บทที่ ๓

การแจกแจงของ I และ J

๓.๑ ลิมิตของ Sequence ของ Distribution Functions

นิยามที่ ๑๓ ถ้า $F_1(x), F_2(x), \ldots\ldots$ เป็น cumulative distribution function (c. d. f.) ของ sequence ของตัวแปรสุ่ม $(X_1, X_2, \ldots\ldots)$ และถ้า

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

สำหรับทุกค่า x ซึ่งเป็นจุดที่ F มีความต่อเนื่อง เรากล่าวว่า $(X_1, X_2, \ldots\ldots)$ มี distribution function ลู่เข้าหา $F(x)$ (converges in distribution to $F(x)$)

ทฤษฎีบทที่ ๑๐[๑] กำหนดให้ $F_1(x), F_2(x), \ldots\ldots$ เป็น sequence ของ distribution function ซึ่งมี $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots\ldots$ เป็น characteristic functions ถ้า sequence $\{F_n(x)\}$ ลู่เข้าหา distribution function $F(x)$ แล้วสำหรับทุกค่า t sequence $\{\varphi_n(t)\}$ ย่อมลู่เข้าหาลิมิต $\varphi(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ $t = 0$ และในทางกลับกัน ถ้าสำหรับทุกค่า t sequence $\{\varphi_n(t)\}$ ลู่เข้าหาลิมิต $\varphi(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t = 0$ แล้ว sequence $\{F_n(x)\}$ ย่อมลู่เข้าหา distribution function $F(x)$ ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดในสองกรณีนี้ ลิมิต $\varphi(t)$ คือ characteristic function ของลิมิต distribution function $F(x)$

---

๑ สำหรับการพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ ๑๐ นี้ ผู้อ่านอาจหาดูได้จากหนังสือ Mathematical Methods of Statistics ของ Harold Cramér (Princeton University Press.) หน้า ๙๖ – ๙๗

<u>ทฤษฎีบทที่ ๑๑</u>[๒] กำหนดให้ $(X_1, X_2, \ldots)$ เป็น sequence ของตัวแปรสุ่ม และให้ $\mu'_{r,n}$ เป็นโมเมนต์อันดับที่ r ของ X_n สมมติว่า

$$\lim_{n \to \infty} \mu'_{r,n} = \mu'_r$$

ถ้า $(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots)$ มี distribution function ลู่เข้าหา $F(x)$ แล้วย่อมได้ว่า μ'_r คือโมเมนต์อันดับที่ r ของ $F(x)$ และในทางกลับกัน ถ้าค่า μ'_r, $r = 1, 2, \ldots\ldots$ เป็นโมเมนต์อับดับที่ r ของ c. d. f. $F(x)$ ใด c. d. f. หนึ่ง แล้วย่อมได้ว่า $F(x)$ คือลิมิต c.d.f. ของ $(X_1, X_2, \ldots\ldots)$

<u>นิยามที่ ๑๔</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมี c. d. f.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}\, dx \qquad (๓.๑.๑)$$

เรากล่าวว่า X มีการแจกแจงปกติ

เราอาจแสดงได้ว่า ค่า parameter μ และ σ^2 ใน (๓.๑.๑) คือมัชฌิมเลขคณิต และความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X

<u>ทฤษฎีบทที่ ๑๒</u>[๓] Characteristic function ของการแจกแจงปกติ ซึ่งมีมัชฌิมเลขคณิต μ และความแปรปรวน σ^2 คือ

$$\varphi(t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

---

[๒] สำหรับการพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ ๑๑ ผู้อ่านอาจหาดูได้จากหนังสือ <u>Mathematical Statistics</u> ของ Samuel S.Wilks (New York. John Wiley and Sons Inc.) หน้า ๑๒๘ – ๑๒๙

[๓] สำหรับการพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ ๑๒ ผู้อ่านอาจหาดูได้จากหนังสือ <u>Mathematical Statistics</u> ของ Samuel S,Wilks (New York. Jonn Wiley and Sons Inc.) หน้า ๑๕๖ – ๑๕๗

<u>นิยามที่ ๑๕</u> ถ้า (X_1, X_2) เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมี joint cumulative distribution function

$$F(U,V) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{U} \int_{-\infty}^{V} \sqrt{|\sigma^{ij}|}\; e^{-\frac{1}{2} Q(x_1,x_2)}\, dx_1 dx_2$$

โดยที่

(๑) σ^{ij} คือ i,j - entry ของ inverse ของ positive definite matrix $\|\sigma_{ij}\|$

