รายการอ้างอิง

1. จรวย บุญยุบล. การวางแผนและความเชื่อถือได้ของระบบไฟฟ้ากำลัง. ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2534.
2. สายสนิท พูลสวัสดิ์. การกำหนดการผลิตระยะสั้นในระบบพลังน้ำ-พลังความร้อนที่พิจารณาถึงการส่งออกกำลังไฟฟ้า. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2539.
3. ภูเธียร พงษ์พิทยาภา, บรรณาธิการ. วงจรข่าว สายส่งเชื่อมโยงไทย-มาเลเซียระยะที่ 2 คืบหน้า. ไฟฟ้าสาร ปีที่ 2 ฉบับที่ 5 (กันยายน-ตุลาคม 2538): หน้า 15.
4. Casazza, J. A., Schultz, A. J., and Limmer, H. D. Wheeling and transmission system service policy in North America. Proceeding of AC and DC Power Transmission (IEE Conf. Publ. No. 345), London, (1991) : pp. 63-72.
5. Collier, S. E. Carrying charges: What you should know about transmission access. Paper presented at The 37th Annual Conference, 1993 Rural Electric Power Conference. (IEEE Cat. No. 93CH3256-5), New York, 1993: pp. C1/1-7.
6. Lee, W. J., Lin, H. C. Utility dereguration and impact on the industrial power systems. Arlington: The University of Texas at Arlington, 1997.
7. Studebaker, M. J. Electricity retail wheeling handbook. Liburn: Fairmont, 1995.
8. Denis, J. R. A cost analysis of wheeling in the electric utility industry. Ph.D. 's dissertation, University of Wisconsin-Madison, 1987.
9. Wood, A. J., and Wollenberg, B. F. Power generation operation and control. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1996.
10. Chen, M. S., and Lee, W. J. The power wheeling study. In Utility deregulation and its potential impact on the utility companies and end users short course. Bangkok. 1997. : pp. 84-97.
11. Schweppe, F. C., Caramenis, M. C., and Bohn, R. E. Spot pricing of electricity. Boston: Kluwer academic, 1987.
12. Caramenis, M. C., Bohn, R. E., and Schweppe, F. C. The cost of wheeling and optimal wheeling rates. IEEE Trans. on Power Systems Vol.PWRS-1, No.1 (Febuary 1986): 63-73.
13. David, A. K. Optimal consumer response for electricity spot pricing. IEE Proceedings Vol. 135, No.5 (September 1988): 378-384.

14. Clayton, J. S., Erwin, S. R., and Gibson, C. A. Interchange costing and wheeling loss evaluation by means of incrementals. IEEE Trans. on Power Systems Vol.5, No.3 (August 1990): 759-765.

15. Caramenis, M. C., Roukos, N., and Schweppe, F. C. WRATES : A tool for evaluation the marginal cost of wheeling. IEEE Trans. on Power Systems Vol.4, No.2 (May 1989): 594-605.

16. Li, Y. Z., and David, A. K. Wheeling rates of reactive power flow under marginal cost pricing. IEEE Trans. on Power Systems Vol.9, No.3 (August 1994): 1263-1269.

17. Ping Zhu, S. Practice and theory for pricing wheeled power. In The seventh international conference on metering apparatus and tariffs for electricity supply, Conference, Glasgow, 1992, pp.67-71.

18. Happ, H. H. Cost of wheeling methodologies. IEEE Trans. on Power Systems Vol.9, No.1 (February 1994): 147-156.

19. ภูเธียร พงษ์พิทยาภา, บรรณาธิการ. ชุมทางทรรศนะ โครงการ IPP แนวโน้มก้าวแรกของธุรกิจไฟฟ้าไทย. ไฟฟ้าสาร ปีที่ 2 ฉบับที่ 5 (กันยายน-ตุลาคม 2538): หน้า 21-23.

