

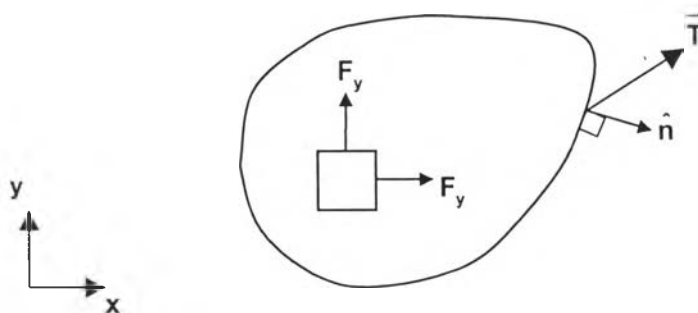
บทที่ 4

การวิเคราะห์ปัญหาออยร์ราวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในการวิเคราะห์ปัญหาออยร์ราวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น จะเริ่มจากการวิเคราะห์ความเค้นและการเสียรูปของของแข็งที่มีความยืดหยุ่น โดยในที่นี้จะทำการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 2 มิติ ซึ่งจะประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลของของแข็งยืดหยุ่นได้ ลักษณะของเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ ที่กระทำกับปัญหานี้ สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว และขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งที่มีความยืดหยุ่นได้ แล้วจึงทำการวิเคราะห์ปัญหาในวัตถุยืดหยุ่นได้ที่มีรอยร้าว

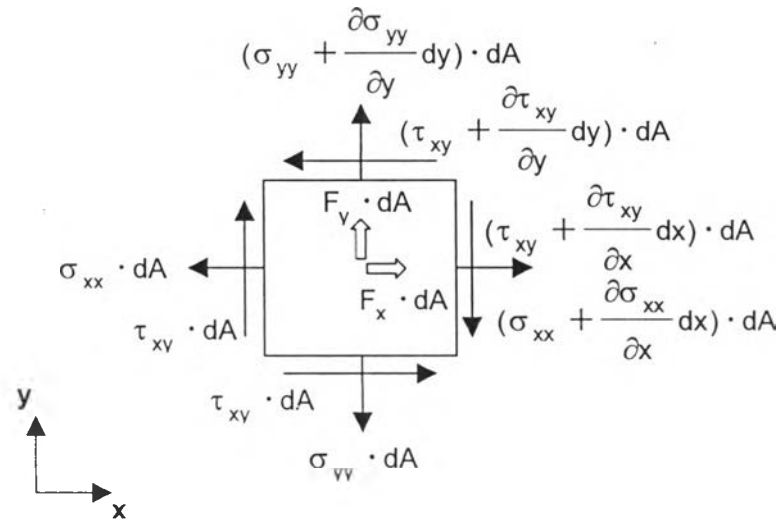
4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของของแข็งในสองมิติ

เมื่อมีแรงภายนอกกระทำกับของแข็งยืดหยุ่นได้ จะก่อให้เกิดการเสียรูปและความเค้นเกิดขึ้น โดยของแข็งยืดหยุ่นได้ซึ่งถูกกระทำด้วยแรงภายนอกภายใต้สภาวะสมดุลสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 แสดงของแข็งยืดหยุ่นได้ซึ่งถูกกระทำด้วยแรงภายนอกภายใต้สภาวะสมดุล

พิจารณาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเล็กๆ ภายใต้สภาวะสมดุลของของแข็งยืดหยุ่นได้ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 2 มิติ ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเล็กๆ ภายใต้สภาวะสมดุลของของแข็งยืดหยุ่นได้ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 2 มิติ

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย [27] ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (4.1ก)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0 \quad (4.1ข)$$

โดยที่ σ_{xx}, σ_{yy} คือ ความเค้นตรงในทิศทางแกน x และ y ตามลำดับ

τ_{xy} คือ ความเค้นเฉือน

F_x, F_y คือ แรงวัตถุ (Body force) ในทิศทางแกน x และ y ตามลำดับ

4.2 เงื่อนไขขอบเขต

เงื่อนไขขอบเขตในการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งที่มีความยืดหยุ่นได้ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 2 มิติ โดยทั่วไปประกอบด้วยข้อกำหนดเงื่อนไขของความเค้นที่ผิว (Surface traction) ที่ขอบนอกบางส่วน และการกำหนดค่าการเสียรูปหรือการเคลื่อนที่บนพื้นผิวบางส่วน โดยสามารถแสดงได้ดังนี้

4.2.1 กำหนดค่าการเคลื่อนตัวบนพื้นผิว $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ในทิศทาง x และ y ตามลำดับ

4.2.2 กำหนดแรงที่ขอบนอก ซึ่งเขียนแทนด้วย \bar{T}

$$\bar{T} = T_x \hat{i} + T_y \hat{j} \quad (4.2)$$

โดยที่ T_x และ T_y คือ แรงที่ขอบนอก (Surface traction) ในทิศทางแกน x และ y ตามลำดับ และสามารถเขียนในรูปแบบของความเค้นย่อยได้ดังนี้ คือ

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

โดยที่ n_x และ n_y คือ ทิศทางโคไซน์ (Direction of cosine) ของเวกเตอร์

$$\hat{n} = n_x \cdot \hat{i} + n_y \cdot \hat{j} \quad (4.4)$$

ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิว ณ จุดที่กำลังพิจารณา

นอกจากเงื่อนไขขอบเขตที่กล่าวมาแล้ว ของแข็งยืดหยุ่นได้อาจมีความเครียดชั้นต้น (Prestrain) ที่เกิดขึ้นอยู่ก่อนแล้ว ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดโดยทั่วไป คือ

$$\{ \sigma \} = [C] \{ \varepsilon - \varepsilon_0 \} \quad (4.5)$$

โดยที่

$$\{ \sigma \}^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}] \quad (4.6)$$

$$\{ \varepsilon \}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}] \quad (4.7)$$

และหากความเครียดชั้นต้นนั้นเกิดเนื่องมาจากอุณหภูมิ

$$\{ \varepsilon_0 \}^T = \{ \alpha \}^T (T(x,y) - T_0) \quad (4.8)$$

โดยเมตริกซ์ $[C]$ และ $\{\epsilon_0\}$ ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาว่าเป็นลักษณะของความเค้นระนาบ (Plane stress) หรือความเครียดระนาบ (Plane strain)