(๒) $$Q(x_1,x_2) = \sigma^{11}(x_1-\mu_1)^2 + 2\sigma^{12}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) + \sigma^{22}(x_2-\mu_2)^2$$

แล้วเรากล่าวว่า (X_1, X_2) มีการแจกแจงเป็น bivariate normal distribution

เราอาจแสดงได้ว่าค่า (μ_1, μ_2) และ $\|\sigma_{ij}\|$ ก็คือมัชฌิมเลขคณิต และ covariance matrix ของ (X_1,X_2) ตามลำดับ

<u>ทฤษฎีบทที่ ๑๓</u>[๔] Characteristic function ของ bivariate normal distribution ซึ่งมีมัชฌิมเลขคณิต (μ_1, μ_2) และ covariance matrix $\|\sigma_{ij}\|$, i, j = 1, 2 คือ

$$\varphi(t_1,t_2) = e^{\left[i(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2) - \frac{1}{2}(\sigma_{11}t_1^2 + \sigma_{22}t_2^2) + 2\sigma_{12}t_1t_2\right]}$$

---

[๔] สำหรับการพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ ๑๓ ผู้อ่านอาจหาดูได้จากหนังสือ <u>Mathematical Statistics</u> ของ Samuel S.Wilks (New York. John Wiley and Sons Inc.) หน้า ๑๖๑

๓.๒ โมเมนต์ของ Linear Function ของ I และ J

เพื่อความสะดวกในการหาค่าโมเมนต์ของ linear function ของ I และ J เราจะใช้สัญลักษณ์ L(p, q, r, s) เขียนแทน linear function ทั่ว ๆ ไปของ $\bar{I}$ (p, q,r,s) กับ $\bar{J}$ (p,q,r,s) คือ ถ้า α และ β เป็นจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ เราให้

(๓.๒.๑) $$L(p,q,r,s) = \alpha \bar{I} (p,q,r,s) + \beta \bar{J} (p,q,r,s)$$

และ

(๓.๒.๒) $$L = \Sigma L (p,q,r,s)$$

โดยที่ Σ เป็นผลบวกของ L(p,q,r,s) ที่ p = 1, ... P, q = 1, ..., Q , r = 1 , ..., R, s = 1 , ..., S ซึ่งมีอยู่รวมทั้งสิ้น PQRS เทอม

<u>นิยามที่ ๑๖</u> ให้ S เป็นเซทใด ๆ ของ L(p,q,r,s) ถ้าทุก L(p,q,r,s), L(p′, q′, r′, s′) ที่อยู่ในเซท S มี $L(p_1,q_1,r_1,s_1),\ldots,L(p_K,q_K,r_K,s_K)$ ในเซท S ซึ่ง L(p,q,r,s), $L(p_1,q_1,r_1,s_1)$ ขึ้นต่อกัน $L(p_j,q_j,r_j,s_j)$, $L(p_{j+1},q_{j+1},r_{j+1},s_{j+1})$ ขึ้นต่อกัน j = 1,...... , K − 1, และ $L(p_K,q_K,r_K,s_K)$, L(p′ ,q′, r′, s′) ขึ้นต่อกัน เรากล่าวว่า S เป็น dependent set

<u>นิยามที่ ๑๗</u> ให้เซท S_j, j = 1, ...,u, เป็นเซทของ L(p, q, r, s) ซึ่งทุก $L(p_i,q_i,r_i,s_i)$ ในเซท S_i และทุก $L(p_k,q_k,r_k,s_k)$ ในเซท S_k ไม่ขึ้นต่อกัน โดยที่ $1 \leq i < k \leq u$ เรากล่าวว่า เซท S_j, j = 1,........,u, เป็นเซทซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน

<u>Lemma ๑๔</u> ให้ $P = an$, $Q = bn$, $R = cn$, $S = dn$ ถ้า N เป็นจำนวนวิธีจัด $L(p,q,r,s)$, $p = 1,\ldots\ldots, P$, $q = 1, \ldots\ldots, Q$, $r = 1,\ldots\ldots,R$, $s = 1, \ldots\ldots, S$, เป็น dependent set S_j, $j = 1,\ldots\ldots, u$, ซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน โดยให้ S_j ประกอบด้วย $L(p,q,r,s)$ t_j ตัว

โดยที่

$$(๓.๒.๓) \quad \begin{cases} \text{(i)} \ t_j \geqslant 2 & \text{ทุกค่าของ } j \\ \text{(ii)} \ t_j \geqslant 3 & \text{อย่างน้อยหนึ่งค่าของ } j \\ \text{(iii)} \ t_1 + \ldots\ldots + t_u = m & \end{cases}$$

