 0 \tag{3.6}$$

กำหนดให้ $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าวิธีบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin)

ขั้นตอนที่ 4 อินทิเกรตทีละส่วน (integrate by part) ซึ่งจะแทนสมการ (3.5) ลงในสมการ (3.6) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} W_i D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) d\Omega \tag{3.7}$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) \, d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์, } \Omega^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) \, d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, } \Gamma^{(e)}} = 0 \tag{3.8}$$

ขั้นตอนที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ $\Gamma^{(e)}$ ด้วยภาวะขอบเขตอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหาที่พิจารณา

ขั้นตอนที่ 6 เขียนสมการของเอลิเมนต์ซึ่งมีทั้งหมด m สมการ ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์รวมนั่นคือ

$$[K]\{\phi\}=\{F\} \tag{3.9}$$

โดยที่ $[K]$ คือเอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง (element stiffness matrix)

$\{\phi\}$ คือเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (vector of nodal unknown)

$\{F\}$ คือโหลดเวกเตอร์ที่จุดต่อ (vector of nodal load)

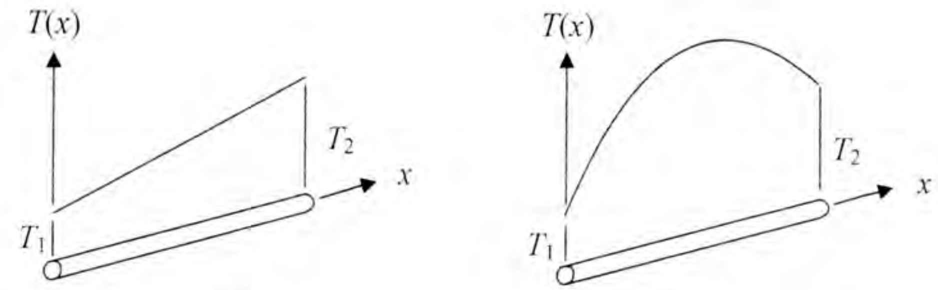
เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (3.9) แล้ว ลำดับขั้นตอนต่อไปรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดสมการระบบรวม จากนั้นกำหนดค่าที่ขอบเขตแล้วจึงแก้สมการระบบรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ

3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อ

การเลือกลักษณะของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation functions) จะส่งผลโดยตรงต่อความแม่นยำของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในแบบตัวแปรไร้จุดต่อที่ให้ผลเช่นเดียวกับฟังก์ชันการประมาณภายในที่เป็นควอดราติก (quadratic shape functions) โดยไม่จำเป็นต้องเพิ่มจุดต่อจริงลงไปบนเอลิเมนต์ [12, 13]

3.2.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์หนึ่งมิติตัวแปรไร้จุดต่อ

เอลิเมนต์แบบหนึ่งมิติตัวแปรไร้จุดต่อจะให้ผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์เป็นควอดราติกฟังก์ชัน ในขณะที่เอลิเมนต์ทั่วไปจะให้ให้ผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์เป็นลักษณะเชิงเส้น ดังแสดงในรูปที่ 3.4 ดังนั้นเอลิเมนต์แบบหนึ่งมิติตัวแปรไร้จุดต่อจึงให้ผลที่แม่นยำกว่าการใช้เอลิเมนต์แบบหนึ่งมิติทั่วไป



(ก) เอลิเมนต์ทั่วไป (ข) เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อ

รูปที่ 3.4 ลักษณะการกระจายตัวของผลเฉลยโดยประมาณบน
เอลิเมนต์หนึ่งมิติทั่วไปและตัวแปรไร้จุดต่อ

ฟังก์ชันที่ก่อให้เกิดลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณแบบควอดราติกอยู่ในรูป ดังนี้

$$\phi(x,t) = \underbrace{N_1(x)\phi_1(t) + N_2(x)\phi_2(t)}_{\text{ผลเฉลยที่ตำแหน่งจุดต่อ}} + \underbrace{N_3(x)\phi_3(t)}_{\text{ผลเฉลยที่ตำแหน่งไร้จุดต่อ}} \tag{3.10}$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$\phi(x,t) = \lfloor N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