ในกรณีของความเค้นระนาบ จะได้

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

ในกรณีของความเครียดระนาบ จะได้

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha(1+\nu) \\ \alpha(1+\nu) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

- โดยที่ ν แทนอัตราส่วนปัวส์ซง (Poisson's ratio)
 E แทนค่าคงที่ของการยืดหยุ่น (Modulus of elasticity)
 $T(x,y)$ แทนอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งที่พิจารณา
 T_0 แทนอุณหภูมิที่วัสดุนั้นไม่มีความเค้น

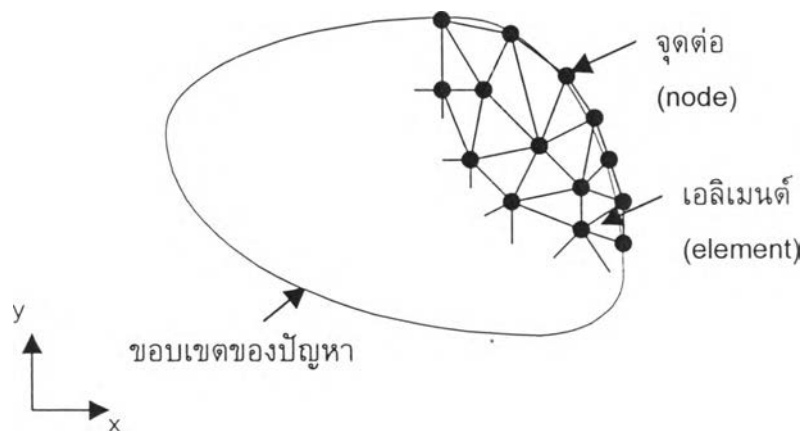
สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว (Strain-displacement relation) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

4.3 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

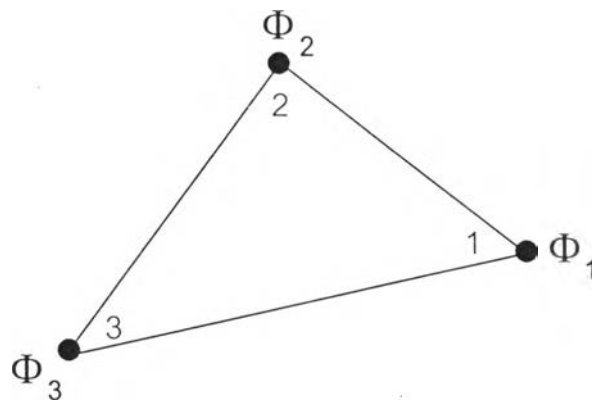
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วยขั้นตอนหลักๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอน [1] ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการจะหาผลเฉลยออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

ขั้นตอนที่ 2 เลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation function)



รูปที่ 4.4 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ โดยมีตัวไม่รู้ค่า ณ จุดต่อ

ซึ่งเป็นรูปแบบการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์ เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยม ดังแสดงในรูปที่ 4.4 เอลิเมนต์ดังกล่าวประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ 3 โดยจุดต่อเหล่านี้เป็นตำแหน่งตัวไม่รู้ค่า (Nodal unknown) ซึ่งคือ Φ_1, Φ_2, Φ_3 ลักษณะการ

กระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมนี้สามารถเขียนในรูปฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\Phi(x,y) = N_1(x,y)\Phi_1 + N_2(x,y)\Phi_2 + N_3(x,y)\Phi_3 \quad (4.12)$$

โดยที่ $N_i(x,y)$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ เมื่อ $i = 1,2,3$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} \{ \Phi \} \\ &\quad (1 \times 3) \quad (3 \times 1) \end{aligned} \quad (4.13)$$

โดยที่ $\begin{bmatrix} N \end{bmatrix}$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์

$\{ \Phi \}$ คือ เวกเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการของเอลิเมนต์ (Element equations) เช่น ดังรูปที่ 4.4 สมการของเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมจะเขียนได้ในรูปดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (4.14)$$

สามารถเขียนได้โดยย่อเป็น

$$[K]_e \{ \Phi \}_e = \{ F \}_e \quad (4.15)$$

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ (4.14) สามารถทำได้โดย [1]

1. วิธีการโดยตรง (Direct approach)
2. วิธีการแปรผัน (Variational approach)
3. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals)

ขั้นตอนที่ 4 นำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 มาประกอบกัน ทำให้เกิดระบบสมการในรูปแบบดังนี้

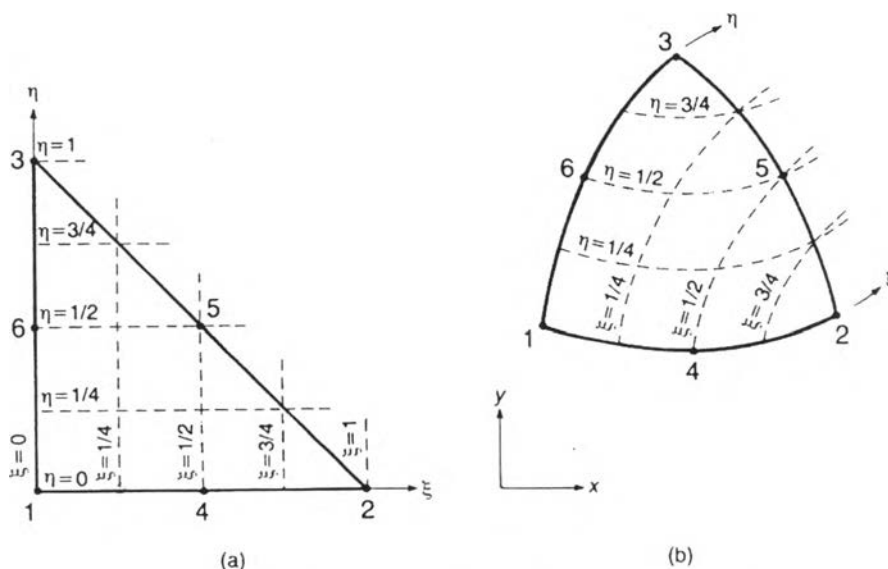
$$\sum(\text{Element Equations}) \Rightarrow [K]_{\text{sys}} \{ \Phi \}_{\text{sys}} = \{ F \}_{\text{sys}} \quad (4.16)$$