เราจะได้ว่า

$$(๓.๒.๔) \qquad N \leqslant O(n^{\frac{7m-1}{2}})$$

<u>พิสูจน์</u> ให้

$$S_j = \{ L(p_i,q_i,r_i,s_i) \mid T_{j-1} + 1 \leqslant i \leqslant T_j \}$$

โดยที่

$$T_o = 0$$

และ

$$T_j = T_{j-1} + t_j$$

$j = 1, \ldots\ldots, u$, $i = 1, \ldots\ldots , m$

จาก (i) และ (ii) ของ (๓.๒.๓) เราได้

$$2u + 1 \leqslant t_1 + \ldots\ldots + t_u$$

และจาก (iii) ของ (๓.๒.๓) เราได้

$$2u + 1 \leqslant m$$

ดังนั้น

$$(๓.๒.๕) \qquad u \leqslant \frac{m-1}{2}$$

เนื่องจาก เซท S_j เป็น dependent set ที่มี $L(p,q,r,s)$ อยู่ t_j ตัว ดังนั้น จำนวนของ p, q, r, s ในเซท S_j จะต้องซ้ำกันอย่างน้อย $t_j - 1$ คู่ จากจำนวนทั้งหมด $4t_j$ ตัว เราจึงมีเซท S_j ที่มีจำนวนของ p, q, r, s ต่างๆ กัน ได้อย่างมาก $4t_j - (t_j - 1)$ ซึ่งเท่ากับ $3t_j + 1$ ตัว เพราะฉะนั้น เราได้ว่า จำนวนวิธีจัดเซท S_j มีขนาด $O(n^{3t_j + 1})$ ดังนั้น จำนวนวิธีแบ่ง $L(p, q, r, s)$ ที่มีทั้งหมด m ตัวออกเป็น dependent set S_j, $j = 1, \ldots\ldots, u$, ซึ่งไม่ขึ้นต่อกันมิได้ทั้งสิ้น $\prod_{j=1}^{u} O(n^{3t_j + 1})$ ซึ่งเท่ากับ $O(n^{3m + u})$ วิธี

จาก (๓.๒.๕) เราได้

$$O(n^{3m + u}) \leqslant O(n^{3m + \frac{m-1}{2}})$$

ดังนั้น

$$N \leqslant O(n^{\frac{7m - 1}{2}})$$

จากคุณสมบัติที่คล้ายกันของ $\bar{I}(p, q, r, s)$ และ $\bar{J}(p, q, r, s)$ เราได้ว่า $E(\bar{I}(p,q,r,s)\, \bar{I}(p', q', r', s'))$ กับ $E(\bar{J}(p,q,r,s)\, \bar{J}(p', q', r', s'))$ มีค่าเท่ากัน เพื่อความสะดวกเราจะใช้ γ เขียนแทน expectation ทั้งสองนี้ และจะใช้ δ เขียนแทน $E(\bar{I}(p,q,r,s)\, \bar{J}(p', q', r', s'))$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๑๔</u>

(๓.๒.๖) $\quad E(L(p,q,r,s)\, L(p', q', r', s')) = (\alpha^2 + \beta^2)\gamma + 2\alpha\beta\delta$

<u>พิสูจน์</u> โดย (๓.๒.๑)

$$\begin{aligned}
&E(L(p,q,r,s)\, L(p', q', r', s')) \\
&= E\left[\left\{\alpha \bar{I}(p,q,r,s) + \beta \bar{J}(p,q,r,s)\right\}\left\{\alpha \bar{I}(p',q',r',s') + \beta\bar{J}(p',q',r',s')\right\}\right] \\
&= E\left[\alpha^2\bar{I}(p,q,r,s)\, \bar{I}(p', q', r', s') + \beta^2\bar{J}(p,q,r,s)\, \bar{J}(p', q', r', s')\right. \\
&\quad \left. + \alpha\beta\, \bar{I}(p,q,r,s)\, \bar{J}(p', q', r', s') + \alpha\beta\bar{I}(p', q', r', s')\, \bar{J}(p,q,r,s)\right]
\end{aligned}$$

$$= \alpha^2 E(\bar{I}(p,q,r,s)\,\bar{I}(p',q',r',s')) + \beta^2 E(\bar{J}(p,q,r,s)\bar{J}(p',q',r',s'))$$
$$+ \alpha\beta E(\bar{I}(p,q,r,s)\,\bar{J}(p',q',r',s')) + \alpha\beta E(\bar{I}(p',q',r',s')\,\bar{J}(p,q,r,s))$$
$$= \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\delta$$
$$= (\alpha^2+\beta^2)\gamma + 2\alpha\beta\delta$$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๑๕</u> ให้ $P = an$, $Q = bn$, $R = cn$ และ $S = dn$ จะได้ว่า

$$\mu_{2k}(L) = \frac{(2k)!}{2^k k!}\left[\frac{1}{1260}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{17}{315}\alpha\beta\right]^k \left[n^{7k}(abcd)^k (abc + bcd + abd + acd)^k\right] + o(n^{7k})$$

