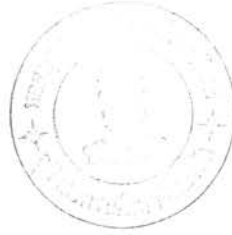


บทที่ 2

ทฤษฎีอีลค์ไลน์










2.1 กล่าวนำ

ทฤษฎีอีลค์ไลน์เป็นทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างชนิดแผ่นพื้น ซึ่งจัดอยู่ในประเภททฤษฎีขอบเขตบน สามารถใช้ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีรูปร่างตลอดจนที่รองรับลักษณะต่าง ๆ ได้ ในแผ่นพื้นคอนกรีตเสริมเหล็กทฤษฎีอีลค์ไลน์เป็นวิธีการออกแบบชนิดพิทัก (Limit design) และใช้ได้กับแผ่นพื้นที่มีเหล็กเสริมปริมาณต่ำ (Under-reinforced) กล่าวคือ เหล็กเสริมรับแรงถึงจุดคลากก่อนที่คอนกรีตรับแรงอัดจะประลัย

ขั้นตอนการวิเคราะห์หาค่าหน้าหนักประลัย ทำโดยการสมมุติรูปแบบการวิบัติ เป็นชิ้นส่วนย่อยของแผ่นพื้นให้สอดคล้องกับรูปทรงทางเรขาคณิตและสภาวะเงื่อนไขที่ขอบ และคำนวณน้ำหนักประลัยโดยใช้วิธีงานเสมือนหรือวิธีสมมูลย์ เนื่องจากทฤษฎีอีลค์ไลน์เป็นทฤษฎีขอบเขตบนในการวิเคราะห์จึงต้องพิจารณาารูปแบบการวิบัติของแผ่นพื้นที่มีโอกาสเป็นไปได้ทั้งหมด จึงจะมั่นใจได้ว่าน้ำหนักที่วิเคราะห์ได้เป็นค่าที่ถูกต้อง สิ่งสำคัญที่จำเป็นต้องคำนึงถึงอีกประการหนึ่งคือ ทฤษฎีอีลค์ไลน์พิจารณาแต่เพียงการวิบัติเนื่องจากแรงดัด ดังนั้นการวิบัติเนื่องจากแรงเฉือนหรือแรงเฉือนทะลวง (Punching shear) จะต้องพิจารณาประกอบในภายหลังด้วย

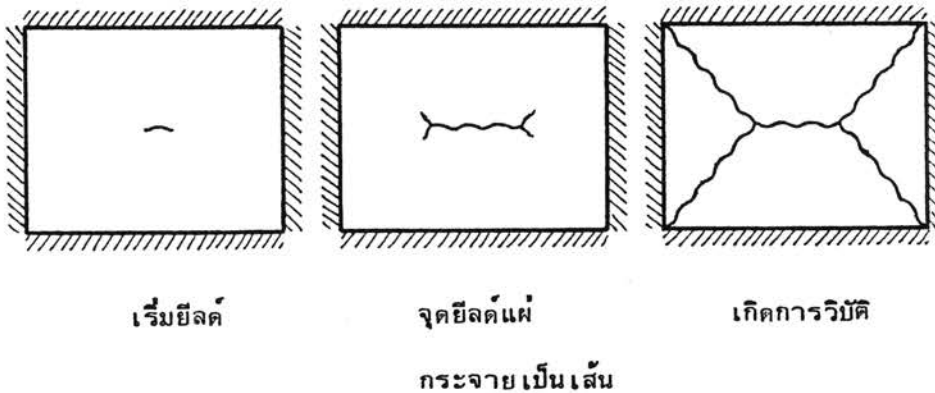
สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์

	ขอบอิสระ (Free edge)
	ที่รองรับแบบง่าย (Simple support)
	ที่รองรับแบบยึดแน่น (Fixed support)
	ที่รองรับแบบเสา (Column support)
	อีลค์ไลน์แรงดัดบวก (Positive moment yield line)
	อีลค์ไลน์แรงดัดลบ (Negative moment yield line)
	แกนหมุน (Axis of rotation)

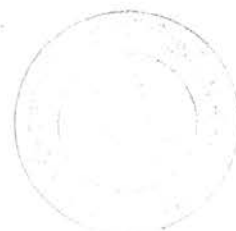
2.2 เงื่อนไขการเกิดการวิบัติของแผ่นพื้น

พิจารณาแผ่นพื้นคอนกรีต เสริมเหล็กรับน้ำหนักเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งเกิดการวิบัติ ในขณะที่น้ำหนักยังน้อยอยู่ (ก่อนเกิดรอยร้าว) การกระจายของแรงดัดบนแผ่นพื้นจะเป็นไปตามทฤษฎีอีลาสติก หลังจากเกิดรอยร้าวการกระจายของแรงดัดจะเปลี่ยนไปเนื่องจาก ที่หน้าตัดที่เกิดรอยร้าวมีความแข็งเกร็งต่อการรับแรงดัด (Flexural rigidity) ลดลง เมื่อน้ำหนักเพิ่มขึ้นจนถึงค่าหนึ่ง จะทำให้เหล็กเสริมเริ่มยึดตรงตำแหน่งที่เกิดแรงดัดสูงสุด (แรงดัดที่หน้าตัดนั้นยังคงมีค่าคงที่อยู๋) และ เมื่อน้ำหนักเพิ่มต่อไปรอยร้าวเนื่องจากเหล็กเสริมรับแรงดึงถึงจุดกลางจะแผ่ขยายออกไปกลายเป็นเส้น ซึ่งเรียกว่ายิลด์ไลน์ เมื่อเกิดยิลด์ไลน์มากพอจนแบ่งแผ่นพื้นออกเป็นชิ้นส่วนซึ่งสามารถเกิดการวิบัติโดยสมบูรณ์ ที่ตำแหน่งนี้แผ่นพื้นไม่สามารถรับน้ำหนักเพิ่มต่อไป ระบบของยิลด์ไลน์ที่ทำให้แผ่นพื้นเกิดการวิบัติเรียกว่า รูปแบบยิลด์ไลน์ (Yield line pattern)

จากเงื่อนไขการวิบัติจะเห็นได้ว่า แผ่นพื้นเกิดยิลด์ไลน์เป็นจุดเริ่มแรกก่อน แล้วจึงแผ่กระจายไปอย่างเพียงพอจนเกิดการวิบัติ ดังนั้นทฤษฎียิลด์ไลน์จึงใช้ได้กับแผ่นพื้นคอนกรีตเสริมเหล็กที่มีความเหนียว (Ductility) อย่างพอเพียง



รูปที่ 2.1 การเกิดรูปแบบยิลด์ไลน์ในแผ่นพื้นสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ



2.3 การเกิดรูปแบบยิลด์ไลน์

รูปแบบยิลด์ไลน์ประกอบด้วยชุดของยิลด์ไลน์ ที่แบ่งแผ่นพื้นออกเป็นชิ้นส่วนเพื่อให้เกิดการวิบัติอย่างสมบูรณ์ภายใต้สภาวะ เงื่อนไขการ เคลื่อนที่ของชิ้นส่วนที่ถูกแบ่งโดยยิลด์ไลน์ นั้น กฎเกณฑ์ที่ใช้ในการเขียนรูปแบบยิลด์ไลน์ มีดังนี้