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ลงในสมการที่ (4.16) แล้วทำการแก้ระบบสมการนั้น เพื่อหาเวกเตอร์คำตอบ $\{ \Phi \}_{\text{sys}}$ อันประกอบไปด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ดังเช่น ค่าการเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้าง เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่างๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถทำการหาค่าอื่นๆ ที่ต้องการทราบต่อไปได้ เช่น เมื่อรู้ค่าการเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้างแล้ว จะสามารถนำไปหาค่าความเครียดและความเค้นต่อไป เป็นต้น

4.4 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ

ในวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 4.5 ซึ่งเป็นเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจุดต่อทั้งหมดหกจุดต่อ แต่ละจุดต่อมีตัวไม่ทราบค่าสองตัวคือ การเคลื่อนตัวในแนวแกน x และ แกน y



รูปที่ 4.5 แสดงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ

โดยเอลิเมนต์ดังกล่าวนี้มีลักษณะการประมาณภายในแบบอันดับสอง (Quadratic Interpolation) ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด $x - y$ และ พิกัด $\xi - \eta$ [32] ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta) &= \hat{N}_1 x_1 + \hat{N}_2 x_2 + \hat{N}_3 x_3 + \hat{N}_4 x_4 + \hat{N}_5 x_5 + \hat{N}_6 x_6 \\
 &= [\hat{N}] \{x\} \\
 &\quad (1 \times 6)(6 \times 1)
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 y(\xi, \eta) &= \hat{N}_1 y_1 + \hat{N}_2 y_2 + \hat{N}_3 y_3 + \hat{N}_4 y_4 + \hat{N}_5 y_5 + \hat{N}_6 y_6 \\
 &= [\hat{N}] \{y\} \\
 &\quad (1 \times 6)(6 \times 1)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

โดยที่ $\hat{N}_i, i = 1,6$ เรียกว่าฟังก์ชันฐาน (Shape functions) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ ξ และ η [32] ได้ดังนี้

$$\hat{N}_1 = [1 - (\xi + \eta)] \cdot [1 - 2 \cdot (\xi + \eta)] \tag{4.19ก}$$

$$\hat{N}_2 = \xi \cdot (2 \cdot \xi - 1) \tag{4.19ข}$$

$$\hat{N}_3 = \eta \cdot (2 \cdot \eta - 1) \tag{4.19ค}$$

$$\hat{N}_4 = 4 \cdot \xi \cdot [1 - (\xi + \eta)] \tag{4.19ง}$$

$$\hat{N}_5 = 4 \cdot \xi \cdot \eta \tag{4.19จ}$$

$$\hat{N}_6 = 4 \cdot \eta \cdot [1 - (\xi + \eta)] \tag{4.19ฉ}$$

สมมติให้การกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned}
 \Phi &= N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 + N_3 \Phi_3 + N_4 \Phi_4 + N_5 \Phi_5 + N_6 \Phi_6 \\
 &= [N] \{ \Phi \} \\
 &\quad (1 \times 6) (6 \times 1)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

โดย N_i และ $\Phi_i, i = 1,6$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อทั้งหมดตามลำดับ และสำหรับไอโซพารามेटริกเอลิเมนต์ (Isoparametric element) จะ

เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ให้มีรูปแบบเช่นเดียวกับฟังก์ชันฐาน ดังที่แสดงในสมการ (4.19) นั่นคือ

$$N_1 = [1 - (\xi + \eta)] \cdot [1 - 2 \cdot (\xi + \eta)] \quad (4.21ก)$$

$$N_2 = \xi \cdot (2 \cdot \xi - 1) \quad (4.21ข)$$

$$N_3 = \eta \cdot (2 \cdot \eta - 1) \quad (4.21ค)$$

$$N_4 = 4 \cdot \xi \cdot [1 - (\xi + \eta)] \quad (4.21ง)$$

$$N_5 = 4 \cdot \xi \cdot \eta \quad (4.21จ)$$

$$N_6 = 4 \cdot \eta \cdot [1 - (\xi + \eta)] \quad (4.21ฉ)$$

4.5 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของแข็งสามารถทำได้ โดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals) โดยเริ่มจาก

$$\int_{\Omega} W_i \cdot R \, d\Omega = 0 \quad , i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (4.22)$$

โดยที่ W_i แทนฟังก์ชันน้ำหนัก (Weighting function)
 R แทนเศษตกค้าง (Residual)
 m แทนจำนวนตัวไม่ทราบค่าทั้งหมดของเอลิเมนต์นั้น
 Ω แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์

และในที่นี้เลือก $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าวิธีบับโนฟ-กาลอร์กิน (Bubnov-Galerkin method)

จากสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลของของแข็งในสองมิติ

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (4.23ก)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0 \quad (4.23ข)$$

ทำการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักพิเศษคด้างเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ (4.23ก) ดังนี้

$$\int_{\Omega} N_i \cdot (\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y}) d\Omega + \int_{\Omega} N_i \cdot F_x d\Omega = 0 \quad (4.24)$$

จากทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ซึ่งกล่าวว่า

$$\int_{\Omega} u(\nabla \cdot \bar{V}) d\Omega = \int_{\Gamma} u(\bar{V} \cdot \hat{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \bar{V}) d\Omega \quad (4.25)$$

ทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์เข้ากับพจน์แรกของสมการ (4.24) โดยการเปรียบเทียบสัญลักษณ์ของตัวแปรทางด้านซ้ายของสมการ (4.25) เข้ากับพจน์แรกของสมการ (4.24) จะได้

$$u = N_i \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \hat{j}$$

$$\bar{V} = \sigma_{xx} \cdot \hat{i} + \tau_{xy} \cdot \hat{j} \quad \hat{n} = n_x \cdot \hat{i} + n_y \cdot \hat{j}$$

ดังนั้นจะได้

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \tau_{xy} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} N_i (\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y) d\Gamma + \int_{\Omega} N_i F_x d\Omega \quad (4.26)$$

ในทำนองเดียวกัน ทำการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักพิเศษคด้างเข้ากับสมการ (4.23ข) จะได้

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \sigma_{yy} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} N_i (\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y) d\Gamma + \int_{\Omega} N_i F_y d\Omega \quad (4.27)$$