$$= \lfloor N_i(x) \rfloor \{\phi_i(t)\} \tag{3.12}$$

โดย

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \tag{3.13}$$

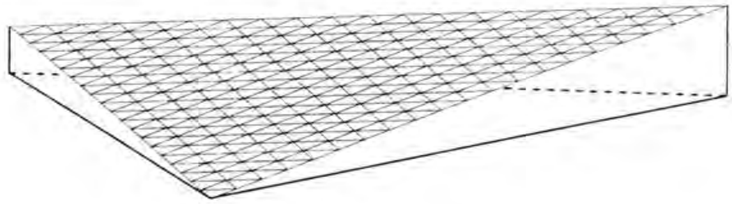
$$N_2 = \frac{x}{L} \tag{3.14}$$

$$N_3 = 4\frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{3.15}$$

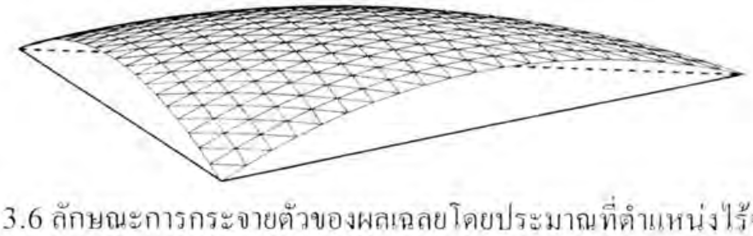
เมื่อ L คือความยาวของเอลิเมนต์

3.2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สองมิติตัวแปรไร้จุดต่อ

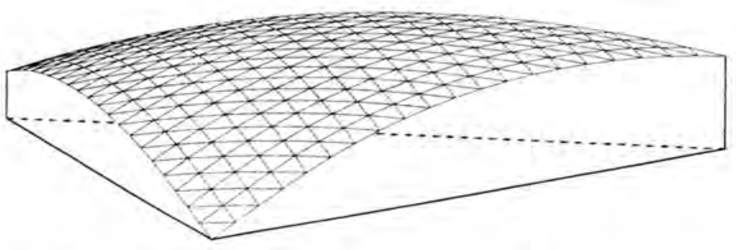
เอลิเมนต์สามเหลี่ยมเป็นเอลิเมนต์สองมิติที่นิยมนำมาใช้กันมาก เนื่องจากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบไปด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมทำได้ง่ายและอัตโนมัติ [8, 9] เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อจะให้ลักษณะการกระจายผลเฉลยบนเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ดังแสดงในรูปที่ 3.5 และการเพิ่มพจน์ตัวแปรไร้จุดต่อซึ่งมีลักษณะการกระจายตัว ดังแสดงในรูปที่ 3.6 ดังนั้นเมื่อรวมทั้งสองเข้าด้วยกันจะทำให้ได้การกระจายตัวของผลเฉลยที่มีลักษณะเป็นควอดราติก ดังแสดงในรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.5 ลักษณะการกระจายตัวของผลเฉลยโดยประมาณที่ตำแหน่งจุดต่อ



รูปที่ 3.6 ลักษณะการกระจายตัวของผลเฉลยโดยประมาณที่ตำแหน่งไร้จุดต่อ



รูปที่ 3.7 ลักษณะการกระจายตัวของผลเฉลยโดยประมาณรวม

ฟังก์ชันที่ก่อให้เกิดลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณแบบควอดราติกอยู่ในรูปแบบของพิกัดธรรมชาติ (natural coordinates) ดังนี้

$$\phi(x,y,t) = \underbrace{N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3}_{\text{ผลเฉลยที่ตำแหน่งจุดต่อ}} + \underbrace{N_4\phi_4 + N_5\phi_5 + N_6\phi_6}_{\text{ผลเฉลยที่ตำแหน่งไร้จุดต่อ}} \tag{3.16}$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$\phi(x,y,t) = \lfloor N_i(x,y) \rfloor \{\phi_i(t)\} \tag{3.17}$$

ฟังก์ชันการประมาณภายในที่ตำแหน่งจุดต่อ

$$N_1 = L_1 \tag{3.18}$$

$$N_2 = L_2 \tag{3.19}$$

$$N_3 = L_3 \tag{3.20}$$

ฟังก์ชันการประมาณภายในที่ตำแหน่งไร้จุดต่อ

$$N_4 = 4L_2L_3 \tag{3.21}$$

$$N_5 = 4L_1L_3 \tag{3.22}$$

$$N_6 = 4L_1L_2 \tag{3.23}$$

L_i คือฟังก์ชันการประมาณภายในในรูปแบบพิกัดพื้นที่ (area coordinates)

$$L_i(x,y) = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \tag{3.24}$$

A คือพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งสามารถคำนวณได้จากจุดต่อทั้งสามจุดดังนี้

$$A = \frac{1}{2}\left[x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_1\left(y_2 - y_3\right) + x_3\left(y_1 - y_2\right)\right] \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{3.26}$$

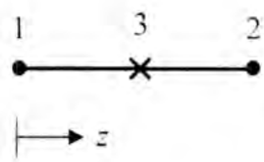
3.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อน

3.3.1 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของไหล

จากสมการ (2.24) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของไหลที่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลกับของแข็งด้วยการพาความร้อน

$$\rho_f c_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \dot{m}_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial z} - k_f A_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} - hp(T_s - T_f) - Q_f A_f = 0 \qquad (3.27)$$

ทำการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเริ่มต้นจากการเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในของอุณหภูมิบนเอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อแบบหนึ่งมิติ ดังแสดงในรูปที่ 3.8 ซึ่งก่อให้เกิดลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณแบบควอดราติก โดยผลเฉลยของปัญหาก็คือค่าของอุณหภูมิ