2.3.1 ยิลด์ไลน์เป็นเส้นตรงไม่สามารถเปลี่ยนทิศทางได้ นอกจากพบกับยิลด์ไลน์อื่น

2.3.2 ยิลด์ไลน์ที่เกิดขึ้นต้องผ่านจุดตัดกันของแกนหมุนของชิ้นส่วนทั้งสองที่เชื่อมต่อกันโดยยิลด์ไลน์นั้น ๆ

2.3.3 ที่รองรับเป็นแนวเส้นจะเป็นแกนหมุนที่แน่นอนไปในตัวด้วยและที่รองรับแบบจุด (เช่น เสา) จะเกิดแกนหมุนที่ไม่แน่นอนท่ามกลาง ๆ ตามความเหมาะสมผ่านที่รองรับนั้น

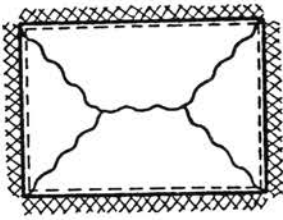
2.3.4 ถ้ามีขอบอิสระยิลด์ไลน์จะไปพบขอบอิสระนั้น

ตัวอย่างรูปแบบยิลด์ไลน์สำหรับแผ่นพื้นลักษณะต่าง ๆ แสดงในรูปที่ 2.2 การเสริมเหล็กแบบขวกและลย ถ้าเหล็กเสริมรับแรงดึงอยู่ด้านบนของแผ่นพื้น ยิลด์ไลน์เนื่องจากแรงดัดถือว่าเป็นลย ในทางตรงกันข้ามถ้าเหล็กเสริมรับแรงดึงอยู่ด้านล่าง ยิลด์ไลน์เนื่องจากแรงดัดจะพิจารณาให้เป็นขวก

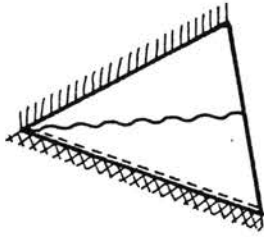
2.4 แรงดัดค้ำทานสูงสุดบนยิลด์ไลน์

รูปที่ 2.3 แสดงถึงส่วนประกอบของยิลด์ไลน์ที่สมมุติแยกออกเป็นส่วนประกอบเล็ก ๆ กำหนดให้ m_x และ m_y เป็นแรงดัดค้ำทานต่อหน่วยความกว้างของหน้าตัด ในทิศทางตั้งฉากกับแกน X และแกน Y ตามลำดับ

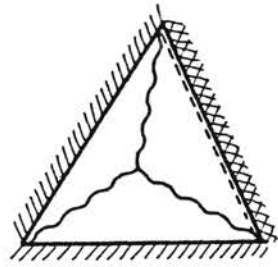
สมมุติยิลด์ไลน์ทำมุม α กับแกน Y ซึ่งวัดตามเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 2.3 คิดผลรวมของแรงดัดบนด้าน ab ของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม abc ภายใต้สภาวะสมดุลจะได้แรงดัดค้ำทานต่อหน่วยความกว้างบนยิลด์ไลน์ดังสมการ



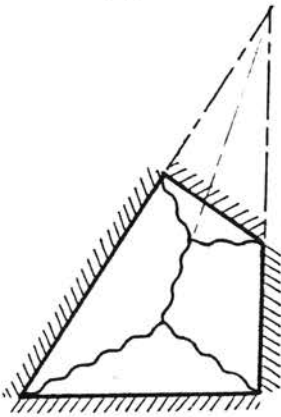
(ก)



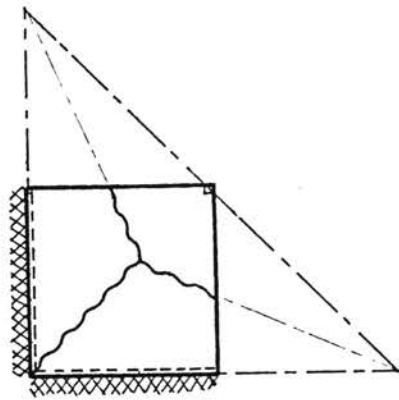
(ข)



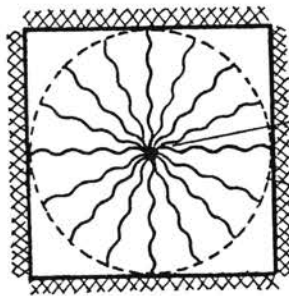
(ค)



(ง)



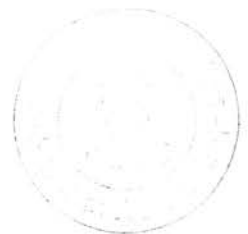
(จ)

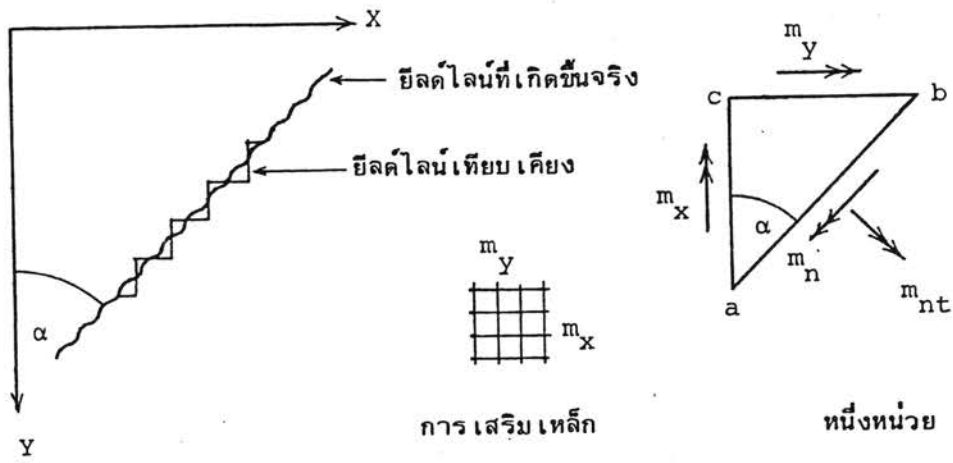


(ฉ)

หมายเหตุ แผ่นพื้นรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ ยกเว้นรูป (ฉ) ซึ่งรับน้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุด

รูปที่ 2.2 ตัวอย่างรูปแบบยึดค้ำไลน์





รูปที่ 2.3 ยิลด์ไลน์ใด ๆ ในแผ่นพื้นเสริมเหล็กสองทางต่างกัน

$$m_{nab} = m_{xac} \cos \alpha + m_{ybc} \sin \alpha$$

$$m_n = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha \quad (2.1)$$

$$m_{ntab} = m_{xac} \sin \alpha - m_{ybc} \cos \alpha$$

$$m_{nt} = (m_x - m_y) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.2)$$

เมื่อ m_n และ m_{nt} เป็นค่าแรงคดมีทิศทางขนานกับยิลด์ไลน์และแรงบิดมีทิศทางตั้งฉากกับยิลด์ไลน์ตามลำดับ