20. Kirchamayer, L. K. Economic control of interchanged systems. New York: John Wiley & Sons, 1959.

21. Grainger, J. J., and Stevenson, Jr. W. D. Power system analysis. New Jersey: McGraw-Hill, 1994.

22. Toro, D. V. Electrical power systems. New Jersey: Prentice Hall, 1992.

23. Glover, J. D., and Sarma, M. S. Power system analysis and design. Boston: PWS, 1993.

24. Elgerd, O. I. Electrical energy systems theory an introduction. 2nd ed., Auckland: McGraw-Hill, 1982.

25. Nanda, J., Hari, L., Kothari, M. L., and Henry, J. Extremely fast economic load dispatch algorithm through modified co-ordination equations. IEE Proceedings Vol. 139, No.1 (January 1992): 39-44.

26. Dommel, H. W., and Tinney, W. F. Optimal power flow solutions. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems Vol. PAS-87, No.10 (October 1968): 1866-1876.

27. IEEE Power Engineering Society IEEE Tutorial course optimal power flow solution technique, requirements, and challenges. 1996

28. Huneault, M., and Galiana, F. D. A survey of the optimal power flow literature IEEE Trans. on Power Systems Vol.6, No.2 (May 1991): 762-770.

29. Burchett, R. C., Happ, H. H., Vierath, D. R., and Wirgau, K. A. Developments in optimal power flow. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems Vol. PAS-101, No.2 (February 1982): 406-414.

30. Sason, A. M. Nonlinear programming solutions for Load-Flow Minimum-Loss, and Economic Dispatching Problems. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems Vol. PAS-88, No.4 (April 1969): 399-409.

31. Shoults, R. R., and Sun, D. T. Optimal power flow based upon P-Q decomposition. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems Vol. PAS-101, No.2 (February 1982): 397-405.

32. Muller, N., and Quintana, V. H. Line and shunt switching to alleviate overloads and voltage violations in power networks. IEE Proceedings Vol. 136, No.4 (July 1988): 246-253.

33. Berry, P. E., and Dunnett, R. M. Contingency constrained economic dispatch algorithm for transsion plannig. IEE Proceedings Vol. 136, No.4 (July 1989): 238-244.

34. Balu, N., et al. On-line power system security analysis. Proceeding of The IEEE, Vol. 80, No.2 (February 1992): 262-279.

35. Li, C. N., and Unum, M. R. Network constrained security control using an interior point algorithm IEEE Trans. on Power Systems Vol.8, No.3 (August 1993): 1068-1076.

36. Zhang, B. M., et al. A security analysis and optimal power flow package with real-time implementation in North Chian power system. IEE 2 nd International conference on advance in power system control, operation and management, December 1993, Hong Kong.

37. Wallach, Y. Gradient methods for Load-Flow problems. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems Vol. PAS-87, No.5 (May 1968): 1314-1318.

38. A. Santos Jr. Optimal-power flow solution by Newton 's method applied to augmented Lagrangian function. IEE Proc.-Gener. Trans. Distrib. Vol. 142, No.1 (January 1995): 33-36.

39. Nash, S. G., and Sofer, A. Linear and nonlinear programming. New York: McGraw-Hill, 1996.

40. Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., and Shetty C. M. Nonlinear programming theory and algorithms. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.

41. Alsac, O., Bright, J., Paris, M., and Stott, B. Further developments in LP-based optimal power flow. IEEE Trans. on Power Systems Vol.5, No.3 (August 1990): 697-712.

42. Zhang, S., and Irving, M. R. Analytical algorithm for constraint relaxation in LP-based optimal power flow. IEE Proceedings Vol. 140, No.4 (July 1993): 326-330.

43. Momoh,. J. A., Guo, S. X., Ogbuobiri, E. C., and Adapa, R. The quadratic interior point method solving power system optimization problems. IEEE Trans. on Power Systems Vol.9, No.3 (August 1994): 1327-1336.

44. สรยุทธ มีนะพันธ์. เศรษฐศาสตร์การจัดการ. กรุงเทพ: ซีเอ็ดยูเคชั่น, 2534.

45. วันรักษ์ มิ่งมณีนาคิน, บรรณาธิการ. พจนานุกรมศัพท์เศรษฐศาสตร์. กรุงเทพ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์, 2539.

46. สฤษดิคุณ กิติยากรม ม.ร.ว. คำอธิบายประมวลศัพท์ธุรกิจที่ใช้ทั่วไปในภาษาอังกฤษ. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2538.