<u>พิสูจน์</u> $\mu_{2k}(L) = \Sigma E(\prod_{i=1}^{2k} L(p_i,q_i,r_i,s_i))$

$$= \Sigma^{(1)} E(\prod_{i=1}^{2k} L(p_i,q_i,r_i,s_i)) + \Sigma^{(2)} E(\prod_{i=1}^{2k} L(p_i,q_i,r_i,s_i))$$
$$+ \Sigma^{(3)} E(\prod_{i=1}^{2k} L(p_i,q_i,r_i,s_i))$$

โดยที่

$\Sigma^{(1)}$ เป็นผลบวก expectation ของผลคูณระหว่าง $L(p, q, r, s)$ 2k ตัว ซึ่งอาจแยกได้เป็น dependent sets ซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน โดยต้องมีอย่างน้อยหนึ่ง dependent set ที่มี $L(p, q, r, s)$ อยู่เพียงตัวเดียว

$\Sigma^{(2)}$ เป็นผลบวก expectation ของผลคูณระหว่าง $L(p, q, r, s)$ 2k ตัวซึ่งอาจแยกได้เป็น dependent sets ซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน โดยที่ทุก dependent sets มี $L(p, q, r, s)$ อยู่ ๒ ตัว

$\Sigma^{(3)}$ เป็นผลบวก expectation ของผลคูณระหว่าง $L(p, q, r, s)$ 2k ตัวซึ่งอาจแยกได้เป็น dependent sets ซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน โดยที่ทุก dependent set ต้องมี $L(p, q, r, s)$ อย่างน้อย ๒ ตัว และมี dependent set

อย่างน้อยหนึ่งเซทที่มี $L(p, q, r, s)$ ๓ ตัว

เนื่องจาก $\prod_{i=1}^{2k} L(p_i, q_i, r_i, s_i)$ ใน $\Sigma^{(1)}$ มี $L(p, q, r, s)$ อยู่อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ไม่ขึ้นกับ $L(p, q, r, s)$ ตัวอื่น ๆ เพราะฉะนั้น

$$E\left(\prod_{i=1}^{2k} L(p_i, q_i, r_i, s_i)\right) = 0$$

ดังนั้น

$$\Sigma^{(1)} E\left(\prod_{i=1}^{2k} L(p_i, q_i, r_i, s_i)\right) = 0 \qquad (๓.๒.๘)$$

เนื่องจาก $\Sigma^{(2)}$ เป็นผลบวกซึ่ง $p = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, an$, $q = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, bn$, $r = 1, \ldots\ldots\ldots, cn$ และ $s = 1, \ldots\ldots, dn$ ภายใต้เงื่อนไขที่เราอาจแบ่ง $L(p, q, r, s)$ 2k ตัวออกเป็น dependent sets ซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน ที่มี $L(p, q, r, s)$ เซทละ ๒ ตัว เพราะฉะนั้น จำนวนวิธีแบ่ง $L(p, q, r, s)$ 2k ตัวออกเป็นเซท ๆ ละ ๒ ตัว มีอยู่ทั้งสิ้น $\frac{(2k)!}{2^k k!}$ วิธี ดังนั้นเราได้

$$\Sigma^{(2)} E\left(\prod_{i=1}^{2k} L(p_i, q_i, r_i, s_i)\right)$$

$$= \frac{(2k)!}{2^k k!} \Sigma^{(ii)} \prod_{i=1}^{k} E\left(L(p_{2i-1}, q_{2i-1}, r_{2i-1}, s_{2i-1}) L(p_{2i}, q_{2i}, r_{2i}, s_{2i})\right)$$

โดยที่ $\Sigma^{(ii)}$ เป็นผลบวก ซึ่ง $p = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, an$, $q = 1, \ldots\ldots, bn$, $r = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, cn$, $s = 1, \ldots\ldots\ldots, dn$ เนื่องจาก

$$\{L(p_1, q_1, r_1, s_1), L(p_2, q_2, r_2, s_2)\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \{L(p_{2k-1}, q_{2k-1}, r_{2k-1}, s_{2k-1}), L(p_{2k}, q_{2k}, r_{2k}, s_{2k})\}$$