รูปที่ 3.8 เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อแบบหนึ่งมิติ

$$T(z,t) = \underbrace{N_1(z)T_1(t) + N_2(z)T_2(t)}_{\text{อุณหภูมิที่ตำแหน่งจุดต่อ}} + \underbrace{N_3(z)T_3(t)}_{\text{อุณหภูมิที่ตำแหน่งไร้จุดต่อ}} \qquad (3.28)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$T(z,t) = \lfloor N(z) \rfloor \{T(t)\} \qquad (3.29)$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z}(z) \right\rfloor \{T(t)\} \qquad (3.30)$$

และ

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lfloor N(z) \rfloor \{\dot{T}(t)\} \qquad (3.31)$$

โดยที่ T_i คืออุณหภูมิที่ไม่ทราบค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์

N_i คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของอุณหภูมิ

เนื่องจากค่าอุณหภูมิถูกแทนด้วยการประมาณค่า ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์นั้นมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นที่ถูกเรียกว่า เศษตกค้าง (residual) ทางด้านขวาของสมการ (3.27) ดังนั้นสมการจึงกลายเป็น

$$\rho_f c_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial t} - k_f A_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} + \dot{m}_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial z} - hp(T_s - T_f) - Q_f A_f = R \tag{3.32}$$

โดย R แทนค่าของเศษตกค้าง ดังนั้นการทำให้ค่าเศษตกค้าง R มีค่าที่ต่ำ จะส่งผลให้การคำนวณหาค่าอุณหภูมิ T มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น จึงนำระเบียบวิธีเศษตกค้างมาใช้เพื่อลดเศษตกค้าง R ด้วยการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W_i และอินทิเกรตตลอดพื้นที่และกำหนดผลลัพธ์ที่ได้เท่ากับศูนย์

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = 0 \tag{3.33}$$

แทนค่า R จากสมการ (3.32) ลงในสมการ (3.33) จะได้

$$\int_0^L W_i \left[\rho_f c_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \dot{m}_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial z} - k_f A_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} - hp(T_s - T_f) - Q_f A_f \right] dz = 0 \tag{3.34}$$

กระจายพจน์ต่างๆ จะได้

$$\int_0^L W_i \rho_f c_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial t} dz + \int_0^L W_i \dot{m}_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial z} dz - \int_0^L W_i k_f A_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} dz$$

$$+ \int_0^L W_i hp T_f \, dz - \int_0^L W_i hp T_s \, dz - \int_0^L W_i Q_f A_f \, dz = 0 \tag{3.35}$$

เนื่องจากพจน์ทั้งหมดของสมการ (3.35) ไม่สามารถประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่เข้าตามขอบเอลิเมนต์ได้ ดังนั้นเพื่อให้สามารถประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวได้จึงจำเป็นต้องใช้การอินทิเกรตทีละส่วน (integrate by parts) ดังนี้

$$\int_0^L u \, dv = (uv)\Big|_0^L - \int_0^L v \, du \tag{3.36}$$

เมื่อประยุกต์เข้ากับพจน์ที่สามทางซ้ายของสมการ (3.35) ซึ่งแทนการแพร่กระจายความร้อนภายในเอลิเมนต์

โดยที่ $u = W_i$, $dv = k_f A_f \dfrac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} dz$

$du = \dfrac{\partial W_i}{\partial z} dz$, $v = k_f A_f \dfrac{\partial T_f}{\partial z}$

ทำให้พจน์ที่สามทางซ้ายของสมการ (3.35) จึงกลายเป็น

$$\int_0^L W_i k_f A_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} dz = \left(W_i k_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \right)\Bigg|_0^L - \int_0^L k_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \frac{\partial W_i}{\partial z} dz \tag{3.37}$$

นำสมการ (3.37) แทนลงไปในสมการ (3.35) และจัดรูปจะได้

$$\int_0^L W_i \rho_f c_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial t} dz + \int_0^L W_i \dot{m}_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial z} dz + \int_0^L k_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \frac{\partial W_i}{\partial z} dz$$

$$+ \int_0^L W_i hpT_f dz - \int_0^L W_i hpT_s dz = \left(W_i k_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \right)\Bigg|_0^L + \int_0^L W_i Q_f A_f dz \tag{3.38}$$

แทนฟังก์ชันการประมาณจากสมการ (3.29) ถึง (3.31) ลงไปในสมการ (3.38) จะได้

$$\int_0^L W_i \rho_f c_f A_f \lfloor N \rfloor dz \{\dot{T}_f\} + \int_0^L W_i \dot{m}_f c_f \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z} \right\rfloor dz \{T_f\} + \int_0^L k_f A_f \frac{\partial W_i}{\partial z} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z} \right\rfloor dz \{T_f\}$$

$$+ \int_0^L W_i hp \lfloor N \rfloor dz \{T_f\} - \int_0^L W_i hp \lfloor N \rfloor dz \{T_s\} = \left(W_i k_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \right)\Bigg|_0^L + \int_0^L W_i Q_f A_f dz \tag{3.39}$$