ถ้าการเสริมเหล็กสองทางเหมือนกัน (Isotropically reinforced) ทำให้

$m_x = m_y = m$ สมการที่ (2.1) และ (2.2) จะลดรูปลงเหลือ

$$m_{nt} = 0 \quad (2.3)$$

$$m_n = m \quad (2.4)$$

2.5 วิธีการเสมือน (Virtual Work Method)

วิธีการวิเคราะห์ที่อาศัยหลักการที่ว่า ทฤษฎีงานภายนอกที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่น้อย ๆ ของน้ำหนักที่กระทำ มีค่าเท่ากับงานภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากการหมุนไปของยิลด์ไลน์

งานเสมือนภายนอกคำนวณจาก การเคลื่อนที่ของน้ำหนักบนชิ้นส่วนของแผ่นพื้นทั้งหมด

$$\begin{aligned} W_e &= \iint W(x,y) \delta(x,y) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

เมื่อ n = จำนวนชิ้นส่วนของแผ่นพื้นในรูปแบบยิลด์ไลน์

P_i = ผลรวมของน้ำหนักบนชิ้นส่วนของแผ่นพื้นชั้นที่ i

δ_i = ระยะทรุดตัวของจุดศูนย์กลางของน้ำหนักบนชิ้นส่วน i

งานเสมือนภายใน คำนวณจากผลรวมของงานภายใน เนื่องจากแรงคัตที่หมุนไปของยิลด์ไลน์ทุกเส้น

$$W_i = \sum_{j=1}^k m_j L_j \theta_j \quad (2.6)$$

เมื่อ k = จำนวนเส้นของยิลด์ไลน์ในรูปแบบยิลด์ไลน์

m_j = ค่าแรงคัตของยิลด์ไลน์เส้นที่ j

L_j = ความยาวของยิลด์ไลน์เส้นที่ j

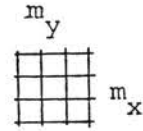
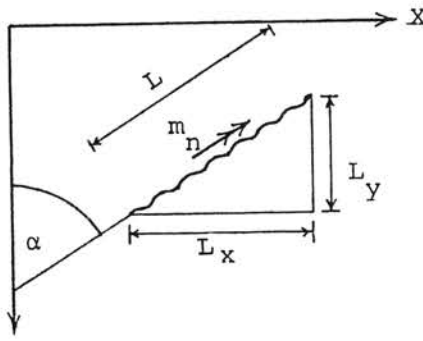
θ_j = ค่ามุมหมุนของยิลด์ไลน์เส้นที่ j

เนื่องจากงานภายนอก เท่ากับงานภายใน

$$\sum_{i=1}^n P_i \delta_i = \sum_{j=1}^k m_j L_j \theta_j \quad (2.7)$$

2.5.1 การแยกส่วนประกอบของงานภายใน

ทิศทางของการเสริมเหล็กในแผ่นพื้นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ส่วนใหญ่นานกับขอบของแผ่นพื้นในระบบแกนฉาก X-Y การคิดแยกงานภายในออกเป็นสองส่วนตามระบบแกนฉากจะสะดวกกว่าการคิดโดยตรงมาก



การเสริมเหล็ก

รูปที่ 2.4 ยึดค้ไลน์ทำมุมกับทิศทางการเสริมเหล็ก

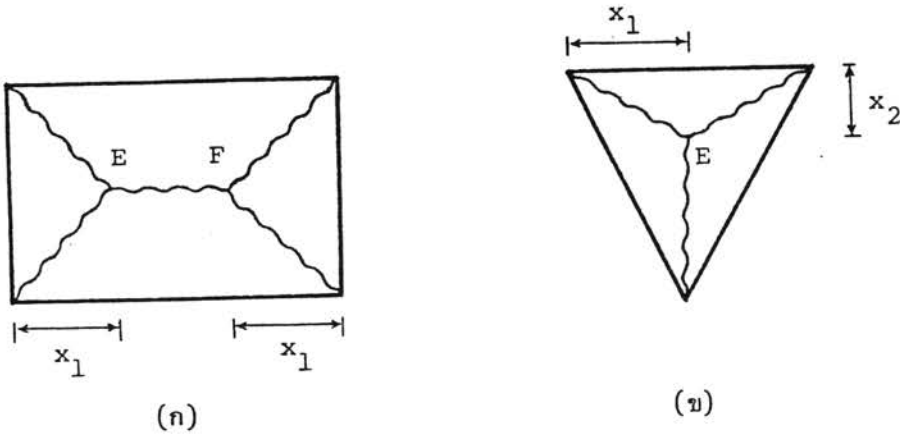
จากรูปที่ 2.4 พิจารณายึดค้ไลน์ยาว L มีทิศทางทำมุม α กับแกน Y มีมุมหมุนไปเท่ากับ θ คำนวณค่างานภายในโดยตรงได้ $= m_n \theta L$ แทนค่า m_n จากสมการ (2.1)

$$\begin{aligned} m_n \theta L &= (m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha) \theta L \\ &= m_x L \theta \cos^2 \alpha + m_y L \theta \sin^2 \alpha \\ &= m_x \theta L_y + m_y \theta L_x \end{aligned} \quad (2.8)$$

เมื่อ m_x, m_y = แรงดัดประลัยตั้งฉากกับแกน X และ Y ตามลำดับ
 L_x, L_y = ความยาวของยึดค้ไลน์บนแกน X และ Y ตามลำดับ
 θ_x, θ_y = ค่ามุมหมุนของยึดค้ไลน์แบบแกน X และ Y ตามลำดับ

2.5.2 ทฤษฎีน้ำหนักค่าสุด (Minimum-load principle)

ส่วนใหญ่แล้วการเขียนรูปแบบยิลด์ไลน์มักคิดอยู่ในรูปของตัวแปรที่กำหนดค่าแห่งของยิลด์ไลน์ พิจารณาแผ่นผืนในรูปที่ 2.5 (ก) เราไม่ทราบค่า EF ในรูปที่ 2.5 (ข) เราไม่ทราบค่าแห่งพิกัดของจุด E



รูปที่ 2.5 รูปแบบยิลด์ไลน์คิดอยู่ในรูปของตัวแปร

ดังนั้นในกรณีนี้ตัวแปรจะปรากฏอยู่ในสมการงานเสมือน ทำให้สมการอยู่ในรูปแบบของ

$$m_n = W f(x_1, x_2, \dots) \quad (2.9)$$

เนื่องจาก เป็นทฤษฎีของเขตบน ชุดของตัวแปรจะต้องทำให้แรงคัต m_n มีค่ามากที่สุด หรือในทางกลับกันทำให้ค่าน้ำหนัก W มีค่าน้อยที่สุด โดยการแก้สมการหาชุดของตัวแปรจากชุดของสมการ (2.10)

$$\frac{\partial m_n}{\partial x_1} = 0 ; \quad \frac{\partial m_n}{\partial x_2} = 0 ; \quad \dots \quad (2.10)$$