ต่างก็เป็น dependent sets ซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน ดังนั้นเราได้ว่าแต่ละเทอมใน $\Sigma^{(ii)}$ p_i, q_i, r_i, s_i ต้องมีค่าซ้ำกันรวมทั้งสิ้นอย่างน้อย k คู่ ให้ k_1 เป็นจำนวนคู่ซึ่ง p_i ซ้ำกัน k_2 เป็นจำนวนคู่ซึ่ง q_i ซ้ำกัน k_3 เป็นจำนวนคู่ซึ่ง r_i ซ้ำกัน k_4 เป็นจำนวนคู่ซึ่ง s_i ซ้ำกัน โดยที่

(๓.๒.๙) $$\sum_{i=1}^{4} k_i \geq k$$

แต่ละเทอมใน $\Sigma^{(ii)}$ มีค่าในรูป

$$\left[E(L(1,q_1,r_1,s_1)(L(1,q_2,r_2,s_2))\right]^{k_1}\left[E(L(p_3,1,r_3,s_3)L(p_4,1,r_4,s_4))\right]^{k_2}$$

$$\left[E(L(p_5,q_5,1,s_5)L(p_6,q_6,1,s_6))\right]^{k_3}\left[E(L(p_7,q_7,r_7,1)L(p_8,q_8,r_8,1))\right]^{k_4}$$

จากทฤษฎีบทที่ ๘ และทฤษฎีบทที่ ๙ เราได้ว่า γ มีค่าเป็น $\frac{1}{1260}$ และ δ มีค่าเป็น $-\frac{17}{1260}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ ๑๔ เราได้

$$\left[E(L(1,q_1,r_1,s_1)L(1,q_2,r_2,s_2))\right]^{k_1}\left[E(L(p_3,1,r_3,s_3)L(p_4,1,r_4,s_4))\right]^{k_2}$$

$$\left[E(L(p_5,q_5,1,s_5)L(p_6,q_6,1,s_6))\right]^{k_3}\left[E(L(p_7,q_7,r_7,1)L(p_8,q_8,r_8,1))\right]^{k_4}$$

มีค่าเท่ากับ $\left[\frac{1}{1260}(\alpha^2+\beta^2)-\frac{17}{630}\alpha\beta\right]^{\sum_{i=1}^{4}k_i}$

เพราะฉะนั้น

$$\Sigma^{(ii)}\prod_{i=1}^{k} E(L(p_{2i-1},q_{2i-1},r_{2i-1},s_{2i-1})L(p_{2i},q_{2i},r_{2i},s_{2i}))$$

$$= \Sigma^{*}\left[\left\{(an)^{2k-k_1}(bn)^{2k-k_2}(cn)^{2k-k_3}(dn)^{2k-k_4}\right\}\times\left\{\frac{1}{1260}(\alpha^2+\beta^2)-\frac{17}{630}\alpha\beta\right\}^{\sum_{i=1}^{4}k_i}\right]$$

โดยที่ Σ^{*} เป็นผลบวกซึ่ง k_1,k_2,k_3,k_4 แปรค่าไปตามเงื่อนไข (๓.๒.๙)

เขียน $\Sigma^* = \underset{k_1+k_2+k_3+k_4 = k}{\Sigma_1^*} + \underset{k_1+k_2+k_3+k_4 > k}{\Sigma_2^*}$

เพราะว่า

$$\underset{k_1+k_2+k_3+k_4= k}{\Sigma_1^*} \left[\left\{ (an)^{2k-k_1} (bn)^{2k-k_2} (cn)^{2k-k_3} (dn)^{2k-k_4} \right\} \times \left\{ \frac{1}{1260} (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{17}{630} \alpha \beta \right\}^{\sum_{i=1}^{4} k_i} \right]$$

$$= \left\{ n^{8k-k} (abcd)^k \underset{k_1+k_2+k_3+k_4= k}{\Sigma_1^*} a^{k-k_1} b^{k-k_2} c^{k-k_3} d^{k-k_4} \right\} \times \left\{ \frac{1}{1260} (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{17}{630} \alpha \beta \right\}^k$$

$$= \left\{ \frac{1}{1260}(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{17}{630} \alpha \beta \right\}^k n^{7k} (abcd)^k (abc+bcd+abd+acd)^k$$