กำหนดให้ $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าวิธีบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) จึงกลายเป็น

$$\int_0^L \rho_f c_f A_f \{N\} \lfloor N \rfloor dz \{\dot{T}_f\} + \int_0^L \dot{m}_f c_f \{N\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z} \right\rfloor dz \{T_f\}$$

$$+ \int_0^L k_f A_f \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z} \right\rfloor dz \{T_f\} + \int_0^L hp \{N\} \lfloor N \rfloor dz \{T_f\}$$

$$- \int_0^L hp \{N\} \lfloor N \rfloor dz \{T_s\} = \left(\{N\} k_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \right)\Bigg|_0^L + \int_0^L Q_f A_f \{N\} dz \tag{3.40}$$

เมื่อพิจารณาพจน์แรกทางด้านขวามือของสมการ (3.40) แทนปริมาณความร้อนที่เข้าออกผ่านจุดต่อ หากไม่มีความปริมาณความร้อนผ่านเข้าออกที่จุดต่อหรือจุดต่อของเอลิเมนต์นั้นเป็นจุดต่อร่วมของเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกัน พจน์นี้จะถูกหักล้างกันไป เนื่องจากปริมาณความร้อนจะถูกถ่ายเทออกจากเอลิเมนต์หนึ่งไปยังเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกันด้วยการนำความร้อน ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (3.40) ให้อยู่ในรูปของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ได้ดังนี้

$$[C]\{\dot{T}_f\}+\left([K_v]+[K_c]+\left[K_{f-s}\right]\right)\{T_f\}-\left[K_{f-s}\right]\{T_s\}=\{Q_Q\} \tag{3.41}$$

โดยที่

$$[C]=\int_0^L \rho_f c_f A_f \{N\}\lfloor N \rfloor dz \tag{3.42}$$

$$[K_v]=\int_0^L \dot{m}_f c_f \{N\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z} \right\rfloor dz \tag{3.43}$$

$$[K_c]=\int_0^L k_f A_f \left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z} \right\rfloor dz \tag{3.44}$$

$$\left[K_{f-s}\right]=\int_0^L hp\{N\}\lfloor N \rfloor dz \tag{3.45}$$

$$\{Q_Q\}=\int_0^L Q_f A_f \{N\}\, dz \tag{3.46}$$

เมื่อ $[C]$ คือเมทริกซ์ความจุความร้อน (capacitance matrix)

$[K_v]$ คือเมทริกซ์การพามวลของไหล (mass transport fluid convection matrix)

$[K_c]$ คือเมทริกซ์การนำความร้อน (conduction matrix)

$\left[K_{f-s}\right]$ คือเมทริกซ์การพาความร้อนระหว่างของไหลกับของแข็ง (fluid-solid convection matrix)

$\{\dot{T}_f\}$ คือเวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของไหลที่จุดต่อตามเวลา (vector of rate of change of nodal fluid temperature)

$\{T_f\}$ คือเวกเตอร์ของอุณหภูมิของไหลที่จุดต่อ (vector of nodal fluid temperature)

$\{T_s\}$ คือเวกเตอร์ของอุณหภูมิของแข็งที่จุดต่อ (vector of nodal solid temperature)

$\{Q_Q\}$ คือโหลดเวกเตอร์ของปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เอง (internal heat generation load vector)

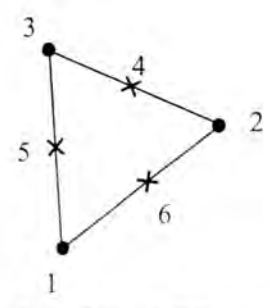
รายละเอียดของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ สำหรับของไหลได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

3.3.2 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง

จากสมการ (2.25) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} - k_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right) - Q_s = 0 \tag{3.47}$$

ทำการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเริ่มต้นจากการเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในของอุณหภูมิบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมตัวแปรไร้จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.9 ที่ก่อให้เกิดลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณแบบควอดราติก โดยผลเฉลยของปัญหาก็คือค่าของอุณหภูมิ ดังนี้



รูปที่ 3.9 เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อแบบสองมิติ

$$T(x,y,t) = \underbrace{N_1T_1 + N_2T_2 + N_3T_3}_{\text{อุณหภูมิที่ตำแหน่งจุดต่อ}} + \underbrace{N_4T_4 + N_5T_5 + N_6T_6}_{\text{อุณหภูมิที่ตำแหน่งไร้จุดต่อ}} \tag{3.48}$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$T(x,y,t) = \lfloor N(x,y) \rfloor \{T(t)\} \tag{3.49}$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \right\rfloor \{T(t)\} \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y}(x,y) \right\rfloor \{T(t)\} \tag{3.51}$$