เมื่อทราบค่าของตัวแปรแล้ว ทำการแทนค่ากลับลงในสมการ (2.9) จะได้ความสัมพันธ์ของแรงคัตด้านทานประลัยกับน้ำหนักประลัย

2.6 วิธีสมดุลย์ (Equilibrium Method)

จาก Wood และ Jones⁽⁷⁾ วิธีสมดุลย์ ความจริงแล้วคือ วิธีงานเสมือนที่อยู่อีกรูปแบบหนึ่งนั่นเอง ในวิธีสมดุลย์นี้เราไม่ต้องหาผลต่างอนุพันธ์ย่อย เพียงแค่สร้างและแก้สมการสมดุลย์ของชิ้นส่วนต่าง ๆ ที่ถูกแบ่งโดยยิลด์ไลน์ แรงกระทำบนชิ้นส่วนประกอบด้วย น้ำหนักภายนอก แรงดัด แรงบิดและแรงเฉือนบนยิลด์ไลน์ ซึ่งแรงเฉือนนี้จะถูกแทนอยู่ในรูปของแรงกระทำที่ข้อของยิลด์ไลน์พหุคูณเรียกว่า แรงที่ข้อ (Nodal force)

ดังนั้นสมการสมดุลย์ของแต่ละชิ้นส่วนจะมีเทอมของน้ำหนักภายนอก W แรงดัด m_n แรงที่ข้อ Q_1, Q_2, \dots และค่าแปรกำหนดตำแหน่งของยิลด์ไลน์ ปัญหาหลักของวิธีสมดุลย์อยู่ที่การหาค่าแรงที่ข้อ จำนวนสมการสมดุลย์ที่ต้องการจะมากกว่าจำนวนตัวแปรที่กำหนดตำแหน่งของรูปแบบยิลด์ไลน์อยู่เท่ากับหนึ่ง

2.6.1 ทฤษฎีหาค่าแรงที่ข้อ (Nodal Force Theorem)

Johansen⁽²⁾ เป็นผู้บุกเบิกนำการใช้แรงที่ข้อมาเทียบเคียงกับแรงเฉือนบนยิลด์ไลน์ ต่อมา Jones⁽¹⁰⁾ ได้เสนอวิธีการหาค่าแรงที่ข้อระหว่างยิลด์ไลน์สองเส้น

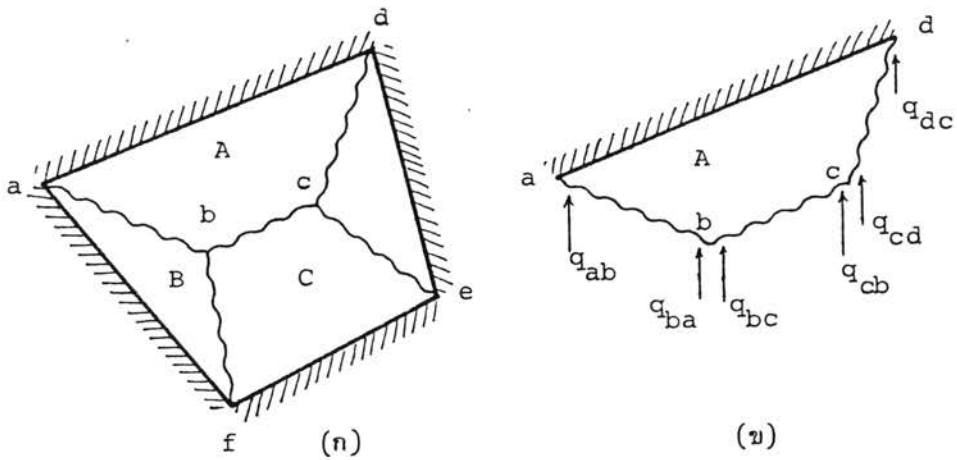
พิจารณารูปที่ 2.6 เป็นการย้ายแรงเฉือนบนยิลด์ไลน์ไปเป็นแรงเฉือนเทียบเคียงที่ปลายของยิลด์ไลน์แต่ละเส้น โดยไม่ทราบขนาดและทิศทาง ดังนั้นแรงที่ข้อที่จุด b ของชิ้นส่วน A จะมีค่าดังสมการ (2.11)

$$Q_{Ab} = q_{ba} + q_{bc} \quad (2.11)$$

เมื่อ $q_{ba} =$ แรงเฉือนเทียบเคียงที่ปลาย b ของยิลด์ไลน์ ab

$q_{bc} =$ แรงเฉือนเทียบเคียงที่ปลาย b ของยิลด์ไลน์ bc

ในทำนองเดียวกัน แรงที่ข้อของชิ้นส่วน B และ C ที่จุด b มีค่าเท่ากับ Q_{Bb} และ Q_{Cb} ตามลำดับ

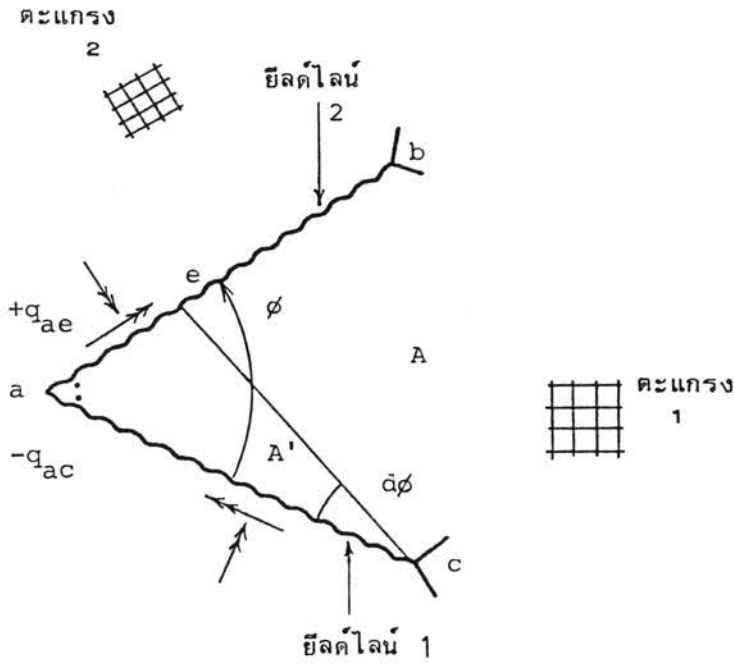


รูปที่ 2.6 รูปแบบน็อดไลน์และแรง น็อดเทียบ เคียงที่ขั้ว

เนื่องจากเงื่อนไขของสภาวะสมดุลย์ แรง น็อดบนน็อดไลน์แต่ละข้าง จะมีค่าเท่ากันและเครื่องหมายตรงกันข้าม เช่นแรง น็อดเทียบ เคียง q_{ba} ของน็อดไลน์ ba บนชั้นส่วน A มีทิศทางขึ้น แรง น็อดเทียบ เคียง q_{ba} บนน็อดไลน์ ba บนชั้นส่วน B จะมีค่าเท่ากันและมีทิศทางลง ดังนั้นแรง น็อดเทียบ เคียงทั้งหกค่าที่จุด b ของน็อดไลน์ ba, bc และ bf เมื่อบวกกันแล้วจะมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะจริงทุกกรณี จึงกล่าวได้ว่า "ที่จุดหมกกันของน็อดไลน์จำนวนใด ๆ ผลรวมของแรงที่ขั้วเป็นศูนย์" สามารถเขียนเป็นสมการ ได้ดังนี้