47. Buchanan, J. L., and Turner, P. R. Numerical methods and analysis. New York: McGraw-Hill, 1992.

48. Grace, A. Optimization for use with MATLAB. Massasuset: Math Work, 1992.

49. Reklaitis, G. V., Ravindran, A., and Ragsdell, K. M. Engineering optimization methods and applications. New York: John Wiley & Sons, 1983.

50. Arora, J. S. Introduction to optimum design. New york: McGraw-Hill, 1989.

51. Edgar, T. F., and Himmelblau, D. M. Optimization of chemical processes. New York: McGraw-Hill, 1988.

52. Iserles, A. (editor) Sequential quardratic programming. Acta Numerica (1995):1-51.

ภาคผนวก

ภาคผนวก

หลักการเบื้องต้นในการทำออปติไมซ์

ภาคผนวก กล่าวถึงการทำออปติไมซ์โดยปัญหาที่จะทำการแก้ปัญหาออปติไมซ์ คำตอบที่ได้จะพิจารณาว่าเป็นคำตอบที่เหมาะสม ก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไข Karush-Kuhn-Tucker Conditions (KKT conditions) ดังมีรายละเอียดในหัวข้อภาคผนวก 1) และสำหรับวิธีการทำออปติไมซ์ที่ได้ใช้ในโปรแกรม MATLAB คือวิธีการทำ Sequential quadratic programming ดังมีรายละเอียดในภาคผนวก 2)

ภาคผนวก 1) เงื่อนไข Karush-Kuhn-Tucker Conditions (KKT conditions) [40]

<u>ทฤษฎีที่ 1</u> : Karush-Kuhn-Tucker Necessary Conditions

ให้ X เป็นเซตเปิดไม่ว่าง (nonempty open set) E_n และ

f เป็นฟังก์ชันจาก E_n ไปยัง E_1 $(f: E_n \to E_1)$

g เป็นฟังก์ชันจาก E_n ไปยัง E_l $(g: E_n \to E_l)$

h เป็นฟังก์ชันจาก E_n ไปยัง E_m $(h: E_n \to E_m)$

พิจารณาปัญหา P ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}: \quad & \text{Minimize} && f(\mathbf{x}) && \\
& \text{Subject to} && h_i(\mathbf{x}) = 0 && \text{for } i = 1,\ldots,l \\
& && g_j(\mathbf{x}) \le 0 && \text{for } j = 1,\ldots,m \\
& && \mathbf{x} \in E_n &&
\end{aligned} \tag{1}
$$

เมื่อ E_n, E_m, E_l, E_1 คือ Euclidian space dimension = n, m, l, 1 ตามลำดับ

ให้ $\bar{\mathbf{x}}$ แทน ผลเฉลยที่เป็นไปได้ (feasible solution) และ

J คือ active constraint set ของ $g_j(\mathbf{x})$ ดังนี้ $J = \{j = g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$

สมมติให้ f และ $g_j(\bar{\mathbf{x}})$ โดยที่ $j \in J$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $\bar{\mathbf{x}}$ และ g_j มีความต่อเนื่องที่ $\bar{\mathbf{x}}$ และ $h_i(\bar{\mathbf{x}})$ โดยที่ i = 1,...,l สามารถหาอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องได้ที่ $\bar{\mathbf{x}}$

จากนั้นสมมติต่อไปว่า $\nabla g_j(\bar{\mathbf{x}})$ สำหรับ $j \in J$ และ $\nabla h_i(\bar{\mathbf{x}})$ เมื่อ i = 1,...,l เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (linearly independent) จุด $\bar{\mathbf{x}}$ ในที่นี้บางครั้งเรียก จุดปกติ (regular point)

ถ้า $\bar{\mathbf{x}}$ คือผลเฉลยของปัญหา P แล้ว จะมี ค่าสเกลาร์ u_j โดยที่ $j \in J$ และ v_i โดยที่ i = 1,...,l ซึ่งสอดคล้องกับสมการดังต่อไปนี้ คือ