และ
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lfloor N(x,y) \rfloor \{\dot{T}(t)\} \tag{3.52}$$

โดยที่ T_i คืออุณหภูมิที่ไม่ทราบค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์

N_i คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของอุณหภูมิ

เนื่องจากค่าอุณหภูมิถูกแทนด้วยการประมาณค่า ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์นั้นมีค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นที่ถูกเรียกว่า เศษตกค้าง (residual) ทางด้านขวาของสมการ (3.47)

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} - k_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right) - Q_s = R \tag{3.53}$$

โดย R แทนค่าของเศษตกค้าง ดังนั้นการทำให้ค่าเศษตกค้าง R มีค่าต่ำ จะส่งผลให้การคำนวณหาค่าอุณหภูมิ T มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น จึงนำระเบียบวิธีเศษตกค้างมาใช้เพื่อลดเศษตกค้าง R ด้วยการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W_i และอินทิเกรตตลอดพื้นที่และกำหนดผลลัพธ์ที่ได้เท่ากับศูนย์

$$\int_{\Omega} W_i R d\Omega = 0 \tag{3.54}$$

แทนค่า R จากสมการ (3.53) ลงในสมการ (3.54) จะได้

$$\int_{A_s} W_i t_s \left[\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} - k_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right) - Q_s \right] dA_s = 0 \tag{3.55}$$

เมื่อ t_s คือความหนาของแผ่น

A_s คือพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมของของแข็ง

กระจายพจน์ต่าง ๆ จะได้

$$\int_{A_s} W_i \rho_s c_s t_s \frac{\partial T_s}{\partial t} dA_s - \int_{A_s} W_i k_s t_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right) dA_s - \int_{A_s} W_i Q_s t_s dA_s = 0 \tag{3.56}$$

เนื่องจากพจน์ทั้งหมดของสมการ (3.56) ล้วนเกี่ยวข้องกับการอินทิเกรตบนพื้นที่ของเอลิเมนต์ จึงไม่สามารถประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่เข้าตามขอบเอลิเมนต์ได้ ดังนั้นเพื่อให้สามารถประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวได้จึงจำเป็นต้องประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem)

$$\int_{\Omega} u\left(\nabla\cdot\overline{V}\right)d\Omega = \int_{\Gamma} u\left(\overline{V}\cdot\hat{n}\right)d\Gamma - \int_{\Omega}\left(\nabla u\cdot\overline{V}\right)d\Omega \tag{3.57}$$

โดยที่ Ω คือโดเมนของปัญหาและ Γ คือพื้นที่ผิวหรือขอบของปัญหา

เมื่อประยุกต์เข้ากับพจน์ที่สองของสมการ (3.56) ซึ่งแทนการแพร่กระจายความร้อนภายในเอลิเมนต์ โดยที่

$$\left.\begin{aligned} u &= W_i \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \\ \overline{V} &= k_s t_s\left(\frac{\partial T_s}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial T_s}{\partial y}\hat{j}\right) \end{aligned}\right\} \left(\nabla\cdot\overline{V}\right) = k_s t_s\left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2}\right)$$

และเนื่องจาก $\hat{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j}$ ทำให้พจน์ที่สองของสมการ (3.56) จึงกลายเป็น

$$\int_{A_s} W_i k_s t_s\left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2}\right)dA_s = \int_{\Gamma} W_i k_s t_s\left(\frac{\partial T_s}{\partial x}n_x + \frac{\partial T_s}{\partial y}n_y\right)d\Gamma - \int_{A_s}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}k_s t_s\frac{\partial T_s}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y}k_s t_s\frac{\partial T_s}{\partial y}\right)dA_s \tag{3.58}$$

โดยที่ n_x และ n_y คือทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ที่ตั้งฉากกับขอบ

นำสมการ (3.58) แทนลงไปในสมการ (3.56) และจัดรูปจะได้

$$\int_{A_s} W_i\rho_s c_s t_s\frac{\partial T_s}{\partial t}dA_s + \int_{A_s} k_s t_s\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\frac{\partial T_s}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y}\frac{\partial T_s}{\partial y}\right)dA_s = \int_{\Gamma} W_i k_s t_s\left(\frac{\partial T_s}{\partial x}n_x + \frac{\partial T_s}{\partial y}n_y\right)d\Gamma + \int_{A_s} W_i Q_s t_s dA_s \tag{3.59}$$

แทนฟังก์ชันการประมาณจากสมการ (3.49) ถึง (3.52) ลงไปในสมการ (3.59) จะได้

$$\int_{A_s} \rho_s c_s t_s W_i \lfloor N \rfloor dA_s \{\dot{T}_s\} + \int_{A_s} k_s t_s \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor + \frac{\partial W_i}{\partial y} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \right) dA_s \{T_s\}$$