$$Q_{Ab} + Q_{Bb} + Q_{Cb} = 0 \tag{2.12}$$

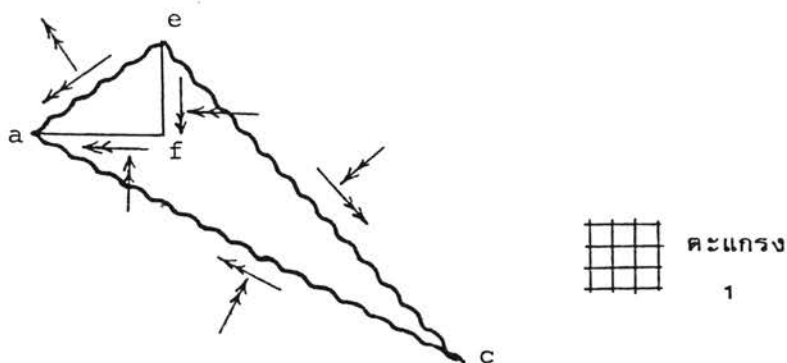
Jones⁽¹⁰⁾ ได้คำนวณค่าแรงที่ขั้วระหว่างน็อดไลน์สองเส้นและมากกว่า สองเส้นตามวิธีการต่อไปนี้ พิจารณาการสมดุลย์ของชั้นส่วนเล็ก ๆ A' ในรูปที่ 2.7 โดยที่ ab และ ac เป็นน็อดไลน์ที่มีการเสริมเหล็กตะแกรงต่างกัน $d\phi$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้นค่าแรงดัดบนน็อดไลน์ ac และเส้น ce มีค่าเท่ากัน ที่จุด a มีแรง น็อดเทียบ เคียงดังแสดง ในรูป ดังนั้นค่าแรงที่ขั้ว $Q_{A'a} = q_{ae} + q_{ac}$



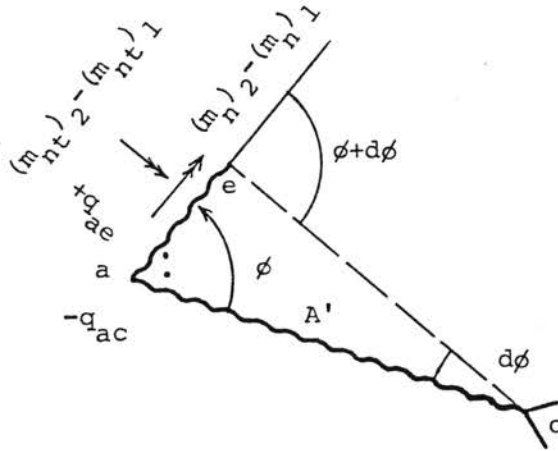
รูปที่ 2.7 แรงเฉือนเทียบเคียงที่จุดพบกันของยิลด์ไลน์สองเส้น

พิจารณาแรงตัดและแรงบิดด้านทานบนเส้น ec และ ca ของการเสริมเหล็กตะแกรงที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 2.8 ผลรวมของแรงตัดตามทิศทาง eca เหมือนกับทิศทาง efa ซึ่งมีค่าเท่ากับผลลัพธ์ของแรงตัดพิจารณาจาก e ไป a โดยตรง ดังนั้นผลรวมทั้งหมดของแรงตัดและแรงบิดบนเส้น ec และ ca คือแรงตัด $(m_n)_1$ และแรงบิด $(m_{nt})_1$ ตามทิศทาง ea (ตัวห้อย 1 หมายถึงการถูกควบคุมโดยเหล็กเสริมตะแกรงที่ 1)

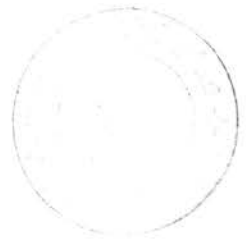
แรงตัดและแรงบิดตามทิศทาง ae เนื่องจากยิลด์ไลน์ ab คือ $(m_n)_2$ และ $(m_{nt})_2$ กระทำตามทิศทาง ae ซึ่งถูกควบคุมโดยเหล็กเสริมตะแกรงที่ 2



รูปที่ 2.8 แรงตัดเทียบเคียงตามแนว ac และ ce



รูปที่ 2.9 ผลลัพธ์ของแรงตัดและแรงบิดบนขอบ ae



ผลรวมของแรงตัดและแรงบิดบนขอบ ae, ec และ ca ของชิ้นส่วน A' ตามทิศทาง ae คือ $(m_n)_2 - (m_n)_1$ และ $(m_{nt})_2 - (m_{nt})_1$ ตามลำดับดังแสดงในรูปที่ 2.9

จากการสมดุลย์ของชิ้นส่วน A' คัดแรงตัดรอบแกน ec

$$(q_{ae} + q_{ac}) ae \sin(\phi + d\phi) = [(m_n)_2 - (m_n)_1] ae \cos(\phi + d\phi) + [(m_{nt})_2 - (m_{nt})_1] ae \sin(\phi + d\phi)$$

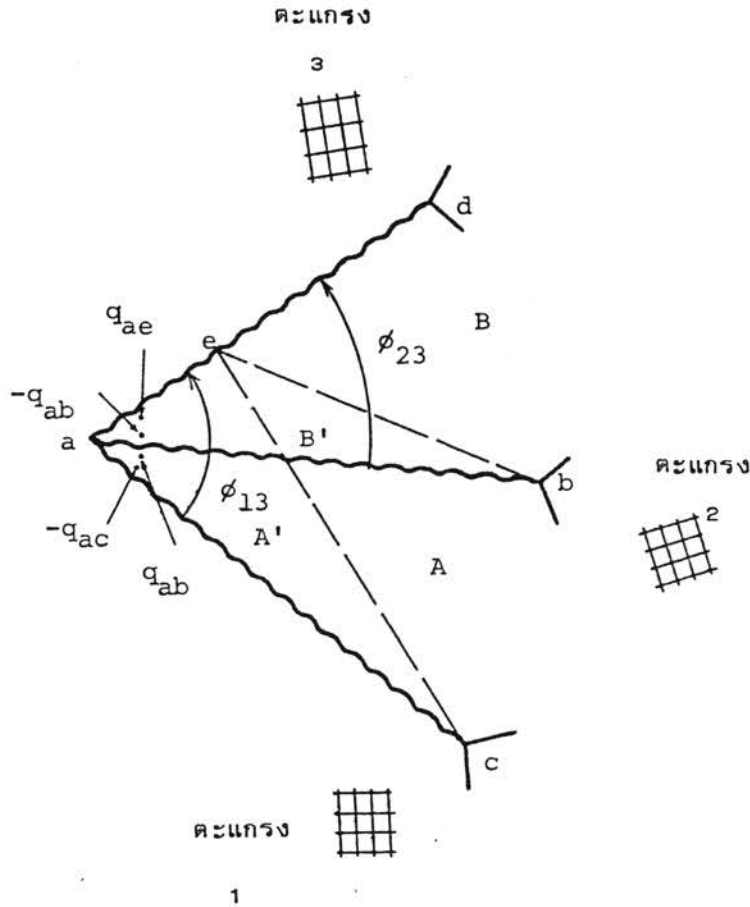
เมื่อ $d\phi$ เข้าใกล้ 0

$$Q'_{Aa} = q_{ae} + q_{ac} = [(m_n)_2 - (m_n)_1] \cot \phi + [(m_{nt})_2 - (m_{nt})_1] \quad (2.13)$$