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{l} v_i \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j \in J} u_j \nabla g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

$$u_j \geq \mathbf{0} \text{ เมื่อ } j \in J \tag{2}$$

หรืออาจเขียนใหม่ได้ในรูป

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{l} v_i \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{m} u_j \nabla g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

$$u_j g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad \text{for } j = 1,\dots,m \tag{3}$$

$$u_j \geq \mathbf{0} \quad \text{for } j = 1,\dots,m$$

ทฤษฎีที่ 2 : Karush-Kuhn-Tucker Sufficient Conditions

ให้ X เป็นเซตเปิดไม่ว่าง (nonempty open set) ใน E_n และ

f เป็นฟังก์ชันจาก E_n ไปยัง E_1 $(f: E_n \to E_1)$

g เป็นฟังก์ชันจาก E_n ไปยัง E_l $(g: E_n \to E_l)$ และ

h เป็นฟังก์ชันจาก E_n ไปยัง E_m $(h: E_n \to E_m)$

พิจารณาปัญหา P ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{P}: \quad & \text{Minimize} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{Subject to} && h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{for } i = 1,\dots,l \\ &&& g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{for } j = 1,\dots,m \\ &&& \mathbf{x} \in E_n \end{aligned} \tag{4}$$

เมื่อ E_n, E_m, E_l, E_1 คือ Euclidian space dimension = n, m, l, 1 ตามลำดับ

ให้ $\bar{\mathbf{x}}$ แทน ผลเฉลยที่เป็นไปได้ (feasible solution) และ

J คือ active constraint set ของ $g_j(\mathbf{x})$ ดังนี้ $J = \{ j = g_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \}$

สมมติเงื่อนไข KKT ที่จุด $\bar{\mathbf{x}}$ สอดคล้องตามทฤษฎีที่ ก.1 ดังนั้นจะมี $\bar{u}_j \geq 0$ โดยที่ $j \in J$ และ จะมี $\bar{v}_i$ โดยที่ i = 1,...,l ซึ่งสอดคล้องกับสมการดังต่อไปนี้

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}})+\sum_{i=1}^{l}v_i\nabla h_i(\bar{\mathbf{x}})+\sum_{j\in J}u_j\nabla g_j(\bar{\mathbf{x}})=0 \qquad (5)$$

ให้ $R=\{i:\bar{v}_i>0\}$ และ $S=\{i:\bar{v}_i<0\}$ จากนั้น

สมมติ f เป็น pseudoconvex ที่ $\bar{\mathbf{x}}$

g_j เป็น quasiconvex ที่ $\bar{\mathbf{x}}$ สำหรับ $j\in J$

h_i เป็น quasiconvex ที่ $\bar{\mathbf{x}}$ เมื่อ $i\in R$ และ

h_i เป็น quasiconcave ที่ $\bar{\mathbf{x}}$ เมื่อ $i\in S$

แล้ว $\bar{\mathbf{x}}$ จะเป็น global optimal solution ของปัญหา **P**

ในกรณีที่พิจารณาแต่เพียงรอบๆ $\bar{\mathbf{x}}$ (neighberhood of $\bar{\mathbf{x}}$) แล้ว ทั้ง f, g, h ต่างเป็น convex function แล้ว ค่า $\bar{\mathbf{x}}$ ที่ได้จะเป็น local minimum สำหรับปัญหา **P**

ภาคผนวก 2) การทำออปติไมซ์เซชั่นโดยวิธี SQP [40,50-52]

ปัญหาที่ต้องการทำออปติไมซ์โดยทั่วไปจะอยู่ในรูปของสมการซึ่งประกอบไปด้วย ฟังก์ชันเป้าหมาย (cost function) เงื่อนไขบังคับสมการ (equality constraint) และเงื่อนไขบังคับอสมการ (inequality constraint) ดังนี้

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{Subject to} && h_i(\mathbf{x})=0 && \text{for } i=1,\dots,l \\ &&& g_j(\mathbf{x})\le 0 && \text{for } j=1,\dots,m \\ &&& \mathbf{x}\in E_n \end{aligned} \qquad (6)$$