และ

$$\underset{k_1+k_2+k_3+k_4 > k}{\Sigma_2^*} \left[\left\{ (an)^{2k-k_1} (bn)^{2k-k_2} (cn)^{2k-k_3} (dn)^{2k-k_4} \right\} \times \left\{ \frac{1}{1260} (\alpha^2+ \beta^2) - \frac{17}{630} \alpha \beta \right\}^{\sum_{i=1}^{4} k_i} \right]$$

$$= o(n^{7k})$$

ดังนั้น เราได้ว่า

$$\Sigma^{(ii)} \prod_{i=1}^{k} E(L(p_{2i-1}, q_{2i-1}, r_{2i-1}, s_{2i-1}) \, L(p_{2i}, q_{2i}, r_{2i}, s_{2i}))$$

$$= \left[\frac{1}{1260} (\alpha^2+ \beta^2) - \frac{17}{630} \alpha \beta\right]^k \left[n^{7k} (abcd)^k (abc+bcd+abd+acd)^k \right] + o(n^{7k})$$

เพราะฉะนั้น

$$\Sigma^{(2)} E\left(\prod_{i=1}^{2k} L(p_i,q_i,r_i,s_i)\right)$$

$$= \frac{(2k)!}{2^k k!}\left[\frac{1}{1260}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{17}{630}\alpha\beta\right]^k \left[n^{7k}(abcd)^k(abc+bcd+abd+acd)^k\right] + o(n^{7k})$$

โดย Lemma ๑๔ เราได้ว่า จำนวนวิธีแบ่ง $L(p,q,r,s)$ $2k$ ตัวออกเป็น dependent sets ซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน โดยที่ทุก dependent sets ต้องมี $L(p,q,r,s)$ อย่างน้อย ๒ ตัว และมีอย่างน้อยหนึ่ง dependent set ที่มี $L(p,q,r,s)$ ๓ ตัว มีอยู่ทั้งสิ้น $O(n^{\frac{7}{2}(2k-1)})$ ซึ่งเท่ากับ $o(n^{7k})$

เพราะฉะนั้น

(๓.๒.๑๑) $$\Sigma^{(3)} E\left(\prod_{i=1}^{2k} L(p_i,q_i,r_i,s_i)\right) = o(n^{7k})$$

โดย (๓.๒.๘) , (๓.๒.๑๐) และ (๓.๒.๑๑) เราได้ว่า

$$\mu_{2k}(L) = \frac{(2k)!}{2^k k!}\left[\frac{1}{1260}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{17}{630}\alpha\beta\right]^k \left[n^{7k}(abcd)^k(abc+bcd+abd+acd)^k\right] + o(n^{7k})$$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๑๒</u> ให้ $P = an$, $Q = bn$, $R = cn$ และ $S = dn$ จะได้ว่า

(๓.๒.๑๒) $$\mu_{2k+1}(L) = o(n^{\frac{7}{2}(2k+1)})$$

<u>พิสูจน์</u> $$\mu_{2k+1}(L) = \Sigma E\left(\prod_{i=1}^{2k+1} L(p_i,q_i,r_i,s_i)\right)$$

$$= \Sigma^{(1)} E\left(\prod_{i=1}^{2k+1} L(p_i,q_i,r_i,s_i)\right) + \Sigma^{(2)} E\left(\prod_{i=1}^{2k+1} L(p_i,q_i,r_i,s_i)\right)$$

โดยที่

$\Sigma^{(1)}$ เป็นผลบวก expectation ของผลคูณระหว่าง L(p, q, r, s) 2k + 1 ตัวซึ่งแยกเป็น dependent sets ที่ไม่ขึ้นต่อกัน โดยต้องมีอย่างน้อยหนึ่ง dependent set ที่มี L(p, q, r, s) ตัวเดียว

$\Sigma^{(2)}$ เป็นผลบวก expectation ของผลคูณระหว่าง L (p, q, r, s) 2k + 1ตัว ซึ่งแยกได้เป็น dependent sets ที่ไม่ขึ้นต่อกัน โดยที่ทุก dependent sets ต้องมี L (p, q, r, s) อย่างน้อย ๒ ตัว

เนื่องจาก $\prod_{i=1}^{2k+1} L(p_i,q_i,r_i,s_i)$ ใน $\Sigma^{(1)}$ มี L (p,q,r,s) อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ไม่ขึ้นอยู่กับ L(p, q, r,s) ตัวอื่น ๆ ดังนั้นเราได้ว่า

(๓.๒.๑๓) $$\Sigma^{(1)} E\left(\prod_{i=1}^{2k+1} L(p_i,q_i,r_i,s_i)\right) = 0.$$