กรณีสุดท้ายเราพิจารณายัลด์ไลน์สามเส้นที่มีการเสริมเหล็กตะแกรงต่างกัน สามแบบ ดังแสดงในรูปที่ 2.10

พิจารณาการสมดุลย์ของชิ้นส่วน A' ซึ่งมี ae, ec และ ac เป็นด้านประกอบของชิ้นส่วน แทนค่า $(m_n)_2 = (m_n)_3$, $(m_{nt})_2 = (m_{nt})_3$ และ $\phi = \phi_{13}$ ลงในสมการ (2.13) จะได้

$$Q'_{Aa} = q_{ae} + q_{ac} = [(m_n)_3 - (m_n)_1] \cot \phi_{13} + [(m_{nt})_3 - (m_{nt})_1] \quad (2.14)$$



รูปที่ 2.10 แรงที่ขั้วที่จุดหมักกันของยิลด์ไลน์สามเส้น

ในทำนองเดียวกันพิจารณาการสมดุลของชิ้นส่วน B' แทนค่าลงในสมการ

(2.13) จะได้

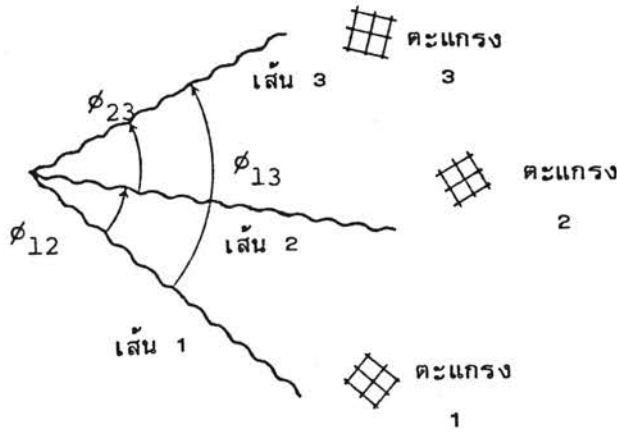
$$Q_{Ba}' = q_{ae} + q_{ab} = [(m_n)_3 - (m_n)_2] \cot \phi_{23} + [(m_{nt})_3 - (m_{nt})_2] \quad (2.15)$$

จากสมการ (2.14) และ (2.15) ได้

$$Q_{Aa}' - Q_{Ba}' = (q_{ae} + q_{ac}) - (q_{ae} + q_{ab}) = q_{ac} - q_{ab} \quad (2.16)$$

แรงเฉือนเทียบเคียง $-q_{ab}$ ในสมการ (2.16) ของยิลด์ไลน์ ab ในชิ้นส่วน B' คิดตามเครื่องหมายลบจากรูปที่ 2.10 จะมีทิศทางพุ่งลง ดังนั้นค่าแรงที่ขั้วทั้งหมด Q_{Aa} กระทำระหว่างยิลด์ไลน์ ab และ ac คือ $q_{ac} - q_{ab}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับสมการ (2.16)

$$Q_{Aa} = [(m_n)_3 - (m_n)_1] \cot \phi_{13} - [(m_n)_3 - (m_n)_2] \cot \phi_{23} + [(m_{nt})_2 - (m_{nt})_1] \quad (2.17)$$



รูปที่ 2.11 ขั้วของยี่ลค์ไลน์สามเส้น

จากสมการ (2.17) พิจารณารูปที่ 2.11 แรงที่ขั้วระหว่างยี่ลค์ไลน์ 1 และ 2 จะได้สมการรูปทั่วไปเป็น

$$Q_{12} = [(m_n)_3 - (m_n)_1] \cot \phi_{13} - [(m_n)_3 - (m_n)_2] \cot \phi_{23} + [(m_{nt})_2 - (m_{nt})_1] \quad (2.18)$$

เมื่อ Q_{12} = แรงที่ขั้วระหว่างยี่ลค์ไลน์ 1 และ 2

$(m_n)_1$, $(m_n)_2$, $(m_n)_3$ = ค่าแรงคัตประลัยต่อหน่วยความกว้างของการเสริมเหล็กตะแกรง 1, 2, 3 ในทิศทางยี่ลค์ไลน์ 3 ตามลำดับ

$(m_{nt})_1$, $(m_{nt})_2$ = ค่าแรงบิดต่อหน่วยความกว้างของการเสริมเหล็กตะแกรง 1, 2 ในทิศทางยี่ลค์ไลน์ 3 ตามลำดับ

ϕ_{13} , ϕ_{23} = มุมระหว่างยี่ลค์ไลน์ 1 และ 3 , 2 และ 3 ตามลำดับ (วัดทวนเข็มนาฬิกา)

จากสมการ (2.18) สามารถลดความยุ่งยากลงได้สองกรณีคือ

กรณีที่ 1 เมื่ออีลด์ไลน์ที่มาพบกันถูกควบคุมด้วยเหล็กตะแกรงแบบเดียวกัน

$$(m_n)_1 = (m_n)_2 = (m_n)_3$$

$$(m_{nt})_1 = (m_{nt})_2$$

$$\text{จะได้ } Q_{12} = 0 \quad (2.19)$$

จึงกล่าวได้ว่า ที่จุดพบกันของอีลด์ไลน์สามเส้นที่เสริมเหล็กเหมือนกัน ค่าแรงที่ขั้วใด ๆ จะมีค่าเป็นศูนย์ ไม่ว่าอีลด์ไลน์ทั้งสามจะรับแรงคัตแบบลมหักหรือรับแรงคัตแบบขากหักทั้งหมด

กรณีที่ 2 อีลด์ไลน์ขอบอิสระ พิจารณารูปที่ 2.12 (ก) เส้น 2 และ 3 เป็นขอบอิสระรับแรงคัตเป็นศูนย์ ดังนั้นค่าแรงคัตและแรงบิดที่มีตัวห้อย 2 และ 3 นอกวงเล็บในสมการ (2.18) เป็นศูนย์