เมื่อ $f(\mathbf{x})$ คือ ฟังก์ชันเป้าหมายที่ต้องการหาค่าต่ำสุด

$h_i(\mathbf{x})$ คือ เงื่อนไขบังคับสมการ

$g_j(\mathbf{x})$ คือ เงื่อนไขบังคับอสมการ

$\mathbf{x}$ คือ เวกเตอร์ตัวแปรที่ต้องการหาค่าต่ำสุด มีมิติเท่ากับ (n x 1)

l คือ จำนวนเงื่อนไขบังคับสมการ

m คือ จำนวนเงื่อนไขบังคับอสมการ

ซึ่งฟังก์ชันเป้าหมาย และเงื่อนไขบังคับต่างๆ อาจจะอยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) หรือฟังก์ชันไม่เชิงเส้น (nonlinear function) ก็ได้ ในเบื้องต้นจะได้กล่าวเฉพาะปัญหาซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันเป้าหมาย และ เงื่อนไขบังคับสมการแต่เพียงอย่างเดียวก่อน ดังสมการที่ (7) สำหรับกรณีที่รวมเงื่อนไขบังคับอสมการ จะได้กล่าวขยายความในลำดับถัดไป

$$\begin{array}{llll} \mathbf{P}: & \text{Minimize} & f(\mathbf{x}) & \\ & \text{Subject to} & h_i(\mathbf{x}) = 0 & \text{for } i = 1,\ldots,l \end{array} \tag{7}$$

วิธี successive quadratic programming (SQP) เป็นวิธีหนึ่งที่ได้รับความนิยมอย่างมากในการแก้ปัญหาออปติไมซ์เซชั่นแบบไม่เชิงเส้น และเป็นที่รู้จักกันในชื่ออื่นๆ อีก เช่น วิธี sequential quadratic programming หรือ recursive quadratic programming มีขั้นตอนต่างๆ ดังนี้

จากปัญหา **P** ตามสมการที่ (7) ทำการแปลงให้อยู่ในรูป Lagrangian function ดังสมการที่ (8) ดังนี้

$$L(\mathbf{x},\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^t\mathbf{h}(\mathbf{x}) \tag{8}$$

เมื่อ $\mathbf{v}$ คือ เวกเตอร์ตัวคูณของเงื่อนไขบังคับสมการ (Lagrange multiplier) มีมิติเท่ากับ (l x 1)

t คือ เครื่องหมาย transpose

จากสมการที่ (8) เขียนให้อยู่ในรูปเงื่อนไข KKT ได้ดังสมการที่ (9)

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{l} \nabla h_i(\mathbf{x}) = 0$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{for } i = 1,\ldots,l \tag{9}$$

จากสมการที่ (9) ใช้วิธี Newton-Raphson method เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการ หรือ ใช้วิธี Newton 's method ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

จากสมการที่ (9) เขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของตัวแปร $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{v}$ อย่างง่ายได้ดังสมการที่ (10)

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{v}) = 0 \tag{10}$$

จากสมการที่ (10) ทำการประมาณรอบจุด $(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k)$โดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่งได้ดังนี้

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k) + \nabla\mathbf{W}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k)\begin{bmatrix}\mathbf{x}-\mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}-\mathbf{v}_k\end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{11}$$

เมื่อ $\nabla\mathbf{W}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k)$ คือ Jacobian ของ $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{v})$

$(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k)$ คือ จุดในรอบถัดไป (next iteration) ของ $(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k)$ หรือ คือ $(\mathbf{x}_{k+1},\mathbf{v}_{k+1})$

กำหนดให้ $$\nabla^2 L(\mathbf{x}_k) = \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^{l} \nu_{ki} \nabla^2 h_i(\mathbf{x}_k) \tag{12}$$

ดังนั้น $\nabla\mathbf{W}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k)$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\nabla\mathbf{W}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k) = \begin{bmatrix} \nabla^2 L(\mathbf{x}_k) & \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^t \\ \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{13}$$

จากสมการที่ (9) และ (13) สามารถนำมาจัดรูปสมการที่ (11) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} &\nabla^2 L(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k) + \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^t(\mathbf{v}-\mathbf{v}_k) = -\nabla f(\mathbf{x}_k) + \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^t\mathbf{v}_k \\ &\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k) = -\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \tag{14}$$

หรือ เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k$ จะสามารถเขียนสมการที่ (14) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} &\nabla^2 L(\mathbf{x}_k)\mathbf{d}_k + \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^t\mathbf{v} = -\nabla f(\mathbf{x}_k) \\ &\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{d}_k = -\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \tag{15}$$