โดย Lemma ๑๔ เราได้ว่า จำนวนวิธีแบ่ง L(p, q, r, s) 2k + 1 ตัว ออกเป็น dependent sets ซึ่งไม่ขึ้นต่อกันโดยที่ทุก dependent sets ต้องมี L(p, q, r, s) อย่างน้อย ๒ ตัว และมีอย่างน้อยหนึ่ง dependent set ที่มี L(p, q, r, s) มากกว่า ๒ ตัวมีอยู่ทั้งสิ้น $o(n^{\frac{7}{2}(2k+1)-\frac{1}{2}})$ ซึ่งเท่ากับ $o(n^{\frac{7}{2}(2k+1)})$ วิธี

เพราะฉะนั้น

(๓.๒.๑๔) $$\Sigma^{(2)} E\left(\prod_{i=1}^{2k+1} L(p_i,q_i,r_i,s_i)\right) = o(n^{\frac{7}{2}(2k+1)})$$

ดังนั้น เราได้ว่า $\mu_{2k+1}(L) = o(n^{\frac{7}{2}(2k+1)})$

๓.๓ ลิมิตของการแจกแจงปกติ

<u>ทฤษฎีบทที่ ๑๗</u> ให้ $P = an$, $Q = bn$, $R = cn$, $S = dn$ และ $F_n(x)$ เป็น distribution function ของ $\frac{L - E(L)}{\sqrt{Var(L)}}$ เราจะได้ว่า

(๓.๓.๑) $$\lim F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

<u>พิสูจน์</u>

$$\mu_m = E\left(\left\{\frac{L - E(L)}{\sqrt{Var(L)}}\right\}^m\right)$$

$$= \frac{E\left(\left\{L - E(L)\right\}^m\right)}{\left\{Var(L)\right\}^{\frac{m}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_m(L)}{\left\{\mu_2(L)\right\}^{\frac{m}{2}}}$$

เมื่อ $m = 2k$ โดยทฤษฎีบทที่ ๑๕ เราได้ว่า

$$\mu_{2k} = \frac{\frac{(2k)!}{2^k k!}\left[\frac{1}{1260}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{17}{630}\alpha\beta\right]^k \left[n^{7k}(abcd)^k(abc+bcd+abd+acd)^k\right] + o(n^{7k})}{\left\{\left[\frac{1}{1260}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{17}{630}\alpha\beta\right]\left[n^7 abcd\,(abc+bcd+abd+acd)\right] + o(n^7)\right\}^k}$$

$$= \frac{(2k)!}{2^k k!} + o(1)$$

ดังนั้น

(๓.๓.๒) $$\mu_m = \frac{m!}{2^{\frac{m}{2}}\left(\frac{m}{2}\right)!} + o(1)$$

เมื่อ $m = 2k + 1$ โดยทฤษฎีบทที่ ๑๖ เราได้ว่า

$$\mu_{2k+1} = \frac{o\left(n^{\frac{7}{2}(2k+1)}\right)}{\left\{\left[\frac{1}{1260}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{17}{630}\alpha\beta\right]\left[n^7\, abcd\,(abc+bcd+abd+acd) + o\,(n^7)\right]\right\}^{\frac{2k+1}{2}}}$$

$$= o\,(1)$$

ดังนั้น

(๓.๓.๓) $\mu_m = o\,(1)$

จาก (๓.๓.๒) และ (๓.๓.๓) เราได้

$$\lim_{n\to\infty} \mu_m = \begin{cases} \dfrac{m!}{2^{\frac{m}{2}}\,(\frac{m}{2})!} & \text{เมื่อ } m \text{ เป็นเลขจำนวนเต็มคู่} \\ 0 & \text{เมื่อ } m \text{ เป็นเลขจำนวนเต็มคี่} \end{cases}$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ ๑๑ เราได้ว่า

$$\lim F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๑๘</u> ให้ $P = an$, $Q = bn$, $R = cn$ และ $S = dn$ เราจะได้ว่า ลิมิตของ joint distribution function ของ $\frac{I - E\,(I)}{\sqrt{Var\,(I)}}$ กับ $\frac{J - E\,(J)}{\sqrt{Var\,(J)}}$ เป็น bivariate normal distribution

<u>พิสูจน์</u> ให้ $F_n(x)$ เป็น c. d. f. ของ $\frac{\alpha\,(I - E(I)) + \beta\,(J - E(J))}{\sqrt{Var\,[\alpha\,(I - E(I)) + \beta\,(J - E(J))]}}$

โดยนิยามของ characteristic function เราได้ว่า

$$\varphi_n(t) = E\left(e^{\,i\frac{[\alpha\,(I - E(I)) + \beta\,(J - E\,(J))]}{\sqrt{Var[\alpha\,(I - E(I)) + \beta\,(J - E(J))]}}\,t}\right)$$

โดยทฤษฎีบทที่ ๑๐, ทฤษฎีบทที่ ๑๒ และ ทฤษฎีบทที่ ๑๗ เราได้ว่า

$$\lim \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

เพราะว่า $F_n(U,V)$ เป็น joint distribution function ของ

$\dfrac{I - E(I)}{\sqrt{Var(I)}}$ กับ $\dfrac{J - E(J)}{\sqrt{Var(J)}}$ ให้ $\varphi_n(t_1, t_2)$ เป็น characteristic

function ของ $\dfrac{I - E(I)}{\sqrt{Var(I)}}$ กับ $\dfrac{J - E(J)}{\sqrt{Var(J)}}$

เราได้ว่า

$$\varphi_n(t_1,t_2) = E\left(e^{i\left[\frac{I - E(I)}{\sqrt{Var(I)}}\right]t_1 + i\left[\frac{J - E(J)}{\sqrt{Var(J)}}\right]t_2}\right)$$

$$= E\left(e^{i\left[\frac{I - E(I)}{\sqrt{\sigma_{11}}}t_1 + \frac{J - E(J)}{\sqrt{\sigma_{22}}}t_2\right]}\right)$$

โดยที่ σ_{11}, σ_{22} คือ variance ของ I และ J ตามลำดับ

เขียน

$$\varphi_n(t_1,t_2) = E\left(e^{i\left[\frac{t_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}(I - E(I)) + \frac{t_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}(J - E(J))\right]}\right)$$

$$= E\left(e^{i\frac{\left[\frac{t_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}(I - E(I)) + \frac{t_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}(J - E(J))\right]\sqrt{Var\left[\frac{t_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}(I-E(I)) + \frac{t_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}(J-E(J))\right]}}{\sqrt{Var\left[\frac{t_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}(I-E(I)) + \frac{t_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}(J-E(J))\right]}}}\right)$$

เราจะได้ว่า

$$\varphi_n(t_1,t_2) = E\left(e^{iXt}\right)$$

ในเมื่อ

$$X = \frac{\frac{t_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}(I-E(I)) + \frac{t_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}(J-E(J))}{\sqrt{Var\left[\frac{t_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}(I-E(I)) + \frac{t_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}(J-E(J))\right]}}$$

และ $$t = \sqrt{Var\left[\frac{t_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}(I - E(I)) + \frac{t_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}(J - E(J))\right]}$$

ดังนั้น $$\lim \varphi_n(t_1, t_2) = \lim E(e^{iXt})$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}Var\left[\frac{t_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}(I-E(I)) + \frac{t_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}(J - E(J))\right]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t_1^2}{\sigma_{11}}\cdot\sigma_{11} + \frac{t_2^2}{\sigma_{22}}\cdot\sigma_{22} + 2\frac{t_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\cdot\frac{t_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\cdot\sigma_{12}\right]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left[t_1^2 + t_2^2 + 2\frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}t_1t_2\right]}$$

ในที่นี้ σ_{12} คือ covariance ของ I กับ J

ถ้าให้ ρ เป็น correlation coefficient ระหว่าง I และ J

กล่าวคือ

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$$

เราจะได้

(๓.๓.๘) $$\lim \varphi_n(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + 2\rho t_1 t_2)}$$

ซึ่งเป็น characteristic function ของ bivariate normal distribution

จะเห็นได้ว่า $\varphi_n(t_1, t_2)$ ซึ่งเป็น characteristic function ของ joint distribution function ของ $\frac{I - E(I)}{\sqrt{Var(I)}}$ กับ $\frac{J - E(J)}{\sqrt{Var(J)}}$ มีลิมิตเป็น characteristic function ของ bivariate normal distribution

ดังนั้น ถ้า $F_n(U,V)$ เป็น joint distribution function ของ $\frac{I - E(I)}{\sqrt{Var(I)}}$ กับ $\frac{J - E(J)}{\sqrt{Var(J)}}$ เราได้ว่าลิมิตของ $F_n(U, V)$ มีค่าในรูป

$$\lim F_n(U,V) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{U} \int_{-\infty}^{V} \sqrt{|\sigma^{ij}|}\, e^{-\frac{1}{2} Q(x_1,x_2)} \, dx_1 dx_2$$