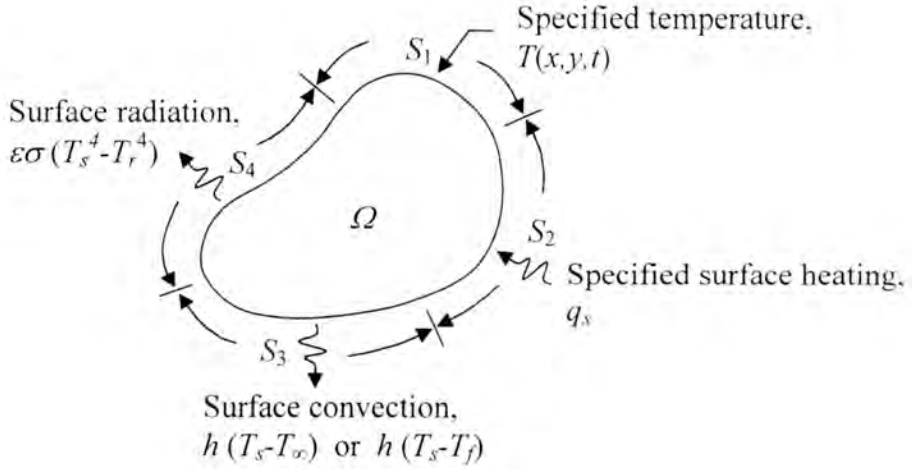
$$= \int_{\Gamma} k_s W_i t_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial x} n_x + \frac{\partial T_s}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{A_s} W_i Q_s t_s dA_s \qquad (3.60)$$

กำหนดให้ $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าวิธีบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) จึงกลายเป็น

$$\int_{A_s} \rho_s c_s t_s \{N\} \lfloor N \rfloor dA_s \{\dot{T}_s\} + \int_{A_s} k_s t_s \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \right) dA_s \{T_s\}$$

$$= \int_{\Gamma} k_s t_s \{N\} \left(\frac{\partial T_s}{\partial x} n_x + \frac{\partial T_s}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{A_s} Q_s t_s \{N\} dA_s \qquad (3.61)$$

เมื่อพิจารณาพจน์แรกทางด้านขวาของสมการ (3.61) ซึ่งแสดงแทนปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทผ่านผิวของเอลิเมนต์ หากเอลิเมนต์ที่พิจารณานั้นอยู่ภายในวัตถุแล้ว ปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทผ่านขอบของเอลิเมนต์นั้นจะต้องมีค่าเท่ากับปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทผ่านไปยังขอบของเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกันจะทำให้พจน์นี้จึงถูกหักล้างไป แต่ถ้าเอลิเมนต์ที่พิจารณานั้นอยู่ที่ผิวนอกของวัตถุ พจน์นี้จะต้องถูกแทนที่ด้วยปริมาณความร้อนที่ถ่ายเทผ่านผิวของเอลิเมนต์ เนื่องจากที่ขอบเอลิเมนต์นั้นจะต้องอยู่ในสภาวะสมดุลกับปริมาณการถ่ายเทความร้อนภายนอกที่เกิดขึ้นที่ผิวเอลิเมนต์ ซึ่งอาจจะเป็นปริมาณความร้อนที่กำหนดให้ ปริมาณความร้อนจากการพาความร้อนหรือความร้อนจากการแผ่รังสี ดังแสดงในรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของการถ่ายเทความร้อน

เนื่องจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ถูกนำไปใช้กับการวิเคราะห์อุณหภูมิของโครงสร้างหล่อเย็นด้วยการพาความร้อน การพาความร้อนจึงถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ การพาความร้อนที่ถ่ายเทของระหว่างอุณหภูมิของแข็งกับอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมที่มีค่าคงที่ และการพาความร้อนที่ถ่ายเทของระหว่างอุณหภูมิของแข็งกับอุณหภูมิของไหล โดยที่อุณหภูมิของไหลก็เป็นตัวแปรของปัญหาด้วย ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบทั่วไป เมื่อไม่คิดการแผ่รังสีความร้อนได้ดังนี้

$$[C]\{\dot{T}_s\}+([K_c]+[K_h]+[K_{f-s}])\{T_s\}-[K_{f-s}]\{T_f\}=\{Q_Q\}+\{Q_q\}+\{Q_h\} \quad (3.62)$$