เมื่อ $(\mathbf{d},\mathbf{v})$ เท่ากับ $(\mathbf{d}_k,\mathbf{v}_{k+1})$

จากสมการที่ (15) เมื่อสามารถหาผลเฉลยได้ ให้ทำการปรับค่า $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k+\mathbf{d}_k$ จากนั้นเพิ่มค่า $k = k+1$ และทำซ้ำเรื่อยไปจนกระทั่ง $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ คำตอบ $\mathbf{x}_k$ ที่ได้ก็จะสอดคล้องกับเงื่อนไข KKT เป็นอันสิ้นสุดและได้คำตอบของปัญหา **P**

การหาคำตอบเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไข KKT ของปัญหา P ตามสมการที่ (9) สามารถใช้วิธีการหาค่าต่ำสุดของปัญหาย่อยในรูปแบบ quadratic problem เพื่อหาคำตอบที่สอดคล้องกับสมการที่ (15) ได้โดยการประมาณค่าฟังก์ชันรอบจุด $\mathbf{x}_k$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{QP}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k):\quad &\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^t\mathbf{d} + 0.5\mathbf{d}^t\nabla^2 L(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} \\ &\text{Subject to} \quad h_i(\mathbf{x}_k) + \nabla h_i(\mathbf{x}_k)^t\mathbf{d} = 0 \text{ for } i = 1,\dots,l \end{aligned} \tag{16}$$

จากสมการที่ (16) ได้มีการพิสูจน์แล้วว่า [X] ถ้าสามารถหาคำตอบของสมการที่ (16) ได้คำตอบที่ได้ก็จะสอดคล้องกับสมการที่ (15) เช่นกัน จากสมการที่ (16) จะสังเกตได้ว่าปัญหาย่อยที่ทำการออปติไมซ์ในที่นี้จะเป็นปัญหา $\mathbf{QP}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k)$ ซึ่งติดอยู่ในรูปการหาคำตอบของตัวแปร **d** นั่นเอง เมื่อสามารถแก้ปัญหา $\mathbf{QP}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k)$ เพื่อหาค่า **d** ได้จึงนำค่า **d** ที่ได้ไปปรับค่า **x** ในรอบถัดไป และทำซ้ำจนกว่า $\mathbf{d} = \mathbf{0}$

โดยสรุปสามารถเขียนขั้นตอนในการทำ SQP เป็นขั้นตอนต่างๆ ได้ดังนี้

เริ่มต้น : กำหนดรอบที่ k = 1 เลือกค่าเริ่มต้น $(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$ ที่เหมาะสม

ขั้นตอนหลัก : แก้ปัญหา **QP**$(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$ ตามสมการ (16) เพื่อให้ได้ค่า $\mathbf{d}_k$ กับค่า $\mathbf{v}_{k+1}$

- ถ้า $\mathbf{d}_k = \mathbf{0}$ จากสมการที่ (15) ค่า $(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1})$ ที่ได้ก็จะสอดคล้องกับเงื่อนไข KKT สำหรับปัญหา **P** ตามสมการ (7) เป็นอันสิ้นสุดการทำงาน
- มิเช่นนั้นปรับค่า $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k$ และ เพิ่มค่า k=k+1 และทำซ้ำขั้นตอนหลักใหม่

จากสมการที่ (7) พบว่าได้พิจารณาแต่เพียงฟังก์ชันเป้าหมายและเงื่อนไขบังคับสมการเท่านั้น ต่อไปจะได้พิจารณาเงื่อนไขบังคับอสมการเพิ่มเติม จากรูปแบบสมการที่ (6) สามารถเขียนในอยู่ในรูปปัญหา **P** ได้ดังนี้

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{P}: & \text{Minimize} & f(\mathbf{x}) & \\
& \text{Subject to} & h_i(\mathbf{x}) = 0 & \text{for } i = 1,\ldots,l \\
& & g_j(\mathbf{x}) \le 0 & \text{for } j = 1,\ldots,m \\
& & \mathbf{x} \in E_n &
\end{array}
\tag{17}
$$

และแปลงให้อยู่ในรูปปัญหา **QP**$(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_k)$ ได้ดังนี้