สมการที่ (2.18) จะอยู่ในรูป

$$Q_{12} = -(m_n)_1 \cot \phi_{13} - (m_{nt})_1$$

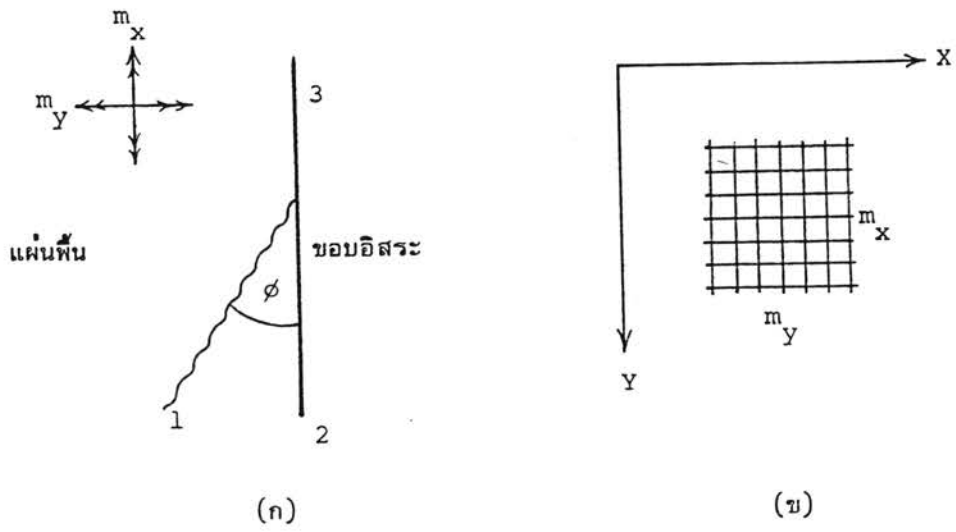
$$\cot \phi_{13} = \cot (\pi + \phi) = \cot \phi$$

$$Q_{12} = -(m_n)_1 \cot \phi - (m_{nt})_1 \quad (2.20)$$

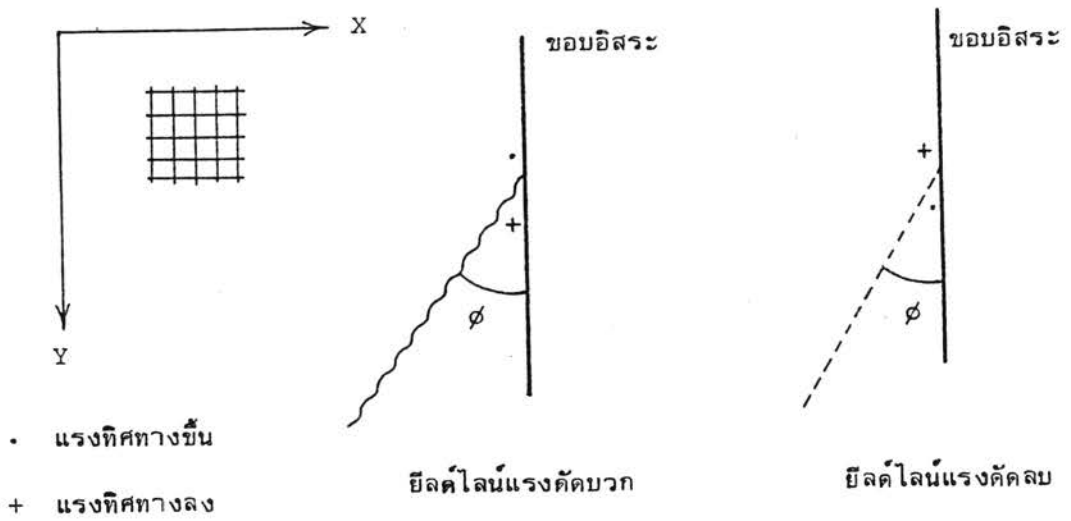
เมื่อ $(m_n)_1$ และ $(m_{nt})_1$ คือค่าแรงคัตประลัยและแรงบิดในทิศทางเส้นที่ 3 เนื่องจากผลรวมของแรงที่ขั้วเป็นศูนย์ ดังนั้น $Q_{13} = -Q_{12}$

โดยปกติทิศทางเสริมเหล็กมักจะขนานและตั้งฉากกับขอบอิสระ ดังรูปที่

2.12 (ข) เมื่อคัตแรงคัตแยกออกเป็นสองแกนตามทิศทางเสริมเหล็ก จากสมการ (2.2) $\alpha = 0^\circ$ หรือ 90° ดังนั้น



รูปที่ 2.12 ยิลด์ไลน์พหุขอบอิสระ



รูปที่ 2.13 ทิศทางแรงที่ขั้วของยิลด์ไลน์พหุขอบอิสระ

$(m_{nt})_1 = 0$ จึงได้สมการรูปใหม่เป็น

$$Q_{12} = -m_x \cot \phi \quad (2.21)$$

สามารถเขียน เป็นรูปทั่วไปได้เป็น

$$Q_e = \pm m_{ue} \cot \phi \quad (2.22)$$

เมื่อ $Q_e =$ แรงที่ขั้วของยิลด์ไลน์พบขอบอิสระ

$m_{ue} =$ แรงคัตบนยิลด์ไลน์ต่อหน่วยความกว้างมีทิศทางขนานกับขอบอิสระ

$\phi =$ มุมภายในระหว่างยิลด์ไลน์กับขอบอิสระ

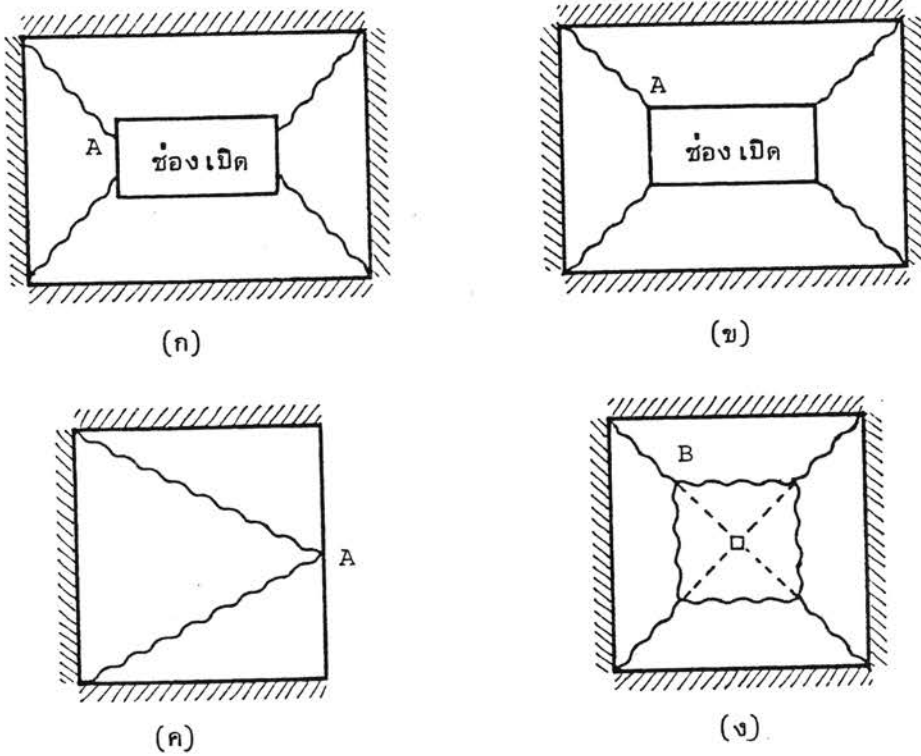
ทิศทางแรงที่ขั้วของยิลด์ไลน์แรงคัตแบบบวกและยิลด์ไลน์แรงคัตแบบลบ แสดงในรูปที่ 2.13 และในกรณีที่มุม $\phi = 90^\circ$ แรงที่ขั้ว Q_e จะมีค่าเป็นศูนย์