โดยที่
$$[C]=\int_{A_s}\rho_s c_s t_s\{N\}\lfloor N\rfloor dA_s \quad (3.63)$$

$$[K_c]=\int_{A_s}k_s t_s\left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor+\left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)dA_s \quad (3.64)$$

$$[K_h]=\int_{\Gamma}h_s t_s\{N\}\lfloor N\rfloor d\Gamma \quad (3.65)$$

$$[K_{f-s}]=\int_{\Gamma}h t_s\{N\}\lfloor N\rfloor d\Gamma \quad (3.66)$$

$$\{Q_Q\}=\int_{A_s}Q_s t_s\{N\}\,dA_s \quad (3.67)$$

$$\{Q_q\}=\int_{\Gamma}q_s t_s\{N\}\,d\Gamma \quad (3.68)$$

$$\{Q_h\}=\int_{\Gamma}h_s t_s T_\infty\{N\}\,d\Gamma \quad (3.69)$$

เมื่อ $[C]$ คือเมทริกซ์ความจุความร้อน (capacitance matrix)

$[K_c]$ คือเมทริกซ์การนำความร้อน (conduction matrix)

$[K_h]$ คือเมทริกซ์การพาความร้อน (convection matrix)

$[K_{f-s}]$ คือเมทริกซ์การพาความร้อนระหว่างของไหลกับของแข็ง (fluid-solid convection matrix)

$\{\dot{T}_s\}$ คือเวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของแข็งที่จุดต่อตามเวลา (vector of rate of change of nodal solid temperature)

$\{T_s\}$ คือเวกเตอร์ของอุณหภูมิของแข็งที่จุดต่อ (vector of nodal solid temperature)

$\{T_f\}$ คือเวกเตอร์ของอุณหภูมิของไหลที่จุดต่อ (vector of nodal fluid temperature)

$\{Q_Q\}$ คือโหลดเวกเตอร์ของปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เอง (internal heat generation load vector)

$\{Q_q\}$ คือโหลดเวกเตอร์ของปริมาณความร้อนที่กำหนดให้ (specific heat load vector)

$\{Q_h\}$ คือโหลดเวกเตอร์ของปริมาณความร้อนจากการพาความร้อน (convection heat load vector)

รายละเอียดของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ สำหรับของแข็งได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

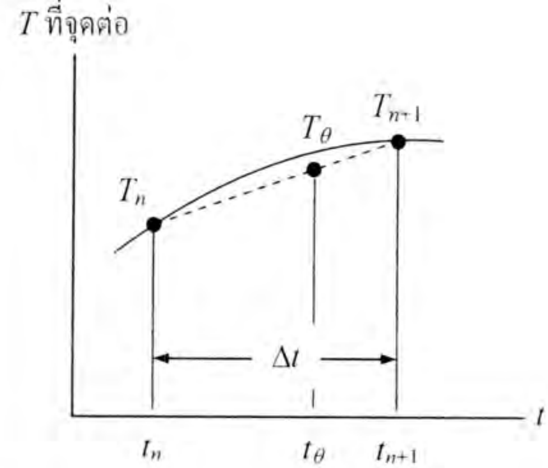
3.4 การแก้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาภายใต้สถานะชั่วครู่

การวิเคราะห์ปัญหาเพื่อหาอุณหภูมิที่เวลาต่างกันซึ่งเป็นผลลัพธ์ของปัญหาภายใต้สถานะชั่วครู่เปรียบเสมือนกับการแก้ปัญหาเพื่อหาผลลัพธ์ของอุณหภูมิของปัญหานั้นภายใต้สถานะอยู่ตัวแล้วนำมาเรียงประกอบกันขึ้น ดังนั้นในการวิเคราะห์ปัญหาภายใต้สถานะชั่วครู่จำเป็นต้องแก้ระบบสมการรวมหลาย ๆ ครั้งแทนที่จะต้องแก้ระบบสมการเพียงครั้งเดียวดังที่เคยทำสำหรับปัญหาภายใต้สถานะอยู่ตัว

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทั่วไปสำหรับปัญหาสถานะชั่วครู่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$[C]\{\dot{T}\}+[K]\{T\} = \{Q\} \tag{3.70}$$

วิธีการแก้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาสถานะชั่วครู่ที่นิยมใช้โดยทั่วไปคือ การใช้ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) [7] ซึ่งสามารถอธิบายได้จากรูปที่ 3.11 กล่าวคือ ที่เวลา t_n เรารู้ค่าอุณหภูมิ T_n และเราจะใช้ช่วงเวลา (time step) Δt เพื่อคำนวณหาอุณหภูมิ T_{n+1} ที่เวลา t_{n+1}



รูปที่ 3.11 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่จุดต่อใด ๆ กับเวลา

จากรูป 3.11 จะเห็นได้ว่าที่เวลา t_θ ใด ๆ ซึ่งอยู่ในช่วงเวลา Δt ดังกล่าว สามารถเขียนสมการขึ้นมาได้ดังนี้

$$t_\theta \cong t_n + \theta\Delta t \tag{3.71}$$

โดย $0 \le \theta \le 1$ ในช่วงเวลาดังกล่าวความชันของอุณหภูมิโดยประมาณคือ

$$\dot{T}_\theta \cong \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} \tag{3.72}$$

และอุณหภูมิโดยประมาณที่เวลา t_θ คือ

$$T_\theta \cong (1-\theta)T_n + \theta T_{n+1} \tag{3.73}$$

โดยนำหลักการดังแสดงในสมการ (3.72) และ (3.73) ไปใช้เพื่อคำนวณหาผลลัพธ์ของอุณหภูมิในสถานะชั่วครู่จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.70) โดยเริ่มจากการเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวที่เวลา t_θ ดังนี้

$$[C]\{\dot{T}\}_\theta + [K]\{T\}_\theta = \{Q\}_\theta \tag{3.74}$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.72) เวกเตอร์ของความชันของอุณหภูมิที่จุดต่อต่าง ๆ คือ

$$\{\dot{T}\}_\theta \cong \frac{\{T_{n+1}\} - \{T\}_n}{\Delta t} \tag{3.75}$$

และในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.73) เวกเตอร์ของอุณหภูมิที่จุดต่อต่าง ๆ คือ

$$\{T\}_\theta \cong (1-\theta)\{T_n\}+\theta\{T_{n+1}\} \tag{3.76}$$

ยิ่งไปกว่านั้น หากโหลดเวกเตอร์ทางด้านขวามือของสมการ (3.70) นั้นเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา โหลดเวกเตอร์ดังกล่าวที่เวลา t_θ สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกันคือ

$$\{Q\}_\theta \cong (1-\theta)\{Q_n\}+\theta\{Q_{n+1}\} \tag{3.77}$$

แทนสมการ (3.75) ถึง (3.77) ลงในสมการ (3.74) แล้วจัดพจน์โดยเวกเตอร์ของอุณหภูมิที่ไม่รู้ค่าอยู่ทางซ้ายของสมการ จะได้

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[C]+\theta[K]\right)\{T\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[C]-(1-\theta)[K]\right)\{T\}_n$$

$$+(1-\theta)\{Q\}_n+\theta\{Q\}_{n+1} \tag{3.78}$$

ในขั้นตอนนี้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (3.70) ถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงพีชคณิต (3.78) ซึ่งสามารถทำการแก้ได้โดยตรง ลักษณะของผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ระบบสมการ (3.78) ขึ้นอยู่กับค่า θ ที่เลือกใช้และมีชื่อเรียกดังต่อไปนี้

ค่า $\theta = 1$ เรียกว่าออยเลอร์ (Euler)

$\theta = 1/2$ เรียกว่าแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson)

$\theta = 2/3$ เรียกว่ากาเลอร์คิน (Galerkin)

$\theta = 1$ เรียกว่าผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (backward difference)

การเลือกช่วงเวลา Δt นั้นมีผลอย่างมากต่อการคำนวณ การใช้ช่วงเวลา Δt ที่ต่ำมากเกินไป ถึงแม้จะได้ผลลัพธ์ที่แม่นยำ แต่ก็จำเป็นต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก ซึ่งต้องคำนึงเป็นอย่างยิ่ง โดยเฉพาะปัญหาในทางปฏิบัติที่รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยจุดต่อจำนวนมาก ในทางตรงกันข้าม การใช้ช่วงเวลา Δt ที่สูงมากไปจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่คลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริง และยิ่งไปกว่านั้นอาจจะพบว่าผลลัพธ์ของอุณหภูมินั้นมีลักษณะขึ้นลงโดยสั่น (oscillation) เป็นรูปฟันปลารอบผลลัพธ์ที่แท้จริงซึ่งแปรผันไปตามเวลา หรือในบางครั้งอาจพบว่าผลลัพธ์นั้นลู่ออก (diverge) จากผลลัพธ์ที่ควรจะเป็น

3.5 บทสรุป

ในบทนี้ได้เริ่มต้นกล่าวถึงขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างซึ่งเป็นวิธีมาตรฐานที่ใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัจจุบัน รวมไปถึงรายละเอียดของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อที่ให้ฟังก์ชันการประมาณภายในเป็นควอดราติก โดยที่ยังคงใช้จำนวนจุดต่อจริงเท่ากับจำนวนจุดต่อในเอลิเมนต์แบบธรรมดาที่ให้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์แบบเชิงเส้นตรง ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จึงมีความแม่นยำมากขึ้น

จากนั้นได้แสดงการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ตัวแปรไร้จุดต่อจากสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในของไหลหนึ่งมิติตามแนวความยาวท่อที่มีการการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลกับของแข็งอยู่ในรูปของการพาความร้อนและสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในของแข็งจนกระทั่งได้อยู่ในรูปของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ ที่สามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง ในส่วนสุดท้ายของบทนี้ยังได้แสดงวิธีการแก้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาภายใต้สถานะชั่วครู่ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวจะมีพจน์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ทำให้ไม่สามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ ด้วยเหตุนี้จึงต้องอาศัยหลักการของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเพื่อเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งให้อยู่ในรูปของสมการเชิงพีชคณิต