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{QP}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k,\mathbf{u}_k): & \text{Minimize} & f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^t \mathbf{d} + 0.5\mathbf{d}^t \nabla^2 L(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} \\
& \text{Subject to} & h_i(\mathbf{x}_k) + \nabla h_i(\mathbf{x}_k)^t \mathbf{d} = 0 \text{ for } i = 1,\ldots,l \\
& & g_j(\mathbf{x}_k) + \nabla g_j(\mathbf{x}_k)^t \mathbf{d} \le 0 \text{ for } j = 1,\ldots,m
\end{array}
\tag{18}
$$

เมื่อ $\mathbf{u}_k$ คือ เวกเตอร์ตัวคูณของเงื่อนไขบังคับอสมการ (Lagrange multiplier) มีมิติเท่ากับ (m x 1)

กำหนดให้
$$
\nabla^2 L(\mathbf{x}_k) = \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^{l} v_{ki} \nabla^2 h(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^{l} u_{kj} \nabla^2 g_j(\mathbf{x}_k)
\tag{19}
$$

จากสมการที่ (18) และ (19) นำมาเขียนเป็นสมการที่ (20) เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไข KKT ได้ดังนี้

$$
\begin{array}{l}
\nabla f(\mathbf{x}_k) + \nabla^2 L(\mathbf{x}_k)\mathbf{d}_k + \sum_{i=1}^{l} v_i \nabla h_i(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^{m} u_j \nabla g_j(\mathbf{x}_k) = 0 \\
u_j[g_j(\mathbf{x}_k) + \nabla g_j(\mathbf{x}_k)^t \mathbf{d} = 0 \\
\mathbf{u} \ge \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \mathbf{v} \text{ unrestricted sign}
\end{array}
\tag{20}
$$

จากสมการที่ (20) ทำการแก้ปัญหา $\mathbf{QP}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k,\mathbf{u}_k)$ เพื่อหาค่า $\mathbf{d}_k$. $\mathbf{u}_{k+1}$ และ $\mathbf{v}_{k+1}$

ถ้า $\mathbf{d}_k$ ที่ได้มีค่าเป็น $\mathbf{0}$ แล้ว $(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k,\mathbf{u}_k)$ ที่ได้จะสอดคล้องกับเงื่อนไข KKT ซึ่งคำตอบที่ได้ก็จะสอดคล้องกับ ปัญหา $\mathbf{P}$ ตามสมการที่ (17) ด้วยเช่นกัน มิเช่นนั้นให้ปรับค่า $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k+\mathbf{d}_k$ และเพิ่มค่า k=k+1 จากนั้นทำซ้ำขั้นตอนการแก้ปัญหา $\mathbf{QP}(\mathbf{x}_k,\mathbf{v}_k,\mathbf{u}_k)$ จนกว่า ค่า $\mathbf{d}_k = \mathbf{0}$

จากที่ได้แสดงรายละเอียดมาเป็นลำดับข้างต้น จะพบว่า ข้อเสียของวิธี SQP คือ จะต้องทำการหาอนุพันธ์อันดับสอง หรือ การหา hessian matrix ของ Lagrangian function และพบว่าในบางครั้งค่า hessian matrix ที่ได้ก็ไม่เป็น positive definite matrix ทำให้การทำออปติไมซ์ปัญหาค่าไม่ลดลงตามที่ต้องการ ดังนั้นจึงใช้วิธีการประมาณ hessian matrix ด้วย quasi-Newton positive definite approximation ดังนี้

กำหนดให้ $$\mathbf{B}_k \approx \nabla^2 L(\mathbf{x}_k) \tag{21}$$

โดยที่ $$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{\mathbf{q}_k\mathbf{q}_k^t}{\mathbf{q}_k^t\mathbf{p}_k} - \frac{\mathbf{B}_k\mathbf{p}_k\mathbf{p}_k^t\mathbf{B}_k}{\mathbf{p}_k^t\mathbf{B}_k\mathbf{p}_k} \tag{22}$$

เมื่อ $$\mathbf{p}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \tag{23}$$

$$\mathbf{q}_k = \nabla' L(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla' L(\mathbf{x}_k) \tag{24}$$

$$\nabla' L(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{l} v_{(k+1)i} \nabla h_i(\mathbf{x}) \tag{25}$$

$\mathbf{B}_0$ = positvie definite matrix ใดๆ หรือ Identity matrix ใดๆ (26)