แทนเงื่อนไขขอบเขตของแรงที่ผิวจากสมการ (4.3) คือ

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

ลงในสมการ (4.26) และ (4.27) จากนั้นทำการจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ดังนี้

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} d\Omega \quad (4.29)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอย่างย่อได้ว่า

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} d\Omega \quad (4.30)$$

โดยที่

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (4.31)$$

และ

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (4.32)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดแสดงได้ในรูปของสมการ (4.5) คือ

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon - \epsilon_0\} \quad (4.33)$$

และสำหรับความเครียดนั้น สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบของค่าการเคลื่อนตัวได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัว ดังนี้

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (4.34)$$

$$\text{โดยที่ } \{\delta\}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 & u_6 & v_6 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

แทนค่าในสมการ (4.5) และ (4.35) ลงในสมการ (4.29) แล้วทำการจัดรูปใหม่จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเมตริกซ์ ดังนี้

$$\int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega \cdot \{\delta\} = \int_{\Omega} [B]^T [C] \{\varepsilon_0\} d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \{F\} d\Omega + \int_{\Gamma} [N]^T \{T\} d\Gamma \quad (4.36)$$

$$\text{โดยที่ } [B] = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

และ Ω แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์, Γ แทนขอบเขตของพื้นที่ผิว

เพื่อให้สามารถทำความเข้าใจได้ง่ายต่อการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สามารถจัดรูปสมการ (4.36) ให้อยู่ในรูปแบบที่เข้าใจง่ายขึ้นดังนี้

$$[K]_e \{\delta\} = \{F_T\}_e + \{F_B\}_e + \{F_0\}_e \quad (4.39)$$

(12x12)(12x1) (12x1) (12x1) (12x1)

$$\text{โดยที่ } [K]_e = \int_A [B]^T [C] [B] \cdot t dA \quad (4.40)$$

(12x12) (12x3)(3x3)(3x12)

$$\{F_0\}_e = \int_A [B]^T [C] \{\varepsilon_0\} \cdot t dA \quad (4.41)$$

(12x1) (12x3)(3x3)(3x1)

$$\begin{matrix} \{F_B\}_e & = & \int_A [N]^T \{F\} \cdot t dA & (4.42) \\ (12 \times 1) & & (12 \times 3)(3 \times 1) & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \{F_T\}_e & = & \int_{\Gamma} [N]^T \{T\} d\Gamma & (4.43) \\ (12 \times 1) & & (12 \times 3)(3 \times 1) & \end{matrix}$$

ในที่นี้ $[K]$ แทนเอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง
 และ $\{F_0\}$, $\{F_B\}$, $\{F_T\}$ แทนโหลดเวกเตอร์เนื่องมาจากความเค้นชั้นต้น, แรงวัตถุ และ
 แรงที่ผิวตามลำดับ

4.6 การคำนวณเอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง

จากหัวข้อที่แล้ว จะพบว่าเอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง $[K]$ แสดงได้ดังสมการ
 (4.40) คือ

$$\begin{matrix} [K]_e & = & \int_A [B]^T [C] [B] \cdot t dA & (4.44) \\ (12 \times 12) & & (12 \times 3)(3 \times 3)(3 \times 12) & \end{matrix}$$

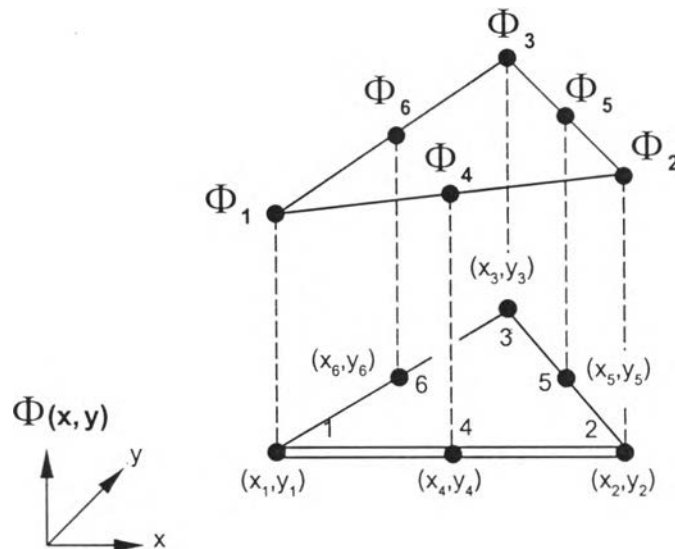
โดยที่ $[C]$ แทนเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

t แทนความหนาของเอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 4.6

และเมตริกซ์ $[B] = [B(x, y)]$ เป็นเมตริกซ์ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัว ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ (4.34) คือ

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4 \ B_5 \ B_6] \{\delta\} \quad (4.45)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$



รูปที่ 4.6 การกระจายตัวของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ

ในการหาไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง $[K]$ ดังสมการ (4.44) จำเป็นต้องหาลักษณะความชันของผลเฉลยโดยประมาณ $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ และ $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ แต่เนื่องจากผลเฉลยโดยประมาณ (Φ) นั้น ถูกสมมุติให้อยู่ในรูปฟังก์ชันธรรมชาติ $\xi - \eta$ ดังนั้นจึงต้องทำการประยุกต์ใช้กฎลูกโซ่ (Chain rule) ดังนี้

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.46n)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (4.46n)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\substack{[J] \\ (2 \times 2)}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

โดย $[J]$ เรียกว่าเมตริกซ์ยาโคบี (Jacobian matrix) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{i=1}^4 N_i x_i \right) & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{i=1}^4 N_i y_i \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^4 N_i x_i \right) & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^4 N_i y_i \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.48)$$

จากสมการ (4.47) สามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J^*] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

โดยเมตริกซ์ผกผัน $[J]^{-1}$ นั้นสามารถคำนวณได้จากเมตริกซ์ยาโคบี $[J]$ ดังนี้

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{11} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

และเนื่องจาก

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบสมการ (4.54) กับสมการ (4.55) จะพบว่า

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = J_{11}^* \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{12}^* \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \quad i = 1,2,3,4,5,6 \quad (4.53ก)$$

$$\text{และ} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = J_{21}^* \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{22}^* \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \quad i = 1,2,3,4,5,6 \quad (4.53ข)$$

โดย N_i , $i = 1,6$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ และจากสมการ (4.53) นี้ เมื่อแทนค่าลงในสมการ (4.46) จะสามารถหาเมตริกซ์ $[B]$ ในรูปของตัวแปรตาม ξ และ η ได้ ดังนั้นเอลิเมนต์ของความแข็งเกร็งจึงกลายมาเป็น

$$\begin{aligned}
 [K]_e &= \int_A [B(\xi, \eta)]^T [C] [B(\xi, \eta)] \cdot t |J| d\xi d\eta \quad (4.54) \\
 (12 \times 12) & \quad (12 \times 3) \quad (3 \times 3) \quad (3 \times 12)
 \end{aligned}$$

โดย $|J|d\xi d\eta = dx dy$ และสมการ (4.54) นี้ สามารถประยุกต์สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ [33] เพื่อนำมาหาผลลัพธ์ของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็งได้ดังนี้

$$[K] = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} W_i W_j k [B(\xi_i, \eta_j)]^T [C] [B(\xi_i, \eta_j)] \cdot t |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (4.55)$$

โดย W_i, W_j แทนน้ำหนัก

และ ξ_i, η_j แทนตำแหน่งของจุดเกาส์ต่างๆ ที่สอดคล้องกับจำนวนของจุดเกาส์ (NG) ที่ใช้

4.7 การคำนวณความเค้นบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ

ในการคำนวณหาความเค้นบนเอลิเมนต์แบบไอโซพาราเมตริกซ์เอลิเมนต์นั้น จะสามารถหาค่าความเค้นได้บนจุดของเกาส์ จากนั้นจึงทำการแปลงความเค้นที่ได้ไปสู่จุดต่อต่างๆ ซึ่งสำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อนี้ จำนวนจุดของเกาส์ที่เหมาะสมในการคำนวณความเค้นบนเอลิเมนต์ คือ จำนวน 4 จุดของเกาส์ [32] ดังนั้นจึงต้องทำการคำนวณหาความเค้นที่ตำแหน่งของเกาส์ทั้ง 4 จุดก่อน ดังนี้

$$\{\tau_e\}_{opt} = \begin{Bmatrix} \tau_e(\xi_I, \eta_I) \\ \tau_e(\xi_{II}, \eta_{II}) \\ \tau_e(\xi_{III}, \eta_{III}) \\ \tau_e(\xi_{IV}, \eta_{IV}) \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

โดย $\{\tau_e\}_{opt}$ แทนความเค้นบนเอลิเมนต์

และ $\tau_e(\xi_i, \eta_i)$ แทนความเค้นบนจุดของเกาส์

จากความเค้นบนจุดของเกาส์ สามารถนำไปหาความเค้นบนจุดต่อต่างๆ ได้ดังนี้

$$\{\tau_e\}_{nodes} = [TR] \{\tau_e\}_{opt} \quad (4.57)$$

เมื่อ
$$\{\tau_e\}_{\text{nodes}} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

และ
$$\{\tau_e\}_{\text{opt}} = \begin{Bmatrix} \tau_I \\ \tau_{II} \\ \tau_{III} \\ \tau_{IV} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_e(\xi_I, \eta_I) \\ \tau_e(\xi_{II}, \eta_{II}) \\ \tau_e(\xi_{III}, \eta_{III}) \\ \tau_e(\xi_{IV}, \eta_{IV}) \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

โดยที่ $\{\tau_e\}_{\text{nodes}}$ แทนความเค้นบนจุดต่อต่างๆ

$\{\tau_e\}_{\text{opt}}$ แทนความเค้นบนจุดของแก๊สทั้งสิ้นจุด

และ [TR] แทนเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นบนจุดของแก๊สและความเค้นบนจุดต่อต่างๆ ของเอลิเมนต์

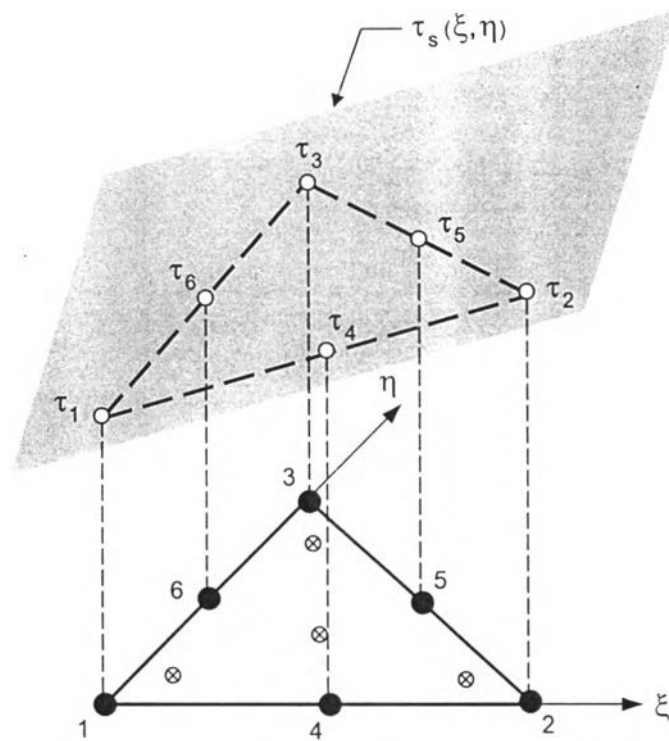
เนื่องจากความสัมพันธ์ของความเค้นบนพิกัดธรรมชาติ $\xi-\eta$ เป็นสมการอันดับหนึ่งซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\tau_s(\xi_i, \eta_i) = c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i \quad (4.60)$$

โดยที่ $\tau_s(\xi_i, \eta_i)$ แทนความเค้นที่เกิดขึ้นจริงบนเอลิเมนต์ในพิกัดธรรมชาติ $\xi-\eta$ ซึ่งแสดงดังรูปที่ 4.7 และ c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงตัวของสมการ (4.60) ซึ่งสามารถหาค่าคงตัว c_1, c_2 และ c_3 ได้ โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (Least squares) ดังนี้

$$\text{error} = \sum_{i=1}^{IV} [\tau_s(\xi_i, \eta_i) - \tau_i]^2 \quad (4.61)$$

$$= \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i]^2 \quad (4.62)$$



รูปที่ 4.7 การกระจายตัวของความเค้นบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ

จากนั้นทำการค่าความผิดพลาด (Error) น้อยที่สุด ดังนี้

$$\frac{\partial e}{\partial c_1} = 0 : \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i] = 0 \quad (4.63ก)$$

$$\frac{\partial e}{\partial c_2} = 0 : \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i] \cdot \xi_i = 0 \quad (4.63ข)$$

$$\frac{\partial e}{\partial c_3} = 0 : \sum_{i=1}^{IV} [c_1 + c_2 \xi_i + c_3 \eta_i - \tau_i] \cdot \eta_i = 0 \quad (4.63ค)$$

หรือเขียนในรูปแบบของเมตริกซ์ คือ

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{IV} 1 & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i & \sum_{i=1}^{IV} \eta_i \\ \sum_{i=1}^{IV} \xi_i & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i \cdot \xi_i & \sum_{i=1}^{IV} \xi_i \cdot \eta_i \\ \sum_{i=1}^{IV} \eta_i & \sum_{i=1}^{IV} \eta_i \cdot \xi_i & \sum_{i=1}^{IV} \eta_i \cdot \eta_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi_I & \xi_{II} & \xi_{III} & \xi_{IV} \\ \eta_I & \eta_{II} & \eta_{III} & \eta_{IV} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_I \\ \tau_{II} \\ \tau_{III} \\ \tau_{IV} \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

สามารถเขียนในรูปแบบอย่างย่อได้ ดังนี้

$$[P]\{c\} = [Q]\{\tau_e\}_{opt} \quad (4.65)$$

ดังนั้น $\{c\} = [P]^{-1}[Q]\{\tau_e\}_{opt} \quad (4.66)$

กำหนดให้ $[S] = [P]^{-1}[Q] \quad (4.67)$

เนื่องจากตำแหน่งจุดของเกาส์มีค่าดังนี้

$$\xi_I = \frac{1}{3} \quad \xi_{II} = \frac{1}{5} \quad \xi_{III} = \frac{3}{5} \quad \xi_{IV} = \frac{1}{5}$$

และ $\eta_I = \frac{1}{3} \quad \eta_{II} = \frac{1}{5} \quad \eta_{III} = \frac{1}{5} \quad \eta_{IV} = \frac{3}{5}$

แทนค่าตำแหน่งจุดของเกาส์ทั้งหมดในสมการ (4.64) จะได้

$$[S] = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 23 & -7 & -7 \\ 0 & -30 & 30 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 30 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

จากสมการ (4.60) และตำแหน่งของจุดต่อทั้งหกจุด ดังแสดงในรูป 4.5 จะได้

$$\begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{[E]} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

หรือเขียนในรูปแบบอย่างย่อได้คือ

$$\{\tau_e\}_{nodes} = [E]\{c\} \quad (4.70)$$

แทนค่าสมการ (4.66) และ (4.67) ลงในสมการ (4.70) จะได้

$$\{\tau_e\}_{nodes} = [E][S]\{\tau_e\}_{opt} \quad (4.71)$$

ทำการเปรียบเทียบพจน์ของสมการ (4.57) กับ (4.71) จะพบว่า

$$[TR] = [E][S] \quad (4.72)$$

จากสมการ (4.68) และ (4.69) จะได้

$$[TR] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 23 & -7 & -7 \\ 3 & -7 & 23 & -7 \\ 3 & -7 & -7 & 23 \\ 3 & 8 & 8 & -7 \\ 3 & -7 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & -7 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

4.8 เอลิเมนต์บริเวณปลายรอยร้าว (Crack tip element)

จากทฤษฎีการแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น (LEFM) สามารถแสดงการกระจายของความเค้นในวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นที่มีรอยร้าวได้ดังสมการ (2.1) คือ

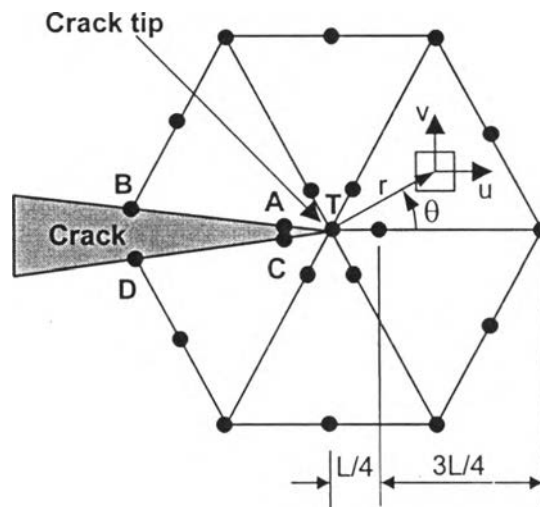
$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) \cdot f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) + \dots \quad (4.74)$$

โดยที่ σ_{ij} แทนองค์ประกอบของความเค้น ณ ตำแหน่งใดๆ (Stress tensor)

A_m, k แทนค่าคงตัว

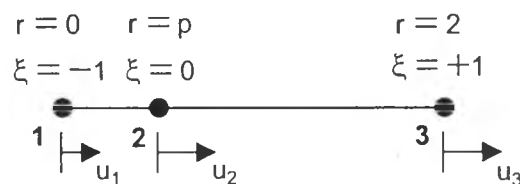
และ $f_{ij}, g_{ij}^{(m)}$ แทนฟังก์ชันไร้หน่วยของมุม θ

จากสมการ (4.74) นี้ พบว่าการกระจายของความเค้นที่บริเวณปลายรอยร้าวจะมีลักษณะแบบ $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ซิงกูลาริตี ดังนั้นในเอลิเมนต์ที่ปลายรอยร้าวจึงควรก่อให้เกิดความเค้นที่มีลักษณะเป็น $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ซิงกูลาริตีเช่นกัน โดยในที่นี้จะใช้เอลิเมนต์ที่ติดกับปลายรอยร้าวเป็นไอโซพาราเมตริกซ์ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อซึ่งเอลิเมนต์ชนิดนี้จะก่อให้เกิดความเค้นในลักษณะดังกล่าว โดยการเลื่อนจุดต่อตรงกลางด้านที่ติดกับปลายรอยร้าวไปอยู่ที่ตำแหน่งหนึ่งในสี่ ดังแสดงในรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 ลักษณะของเอลิเมนต์บริเวณปลายรอยร้าว

ซึ่งเอลิเมนต์ชนิดนี้สามารถแสดงความเป็นซิงกูลาริตีของ $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ที่บริเวณจุดต่อที่ 1 ได้ โดยสามารถแสดงได้ดังนี้ [6]



รูปที่ 4.9 การเลื่อนจุดต่อกลางด้านมาที่ตำแหน่ง p เพื่อหาดำแหน่งซิงกูลาริตีสำหรับเอลิเมนต์ 1 มิติ

เพื่อความง่ายต่อการเข้าใจ จะพิจารณาขอบของเอลิเมนต์ที่ได้มีการย้ายจุดต่อกลางด้านมาที่ตำแหน่ง p สำหรับเอลิเมนต์ใน 1 มิติ ดังแสดงในรูปที่ 4.9 ซึ่งมีจุดต่ออยู่ ณ ตำแหน่งใน

พิกัดธรรมชาติ คือ $\xi = -1, 0, +1$ ซึ่งตรงกับจุดต่อในพิกัดจริง คือ $r = 0, p, 2$ ตามลำดับ สมมติให้ความสัมพันธ์ระหว่าง r และ ξ และการกระจายของผลเฉลยเป็น

$$r = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 \quad (4.75)$$

$$u = b_1 + b_2\xi + b_3\xi^2 \quad (4.76)$$

โดยที่ a และ b แทนค่าคงตัว
 u แทนการเคลื่อนตัวในแนวแกน r
 และ พิกัด r และ ξ แสดงดังรูปที่ 4.8

แทนค่า $\xi = -1$ เมื่อ $r = 0$, $\xi = 0$ เมื่อ $r = p$ และ $\xi = +1$ เมื่อ $r = 2$ ลงในสมการ (4.75) จะได้

$$\xi = \frac{-1 \pm \sqrt{(1-4p+4p^2 + 4 \cdot (1-p) \cdot r)}}{2 \cdot (1-p)} \quad (4.77)$$

$$\frac{d\xi}{dr} = (1-4p+4p^2 + 4 \cdot (1-p) \cdot r)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.78)$$

ซึ่งสมการ (4.84) จะมีลักษณะเป็นซิงกูลาริตี เมื่อ

$$r = \frac{(1-2p)^2}{4 \cdot (p-1)} \quad (4.79)$$

จากสมการ (4.85) จะมีลักษณะเป็นซิงกูลาริตีเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง $r = 0$ เมื่อ $p = \frac{1}{2}$ จากนั้น

ทำการแทนค่า $p = \frac{1}{2}$ ลงในสมการ (4.82), (4.83) และ (4.84) จะได้

$$\xi = -1 + \sqrt{2r} \quad (4.80)$$

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \quad (4.81)$$

$$\text{และ } u = u_1 \left[\frac{2 - 3\sqrt{2r} + 2r}{2} \right] + u_2 [-2r + 2\sqrt{2r}] + u_3 \left[\frac{2r - \sqrt{2r}}{2} \right] \quad (4.82)$$

โดยความเครียดในเอลิเมนต์ 1 มิตินี้ จะสามารถหาได้คือ

$$\frac{du}{dr} = u_1 \left[1 - \frac{3}{2\sqrt{2r}} \right] + u_2 \left[-2 + \frac{2}{\sqrt{2r}} \right] + u_3 \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{2r}} \right] \quad (4.83)$$

เนื่องจากความเค้นที่เกิดขึ้นบนเอลิเมนต์จะแปรผันตรงกับความเครียด ดังนั้นจากสมการ (4.83) นี้ สามารถแสดงให้เห็นได้อย่างชัดเจนว่า ความเค้นที่เกิดขึ้นในเอลิเมนต์นี้ จะมีลักษณะเป็นแบบ $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ซิงกูลาริตี เช่นเดียวกับความเค้นที่เกิดขึ้นที่บริเวณปลายรอยร้าว

4.9 การหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น

การคำนวณหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในสองมิติ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น สามารถทำได้หลายวิธี [34] เช่น การประมาณด้วยการเคลื่อนตัว หรือความเค้นบริเวณปลายรอยร้าว การประมาณด้วยวิธีการทางพลังงาน เป็นต้น โดยวิธีการที่เป็นที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวาง และนำมาใช้ในที่นี้ คือ วิธีการประมาณด้วยความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนตัวที่บริเวณปลายรอยร้าวและค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น (Displacement extrapolation method, [19]) ซึ่งการเคลื่อนตัวในวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นที่มีรอยร้าวภายใต้ภาระรูปแบบที่ 1 สามารถแสดงได้ดังนี้

$$v = K_1 \frac{1+\nu}{4E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left\{ (2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right\} + \frac{A_1(1+\nu)}{E} r(\kappa - 3) \sin \theta + \frac{A_2(1+\nu)}{E} r^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{(2\kappa - 1)}{3} \sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right\} + \dots \quad (4.84)$$

โดยที่ $\kappa = 3 - 4\nu$ ในกรณีความเครียดระนาบ

$\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ในกรณีความเค้นระนาบ

E แทนค่าคงที่ของการยืดหยุ่น (Modulus of elasticity)

ν แทนอัตราส่วนปัวส์ซง
 A_1 แทนค่าคงตัวของสมการ ซึ่งขึ้นอยู่กับรูปร่างและภาวะบนวัตถุ
 และ r และ θ แทนตำแหน่งในพิกัดเชิงขั้ว โดยมีจุดกำเนิดที่ปลายรอยร้าว ดังแสดงในรูปที่ 4.8

สำหรับรอยร้าวที่มีความสมมาตร พิจารณาที่ผิวทางด้านบน ($\theta = +\pi$) ของรอยร้าว ดังรูปที่ 4.8 จากสมการ (4.84) แทนค่าบนจุดต่อ A และ B จะได้

$$v_A = K_I \sqrt{\frac{2(1+\nu)(\kappa+1)}{\pi}} \frac{\sqrt{L}}{4E} - \frac{A_2(1+\nu)(\kappa+1)}{12E} L^{3/2} + O(L^{5/2}) \quad (4.85)$$

$$v_B = K_I \sqrt{\frac{2(1+\nu)(\kappa+1)}{\pi}} \frac{\sqrt{L}}{2E} - \frac{2A_2(1+\nu)(\kappa+1)}{3E} L^{3/2} + O(L^{5/2}) \quad (4.86)$$

โดยที่ L แทนความยาวของเอลิเมนต์บนด้าน TB เมื่อพิจารณาสมการ (4.84) จะพบว่า หากตำแหน่งที่พิจารณาเข้าใกล้ปลายรอยร้าว หรือ r เข้าใกล้ศูนย์นั้น ค่าการเคลื่อนตัวบริเวณปลายรอยร้าวนี้ จะถูกควบคุมด้วยพจน์แรกของสมการเป็นหลัก เนื่องจากพจน์อันดับสูงของสมการ (4.84) จะมีค่าน้อยกว่าพจน์แรกของสมการเป็นอย่างมาก ดังนั้นจึงสามารถละผลที่เกิดจากพจน์อันดับสูงของสมการได้ โดยในที่นี้จะละผลของพจน์อันดับสูงตั้งแต่พจน์ $r^{5/2}$ ขึ้นไป จากสมการ (4.85) และ (4.86) จะได้

$$K_I = \frac{E}{3(1+\nu)(\kappa+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [8v_A - v_B] \quad (4.87)$$

และในทำนองเดียวกัน สามารถทำการหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นสำหรับภาวะรูปแบบที่ 2 ได้ดังนี้

$$K_{II} = \frac{E}{3(1+\nu)(\kappa+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [8u_A - u_B] \quad (4.88)$$

นอกจากนั้นแล้ววิธีการคำนวณหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นนี้ ยังสามารถใช้ได้กับปัญหาที่ไม่สมมาตรอีกด้วย โดยหากพิจารณาดำแหน่งจุดต่อ A, B, C และ D ดังรูปที่ 4.8 แล้ว จะได้ค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นสำหรับภาวะรูปแบบที่ 1 และ 2 ดังนี้

$$K_I = \frac{E}{3(1+\nu)(\kappa+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(v_A - v_C) - \left(\frac{v_B - v_D}{2} \right) \right] \quad (4.89)$$

$$K_{II} = \frac{E}{3(1+\nu)(\kappa+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[4(u_A - u_C) - \left(\frac{u_B - u_D}{2} \right) \right] \quad (4.90)$$

4.10 ทิศทางการเติบโตของรอยร้าว

ในที่นี้จะกล่าวถึงการทำนายทิศทางการเติบโตของรอยร้าวภายใต้ภาระรูปแบบผสมระหว่างรูปแบบที่ 1 และ 2 ซึ่งการทำนายทิศทางการเติบโตของรอยร้าวนี้ ได้มีผู้ทำการศึกษาและเสนอแนวทางในการคำนวณอยู่หลายแนวทาง และวิธีการที่ได้รับการยอมรับและใช้กันโดยทั่วไป มีดังนี้

1. ทฤษฎีความเค้นหลักสูงสุด [Erdogan and Sih, 1963]
2. ทฤษฎีการปลดปล่อยพลังงานสูงสุด [Nuismer, 1975]
3. ทฤษฎีความหนาแน่นของพลังงานความเครียดต่ำสุด [Sih, 1978]

ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ทฤษฎีความเค้นหลักสูงสุดในการทำนายทิศทางการเติบโตของรอยร้าว โดยวิธีการดังกล่าวอยู่บนข้อสมมุติฐาน 2 ประการ คือ รอยร้าวจะต้องเติบโตจากปลายรอยร้าวเท่านั้น และเติบโตไปในทิศทางความเค้นหลักสูงสุด สำหรับรอยร้าวที่รับภาระผสมดังกล่าวนี้ สามารถเขียนสนามความเค้นในรูปแบบพิกัดเชิงขั้วได้ [35] ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} -3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} \quad (4.91)$$

โดยที่ $\sigma_{\theta\theta}$ แทนความเค้นในแนวเส้นรอบวง (Circumferential stress)

$\sigma_{r\theta}$ แทนความเค้นเฉือน

ดังนั้นทิศทางการเติบโตของรอยร้าวโดยทฤษฎีความเค้นหลักสูงสุด จะเกิดขึ้นเมื่อความเค้นเฉือน ($\sigma_{r\theta}$) ในสมการ (4.95) มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} K_I \sin(\theta) + \frac{1}{2} K_{II} (3 \cos(\theta) - 1) \right] = 0 \quad (4.92)$$

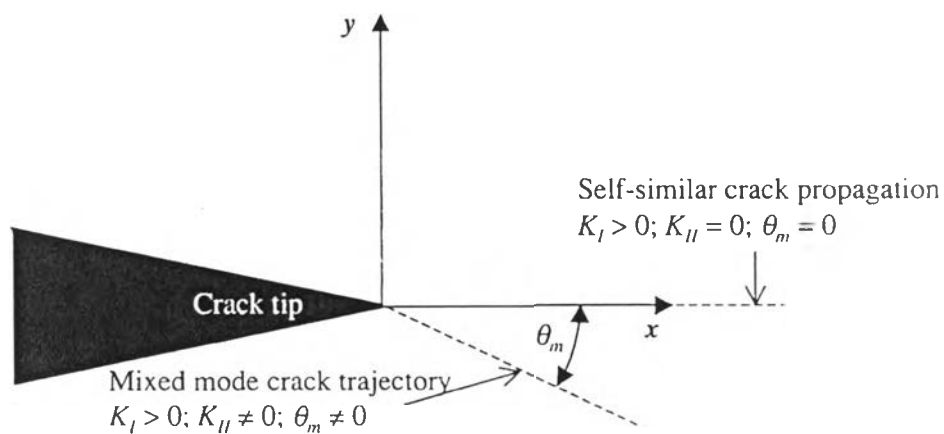
จากสมการ (4.96) สามารถหาทิศทางการเติบโตของรอยร้าว (θ_m) ได้คือ

$$K_I \sin(\theta_m) + K_{II} (3 \cos(\theta_m) - 1) = 0 \quad (4.93)$$

ดังนั้น

$$\theta_m = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8}}{4} \right] \quad (4.94)$$

โดยที่ θ_m แทนทิศทางการเติบโตของรอยร้าวจากทฤษฎีความเค้นหลักสูงสุด ดังแสดงในรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.10 ทิศทางของรอยร้าว