2.6.2 ขีดจำกัดของทฤษฎีหาค่าแรงที่ขั้ว

Wood และ Jones⁽⁷⁾ ชี้ให้เห็นว่าสมการ (2.18) ไม่สามารถใช้คำนวณแรงที่ขั้วได้ทุกกรณี โดยมีข้อยกเว้นดังนี้

1. สมการ (2.18) ไม่สามารถใช้คำนวณหาแรงที่ขั้วของยิลด์ไลน์พบกันที่จุดตายตัวแน่นอน คือใช้ได้ก็ต่อเมื่อ จุดพบกันของยิลด์ไลน์เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระเพื่อหาค่าน้ำหนักประลัยน้อยสุดออกมา ยกตัวอย่างเช่น เราสามารถหาแรงที่ขั้วที่จุด A ของรูปที่ 2.14 (ก) ได้ เนื่องจากจุด A สามารถเคลื่อนที่บนขอบของช่องเปิด แต่ไม่สามารถหาแรงที่ขั้วที่จุด A และจุด B ในรูปที่ 2.14 (ข) ได้

2. สมการ (2.18) ไม่สามารถใช้ได้กับจุดที่ยิลด์ไลน์มากกว่าสามเส้นมาพบกัน ตัวอย่างเช่น ไม่สามารถใช้กับจุด A และจุด B ในรูปที่ 2.14 (ค) และ (ง) ตามลำดับ



รูปที่ 2.14 แผ่นพื้นรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

สำหรับขีดจำกัดของสมการ (2.18) และทฤษฎีพิเศษต่างหากเกี่ยวกับการหาแรงที่ขั้ว ติดตามรายละเอียดได้จากเอกสารอ้างอิง⁽⁷⁾ โดย Wood และ Jones และจากเอกสารอ้างอิง⁽¹¹⁾ ถึง (15) ในกรณีข้อยกเว้นที่ไม่สามารถหาแรงที่ขั้วโดยตรงจากสมการ (2.18) อาจใช้วิธีสมมติแรงที่ขั้วขึ้นมาในสมการสมดุลย์แล้วใช้สมการของวิธีงานเสมือนเข้าช่วยในการแก้ปัญหาค้นคว้า อย่างไรก็ตามในกรณีข้อยกเว้นดังกล่าวการใช้วิธีงานเสมือนจะง่ายกว่าวิธีสมดุลย์มาก

2.7 วิถีเชิงเลข (Numerical Method)

ในกรณีรูปแบบยิลด์ไลน์ที่มีตัวแปรอยู่ด้วย การคำนวณพิกัดน้ำหนักประลัยหรือแรงตัดประลัย ต้องใช้กรรมวิธีทางคณิตศาสตร์ซับซ้อน ในวิธีงานเสมือนต้องทำการแก้ชุดของสมการ (2.9) และ (2.10) ที่ได้จากกรรมวิธีในหัวข้อ 2.5.2 ในวิธีสมดุลย์ต้องหาแรงที่ขั้วและแก้ชุดของสมการสมดุลย์ของแต่ละชั้นส่วน ซึ่งในหลายกรณีการสร้างและแก้สมการ เหล่านี้มีความยุ่งยากมาก

เนื่องจากการใช้รูปแบบยิลด์ไลน์ที่มีตำแหน่งต่างไปจากรูปแบบจริงเล็กน้อย ในการคำนวณน้ำหนักประลัยโดยวิธีงาน เสมือนจะให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกับค่าจริง จากเหตุผลนี้เพื่อความสะดวก จึงได้มีการใช้รูปแบบยิลด์ไลน์โดยประมาณเพื่อเป็นการขจัดตัวแปร สร้างสมการน้ำหนักประลัยในกรณีต่าง ๆ โดยวิธีงาน เสมือน เช่น ในกรณีแผ่นพื้นสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีที่รองรับทั้งสี่ด้าน มีที่รองรับสามด้านขอบอิสระหนึ่งด้าน และกรณีมีที่รองรับสองด้านติดกันที่เหลือเป็นขอบอิสระ วิธีการประมาณรูปแบบยิลด์ไลน์ที่ดีคือ ให้ยิลด์ไลน์รับแรงคดชนิดบวกวิ่งออกจากมุมของแผ่นพื้นโดยทำมุม 45° กับด้าน ผลลัพธ์ของน้ำหนักประลัยที่ได้จากตาราง Park และ Gamble⁽¹⁶⁾ ใกล้เคียงกับค่าที่วิเคราะห์โดยตรงมาก

2.7.1 การประมาณตำแหน่งรูปแบบยิลด์ไลน์โดยการลองผิดลองถูก

แผ่นพื้นที่มีรูปร่างใด ๆ การประมาณตำแหน่งรูปแบบยิลด์ไลน์ที่ให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกับความจริงนั้น ทำได้ยาก จึงได้มีการลองผิดลองถูก

ในวิธีนี้จะสมมุติตำแหน่งรูปแบบยิลด์ไลน์ โดยการกำหนดจุดของตัวแปร แล้วใช้สมการสมมูลย์น้ำหนักประลัยของแต่ละชั้นส่วน ถ้าน้ำหนักประลัยที่ได้ของแต่ละชั้นส่วนต่างกันมาก (ถ้าสมมุติรูปแบบยิลด์ไลน์ถูกต้อง น้ำหนักประลัยของแต่ละชั้นส่วนจะเท่ากัน) ต้องทำการสมมุติรูปแบบยิลด์ไลน์ใหม่ โดยการเปลี่ยนค่าชุดของตัวแปรจนกว่าค่าน้ำหนักประลัยของแต่ละชั้นส่วนที่คำนวณได้มีความแตกต่างกันอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ จึงถือว่าเป็นการประมาณตำแหน่งรูปแบบยิลด์ไลน์ที่ใช้ได้ ต่อจากขั้นตอนนี้ก็ใช้วิธีงาน เสมือนในการคำนวณน้ำหนักประลัยจากรูปแบบยิลด์ไลน์ที่ประมาณนั้นได้

2.7.2 วิธีทำซ้ำ (Iterative Method)

แต่ละรูปแบบยิลด์ไลน์ใด ๆ ของแผ่นพื้น เราสามารถเขียนสมการงาน เสมือนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักประลัยและแรงคดด้านทานประลัยแผ่นพื้นดังสมการ (2.9) ได้จากสมการดังกล่าว ค่าฟังก์ชัน f ต้องมีค่าสูงสุด จึงจะให้ค่าน้ำหนักประลัยน้อยสุด วิธีการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน f ทำโดยการเปลี่ยนค่าของตัวแปรแต่ละตัวทีละน้อย ๆ ภายในพิสัยของตัวแปรนั้น ๆ แล้วแทนค่าลงในฟังก์ชัน f ก็จะหาค่ามากที่สุดออกมาได้ การทำงานในลักษณะนี้เหมาะสมกับการนำไปประยุกต์กับคอมพิวเตอร์ ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดในหัวข้อ 4.4.2