จาก (21) ถึง (26) ทำให้สามารถเขียนสมการที่ (15) ได้ใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{k+1}\\ \mathbf{v}_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_k\\ \mathbf{v}_k\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{B}_k & \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^t\\ \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) & \mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\nabla L(\mathbf{x}_k)\\ \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\end{bmatrix} \tag{27}$$

และจาก (21) ถึง (26) ทำให้สามารถเขียนสมการที่ (20) ได้ใหม่เป็น

$$\nabla f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}_k\mathbf{d}_k + \sum_{i=1}^{l} v_i \nabla h_i(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^{m} u_j \nabla g_j(\mathbf{x}_k) = 0$$

$$u_j[g_j(\mathbf{x}_k) + \nabla g_j(\mathbf{x}_k)^t\,\mathbf{d} = 0 \tag{28}$$

$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ and $\mathbf{v}$ unrestricted sign

นอกจากนี้ ข้อเสียอีกข้อหนึ่งของ SQP คือ จะต้องทำการประมาณค่า x ใกล้ๆ จุด optimum แต่ถ้าจุดที่ประมาณไกลจากจุด optimum แล้ววิธีการ SQP จะไม่รับประกันการได้คำตอบของปัญหา ดังนั้นจึงต้องมีการปรับปรุงเพื่อช่วยให้ขั้นตอนในการทำ SQP ดีขึ้น โดยการทำ line search หรือการหา step size

นั่นเอง ซึ่งเมื่อทำ line search แล้วจะรับประกันการได้คำตอบ (กรณีที่ปัญหาสามารถหาคำตอบได้) ในลักษณะ global convergence วิธีการในการทำ line search สามารถหาได้ดังนี้

$$\underset{\lambda}{Min} \qquad F_E(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k) \tag{29}$$

เมื่อ λ คือ ค่า step size ที่ต้องการหา และ

$$F_E(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k) = f(x) + \mu \left[\sum_{j=1}^{m} \max\{0, g_j(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k)\} + \sum_{i=1}^{l} \left| h_i(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k) \right| \right] \tag{30}$$

เมื่อ μ คือ ค่า l_1 penalty factor

สรุปการทำ SQP เมื่อรวมการทำ line search ได้ดังนี้

เริ่มต้น : กำหนดรอบที่ k = 1 เลือกค่าเริ่มต้น $(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_k)$ ที่เหมาะสม
เลือกค่า $\mathbf{B}_k$ เริ่มต้น เพื่อใช้แทนค่าประมาณ hessian matrix ของ Langrage function

ขั้นตอนหลัก : แก้ปัญหา $\mathbf{QP}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_k)$ ตามสมการที่ (20) เพื่อให้ได้ค่า $\mathbf{d}_k$ และ $(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$

- ถ้า $\mathbf{d}_k = \mathbf{0}$ จากสมการที่ (20) ค่า $(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$ ที่ได้ก็จะสอดคล้องกับเงื่อนไข KKT สำหรับปัญหา **P** ตามสมการ (17) เป็นอันสิ้นสุดการทำงาน
- มิเช่นนั้นปรับค่า $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k$ เมื่อ λ หาได้จากการแก้ปัญหาตามสมการที่ (29)

จากค่า $\mathbf{x}_{k+1}$ ใหม่ที่ได้ ทำการปรับค่า $\mathbf{B}_{k+1}$ ตามสมการ(22) และ เพิ่มค่า k=k+1 จากนั้นทำซ้ำขั้นตอนหลักใหม่ จนกว่า ค่า $\mathbf{d}_k$ จะเท่ากับ $\mathbf{0}$ เป็นอันสิ้นสุดการทำงาน และ คำตอบที่ได้คือ ค่า $(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$ ก็จะสอดคล้องกับเงื่อนไข KKT

ประวัติผู้เขียน

นายหัสคุณ บริพนธ์มงคล เกิดเมื่อวันที่ 22 มีนาคม พ.ศ. 2516 ที่จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี 2537 และเข้าศึกษาหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า (วิศวกรรมไฟฟ้ากำลัง) ที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ. 2537 ปัจจุบันเป็นอาจารย์สอนอยู่คณะวิศวกรรมศาสตร์ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย