โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร

Improvement of bounds of probability estimations for symmetric binomial random variables

ชื่อนิสิต นางสาวบุลภรณ์ คล้อยคล้าย 6033523023

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2563

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร

นางสาวบุลภรณ์ คล้อยคล้าย

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2563

Improvement of bounds of probability estimations for symmetric binomial random variables

Bulaporn Kloykly

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2020

หัวข้อโครงงาน	การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร
โดย	นางสาวบุลภรณ์ คล้อยคล้าย
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก	ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานร่วม	รองศาสตราจารย์ทิพวัลย์ สันติวิภานนท์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

. . . . หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

. . . . อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

ทิพวัลย์
. . . . อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานร่วม
(รองศาสตราจารย์ทิพวัลย์ สันติวิภานนท์)

. . . . กรรมการ
(อาจารย์ ดร.มนต์ชัย คูเอกชัย)

. . . . กรรมการ
(อาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร)

บุลภรณ์ คล้อยคล้าย : การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร (IMPROVEMENT OF BOUNDS OF PROBABILITY ESTIMATIONS FOR SYMMETRIC BINOMIAL RANDOM VARIABLES)
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี,
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานร่วม : รองศาสตราจารย์ทิพวัลย์ สันติวิภานนท์, 79 หน้า.

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่ $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$ เราจะเรียก $B_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ เป็นตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร มีงานวิจัยมากมายที่หาขอบเขตการประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม B_n ด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐาน เช่น Berry-Esseen ได้อัตราการลู่เข้าเป็น $\frac{1}{\sqrt{n}}$ และมีงานวิจัยที่เพิ่มพจน์เพื่อให้อัตราการลู่เข้าของการประมาณค่าความน่าจะเป็นของ B_n ดีขึ้น เช่น ในปี 1937 Uspensky ได้อัตราการลู่เข้าเป็น $\frac{1}{n}$ และ Ratibenyakool and Neammanee (2017) ได้อัตราการลู่เข้าเป็น $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ ในโครงงานนี้ เราปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร ด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐานโดยการเพิ่มพจน์ ผลลัพธ์ที่ได้มีอัตราการลู่เข้าเป็น $\frac{1}{n^2}$ ซึ่งมีอัตราการลู่เข้าดีกว่างานวิจัยที่ผ่านมา

ภาควิชา : คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต : บุลภรณ์
สาขาวิชา : คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : ....
ปีการศึกษา : 2563 ลายมือชื่อ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานร่วม : ทิพวัลย์

6033523023 : MAJOR MATHEMATICS
KEYWORDS : SYMMETRIC BINOMIAL RANDOM VARIABLES

BULAPORN KLOYKLY : IMPROVEMENT OF BOUND OF PROBABILITY ESTIMATION FOR SYMMETRIC BINOMIAL RANDOM VARIABLES
ADVISOR : PROF. KRITSANA NEAMMANEE, Ph.D.,
CO-ADVISOR : ASSOC. PROF. TIPPAWAN SANTIWIPANONT 79 pp.

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent Bernoulli random variables, where $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$ for all $i = 1, 2, \ldots, n$. The sum $B_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ is called a symmetric binomial random variable. For large n the distribution of B_n can be estimated by the standard normal distribution. Its approximate order has been studied in the literature. Berry-Esseen achieved the convergence rate of $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Better convergence rates can be obtained by adding terms to the estimation. In 1937, Uspensky achieved the convergence rate of $\frac{1}{n}$. Ratibenyakool and Neammanee (2017) obtained the convergence rate of $\frac{1}{n\sqrt{n}}$. In this project, we improve the order of probability estimation of symmetric binomial random variables by the standard normal distribution with added terms. We obtain the order of $\frac{1}{n^2}$ which is better than all previous research.

Department : Mathematics and Computer Science
Field of Study : Mathematics
Academic Year : 2020

Student's Signature : ...บุลภรณ์.....
Advisor's Signature : K. Neammanee........
Co-Advisor's Signature : Tippawan S..........

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร ได้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เพราะได้รับความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลาย ๆ ท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินงานโครงงานจึงขอขอบพระคุณในความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี และรองศาสตราจารย์ทิพวัลย์ สันติวิภานนท์ ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานและคอยให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ชี้แนะให้เห็นปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ ในการทำโครงงานตลอดมา ตั้งแต่เริ่มต้นทำงานจนโครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีอย่างสมบูรณ์และมีประสิทธิภาพ

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.มนต์ชัย คูเอกชัย และอาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร ที่ให้ความกรุณาเป็นกรรมการสอบโครงงาน และได้ให้ข้อเสนอแนะ ข้อคิด รวมถึงข้อผิดพลาดต่าง ๆ ซึ่งทำให้โครงงานนี้สมบูรณ์และมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านและรุ่นพี่ทุกคนที่ได้ให้ความรู้และคำแนะนำ ตลอดระยะเวลาที่ได้ศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และตลอดระยะเวลาที่ได้ทำโครงงานนี้มา

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และครอบครัวที่คอยสนับสนุน และขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่คอยให้กำลังใจ ให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการทำโครงงานครั้งนี้

ผู้จัดทำ

บุลภรณ์ คล้อยคล้าย

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี (Bernoulli random variable) ที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่ $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0)$ เมื่อ $0 < p < 1$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$ และ

$$B(n, p) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

จะเรียก $B(n, p)$ ว่าตัวแปรสุ่มทวินาม (binomial random variable) ที่มีพารามิเตอร์ n และ p ในกรณีที่ $p = \frac{1}{2}$ เราจะเรียก $B(n, \frac{1}{2})$ ว่าตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร (symmetric binomial random variable) โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ B_n แทน $B(n, \frac{1}{2})$
เราสังเกตได้ว่า $E(B_n) = \dfrac{n}{2}$ และ $Var(B_n) = \dfrac{n}{4}$ สำหรับ $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ ซึ่ง $a \leq b$ จะได้ว่า

$$P\left(a \leq B_n \leq b\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} \tag{1.1}$$

เราจะเห็นว่าในกรณีที่ n มีค่ามาก การคำนวณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$ จะทำได้ค่อนข้างยาก ทฤษฎีบทลิมิตส่วนกลางต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่ช่วยในการประมาณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$

ทฤษฎีบท 1.1. ทฤษฎีบทลิมิตส่วนกลาง (Central Limit Theorem) [4]
กำหนดให้ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเดียวกันและเป็นอิสระต่อกันและ

$$W_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

โดย $E(Y_1) = \mu$ และ $Var(Y_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$ จะได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{W_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

เมื่อ Φ คือฟังก์ชันการแจกแจงปกติมาตรฐาน นั่นคือ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ในการประมาณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$ เราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทลิมิตส่วนกลาง ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
P\left(a \leq B_n \leq b\right) &= P\left(a - \frac{1}{2} < B_n \leq b + \frac{1}{2}\right) \\
&= P\left(B_n \leq b + \frac{1}{2}\right) - P\left(B_n \leq a - \frac{1}{2}\right) \\
&= P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{b + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right) - P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{a - \frac{1}{2} - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right) \\
&= \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt
\end{aligned}$$

เมื่อ

$$x_1 = \frac{2a - n - 1}{\sqrt{n}} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{2b - n + 1}{\sqrt{n}}$$

จากทฤษฎีบทลิมิตส่วนกลางเราสามารถประมาณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$ ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปกติมาตรฐาน สำหรับขอบเขตของความคลาดเคลื่อนนั้น Berry (1941) และ Esseen (1942) ได้หาขอบเขตของค่าความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าไว้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2. ทฤษฎีบท เบอร์รี-เอสซีน (Berry-Esseen theorem) [6]
ภายใต้เงื่อนไขของทฤษฎีบท 1.1 สมมติว่าให้ $E|Y_1|^3 < \infty$ จะได้ว่ามีค่าคงตัว $C > 0$ ซึ่งสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{W_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x)\right| \leq C \cdot \frac{E|Y_1 - \mu|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

จากทฤษฎีบท เบอร์รี-เอสซีน ได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านที่ได้ทำการหาค่า C โดยเริ่มจาก

Esseen ([3], 1942) ได้ 7.59, Van Beek ([18], 1972) ได้ 0.7882, Shiganov ([14], 1986) ได้ 0.7655, Shevsova ([12], 2007) ได้ 0.7056 ปีถัดมา Shevsova ([11], 2008) ได้ 0.7005, Tyurin ([16], 2009) ได้ 0.5894, Korolev และ Shevsova ([7], 2010) ได้ 0.5129, Tyurin ([15], 2010) ได้ 0.4785 และ Shevsova ([13], 2011) ได้ 0.4748

ในการหาขอบเขตความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$ เราสามารถประยุกต์ทฤษฎีบท เบอร์รี-เอสซีน และเลือกใช้ค่าคงตัว C ของ Shevsova ([13], 2011) ได้ดังนี้

จาก

$$
\begin{aligned}
P(a \leq B_n \leq b) &= P\left(a - \frac{1}{2} < B_n \leq b + \frac{1}{2}\right) \\
&= P\left(B_n \leq b + \frac{1}{2}\right) - P\left(B_n \leq a - \frac{1}{2}\right) \\
&= P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{b + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right) - P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{a - \frac{1}{2} - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right) \\
&= P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq x_2\right) - P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq x_1\right)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)
$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(a \leq B_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq x_2\right) - P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq x_1\right) \\
&\quad - \Phi(x_2) + \Phi(x_1) \\
&= \left[P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq x_2\right) - \Phi(x_2)\right] \\
&\quad - \left[P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq x_1\right) - \Phi(x_1)\right]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\left|P(a \leq B_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right| &= \left| \left[P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq x_2\right) - \Phi(x_2)\right] \right. \\
&\qquad \left. - \left[P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq x_1\right) - \Phi(x_1)\right] \right| \\
&\leq \left|P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq x_2\right) - \Phi(x_2)\right| \\
&\qquad + \left|P\left(\frac{B_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq x_1\right) - \Phi(x_1)\right| \\
&\leq \frac{0.4748E|X_1 - \frac{1}{2}|^3}{(\frac{1}{2})^3\sqrt{n}} + \frac{0.4748E|X_1 - \frac{1}{2}|^3}{(\frac{1}{2})^3\sqrt{n}} \\
&= \frac{0.9496E|X_1 - \frac{1}{2}|^3}{(\frac{1}{2})^3\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

โดยที่

$$
\begin{aligned}
E|X_1 - \frac{1}{2}|^3 &= \sum_{x=0}^{1} |x - \frac{1}{2}|^3 P(X_1 = x) \\
&= |0 - \frac{1}{2}|^3 P(X_1 = 0) + |1 - \frac{1}{2}|^3 P(X_1 = 1) \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\left|P(a \leq B_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right| = \frac{0.9496}{\sqrt{n}} \tag{1.2}
$$

และอัตราการลู่เข้าของการประมาณค่า $P(a \leq B_n \leq b)$ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

ในปี ค.ศ. 1937 Uspensky [17] ได้ปรับปรุงการประมาณค่าความน่าจะเป็นของ $B(n,p)$ ด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐานให้ดีขึ้นโดยทำการเพิ่มพจน์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3. (Uspensky) [17] กำหนดให้ $G_1(x) = \Phi(x) + U(x)$ โดย

$$U(x) = \frac{q-p}{6\sqrt{2\pi npq}}(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{เมื่อ } q = 1-p$$

เป็นพจน์ที่เพิ่มขึ้น สำหรับ $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $npq \geq 25$ จะได้ว่า

$$|P(a \leq B(n,p) \leq b) - (G_1(x_2) - G_1(x_1))| \leq \frac{0.26 - 0.36|p-q|}{npq} + 2e^{-\frac{3}{2}\sqrt{npq}}$$

โดยที่

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(a - np - \frac{1}{2}\right) \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(b - np + \frac{1}{2}\right)$$

จากทฤษฎีบท 1.3 เราจะเห็นได้ว่าในกรณี B_n นั้น $U(x) = 0$ เราจึงได้ว่า สำหรับ $n \geq 100$

$$\left|P(a \leq B_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right| \leq \frac{1.04}{n} + 2e^{-\frac{3\sqrt{n}}{4}} \tag{1.3}$$

เมื่อ

$$x_1 = \frac{2a-n-1}{\sqrt{n}} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{2b-n+1}{\sqrt{n}}$$

ดังนั้นอัตราการลู่เข้าของการประมาณคือ $\frac{1}{n}$ ซึ่งดีกว่า (1.2) ต่อมา Ratibenyakool and Neammanee [10] ได้ปรับปรุงอัตราการลู่เข้าของการประมาณค่าโดยการเพิ่มพจน์ให้ดีกว่างานของ Uspensky [17] ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.4. (Ratibenyakool and Neammanee) [10] กำหนดให้ $G_2(x) = \Phi(x) + Q(x)$ โดย $Q(x)$ เป็นพจน์ที่เพิ่มขึ้น กำหนดโดย

$$Q(x) = \frac{Q_1(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{n}} + \frac{Q_2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{n}$$

เมื่อ

$$Q_1(x) = \frac{(p-q)(1-x^2)}{6\sqrt{2\pi pq}}$$

และ

$$Q_2(x) = \frac{(1-6pq)(3-x^2)x}{24\sqrt{2\pi}pq} - \frac{(p-q)^2(15-10x^2+x^4)x}{72\sqrt{2\pi}pq} + \frac{x}{24pq\sqrt{2\pi}}$$

สำหรับ $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $npq \geq 25$ จะได้ว่า

$$|P(a \leq B(n,p) \leq b) - (G_2(x_2) - G_2(x_1))| \leq \frac{4.9132}{npq\sqrt{npq}} + 0.948e^{-\frac{3}{2}\sqrt{npq}}$$

โดยที่

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(a - np - \frac{1}{2}\right) \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(b - np + \frac{1}{2}\right)$$

เราจะเห็นได้ว่าในกรณีของ B_n นั้น $Q_1(x) = 0$ และ $Q_2(x) = \dfrac{x^3 - x}{12\sqrt{2\pi}}$ และสำหรับ $n \geq 100$ จะได้ว่า

$$|P(a \leq B_n \leq b) - (G_2(x_2) - G_2(x_1))| \leq \frac{39.3056}{n\sqrt{n}} + 0.948e^{-\frac{3\sqrt{n}}{4}} \tag{1.4}$$

เมื่อ

$$G_2(x) = \Phi(x) + \frac{(x^3 - x)}{12n\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x_1 = \frac{2a - n - 1}{\sqrt{n}} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{2b - n + 1}{\sqrt{n}}$$

จาก (1.4) จะได้ว่าอัตราการลู่เข้าของการประมาณค่าคือ $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

ในโครงงานนี้จะปรับปรุงการประมาณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$ ใน (1.4) ให้อัตราการลู่เข้าเป็น

$\frac{1}{n^2}$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5. *สำหรับ* $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ *ซึ่ง* $a \leq b$ *และ* $n \geq 100$ *จะได้ว่า*

$$|P(a \leq B_n \leq b) - (G_2(x_2) - G_2(x_1))| \leq \frac{2.36}{n^2} + 1.43e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} + 0.1e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}$$

เมื่อ

$$x_1 = \frac{2a - n - 1}{\sqrt{n}} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{2b - n + 1}{\sqrt{n}}$$

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่ใช้ในการศึกษาโครงงานนี้ ซึ่งได้แก่ ตัวแปรสุ่ม ฟังก์ชันการแจกแจง ค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ และฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ ที่เราจะใช้ในโครงงานนี้

2.1 ตัวแปรสุ่ม

ในการทดลองนั้นเราไม่จำเป็นที่จะต้องออกมาเป็นตัวเลขเสมอไป ซึ่งทำให้การนำผลการทดลองที่ได้ไปวิเคราะห์ต่อทำได้ไม่สะดวกนัก ดังนั้นเราจึงทำการแปลงผลการทดลองให้ออกมาเป็นตัวเลขด้วยการสร้างฟังก์ชันที่เรียกว่า ตัวแปรสุ่ม โดยเราจะให้นิยามของตัวแปรสุ่ม ฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง และตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1.1. *เราจะเรียกเซต $\mathcal{F}$ ซึ่งมีสมาชิกเป็นเซตย่อยของเซต $S(S \neq \phi)$ ใด ๆ ว่า* ***พีชคณิตซิกมา*** *(σ-algebra) บน S ถ้า*

1. $\phi \in \mathcal{F}$
2. *ถ้า $A \in \mathcal{F}$ แล้ว $A^C \in \mathcal{F}$*
3. *ถ้า $A_1, A_2, ...$ เป็นลำดับของสมาชิกของ $\mathcal{F}$ แล้ว $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$*

บทนิยาม 2.1.2. *กำหนดให้ S เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $\mathcal{F}$ เป็น* ***พีชคณิตซิกมา*** *บน S ถ้าฟังก์ชัน $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ มีสมบัติต่อไปนี้*

1. $P(S) = 1$
2. *ถ้า $A_1, A_2, \ldots$ เป็นลำดับของสมาชิกของ $\mathcal{F}$ ซึ่ง $A_i \cap A_j = \phi$ เมื่อ $i \neq j$ แล้วจะได้ว่า*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

*แล้วเราเรียก P ว่า **เมเชอร์ความน่าจะเป็น** (probability measure) บน $(S, \mathcal{F})$ เรียก S ว่า **ปริภูมิตัวอย่าง** (sample space) เรียกสมาชิกของ $\mathcal{F}$ ว่า **เหตุการณ์** (event) บน S เรียกค่า $P(A)$ ของเหตุการณ์ A ใด ๆ ว่า **ความน่าจะเป็น** (probability) **ของเหตุการณ์** A เรียก $(S, \mathcal{F}, P)$ ว่า **ปริภูมิความน่าจะเป็น** (probability space) และเราเรียกคุณสมบัติข้อ 2 ของ P ว่า **คุณสมบัติการบวกที่นับได้** (countably additive property)*

บทนิยาม 2.1.3. *ให้ $(S, \mathcal{F}, P)$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น เราเรียก $X : S \to \mathbb{R}$ ว่า **ตัวแปรสุ่ม (random variable)** ถ้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ใด ๆ $\{\omega \in S | X(\omega) \leq x\}$ เป็นสมาชิกของ $\mathcal{F}$*

บทนิยาม 2.1.4. *เราเรียกฟังก์ชัน $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ ว่าเป็น **ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cumulative distribution function)** หรือ **ฟังก์ชันการแจกแจง (distribution function)** ของตัวแปรสุ่ม X ถ้าสำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

โดยตัวแปรสุ่ม 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง และตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

บทนิยาม 2.1.5. *เราจะกล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X เป็น **ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (discrete random variable)** ถ้าพิสัยของ X เป็นเซตนับได้ และเราจะเรียกฟังก์ชัน $f_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ ที่กำหนดโดย*

$$f_X(x) = P(X = x)$$

*ว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็น (probability function) หรือ ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (probability mass function, PMF)** ของ X*

จากบทนิยาม 2.1.5 เราทราบว่า ฟังก์ชันความน่าจะเป็น f_X ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X นั้นมีสมบัติดังนี้

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\displaystyle\sum_{x \in ImX} f_X(x) = 1$
3. $F_X(x) = \displaystyle\sum_{\substack{t \leq x \\ t \in ImX}} f_X(t)$

เมื่อ F_X คือฟังก์ชันการแจกแจงของ X และ $\operatorname{Im} X$ เป็นสัญลักษณ์แทนพิสัยของ X

บทนิยาม 2.1.6. *เราจะกล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X เป็น* ***ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variable)*** *ถ้ามีฟังก์ชัน $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ที่อินทิเกรตได้บน $\mathbb{R}$ และทำให้ฟังก์ชันการแจกแจง F_X ของ X เขียนได้ในรูปของ*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ และเราจะเรียกฟังก์ชัน f_X ว่า ***ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function, PDF)*** *ของ X และในทำนองเดียวกันฟังก์ชันความน่าจะเป็น f_X ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X นั้น มีสมบัติดังนี้*

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
3. $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

ในบางครั้งเราจำเป็นต้องศึกษาตัวแปรสุ่มหลาย ๆ ตัวแปรสุ่มในเวลาเดียวกัน ฟังก์ชันการแจกแจงร่วม จะช่วยให้เราหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ได้ และต่อไปเราจะให้นิยามการแจกแจงร่วมของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$

บทนิยาม 2.1.7. *กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n (n \geq 2)$ เป็นตัวแปรสุ่มบนปริภูมิความน่าจะเป็นเดียวกัน เราจะเรียกฟังก์ชัน $F_{X_1, X_2, \ldots, X_n} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ ที่กำหนดโดย*

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$$

เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ว่า ***ฟังก์ชันการแจกแจงร่วม (joint distribution function)*** *ของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ หรือ* ***การแจงแจงร่วม (joint distribution)*** *ของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$*

บทนิยาม 2.1.8. *เราจะกล่าวว่าตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n (n \geq 2)$ เป็น* ***อิสระต่อกัน (independent)*** *ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

เมื่อ $F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}$ *คือฟังก์ชันการแจกแจงร่วมของ* $X_1, X_2, \ldots, X_n$
และ F_{X_i} *คือฟังก์ชันการแจกแจงของ* X_i *เมื่อ* $i = 1, 2, \ldots, n$

2.2 ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง และตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่ใช้ในโครงงานนี้

ต่อไปเราจะให้นิยามของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องซึ่งเราจะใช้ในโครงงานนี้

บทนิยาม 2.2.1. *ให้* X *เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่ง*

$$P(X = 1) = p \quad \text{และ} \quad P(X = 0) = 1 - p$$

เมื่อ p *เป็นค่าคงตัวโดยที่* $0 < p < 1$ *เราจะเรียก* X *ว่า* ***ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี (Bernoulli random variable)*** *ที่มีพารามิเตอร์* p *ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย* $X \sim Ber(p)$

ในการทดลองที่จะทำให้เกิดตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีได้นั้น การทดลองจะมีผลเพียง 2 อย่าง คือ สำเร็จ หรือ ไม่สำเร็จ และตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนครั้งที่สำเร็จในการทดลอง 1 ครั้ง

บทนิยาม 2.2.2. *ให้* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่มีพารามิเตอร์* p *และเป็นอิสระต่อกัน เราจะเรียกตัวแปรสุ่ม* $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ *ว่า* ***ตัวแปรสุ่มทวินาม (binomial random variable)*** *ที่มีพารามิเตอร์* n *และ* p *โดยใช้สัญลักษณ์แทนด้วย* $X \sim B(n, p)$
ในกรณี n *และ* x *ใด ๆ โดยที่* $x = 0, 1, \ldots, n$ *จะได้ว่า*

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ เมื่อ } x = 0, 1, \ldots, n$$

ซึ่งการทดลองที่ทำให้เกิดตัวแปรสุ่มทวินามได้นั้น

1. ทำการทดลองทั้งหมด n ครั้ง โดยที่การทดลองแต่ละครั้งอิสระต่อกัน
2. ในการทดลองแต่ละครั้ง มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 แบบ คือ สำเร็จ หรือ ไม่สำเร็จ โดยสำเร็จด้วยความน่าจะเป็น p และ ไม่สำเร็จด้วยความน่าจะเป็น $1 - p$

และตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนครั้งที่สำเร็จในการทดลอง n ครั้ง

บทนิยาม 2.2.3. *กำหนดให้* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่*

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2} \quad \text{ทุก } i = 1, 2, \ldots, n$$

เราจะเรียกตัวแปรสุ่ม $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ว่า ***ตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร (symmetric binomial random variable)*** *โดยใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $X \sim B_n$*

ต่อไปเราจะให้นิยามของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องซึ่งเราจะใช้ในโครงงานนี้

บทนิยาม 2.2.4. *ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f กำหนดโดย*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

เราจะเรียก X ว่า ***ตัวแปรสุ่มปกติ (normal random variable)*** *ที่มีพารามิเตอร์ $\mu \in \mathbb{R}$ และ $\sigma^2 > 0$ โดยใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ในกรณีที่ $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = 1$ เราจะเรียก $X \sim N(0,1)$ ว่า* ***ตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน (standard normal random variable)***
ให้ Φ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน X จะได้ว่า

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ในหัวข้อต่อไปเราจะกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องและตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง โดยเราจะให้นิยามและกล่าวถึงสมบัติที่สำคัญต่างๆ ต่อไปนี้

2.3 ค่าคาดคะเน และความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม

บทนิยามและทฤษฎีบทที่สำคัญของค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม และความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มจะถูกกล่าวถึงในหัวข้อนี้ รวมไปถึงสมบัติของค่าคาดคะเน และสมบัติของความแปรปรวน

บทนิยาม 2.3.1. *ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ* ***ค่าคาดคะเน (expected value)*** *ของ X ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $E(X)$ กำหนดโดย*

1. $E(X) = \sum_{x \in ImX} xf(x)$ *ถ้า* $\sum_{x \in ImX} |x|f(x) < \infty$
เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น f

2. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ *ถ้า* $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$
เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f

ถ้า $\sum_{x \in ImX} |x|f(x)$ *ลู่ออก เมื่อ* X *เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง หรือ* $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx$ *ลู่ออก เมื่อ* X *เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง เราจะกล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม* X ***ไม่มีค่าคาดคะเน***

ทฤษฎีบท 2.3.2. [1] *ให้* X *เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ และ* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ซึ่ง* $g \circ X$ *เป็นตัวแปรสุ่ม จะได้ว่า*

1. $E(g(X)) = \sum_{x \in ImX} g(x)f(x)$ *ถ้า* $\sum_{x \in ImX} |g(x)|f(x) < \infty$
   โดยที่ X *คือ ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น* f
2. $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ *ถ้า* $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx < \infty$
   โดยที่ X *คือ ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น* f

ทฤษฎีบท 2.3.3. [1] *ให้* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *เป็นตัวแปรสุ่มและ* $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *เป็นฟังก์ชันซึ่งทำให้* $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *และ* $h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *เป็นตัวแปรสุ่มที่สามารถหาค่าคาดคะเนได้ จะได้ว่า*

$$E(g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \pm h(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = E(g(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \pm E(h(X_1, X_2, \ldots, X_n))$$

บทนิยาม 2.3.4. *ให้* X *แทนตัวแปรสุ่มใด ๆ ซึ่งมีค่าคาดคะเน* $E(X^2)$ ***ความแปรปรวน (variance)*** *ของ* X *เขียนแทนด้วย* $Var(X)$ *หรือ* σ^2 *กำหนดโดย*

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

ซึ่งสามารถแสดงได้ว่า

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

และเราจะเรียก $\sqrt{Var(X)}$ *ว่า* ***ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation)*** *ของ* X *และเขียนแทนด้วย SD หรือ* σ

บทนิยาม 2.3.5. *ให้* X *และ* Y *เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ* ***ความแปรปรวนร่วม (covariance)*** *ของ*

X และ Y เขียนแทนด้วย $Cov(X, Y)$ หรือ σ_{XY} กำหนดโดย

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

ทฤษฎีบท 2.3.6. [1] *สำหรับตัวแปรสุ่ม X และ Y ใด ๆ ที่สามารถหาค่าความแปรปรวนได้ จะได้ว่า*

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X, Y)$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัวใดๆ

บทแทรก 2.3.7. [1] *กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n (n \geq 2)$ เป็นอิสระต่อกัน และหาความแปรปรวนได้ จะได้ว่า*

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$

จากนิยามและทฤษฎีบทข้างต้นเราจะได้ว่า สำหรับตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี ตัวแปรสุ่มทวินาม และตัวแปรสุ่มปกติ จะมีค่าคาดคะเนและความแปรปรวนดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3.8. [1] *กำหนดให้ $X \sim Ber(p)$ จะได้ว่า*

1. $E(X) = p$
2. $Var(X) = p(1 - p)$

พิสูจน์ ให้ $X \sim Ber(p)$ จะได้ว่า

1. $E(X) = \sum_{x=0}^{1} xP(X = x) = (0)P(X = 0) + (1)P(X = 1) = p$
2. เนื่องจาก

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 P(X = x) = (0^2)P(X = 0) + (1^2)P(X = 1) = p$$

ดังนั้น

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) \qquad \square$$

ทฤษฎีบท 2.3.9. [1] *ให้* $X \sim B(n,p)$ *จะได้ว่า*

1. $E(X) = np$

2. $Var(X) = np(1-p)$

พิสูจน์ ให้ $X_i \sim Ber(p)$ โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกัน ที่ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

1. เนื่องจาก $E(X_i) = p$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np \end{aligned}$$

2. เนื่องจาก $Var(X_i) = p(1-p)$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n) = np(1-p) \end{aligned}$$ □

ทฤษฎีบท 2.3.10. [1] *ให้* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *จะได้ว่า*

1. $E(X) = \mu$

2. $Var(X) = \sigma^2$

พิสูจน์

1. ให้ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-u)^2/2\sigma^2}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2/2\sigma^2} dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \qquad (y = x - \mu) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $g(y) = ye^{-y^2/2\sigma^2}$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2/2\sigma^2} dy = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$E(X) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \mu$$

2. โดย 1. จะได้ว่า $E(X) = \mu$ และโดยการอินทิเกรตทีละส่วน ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E[(X - E(X))^2] \\
&= E[(X - \mu)^2] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2} dy \qquad (y = (x-\mu)/\sigma) \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-ye^{-y^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\lim_{y\to\infty} -ye^{-y^2/2} + \lim_{y\to-\infty} ye^{-y^2/2} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

□

2.4 ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์และฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

เราได้พูดถึงการหาค่าคาดคะเนของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม นั่นคือ $E(g(X))$ เมื่อ g เป็นฟังก์ชันใด ๆ โดยในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม e^{tX} และเราจะเรียกค่าคาดคะเนนี้ว่า ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X

บทนิยาม 2.4.1. *ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ เราจะเรียกฟังก์ชัน M_X ซึ่งกำหนดโดย*

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in ImX} e^{tx} P(X = x) & \text{เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง} \end{cases}
\end{aligned}$$

ว่า ***ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (moment generating function)*** *ของตัวแปรสุ่ม X โดยฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องเป็น f_X*

สำหรับโดเมนของฟังก์ชันก่อกำเนิด M_X คือ เซตของจำนวนจริง t ทั้งหมดที่ $E(e^{tX})$ สามารถหาค่าได้

ตัวอย่าง 2.4.2. *ถ้า $X \sim Ber(p)$ แล้ว $M_X(t) = (1-p) + pe^t$ สำหรับทุก $t \in \mathbb{R}$*

วิธีทำ จากบทนิยาม 2.4.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{1} e^{tk} P(X = k) \\ &= (1-p) + pe^t \end{aligned}$$

สำหรับทุก $t \in \mathbb{R}$ $\square$

ทฤษฎีบท 2.4.3. [1] *ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม และ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า*

1. $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$
2. $M_{bX}(t) = M_X(bt)$
3. $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = e^{\frac{a}{b}t} M_X(\frac{t}{b})$
4. *ถ้า X และ Y อิสระต่อกัน แล้วจะได้ว่า $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$*

บทแทรก 2.4.4. [1] *กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า*

$$M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

ทฤษฎีบท 2.4.5. [1] *ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ ถ้ามี $\delta > 0$ ซึ่ง $M_X(t) = M_Y(t)$ เมื่อ $t \in (-\delta, \delta)$ จะได้ว่า X และ Y มีการแจกแจงเดียวกัน*

ตัวอย่าง 2.4.6. *ถ้า $X \sim B(n, p)$ แล้ว $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$ สำหรับทุก $t \in \mathbb{R}$*

วิธีทำ เพราะว่า $X \sim B(n, p)$ ดังนั้น $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ โดยที่ $X_i \sim Ber(p)$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกัน

จากตัวอย่างที่ 2.4.2 จะได้ว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ M_X ของ X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ คือ $M_X(t) = (1-p) + pe^t$ สำหรับทุก $t \in \mathbb{R}$
ดังนั้นโดยบทแทรก 2.4.4 จะได้ว่า

$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$$

สำหรับทุก $t \in \mathbb{R}$ $\square$

สำหรับตัวแปรสุ่มใด ๆ อาจจะหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ไม่ได้ เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันอีกฟังก์ชันหนึ่ง ซึ่งมีสมบัติใกล้เคียงกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์และสามารถหาค่าได้ทุกจำนวนจริง t ซึ่งมีชื่อว่า ”ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ”

บทนิยาม 2.4.7. *ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ เราจะเรียกฟังก์ชัน $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดโดย*

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E(e^{itX}) \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in ImX} e^{itx} P(X = x) & \textit{เมื่อ } X \textit{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx & \textit{เมื่อ } X \textit{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง} \end{cases}
\end{aligned}$$

และ $i^2 = -1$ ว่า ***ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (characteristic function)*** *ของตัวแปรสุ่ม X โดยฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องเป็น f_X*

ข้อสังเกต

1. $\varphi_X(0) = 1$

2. ตัวแปรสุ่ม e^{itX} มีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน แต่เนื่องจาก $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$ เมื่อ $t, x \in \mathbb{R}$ ดังนั้น

$$\varphi_X(t) = E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX))$$

3. เนื่องจาก $|e^{itx}| = 1$ ทุกจำนวนจริง t และ x ดังนั้น สำหรับตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X และ

$t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$|\varphi_X(t)| = |E(e^{itx})| \leq \sum_{x \in ImX} |e^{itx}| P(X = x) = \sum_{x \in ImX} P(X = x) = 1$$

ทฤษฎีบท 2.4.8. [1] *ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มและ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า*

1. $\varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$
2. $\varphi_{a+bX}(t) = e^{iat}\varphi_X(bt)$
3. *ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน แล้ว* $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
4. φ_X *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบสม่ำเสมอ นั่นคือ สำหรับแต่ละ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้* $|\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| < \epsilon$ *ทุก* $|t - s| < \delta$

บทแทรก 2.4.9. [1] *กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ $\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}$ ของ $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ คือ*

$$\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t)$$

เมื่อ $\varphi_{X_1}, \varphi_{X_2}, \ldots, \varphi_{X_n}$ คือฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 2.4.10. [1] *ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ ถ้า X และ Y มีฟังก์ชันลักษณะเฉพาะเดียวกัน นั่นคือ $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า X และ Y มีการแจกแจงเดียวกัน*

ตัวอย่าง 2.4.11. *ถ้า $X \sim Ber(p)$ แล้ว $\varphi_X(t) = (1 - p) + pe^{it}$ สำหรับทุก $t \in \mathbb{R}$*

วิธีทำ เนื่องจาก $X \sim Ber(p)$ เราจึงได้ว่า

$$P(X = 0) = 1 - p \quad \text{และ} \quad P(X = 1) = p$$

ดังนั้นฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ φ_X ของ X คือ

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{1} e^{ikt}P(X=k)\\ &= e^0P(X=0)+e^{it}P(X=1)\\ &= (1-p)+pe^{it}\end{aligned} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 2.4.12. *ถ้า* $X \sim B(n,p)$ *แล้ว* $\varphi_X(t) = [(1-p)+pe^{it}]^n$ *สำหรับทุก* $t \in \mathbb{R}$

วิธีทำ เพราะว่า $X \sim B(n,p)$ ดังนั้น $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ โดยที่ $X_i \sim B(n,p)$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots,n$ และ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกัน
จากตัวอย่าง 2.4.11 จะได้ว่าฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ φ_X ของ X คือ

$$\varphi_X(t) = (1-p)+pe^{it} \quad \text{สำหรับ } t \in \mathbb{R}$$

ดังนั้นโดยบทแทรกที่ 2.4.9 จะได้ว่า

$$\varphi_X(t) = [(1-p)+pe^{it}]^n \qquad \square$$

ตัวอย่าง 2.4.13. *ถ้า* $X \sim Ber(\frac{1}{2})$ *แล้ว* $\varphi_X(t) = \dfrac{1+\cos(t)+i\sin(t)}{2}$ *สำหรับทุก* $t \in \mathbb{R}$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2.4.11 เมื่อ $p = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{it}}{2}$$

โดยสูตรของออย์เลอร์ $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้น

$$\varphi_X(t) = \frac{1+\cos(t)+i\sin(t)}{2} \qquad \square$$

ในบทต่อไปเราจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักโดยอาศัยความรู้พื้นฐานเพื่อนำไปสู่การหาผลลัพธ์ที่ได้จากการทำโครงงานในครั้งนี้

บทที่ 3

ทฤษฎีบทหลัก

ตลอดบทนี้ เรากำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2} \quad \text{ทุก } i = 1, 2, \ldots, n$$

จากบทที่ 1 จะได้ว่า $B_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ เป็นตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร

ในบทนี้เราจะประมาณค่าความน่าจะเป็นของ B_n เมื่อ n มีค่ามาก ๆ ด้วยฟังก์ชัน G โดยที่

$$G(x) = \Phi(x) + \frac{(x^3 - x)}{12n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{3.1}$$

เมื่อ Φ คือฟังก์ชันการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยผลลัพธ์ที่ได้ เป็นไปตามทฤษฎีบทหลักต่อไปนี้

ทฤษฎีบทหลัก สำหรับ $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $n \geq 100$ จะได้ว่า

$$|P(a \leq B_n \leq b) - (G(x_2) - G(x_1))| \leq \frac{2.36}{n^2} + 1.43e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} + 0.1e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}$$

เมื่อ

$$x_1 = \frac{2a - n - 1}{\sqrt{n}} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{2b - n + 1}{\sqrt{n}}$$

ในบทนี้เราจะแบ่งการนำเสนอเป็น 2 หัวข้อ ดังต่อไปนี้

3.1 สมบัติของฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของ B_n

3.2 การพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

3.1 สมบัติของฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของ B_n

สำหรับตัวแปรสุ่ม $X_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ และ B_n ที่กำหนดข้างต้น เราให้ φ และ φ_n เป็นฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของ $X_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ และ B_n ตามลำดับ และจากตัวอย่างที่ 2.4.13 จะได้ว่า

$$\varphi(t) = \frac{1 + e^{it}}{2} = \frac{1 + \cos(t) + i\sin(t)}{2} \tag{3.2}$$

เราทราบว่าจำนวนเชิงซ้อน $\varphi(t)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\varphi(t) = |\varphi(t)|e^{i\theta(t)} \tag{3.3}$$

เมื่อ

$$|\varphi(t)| = \left(\frac{1 + 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 + \cos(t)}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \sin^2(\frac{t}{2})\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.4}$$

และ

$$\theta(t) := \text{อาร์กิวเมนต์ ของ } \varphi(t) = \arctan\left(\frac{\sin(t)}{1 + \cos(t)}\right) \qquad \text{เมื่อ} \quad t \neq \pi$$

ซึ่ง

$$\tan\left(\theta(t)\right) = \frac{\sin(t)}{1 + \cos(t)}$$

จะได้ว่า

$$\cos(\theta(t)) = \frac{1 + \cos(t)}{\sqrt{2(1 + \cos(t))}} = \sqrt{\frac{1 + \cos(t)}{2}} = \left|\cos(\frac{t}{2})\right|$$

ดังนั้น

$$\theta(t) = \frac{t}{2} \qquad \text{หรือ} \qquad \theta(t) = \frac{t}{2} + 2\pi$$

เนื่องจาก φ_n เป็นฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของ B_n จาก (3.3) จะได้ว่า

$$\varphi_n(t) = (\varphi(t))^n = (|\varphi(t)|e^{i\theta(t)})^n = |\varphi(t)|^n e^{i\theta(t)n} = |\varphi_n(t)|e^{i\theta_n(t)} \qquad (3.5)$$

เมื่อ $|\varphi_n(t)| = |\varphi(t)|^n$ และ $\theta_n(t) = n\theta(t)(\text{mod } 2\pi)$
ต่อไปนี้เป็นสมบัติของ φ และ φ_n ที่ต้องนำมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

บทตั้ง 3.1. *([8], หน้า 720)*

1. $|\varphi(t)| \leq e^{-\frac{t^2}{2\pi^2}}$ *สำหรับ* $t \in [0, \pi)$

2. $|\varphi(t)| \leq e^{-\frac{t^2}{8}+\frac{t^4}{96}}$ *สำหรับ* $t \in [0, \pi]$

3. $|\varphi(t)| \geq e^{-\frac{t^2}{8}-\frac{t^4}{64}}$ *สำหรับ* $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

บทตั้ง 3.2. *([8], หน้า 721) สำหรับ* $t \in \left[0, \sqrt[4]{\frac{36}{n}}\right]$ *จะได้ว่า*

$$||\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}}| \leq \frac{nt^4}{64}e^{-\frac{nt^2}{8}}$$

บทตั้ง 3.3. *สำหรับ* $n \geq 100$ *และ* $t \in \left[0, \sqrt[4]{\frac{36}{n}}\right]$ *จะได้ว่า*

$$\left||\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}} + \frac{nt^4}{192}e^{-\frac{nt^2}{8}}\right| \leq (0.0061nt^6 + (1.27 \times 10^{-5})n^2t^8)e^{-\frac{nt^2}{8}}$$

พิสูจน์ ให้ $n \geq 100$ และ $t \in \left[0, \sqrt[4]{\frac{36}{n}}\right]$
จากอนุกรมเทย์เลอร์ $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ เมื่อ $|x| < 1$ จะได้ว่า

$$\ln\left(1 - \sin^2(\frac{t}{2})\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\sin^2(\frac{t}{2})\right)^k}{k} \qquad \text{เมื่อ } \left|\sin^2(\frac{t}{2})\right| < 1$$

จากความจริงข้างต้น และ (3.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\ln|\varphi(t)| &= \frac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2(\frac{t}{2})\right)\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sin^2(\frac{t}{2})\right)^k\\ &= -\frac{1}{2}\sin^2(\frac{t}{2})-\frac{1}{4}\sin^4(\frac{t}{2})-\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sin^2(\frac{t}{2})\right)^k \qquad (3.6)\end{aligned}$$

จาก $|\sin(\frac{t}{2})| \le |\frac{t}{2}|$ (ภาคผนวกที่ 1.2) จะได้ว่า $\sin^2(\frac{t}{2}) \le \frac{t^2}{4} < 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sin^2(\frac{t}{2})\right)^k &\le \frac{1}{3}\sum_{k=3}^{\infty}\left(\sin^2(\frac{t}{2})\right)^k\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{(\sin^2(t/2))^3}{1-\sin^2(t/2)}\right)\\ &\le \frac{1}{3}\left(\frac{t^6/64}{1-t^2/4}\right)\\ &= \frac{t^6}{48(4-t^2)}\end{aligned}$$

จาก $n \ge 100$ และ $t \le \sqrt[4]{\frac{36}{n}}$ จะได้ว่า $0 \le \frac{1}{4-t^2} \le \frac{5}{17}$ ดังนั้น

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sin^2(\frac{t}{2})\right)^k \le \frac{t^6}{48(4-t^2)} \le 0.0062t^6 \qquad (3.7)$$

จาก (3.6) และ (3.7) จะได้ว่า

$$\ln|\varphi(t)| \ge -\frac{1}{2}\sin^2(\frac{t}{2})-\frac{1}{4}\sin^4(\frac{t}{2})-0.0031t^6$$

จากความจริงที่ว่า

$$\frac{t^2}{4}-\frac{t^4}{48}-\frac{t^6}{1440} \le \sin^2(\frac{t}{2}) \le \frac{t^2}{4}-\frac{t^4}{48}+\frac{t^6}{1440} \qquad (3.8)$$

(ภาคผนวกที่ 1.3) และ

$$\frac{t^4}{16} - \frac{t^6}{96} \le \sin^4(\frac{t}{2}) \le \frac{t^4}{16} + \frac{t^6}{96} \tag{3.9}$$

(ภาคผนวกที่ 1.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \ln|\varphi(t)| &\ge -\frac{t^2}{8} + \frac{t^4}{96} - \frac{t^6}{2880} - \frac{t^4}{64} - \frac{t^6}{384} - 0.0031t^6 \\ &= -\frac{t^2}{8} - \frac{t^4}{192} - 0.0061t^6 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|\varphi(t)| \ge e^{-\frac{t^2}{8} - \frac{t^4}{192} - 0.0061t^6}$ ทำให้ได้ว่า

$$|\varphi_n(t)| \ge e^{-\frac{nt^2}{8} - \frac{nt^4}{192} - 0.0061nt^6}$$

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}} &\ge \left(e^{-\frac{nt^4}{192} - 0.0061nt^6} - 1\right) e^{-\frac{nt^2}{8}} \\ &\ge \left(-\frac{nt^4}{192} - 0.0061nt^6\right) e^{-\frac{nt^2}{8}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

โดยเราใช้ความจริงที่ว่า $e^x - 1 \ge x$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ (ภาคผนวกที่ 2.1) ในอสมการสุดท้าย
จาก (3.6), (3.8)-(3.9) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \ln|\varphi(t)| &\le -\frac{1}{2}\sin^2(\frac{t}{2}) - \frac{1}{4}\sin^4(\frac{t}{2}) \\ &\le -\frac{t^2}{8} + \frac{t^4}{96} + \frac{t^6}{2880} - \frac{t^4}{64} + \frac{t^6}{384} \\ &= -\frac{t^2}{8} - \frac{t^4}{192} + 0.0003t^6 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|\varphi(t)| \le e^{-\frac{t^2}{8} - \frac{t^4}{192} + 0.0003t^6}$ ทำให้ได้ว่า

$$|\varphi_n(t)| \le e^{-\frac{nt^2}{8} - \frac{nt^4}{192} + 0.0003nt^6} \tag{3.11}$$

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{x_0}$ สำหรับบาง x_0 ที่อยู่ระหว่าง 0 และ x

ถ้า $x = -\frac{nt^4}{192} + 0.0003nt^6$ จะได้ว่า มี x_0 ที่อยู่ระหว่าง 0 กับ x ที่ทำให้

$$e^{-\frac{nt^4}{192}+0.0003nt^6} - 1 = -\frac{nt^4}{192} + 0.0003nt^6 + \frac{1}{2}\left[-\frac{nt^4}{192} + 0.0171nt^6\right]^2 e^{x_0}$$

เนื่องจาก $t^2 < 1$ นั่นคือ $t^6 < t^4$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
-\frac{nt^4}{192} + 0.0003nt^6 &< -\frac{nt^4}{192} + 0.0003nt^4 \\
&= -0.00499nt^4 \\
&< 0
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x < x_0 < 0$ ดังนั้น $e^{x_0} < e^0 = 1$
จาก $t^2 \leq \frac{6}{\sqrt{n}}$ และ $n \geq 100$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{nt^4}{192}+0.0003nt^6} - 1 &= -\frac{nt^4}{192} + 0.0003nt^6 + \frac{1}{2}\left[-\frac{nt^4}{192} + 0.0171nt^6\right]^2 e^{x_0} \\
&\leq -\frac{nt^4}{192} + 0.0003nt^6 + \frac{1}{2}\left[-\frac{nt^4}{192} + \frac{9}{50000}nt^4\right]^2 \\
&\leq -\frac{nt^4}{192} + 0.0003nt^6 + (1.27 \times 10^{-5})n^2t^8 \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

จาก (3.11) และ (3.12) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}} &\leq e^{-\frac{nt^2}{8}}\left(e^{-\frac{nt^4}{192}+0.0003nt^6} - 1\right) \\
&\leq e^{-\frac{nt^2}{8}}\left(-\frac{nt^4}{192} + 0.0003nt^6 + (1.27 \times 10^{-5})n^2t^8\right) \\
&\leq -\frac{nt^4}{192}e^{-\frac{nt^2}{8}} + (0.0003nt^6 + (1.27 \times 10^{-5})n^2t^8)e^{-\frac{nt^2}{8}}
\end{aligned}$$

ซึ่งทำให้

$$|\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}} + \frac{nt^4}{192}e^{-\frac{nt^2}{8}} \leq (0.0003nt^6 + (1.27 \times 10^{-5})n^2t^8)e^{-\frac{nt^2}{8}} \qquad (3.13)$$

จาก (3.10) จะได้ว่า

$$|\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}} + \frac{nt^4}{192}e^{-\frac{nt^2}{8}} \geq -0.0061nt^6e^{-\frac{nt^2}{8}}$$

ดังนั้น

$$\left||\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}} + \frac{nt^4}{192}e^{-\frac{nt^2}{8}}\right| \leq (0.0061nt^6 + (1.27\times 10^{-5})n^2t^8)e^{-\frac{nt^2}{8}} \qquad \square$$

บทตั้ง 3.4. *สมมติ* $n \geq 100$ *ดังนั้น*

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \frac{|\varphi_n(t)|\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t}dt = \pi\Phi(x) - \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{24n}x(3-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_1$
   เมื่อ $|\Delta_1| \leq \frac{3.2793}{n^2} + 0.40375e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} |\varphi_n(t)|\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt = \frac{2\sqrt{2\pi}x}{n}e^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_2$
   เมื่อ $|\Delta_2| \leq \frac{8}{n^2} + 0.04e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}$

พิสูจน์ 1. ให้ $n \geq 100$ เนื่องจาก

$$|\varphi_n(t)| = e^{-\frac{nt^2}{8}} - \frac{nt^4}{192}e^{-\frac{nt^2}{8}} + \left(|\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}} + \frac{nt^4}{192}e^{-\frac{nt^2}{8}}\right)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \frac{|\varphi_n(t)|\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t}dt &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \frac{e^{-\frac{nt^2}{8}}\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t}dt \\ &\quad - \frac{n}{192}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} t^3e^{-\frac{nt^2}{8}}\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})dt + \Delta_{11} \qquad (3.14)\end{aligned}$$

เมื่อ

$$\Delta_{11} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \frac{\left(|\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}} + \frac{nt^4}{192}e^{-\frac{nt^2}{8}}\right)\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t}dt$$

และจากบทตั้ง 3.3 จะได้ว่า

$$|\Delta_{11}| \leq 0.0061n \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} t^5 e^{-\frac{nt^2}{8}} dt + (1.27 \times 10^{-5}) n^2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} t^7 e^{-\frac{nt^2}{8}} dt$$

สำหรับ $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} e^{-\frac{nt^2}{8}} t^{2k+1} dt &\leq \int_0^{\infty} e^{-\frac{nt^2}{8}} t^{2k+1} dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{n}\right)^{k+1} \int_0^{\infty} e^{-u} u^k du \qquad (u = \frac{nt^2}{8}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{n}\right)^{k+1} \Gamma(k+1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{n}\right)^{k+1} k! \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

โดยที่ $\Gamma(v) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{v-1} e^{-t} dt$ เมื่อ $v > 0$ และ $\Gamma(k+1) = k!$ ([5], หน้า 855)
ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|\Delta_{11}| &\leq 0.0061n \left(\frac{1}{2}\left(\frac{8}{n}\right)^3 2!\right) + (1.27 \times 10^{-5}) n^2 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{8}{n}\right)^4 3!\right) \\
&= \frac{3.1232}{n^2} + \frac{0.1561}{n^2} \\
&= \frac{3.2793}{n^2} \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

จากภาคผนวกที่ 3.4 สังเกตได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \frac{e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t} dt &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t} dt + \Delta_{12} \\
&= \pi\Phi(x) - \frac{\pi}{2} + \Delta_{12} \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

เมื่อ

$$\Delta_{12} = -\int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t} dt$$

เนื่องจาก $t \geq \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ จะได้ว่า $t^2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ นั่นคือ $\frac{1}{t} \leq \sqrt{n}t$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|\Delta_{12}| &\leq \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{nt^2}{8}}}{t} dt \\
&\leq \sqrt{n} \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\infty} t e^{-\frac{nt^2}{8}} dt \\
&= \frac{4}{\sqrt{n}} \int_{\frac{\sqrt{n}}{8}}^{\infty} e^{-u} du \qquad (u = \frac{nt^2}{8}) \\
&= \frac{4}{\sqrt{n}} e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} \\
&\leq 0.4 e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

จากภาคผนวกที่ 3.3 สังเกตได้ว่า

$$\begin{aligned}
-\frac{n}{192} \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} t^3 e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2}) dt &= -\frac{n}{192} \int_0^{\infty} t^3 e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2}) dt + \Delta_{13} \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{24n} x(3 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_{13}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

เมื่อ

$$\Delta_{13} = \frac{n}{192} \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\infty} t^3 e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2}) dt$$

จาก

$$\begin{aligned}
|\Delta_{13}| &\leq \frac{n}{192} \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\infty} t^3 e^{-\frac{nt^2}{8}} dt \\
&= \frac{1}{3n} \int_{\sqrt[4]{\frac{n}{64}}}^{\infty} u^3 e^{-u^2} du \qquad (u = \frac{\sqrt{n}t}{\sqrt{8}}) \\
&= \frac{1}{3n} \left(\frac{(\sqrt[4]{\frac{n}{64}})^2 + 1) e^{-(\sqrt[4]{\frac{n}{64}})^2}}{2} \right) \qquad (\text{ภาคผนวกที่ } 4.2, a = \sqrt[4]{\frac{n}{64}}) \\
&= \left(\frac{1}{48\sqrt{n}} + \frac{1}{6n} \right) e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} \\
&\leq 0.00375 e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}
\end{aligned}$$

และ (3.14) และ (3.16)-(3.19) จะได้ว่า

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \frac{|\varphi_n(t)| \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t}dt = \pi\Phi(x) - \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{24n}x(3-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_1$$

เมื่อ $\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13}$ โดยที่

$$|\Delta_1| \le |\Delta_{11}| + |\Delta_{12}| + |\Delta_{13}| \le \frac{3.2793}{n^2} + 0.40375e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}$$

2. เนื่องจาก

$$|\varphi_n(t)| = e^{-\frac{nt^2}{8}} + \left(|\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}}\right)$$

จะได้ว่า

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} |\varphi_n(t)| \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt + \Delta_{21} \tag{3.20}$$

เมื่อ

$$\Delta_{21} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \left(|\varphi_n(t)| - e^{-\frac{nt^2}{8}}\right) \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt$$

จากบทตั้ง 3.2 และ (3.15) จะได้ว่า

$$|\Delta_{21}| \le \frac{n}{64}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} t^5 e^{-\frac{nt^2}{8}}dt \le \frac{n}{64}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{8}{n}\right)^3 2!\right) = \frac{8}{n^2} \tag{3.21}$$

จากภาคผนวกที่ 3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt + \Delta_{22} \\ &= \frac{2\sqrt{2\pi}}{n}xe^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_{22}\end{aligned} \tag{3.22}$$

เมื่อ

$$\Delta_{22} = -\int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\infty} e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt$$

จาก

$$|\Delta_{22}| \leq \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\infty} e^{-\frac{nt^2}{8}} tdt = \frac{4}{n}e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} \leq 0.04e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}$$

และ (3.20) จะได้ว่า

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} |\varphi_n(t)| \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt = \frac{2\sqrt{2\pi}x}{n}e^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_2$$

เมื่อ $\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22}$ โดยที่

$$|\Delta_2| \leq |\Delta_{21}| + |\Delta_{22}| \leq \frac{8}{n^2} + 0.04e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} \qquad \square$$

3.2 การพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

เราจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ก่อนเพื่อนำไปสู่การพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

ทฤษฎีบท 3.5. *ให้* $R(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)| \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}dt$ *สำหรับ* $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ *ซึ่ง* $a \leq b$ *จะได้ว่า*

$$P(a \leq B_n \leq b) = R(x_2) - R(x_1)$$

เมื่อ $x_1 = \dfrac{2a-n-1}{\sqrt{n}}$ *และ* $x_2 = \dfrac{2b-n+1}{\sqrt{n}}$

พิสูจน์ จาก (3.2) และ ทฤษฎีบททการกระจายทวินาม จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= (\varphi(t))^n \\ &= \left(\frac{1+e^{it}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^n}(1+e^{it})^n \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}e^{itx}\end{aligned}$$

สำหรับ $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}e^{-imt}\varphi_n(t) &= \frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}e^{-imt}e^{itx} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}e^{it(x-m)}\end{aligned}$$

จากความจริงข้างต้น และความจริงที่ว่า

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(x-m)}dt = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า} \quad x - m \neq 0 \\ 2\pi & \text{ถ้า} \quad x - m = 0 \end{cases}$$

(ภาคผนวกที่ 4.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt}\varphi_n(t)dt &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}e^{it(x-m)}dt \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(x-m)}dt \\ &= (\frac{1}{2})^n\binom{n}{m}2\pi\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\binom{n}{m} = \frac{2^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt}\varphi_n(t)dt \tag{3.23}$$

สำหรับ $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ จาก (1.1) และ (3.23) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(a \leq B_n \leq b) &= \frac{1}{2^n} \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{x=a}^{b} \frac{2^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ixt} \varphi_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{x=a}^{b} e^{-ixt} \varphi_n(t) dt \end{aligned} \tag{3.24}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \sum_{x=a}^{b} e^{-ixt} &= \frac{e^{-iat}(1 - e^{-it(b-a+1)})}{1 - e^{-it}} \\ &= \frac{e^{-iat} - e^{-i(b+1)t}}{1 - e^{-it}} \\ &= \frac{e^{-i(\frac{a+b+1}{2})t}}{e^{-\frac{it}{2}}(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}})} \left(e^{-i(\frac{a-b-1}{2})t} - e^{-i(\frac{b-a+1}{2})t} \right) \end{aligned} \tag{3.25}$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{e^{-i(\frac{a+b+1}{2})t}}{e^{-\frac{it}{2}}(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}})} &= \frac{e^{-i(\frac{a+b}{2})t}}{\cos(\frac{t}{2}) + i\sin(\frac{t}{2}) - \cos(\frac{t}{2}) + i\sin(\frac{t}{2})} \\ &= \frac{e^{-i(\frac{a+b}{2})t}}{2i\sin(\frac{t}{2})} \end{aligned} \tag{3.26}$$

และ

$$\begin{aligned} e^{-i(\frac{a-b-1}{2})t} - e^{-i(\frac{b-a+1}{2})t} &= \cos\left((\frac{a-b-1}{2})t \right) - i\sin\left((\frac{a-b-1}{2})t \right) \\ &\quad - \cos\left((\frac{b-a+1}{2})t \right) + i\sin\left((\frac{b-a+1}{2})t \right) \\ &= 2i\sin\left((\frac{b-a+1}{2})t \right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

จะได้ว่า จาก (3.25), (3.26) และ (3.27)

$$\sum_{x=a}^{b} e^{-ixt} = e^{-i(\frac{a+b}{2})t}\left(\frac{\sin\left((\frac{b-a+1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}\right) \tag{3.28}$$

จาก (3.5), (3.24) และ (3.28) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
P(a \le B_n \le b) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(t)| e^{-i\left((\frac{a+b}{2})t-\theta_n(t)\right)}\left(\frac{\sin\left((\frac{b-a+1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\cos\left((\frac{a+b}{2})t-\theta_n(t)\right)\sin\left((\frac{b-a+1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})} \\
&\quad - \frac{i|\varphi_n(t)|\sin((\frac{a+b}{2})t-\theta_n(t))\sin\left((\frac{b-a+1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\cos\left((\frac{a+b}{2})t-\theta_n(t)\right)\sin\left((\frac{b-a+1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}dt \\
&\quad - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\sin((\frac{a+b}{2})t-\theta_n(t))\sin\left((\frac{b-a+1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}dt
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $P(a \le B_n \le b)$ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
P(a \le B_n \le b) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\cos\left((\frac{a+b}{2})t-\theta_n(t)\right)\sin\left((\frac{b-a+1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\sin(bt+\frac{t}{2}-\theta_n(t))}{2\sin(\frac{t}{2})}dt \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\sin(at-\frac{t}{2}-\theta_n(t))}{2\sin(\frac{t}{2})}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\sin(bt+\frac{t}{2}-\frac{nt}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}dt \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\sin(at-\frac{t}{2}-\frac{nt}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\sin\left((b-\frac{n}{2}+\frac{1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}dt \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\sin\left((a-\frac{n}{2}-\frac{1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}dt
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$P(a \le B_n \le b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\,\mathsf{sin}(\frac{\sqrt{n}x_2t}{2})}{\mathsf{sin}(\frac{t}{2})}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\,\mathsf{sin}(\frac{\sqrt{n}x_1t}{2})}{\mathsf{sin}(\frac{t}{2})}dt$$
$$= R(x_2) - R(x_1)$$

เมื่อ

$$x_1 = \frac{2a-n-1}{\sqrt{n}} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{2b-n+1}{\sqrt{n}}$$

สำหรับ $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ ซึ่ง $a \le b$ □

พิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

พิสูจน์ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\,\mathsf{sin}(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{\mathsf{sin}(\frac{t}{2})}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \frac{|\varphi_n(t)|\,\mathsf{sin}(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{\mathsf{sin}(\frac{t}{2})}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}} \frac{|\varphi_n(t)|\,\mathsf{sin}(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{\mathsf{sin}(\frac{t}{2})}dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)|\,\mathsf{sin}(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{\mathsf{sin}(\frac{t}{2})}dt \\ &:= R_1 + R_2 + R_3 \end{aligned} \tag{3.29}$$

เราจึงจะแบ่งกรณีการหาขอบเขตของ R_1, R_2, R_3 เป็น 3 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1. เราจะแสดงว่า

$$R_1 = \Phi(x) - \frac{1}{2} + (x^3 - x)\frac{\sqrt{2\pi}}{24\pi n}e^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_4$$

เมื่อ $|\Delta_4| \le \frac{1.18}{n^2} + 0.13e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}$

เนื่องจาก $\dfrac{1}{\sin(\frac{t}{2})} = \dfrac{2}{t} + \dfrac{t}{12} + \Delta_{31}$ เมื่อ $|\Delta_{31}| \leq 0.0057t^3$ (ภาคผนวกที่ 1.5) จะได้ว่า

$$R_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \frac{|\varphi_n(t)|\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}dt \tag{3.30}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} |\varphi_n(t)|\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})\left(\frac{2}{t}+\frac{t}{12}\right)dt + \Delta_3 \tag{3.31}$$

เมื่อ

$$\Delta_3 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} |\varphi_n(t)|\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})\Delta_{31}dt$$

ดังนั้น

$$|\Delta_3| \leq \frac{0.0057}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} |\varphi_n(t)|t^3dt$$

จากบทตั้ง 3.1 ข้อ 2. $|\varphi_n(t)| \leq e^{-\frac{nt^2}{8}+\frac{nt^4}{96}}$ สำหรับ $t \in [0,\pi]$ และ $e^{\frac{nt^4}{96}} \leq 1.02$
เมื่อ $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right]$ จะได้ว่า

$$|\varphi_n(t)| \leq 1.02e^{-\frac{nt^2}{8}} \tag{3.32}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|\Delta_3| &\leq \frac{0.0059}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} e^{-\frac{nt^2}{8}}t^3dt \\
&= \frac{0.0059}{2\pi}\frac{64}{n^2}\int_0^{\sqrt[4]{\frac{n}{64}}} u^3e^{-u^2}du \qquad (u = \frac{\sqrt{n}t}{2\sqrt{2}}) \\
&= \frac{0.0059}{2\pi}\frac{64}{n^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{(\sqrt{\frac{n}{64}}+1)e^{-\sqrt{\frac{n}{64}}}}{2}\right) \\
&\leq \frac{0.0059}{2\pi}\left(\frac{32}{n^2}\right) \\
&\leq \frac{0.03}{n^2}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$R_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \frac{|\varphi_n(t)|\,\mathsf{sin}(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t}dt + \frac{1}{24\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} |\varphi_n(t)|\,\mathsf{sin}(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt + \Delta_3$$

จาก บทตั้ง 3.4 ข้อ 1. และ 2. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{\pi}\left[\pi\Phi(x) - \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{24n}x(3-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_1\right] \\
&\quad + \frac{1}{24\pi}\left[\frac{2\sqrt{2\pi}x}{n}e^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_2\right] + \Delta_3 \\
&= \Phi(x) - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{24\pi n}x(3-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\Delta_1}{\pi} + \frac{\sqrt{2\pi}x}{12\pi n}e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\Delta_2}{24\pi} + \Delta_3 \\
&= \Phi(x) - \frac{1}{2} + (x^3 - x)\frac{\sqrt{2\pi}}{24\pi n}e^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_4
\end{aligned}$$

เมื่อ

$$\Delta_4 = \frac{\Delta_1}{\pi} + \frac{\Delta_2}{24\pi} + \Delta_3 \tag{3.33}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|\Delta_4| &\le \frac{1}{\pi}\left[\frac{3.2793}{n^2} + 0.40375e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}\right] + \frac{1}{24\pi}\left[\frac{8}{n^2} + 0.04e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}\right] + \frac{0.03}{n^2} \\
&= \frac{1.18}{n^2} + 0.13e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}
\end{aligned}$$

ขั้นที่ 2. เราจะแสดงว่า

$$|R_2| \le 0.5839e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}$$

จาก

$$\mathsf{sin}(\frac{t}{2}) \ge \frac{t}{\pi} \quad \text{เมื่อ} \quad t \in [0, \pi] \tag{3.34}$$

(ภาคผนวกที่ 1.1) และ จาก (3.4) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|\varphi(t)| &= \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\cos^2(\frac{t}{2})\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left|\cos(\frac{t}{2})\right| \\
&= \cos(\frac{t}{2}) \quad \text{สำหรับ } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สำหรับ $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ซึ่ง $x < y$ จะได้ว่า

$$
|\varphi_n(x)| = |\varphi(x)|^n = \left(\cos(\frac{x}{2})\right)^n > \left(\cos(\frac{y}{2})\right)^n = |\varphi(y)|^n = |\varphi_n(y)|
$$

ดังนั้น $|\varphi_n(t)|$ เป็นฟังก์ชันลดบน $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
เนื่องจาก $0 \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \leq t \leq \frac{\pi}{\sqrt[4]{n}} \leq \frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|R_2| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}} \frac{|\varphi_n(t)|\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}dt\right| &\leq \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}} \frac{|\varphi_n(t)|}{t}dt \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\varphi_n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right| \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}} \frac{1}{t}dt \\
&\leq \frac{1}{2}\left(1.02e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}\right)\ln(\pi) \\
&\leq 0.5839e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}}
\end{aligned}
$$

โดยเราใช้ (3.32) ในอสมการนี้
ขั้นที่ 3. เราจะแสดงว่า

$$
|R_3| \leq 0.05e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}
$$

จากบทตั้ง 3.1 ข้อ 1. และ (3.34) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|R_3| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}}^{\pi} \frac{|\varphi_n(t)| \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} dt \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{nt^2}{2\pi^2}}}{t} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} du \qquad (u = \sqrt{\frac{nt^2}{2\pi^2}})
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $u \geq \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2}}$ นั่นคือ $u^2 \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$ จะได้ว่า $\frac{1}{u} \leq \frac{2u}{\sqrt{n}}$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
|R_3| &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2}}}^{\infty} u e^{-u^2} du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}} e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}} \\
&\leq 0.05 e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}
\end{aligned}
$$

จากขั้นที่ 1-3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
R(x) &= \Phi(x) - \frac{1}{2} + (x^3 - x)\frac{\sqrt{2\pi}}{24\pi n} e^{-\frac{x^2}{2}} + \Delta_4 + R_2 + R_3 \\
&= G(x) - \frac{1}{2} + \Delta_4 + R_2 + R_3 \\
&= G(x) - \frac{1}{2} + \Delta_5
\end{aligned}
$$

โดยที่

$$
G(x) = \Phi(x) + (x^3 - x)\frac{\sqrt{2\pi}}{24\pi n} e^{-\frac{x^2}{2}}
$$

และ

$$
\Delta_5 = \Delta_4 + R_2 + R_3
$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|\Delta_5| &\leq |\Delta_4| + |R_2| + |R_3| \\
&\leq \frac{1.18}{n^2} + 0.13e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} + 0.5839e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} + 0.05e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}} \\
&= \frac{1.18}{n^2} + 0.7139e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} + 0.05e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 3.5 สำหรับ $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $n \geq 100$ จะได้ว่า

$$P(a \leq B_n \leq b) = R(x_2) - R(x_1) = G(x_2) - G(x_1) + \Delta_n$$

เมื่อ

$$x_1 = \frac{2a - n - 1}{\sqrt{n}}, \qquad x_2 = \frac{2b - n + 1}{\sqrt{n}}$$

และ

$$|\Delta_n| \leq 2|\Delta_5| \leq \frac{2.36}{n^2} + 1.43e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} + 0.1e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}$$

ดังนั้น

$$|P(a \leq B_n \leq b) - (G(x_2) - G(x_1))| \leq \frac{2.36}{n^2} + 1.43e^{-\frac{\sqrt{n}}{8}} + 0.1e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}} \qquad \square$$

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักในการหาขอบเขตการประมาณค่า $P(a \leq B_n \leq b)$ ในขั้นตอนของการพิสูจน์นั้นสิ่งที่ทำให้การทำงานของเราง่ายขึ้นคือการที่เราดูในกรณีที่ $p = \frac{1}{2}$ จากงานปี 2017 Ratibenyakool and Neammanee [5] ถ้าเราดูในกรณีดังกล่าวจะทำให้บางพจน์นั้นหายไปดังอสมการ (1.4) ซึ่งทำให้ง่ายต่อการปรับปรุงอัตราการลู่เข้าให้ดีขึ้น นั่นก็คือเราได้อัตราการลู่เข้าคือ $\frac{1}{n^2}$ โดยที่เรายังได้ตัวประมาณค่าเหมือนกับในงาน Ratibenyakool and Neammanee [5] และสำหรับแนวทางในการต่อยอดงาน ผู้จัดทำโครงงานหวังว่าจะสามารถปรับปรุงอัตราการลู่เข้า ให้มีอัตราการลู่เข้าเป็น $\frac{1}{n^k}$ สำหรับ $k = 3, \ldots, n$ ได้

บรรณานุกรม

[1] กฤษณะ เนียมมณี, *ทฤษฎีความน่าจะเป็น*, พิมพ์ครั้งที่1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ห้างหุ้นส่วนจำกัดพิทักษ์การพิมพ์, 2542.

[2] Alsamraee, Hamza E. ”Advanced Calculus Explored With Applications in Physics, Chemistry, and Beyond.”(2019).

[3] Carl-Gustav, Esseen. ”On the Liapunoff limit of error in the theory of probability.” *Arkiv for matematik, astronomi och fysik*, A: 1–19 (1942).

[4] DasGupta, Anirban. *Fundamentals of probability: a first course*. Springer Science and Business Media, 2010.

[5] Davis, Philip J. ”Leonhard euler’s integral: A historical profile of the gamma function: In memoriam: Milton abramowitz.”*The American Mathematical* Monthly 66.10 (1959): 849-869.

[6] Gerber, Hans U. ”The discounted central limit theorem and its Berry-Esseen analogue.”*The Annals of Mathematical Statistics*42.1 (1971): 389-392.

[7] Korolev, V. Yu, and Irina G. Shevtsova. ”On the upper bound for the absolute constant in the Berry–Esseen inequality.”*Theory of Probability and Its Applications* 54.4 (2010): 638-658.

[8] Neammanee, Kritsana. ”A refinement of Normal approximation to Poisson Binomial.”*International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*2005 (2005).

[9] Protter, Murray H., and B. Charles Jr. *Intermediate calculus*. Springer Science and Business Media, 2012.

[10] Ratibenyakool, Y., and K. Neammanee. ”Refinement on normal approximation of poisson binomial.” *Proceedings of Annual Pure and Applied Mathematics Conference*. 2017.

[11] Shevtsova, I. G. ”On the absolute constant in the Berry-Esseen inequality.” *The Collection of Papers of Young Scientists of the Faculty of Computational Mathematics and CyberneticsTheory of Probability and* (2008).

[12] Shevtsova, Irina Gennad'evna. "Sharpening of the upper bound of the absolute constant in the Berry–Esseen inequality." *Theory of Probability and Its Applications* 51.3 (2007): 549-553.

[13] Shevtsova, Irina. "On the absolute constants in the Berry-Esseen type inequalities for identically distributed summands." *arXiv preprint arXiv:1111.6554* (2011).

[14] Shiganov, I. S. "Refinement of the upper bound of a constant in the remainder term of the central limit theorem." *StabiliO'Problemsjbr Stochastic Models, Vsesoyuz Nauk lssled, Moscow* (1982): 109-115.

[15] Tyurin, Ilya S. "An improvement of upper estimates of the constants in the Lyapunov theorem." *Russian Mathematical Surveys* 65.3 (2010): 201-202.

[16] Tyurin, I. S. "On the accuracy of the Gaussian approximation." *Doklady Mathe-*matics . Vol. 80. No. 3. SP MAIK Nauka/Interperiodica, 2009.

[17] Uspensky, James Victor. "Introduction to mathematical probability." (1937).

[18] Van Beek, Paul. "An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry-Esseen inequality." *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 23.3 (1972): 187-196.

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2563

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Improvement of bounds of probability estimations for symmetric binomial random variables
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศ.ดร.กฤษณะ เนียมมณี รศ.ทิพวัลย์ สันติวิภานนท์
ผู้ดำเนินการ	นางสาว บุลภรณ์ คล้อยคล้าย เลขประจำตัวนิสิต 6033523023 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี (Bernoulli random variable) ที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่ $P(X_i = 1) = p = 1-P(X_i = 0)$ เมื่อ $0 < p < 1$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$ และ

$$B(n, p) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

จะได้ว่า $B(n, p)$ ว่าตัวแปรสุ่มทวินาม (binomial random variable) ที่มีพารามิเตอร์ n และ p ในกรณีที่ $p = \frac{1}{2}$ เราจะเรียก $B(n, \frac{1}{2})$ ว่าตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตร (symmetric binomial random variable) โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ B_n แทน $B(n, \frac{1}{2})$
เราสังเกตได้ว่า $E(B_n) = \dfrac{n}{2}$ และ $Var(B_n) = \dfrac{n}{4}$ สำหรับ $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ ซึ่ง $a \le b$

จะได้ว่า

$$P\left(a \leq B_n \leq b\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x}$$

เราจะเห็นว่าในกรณีที่ n มีค่ามาก การคำนวณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$ จะทำได้ค่อนข้างยาก ทฤษฎีบทลิมิตส่วนกลางต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่ช่วยในการประมาณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$

ทฤษฎีบทที่ 1. ทฤษฎีบทลิมิตส่วนกลาง (Central Limit Theorem) [2]

กำหนดให้ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเดียวกันและเป็นอิสระต่อกันและ

$$W_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

โดย $E(Y_1) = \mu$ และ $Var(Y_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{W_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

เมื่อ Φ คือฟังก์ชันการแจกแจงปกติมาตรฐาน นั่นคือ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ในการประมาณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$ เราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทลิมิตส่วนกลาง ได้ดังนี้

$$P\left(a \leq B_n \leq b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

เมื่อ

$$x_1 = \frac{2a - n - 1}{\sqrt{n}} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{2b - n + 1}{\sqrt{n}}$$

จากทฤษฎีบทลิมิตส่วนกลางเราสามารถประมาณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$ ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปกติมาตรฐาน สำหรับขอบเขตของความคลาดเคลื่อนนั้น Berry (1941) และ Esseen (1942) ได้หาขอบเขตของค่าความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าไว้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2. ทฤษฎีบท เบอร์รี-เอสซีน (Berry-Esseen theorem) [3]

ภายใต้เงื่อนไขของทฤษฎีบทที่ 1 สมมติว่าให้ $E|Y_1|^3 < \infty$ จะได้ว่ามีค่าคงตัว $C > 0$ ซึ่งสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{W_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x)\right| \leq C \cdot \frac{E|Y_1 - \mu|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

จากทฤษฎีบท เบอร์รี-เอสซีน ได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านที่ได้ทำการหาค่า C โดยเริ่มจาก Esseen ([1], 1942) ได้ 7.59, Van Beek ([13], 1972) ได้ 0.7882, Shiganov ([9], 1986) ได้ 0.7655, Shevsova ([6], 2007) ได้ 0.7056 ปีถัดมา Shevsova ([7], 2008) ได้ 0.7005, Tyurin ([10], 2009) ได้ 0.5894, Korolev และ Shevsova ([4], 2010) ได้ 0.5129, Tyurin ([11], 2010) ได้ 0.4785 และ Shevsova ([8], 2010) ได้ 0.4748

ในการหาขอบเขตความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$ เราสามารถประยุกต์ทฤษฎีบท เบอร์รี-เอสซีน และเลือกใช้ค่าคงตัว C ของ Shevsova ([8], 2010) ได้ดังนี้

$$\left|P(a \leq B_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right| \leq \frac{0.9496}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

และอัตราการลู่เข้าของการประมาณค่า $P(a \leq B_n \leq b)$ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

ในปีค.ศ. 1937 Uspensky [12] ได้ปรับปรุงการประมาณค่าความน่าจะเป็นของ $B(n,p)$ ด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐานให้ดีขึ้นโดยทำการเพิ่มพจน์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3. (Uspensky) [12] กำหนดให้ $G_1(x) = \Phi(x) + U(x)$ โดย

$$U(x) = \frac{q-p}{6\sqrt{2\pi npq}}(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{เมื่อ } q = 1-p$$

เป็นพจน์ที่เพิ่มขึ้น สำหรับ $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $npq \geq 25$ จะได้ว่า

$$|P(a \leq B(n,p) \leq b) - (G_1(x_2) - G_1(x_1))| \leq \frac{0.26 - 0.36|p-q|}{npq} + 2e^{-\frac{3}{2}\sqrt{npq}}$$

โดยที่

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(a - np - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{และ} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(b - np + \frac{1}{2}\right)$$

จากทฤษฎีบทที่ 3. เราจะเห็นได้ว่าในกรณี B_n นั้น $U(x) = 0$ เราจึงได้ว่า สำหรับ $n \geq 100$

$$\left| P(a \leq B_n \leq b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| \leq \frac{1.04}{n} + 2e^{-\frac{3\sqrt{n}}{4}} \qquad (2)$$

เมื่อ

$$x_1 = \frac{2a - n - 1}{\sqrt{n}} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{2b - n + 1}{\sqrt{n}}$$

ดังนั้นอัตราการลู่เข้าของการประมาณคือ $\dfrac{1}{n}$ ซึ่งดีกว่า (1) ต่อมา Ratibenyakool and Neammanee [5] ได้ปรับปรุงอัตราการลู่เข้าของการประมาณค่าโดยการเพิ่มพจน์ให้ดีกว่างานของ Uspensky [12] ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4. (Ratibenyakool and Neammanee) [5] กำหนดให้ $G_2(x) = \Phi(x) + Q(x)$ โดย $Q(x)$ เป็นพจน์ที่เพิ่มขึ้น กำหนดโดย

$$Q(x) = \frac{Q_1(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{n}} + \frac{Q_2(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{n}$$

เมื่อ

$$Q_1(x) = \frac{(p-q)(1-x^2)}{6\sqrt{2\pi pq}}$$

และ

$$Q_2(x) = \frac{(1-6pq)(3-x^2)x}{24\sqrt{2\pi}pq} - \frac{(p-q)^2(15-10x^2+x^4)x}{72\sqrt{2\pi}pq} + \frac{x}{24pq\sqrt{2\pi}}$$

สำหรับ $a, b = 0, 1, 2, \ldots, n$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $npq \geq 25$ จะได้ว่า

$$|P(a \leq B(n,p) \leq b) - (G_2(x_2) - G_2(x_1))| \leq \frac{4.9132}{npq\sqrt{npq}} + 0.948e^{-\frac{3}{2}\sqrt{npq}}$$

โดยที่

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(a - np - \frac{1}{2}\right) \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(b - np + \frac{1}{2}\right)$$

เราจะเห็นได้ว่าในกรณีของ B_n นั้น $Q_1(x) = 0$ และ $Q_2(x) = \dfrac{x^3 - x}{12\sqrt{2\pi}}$ และสำหรับ $n \geq 100$ จะได้ว่า

$$|P(a \leq B_n \leq b) - (G(x_2) - G(x_1))| \leq \frac{39.3056}{n\sqrt{n}} + 0.948e^{-\frac{3\sqrt{n}}{4}}$$

เมื่อ

$$G(x) = \Phi(x) + \frac{(x^3 - x)}{12n\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x_1 = \frac{2a - n - 1}{\sqrt{n}} \quad \text{และ} \quad x_2 = \frac{2b - n + 1}{\sqrt{n}}$$

จาก (3) จะได้ว่าอัตราการลู่เข้าของการประมาณค่าคือ $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

ในโครงงานนี้เราสนใจที่จะปรับปรุงการประมาณค่า $P\left(a \leq B_n \leq b\right)$ ใน (3) ให้อัตราการลู่เข้าเป็น $\dfrac{1}{n^2}$

วัตถุประสงค์

โครงงานนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะปรับปรุงการประมาณค่า $P(a \leq B_n \leq b)$ ด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐานโดยการเพิ่มพจน์เพื่อทำให้ขอบเขตการประมาณค่ามีอัตราการลู่เข้าเป็น $\dfrac{1}{n^2}$

ขอบเขตของโครงงาน

ในโครงงานนี้เราสนใจเฉพาะกรณีที่เป็นตัวแปรสุ่มทวินามสมมาตรในการปรับปรุงการประมาณค่าด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐานโดยการเพิ่มพจน์

วิธีการดำเนินการ

1. ศึกษาปัญหา สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัย และกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา

2. ปรับปรุงการประมาณค่า $P(a \leq B_n \leq b)$ ด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐานโดยการเพิ่มพจน์และทำให้ขอบเขตการประมาณค่ามีอัตราการลู่เข้าเป็น $\dfrac{1}{n^2}$

3. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน

4. จัดทำรูปเล่มโครงงาน

วิธีการดำเนินงาน	สิงหาคม 2563 - เมษายน 2564								
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาปัญหา สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัย และกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา									
2. ปรับปรุง การ ประมาณ ค่า $P(a \leq B_n \leq b)$ ด้วยการ แจกแจง ปกติ มาตรฐาน โดย การ เพิ่ม พจน์ และ ทำให้ ขอบเขต การ ประมาณค่ามีอัตราการลู่เข้าเป็น $\dfrac{1}{n^2}$									
3. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน									
4. จัดทำรูปเล่มโครงงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

หาขอบเขตการประมาณค่า $P(a \leq B_n \leq b)$ โดยได้อัตราการลู่เข้าที่ดีกว่างานวิจัยที่ผ่านมา

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษ A4

2. Notebook

3. โปรแกรม LaTex

4. อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล

บรรณานุกรม

[1] Carl-Gustav, Esseen. ”On the Liapunoff limit of error in the theory of probability.” *Arkiv for matematik, astronomi och fysik*, A: 1–19 (1942).

[2] DasGupta, Anirban. *Fundamentals of probability: a first course*. Springer Science and Business Media, 2010.

[3] Gerber, Hans U. ”The discounted central limit theorem and its Berry-Esseen analogue.”*The Annals of Mathematical Statistics*42.1 (1971): 389-392.

[4] Korolev, V. Yu, and Irina G. Shevtsova. ”On the upper bound for the absolute constant in the Berry–Esseen inequality.”*Theory of Probability and Its Applications* 54.4 (2010): 638-658.

[5] Ratibenyakool, Y., and K. Neammanee. ”Refinement on normal approximation of poisson binomial.” *Proceedings of Annual Pure and Applied Mathematics Conference*. 2017.

[6] Shevtsova, Irina Gennad’evna. ”Sharpening of the upper bound of the absolute constant in the Berry–Esseen inequality.” *Theory of Probability and Its Applications* 51.3 (2007): 549-553.

[7] Shevtsova, I. G. ”On the absolute constant in the Berry-Esseen inequality.” *The Collection of Papers of Young Scientists of the Faculty of Computational Mathematics and CyberneticsTheory of Probability and* (2008).

[8] Shevtsova, Irina. ”On the absolute constants in the Berry-Esseen type inequalities for identically distributed summands.” *arXiv preprint arXiv:1111.6554* (2011).

[9] Shiganov, I. S. ”Refinement of the upper bound of a constant in the remainder term of the central limit theorem.” *StabiliO’Problemsjbr Stochastic Models, Vsesoyuz Nauk lssled, Moscow* (1982): 109-115.

[10] Tyurin, I. S. ”On the accuracy of the Gaussian approximation.” *Doklady Mathe*matics . Vol. 80. No. 3. SP MAIK Nauka/Interperiodica, 2009.

[11] Tyurin, Ilya S. "An improvement of upper estimates of the constants in the Lyapunov theorem." *Russian Mathematical Surveys* 65.3 (2010): 201-202.

[12] Uspensky, James Victor. "Introduction to mathematical probability." (1937).

[13] Van Beek, Paul. "An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry-Esseen inequality." *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 23.3 (1972): 187-196.

ภาคผนวกที่ 1

1.1 $\sin(\frac{t}{2}) \geq \frac{t}{\pi}$ สำหรับ $t \in [0, \pi]$

พิสูจน์ เห็นได้ชัดว่าเมื่อ $t = 0$ จะได้ว่า $\sin(\dfrac{t}{2}) \geq \dfrac{t}{\pi}$
พิจารณา $t \in (0, \pi]$ ให้ $f(t) = \dfrac{\sin(\frac{t}{2})}{t}$ จะได้ว่า

$$f'(t) = \frac{\frac{t}{2}\cos(\frac{t}{2}) - \sin(\frac{t}{2})}{t^2} \qquad \text{สำหรับ } t \in (0, \pi]$$

ให้ $g(t) = \frac{t}{2}\cos(\frac{t}{2}) - \sin(\frac{t}{2})$ สำหรับ $t \in (0, \pi]$ จะได้ว่า

$$g'(t) = -\frac{t}{4}\sin(\frac{t}{2}) \leq 0 \qquad \text{สำหรับ } t \in (0, \pi]$$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันลด
เพราะฉะนั้น $g(t) \leq g(0) = 0$ สำหรับ $t \in (0, \pi]$
จะได้ว่า $f'(t) \leq 0$ สำหรับ $t \in (0, \pi]$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลด
ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(t) &\geq f(\pi) \\ \frac{\sin(\frac{t}{2})}{t} &\geq \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\pi} \\ \sin(\frac{t}{2}) &\geq \frac{t}{\pi} \end{aligned}$$

$\square$

1.2 $\sin(t) \leq t$ สำหรับ $t \geq 0$

พิสูจน์ ให้ $t \geq 0$ เห็นชัดว่า $\sin(t) \leq t$ เมื่อ $t = 0$ หรือ $t \geq 1$
สมมติ $0 < t < 1$ ให้ $f(u) = \sin(u)$ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมจะได้ว่ามี $c \in (0, t)$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \\ \cos(c) &= \frac{\sin(t) - \sin(0)}{t} \\ \cos(c) &= \frac{\sin(t)}{t} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\cos(c) \leq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\sin(t)}{t} &\leq 1 \\ \sin(t) &\leq t \end{aligned}$$

□

1.3 $\frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1440} \leq \sin^2(\frac{t}{2}) \leq \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} + \frac{t^6}{1440}$ สำหรับ $t \in \mathbb{R}$

พิสูจน์ ให้ $f(t) = \sin^2(\frac{t}{2})$ โดยสูตรอนุกรมเทย์เลอร์จะได้ว่า

$$f(t) = \sum_{n=0}^{5} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n + \frac{f^{(6)}(t_0)}{6!} t^6$$

สำหรับบาง t_0 ที่อยู่ระหว่าง 0 กับ t
$f'(t) = \frac{1}{2}\sin(t), f''(t) = \frac{1}{2}\cos(t), f'''(t) = -\frac{1}{2}\sin(t),$
$f^{(4)}(t) = -\frac{1}{2}\cos(t)$, $f^{(5)}(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$ และ $f^{(6)}(t) = \frac{1}{2}\cos(t)$
นั่นคือ $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = \frac{1}{2}, f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = -\frac{1}{2}$ และ $f^{(5)}(0) = 0$ ดังนั้น

$$f(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} + \frac{t^6}{1440}\cos(t_0) \leq \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} + \frac{t^6}{1440}$$

นั่นคือ

$$\sin^2(\frac{t}{2}) \leq \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} + \frac{t^6}{1440}$$

และ

$$f(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} + \frac{t^6}{1440}\cos(t_0) \geq \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1440}$$

นั่นคือ

$$\sin^2(\frac{t}{2}) \geq \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1440} \qquad \square$$

1.4 $\frac{t^4}{16} - \frac{t^6}{96} \leq \sin^4(\frac{t}{2}) \leq \frac{t^4}{16} + \frac{t^6}{96}$ สำหรับ $t \in [0, 1]$

พิสูจน์ จากภาคผนวกที่ 1.5 พิจารณา

$$\sin^2(\frac{t}{2}) \geq \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1440}$$

สำหรับ $t \in [0, 1]$ เนื่องจาก $t \leq 1$ จะได้ว่า $t^6 \leq t^4 \leq t^2$ ดังนั้น $\frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1440} \geq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\sin^4(\frac{t}{2}) &\geq \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1440}\right)^2 \\
&= \frac{t^4}{16} + \frac{t^8}{2304} + \frac{t^{12}}{1440^2} + 2\left(-\frac{t^6}{192} - \frac{t^8}{5760} + \frac{t^{10}}{69120}\right) \\
&= \frac{t^4}{16} + \frac{t^8}{2304} + \frac{t^{12}}{1440^2} - \frac{t^6}{96} - \frac{t^8}{2880} + \frac{t^{10}}{34560} \\
&= \frac{t^4}{16} - \frac{t^6}{96} + \frac{t^8}{11520} + \frac{t^{10}}{34560} + \frac{t^{12}}{1440^2}
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\sin^4(\frac{t}{2}) \geq \frac{t^4}{16} - \frac{t^6}{96}$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
0 \leq \sin^2(\frac{t}{2}) &\leq \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} + \frac{t^6}{1440} \\
\sin^4(\frac{t}{2}) &\leq \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{48} + \frac{t^6}{1440}\right)^2 \\
&= \frac{t^4}{16} + \frac{t^8}{2304} + \frac{t^{12}}{1440^2} + 2\left(-\frac{t^6}{192} + \frac{t^8}{5760} - \frac{t^{10}}{69120}\right) \\
&= \frac{t^4}{16} + \frac{t^8}{2304} + \frac{t^{12}}{1440^2} - \frac{t^6}{96} + \frac{t^8}{2880} - \frac{t^{10}}{34560} \\
&= \frac{t^4}{16} - \frac{t^6}{96} + \frac{t^8}{1280} - \frac{t^{10}}{34560} + \frac{t^{12}}{1440^2} \\
&\leq \frac{t^4}{16} + \frac{t^8}{1280} + \frac{t^{12}}{1440^2} \\
&= \frac{t^4}{16} + t^6\left(\frac{t^2}{1280} + \frac{t^6}{1440^2}\right)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\frac{t^2}{1280} + \frac{t^6}{1440^2} \leq \frac{1}{1280} + \frac{1}{1440^2} \leq \frac{1}{96}$ จะได้ว่า

$$\sin^4(\frac{t}{2}) \leq \frac{t^4}{16} + \frac{t^6}{96} \qquad \square$$

1.5 $\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{2}{t} + \frac{t}{12} + \delta$ เมื่อ $|\delta| \leq 0.0057t^3$ และ $0 < t \leq 2$

พิสูจน์ โดยสูตรอนุกรมเทย์เลอร์ สำหรับ $t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\sin(\frac{t}{2}) = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + \frac{t^5}{3840}\cos(t_0)$$

สำหรับบาง t_0 ที่อยู่ระหว่าง 0 กับ $\frac{t}{2}$
สำหรับ $t \in (0, 2]$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{2}{t}\left(\frac{1}{1 - (\frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{1920}\cos(t_0))}\right)$$

เนื่องจาก $\left|\frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{1920}\cos(t_0)\right| < 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} &= \frac{2}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{1920}\cos(t_0)\right)^k \\
&= \frac{2}{t}\left(1 + \frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{1920}\cos(t_0) + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{t^2}{24} - \frac{t^4}{1920}\cos(t_0)\right)^k\right) \\
&= \frac{2}{t} + \frac{t}{12} + \delta
\end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
|\delta| &\leq \frac{t^3}{960} + \frac{2}{t}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{1920}\right)^k \\
&= \frac{t^3}{960} + \frac{2}{t}\left(\frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{1920}\right)^2\left(\frac{1}{1 - (\frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{1920})}\right)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $t \leq 2$ จะได้ว่า $\dfrac{t^2}{24} + \dfrac{t^4}{1920} \leq \dfrac{7}{40}$ นั่นคือ $\dfrac{1}{1 - (\frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{1920})} \leq \dfrac{40}{33}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|\delta| &\leq \frac{t^3}{960} + \frac{2}{t}\left(\frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{1920}\right)^2\left(\frac{40}{33}\right) \\
&\leq \frac{t^3}{960} + \frac{80}{33t}\left(\frac{7t^2}{160}\right)^2 \\
&= \frac{t^3}{960} + \frac{80}{33}\left(\frac{7}{160}\right)^2 t^3 \\
&= 0.0057t^3
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{1}{\sin(\frac{t}{2})} = \dfrac{2}{t} + \dfrac{t}{12} + \delta$ เมื่อ $|\delta| \leq 0.0057t^3$ และ $0 < t \leq 2$ $\square$

ภาคผนวกที่ 2

2.1 $e^x - 1 \geq x$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = e^x$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ โดยสูตรอนุกรมเทย์เลอร์จะได้ว่า

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}x = 1 + xe^{x_0}$$

สำหรับบาง x_0 ที่อยู่ระหว่าง 0 กับ x
กรณีที่ 1. $x > 0$ จะได้ว่า $0 < x_0 < x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} e^0 &< e^{x_0} \\ x &< xe^{x_0} \\ 1 + x &< xe^{x_0} + 1 = f(x) = e^x \\ e^x - 1 &> x \end{aligned}$$

กรณีที่ 2. $x < 0$ จะได้ว่า $x < x_0 < 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} e^{x_0} &< e^0 \\ xe^{x_0} &> x \\ f(x) = e^x = 1 + xe^{x_0} &> 1 + x \\ e^x - 1 &> x \end{aligned}$$

กรณีที่ 3. $x = 0$ จะได้ว่า $e^x - 1 = x$
จากทั้ง 3 กรณี สรุปได้ว่า

$$e^x - 1 \geq x \quad \text{สำหรับ } x \in \mathbb{R}$$

$\square$

ภาคผนวกที่ 3

ในการพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ ในภาคผนวกนี้ เราจะอาศัยความรู้เรื่องการสลับที่การหาอนุพันธ์กับการอินทิเกรตจากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. ([2], หน้า 103) ให้ $f(x,\tau)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์เทียบ x ได้บน $\mathbb{R}$ โดยที่ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ต่อเนื่องเทียบ τ บน $\mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\int_0^t f(x,\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(x,\tau)d\tau \quad \text{สำหรับ } t \in \mathbb{R}$$

บทนิยาม 2. เราจะกล่าวว่า $F(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\phi(x)$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ เมื่อ $t \to \infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี T ที่ทำให้

$$|F(x,t) - \phi(x)| < \epsilon$$

สำหรับทุก $t > T$ และ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 3. ([9], p.447) ให้ $f(x,\tau)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ และ $0 \le \tau < \infty$ เรากำหนดให้

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau \quad \text{สำหรับ} \quad x,t \in \mathbb{R}$$

สมมติให้

1. $\phi(x) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,\tau)d\tau$ มีค่าทุก $x \in \mathbb{R}$
2. $F(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\phi(x)$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $t \to \infty$
3. ฟังก์ชัน f_x ต่อเนื่องสำหรับ $x \in \mathbb{R}$
4. $F_x(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\psi(x)$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $t \to \infty$

จะได้ว่า

$$\psi(x) = \phi'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,\tau)d\tau \quad \text{สำหรับ } x \in \mathbb{R}$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(x,\tau)d\tau = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,\tau)d\tau \tag{1}$$

สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ และ $0 \leq \tau < \infty$

3.1 $\int_0^\infty e^{-at^2}\cos(xt)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$ สำหรับ $a > 0$ และ $x \in \mathbb{R}$

พิสูจน์ ให้ $a > 0$ และ $f(x,\tau) = e^{-a\tau^2}\cos(x\tau)$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ และ $0 \leq \tau < \infty$
เราเห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $0 \leq \tau < \infty$
กำหนดให้ $F(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $t > 0$
เพื่อที่จะประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทที่ 3. เราจำเป็นต้องแสดงว่า
1. $\phi(x) = \int_0^\infty f(x,\tau)d\tau$ มีค่าทุก $x \in \mathbb{R}$
2. $F(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\phi(x)$ บน $\mathbb{R}$ เมื่อ $t \to \infty$
3. ฟังก์ชัน f_x ต่อเนื่องสำหรับ $x \in \mathbb{R}$ ณ ทุก τ
4. $F_x(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\psi(x) = -\int_0^\infty e^{-a\tau^2}\sin(x\tau)\tau d\tau$ บน $\mathbb{R}$ เมื่อ $t \to \infty$
1. เราสังเกตได้ว่า $\phi(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ เมื่อ $g_n(x) = \int_0^n e^{-a\tau^2}\cos(x\tau)d\tau$
เนื่องจาก $e^{-a\tau^2}\cos(x\tau)$ ต่อเนื่องทุก $\tau \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$g_n(x) = \int_0^n e^{-a\tau^2} cos(x\tau)d\tau$$

หาค่าได้ทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $x \in \mathbb{R}$
เพื่อแสดงว่า $\phi(x)$ หาค่าได้ เราจะต้องแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ หาค่าได้
ซึ่งเพียงพอที่จะแสดงว่า $g_n(x)$ เป็นลำดับโคชี
ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $N \in \mathbb{N}$ โดยที่ $N > \frac{1}{a^2\epsilon}$
ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m, n \geq N$
โดยไม่เสียในทั่วไป สมมติว่า $N \leq m < n$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g_m(x)| &= \left| \int_0^n e^{-a\tau^2} \cos(x\tau) d\tau - \int_0^m e^{-a\tau^2} \cos(x\tau) d\tau \right| \\
&= \left| \int_m^n e^{-a\tau^2} \cos(x\tau) d\tau \right| \\
&\leq \int_m^n e^{-a\tau^2} d\tau \\
&\leq \int_m^n e^{-a\tau} d\tau \\
&= \frac{e^{-am} - e^{-an}}{a} \\
&< \frac{e^{-am}}{a} \\
&< \frac{1}{a^2 m} \\
&\leq \frac{1}{a^2 N} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ หาค่าได้

2. ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $T = \max\left\{1, \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{a\epsilon}\right)\right\}$

สำหรับ $t > T = \max\left\{1, \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{a\epsilon}\right)\right\}$ จะได้ว่า $\frac{e^{-at}}{a} < \epsilon$

ดังนั้น สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|F(x,t) - \phi(x)| &= \left| \int_0^t e^{-a\tau^2} \cos(x\tau) d\tau - \int_0^\infty e^{-a\tau^2} \cos(x\tau) d\tau \right| \\
&= \left| \int_t^\infty e^{-a\tau^2} \cos(x\tau) d\tau \right| \\
&\leq \int_t^\infty e^{-a\tau^2} d\tau \\
&\leq \int_t^\infty e^{-a\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{a} e^{-at} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $F(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\phi(x)$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $t \to \infty$

3. เห็นได้ชัดว่า $f_x(x,\tau) = -e^{-a\tau^2}\sin(x\tau)\tau$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $x \in \mathbb{R}$

4. เนื่องจาก $f(x,\tau) = e^{-a\tau^2}\cos(x\tau)$ และ $f_x(x,\tau) = -e^{-a\tau^2}\sin(x\tau)\tau$ ต่อเนื่องบน $x \in \mathbb{R}$ โดยทฤษฎีบทที่ 1. จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F_x(x,t) = \frac{d}{dx}\int_0^t e^{-a\tau^2}\cos(x\tau)d\tau &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}e^{-a\tau^2}\cos(x\tau)d\tau \\ &= -\int_0^t e^{-a\tau^2}\sin(x\tau)\tau d\tau \end{aligned}$$

ให้ $\epsilon > 0$

กรณีที่ 1 $\epsilon < \frac{1}{2a}$ จะได้ว่า $\frac{1}{2a\epsilon} > 1$

เลือก $T = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{1}{2a\epsilon}\right)}{a}}$

สำหรับ $t > T = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{1}{2a\epsilon}\right)}{a}}$ จะได้ว่า $\frac{e^{-at^2}}{2a} < \epsilon$

ดังนั้น สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |F_x(x,t) - \psi(x)| &= \left| -\int_0^t e^{-a\tau^2}\sin(x\tau)\tau d\tau + \int_0^\infty e^{-a\tau^2}\sin(x\tau)\tau d\tau \right| \\ &= \left| \int_t^\infty e^{-a\tau^2}\sin(x\tau)\tau d\tau \right| \\ &\leq \int_t^\infty e^{-a\tau^2}\tau d\tau \\ &= \frac{1}{2a}e^{-at^2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 $\epsilon \geq \frac{1}{2a}$

เลือก $T = 1$

สำหรับ $t > T = 1$ และ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|F_x(x,t) - \psi(x)| &= \left| -\int_0^t e^{-a\tau^2} \sin(x\tau)\tau d\tau + \int_0^\infty e^{-a\tau^2} \sin(x\tau)\tau d\tau \right| \\
&= \left| \int_t^\infty e^{-a\tau^2} \sin(x\tau)\tau d\tau \right| \\
&\leq \int_t^\infty e^{-a\tau^2} \tau d\tau \\
&= \frac{1}{2a} e^{-at^2} \\
&< \frac{1}{2a} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $F_x(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\psi(x) = -\int_0^\infty e^{-a\tau^2} \sin(x\tau)\tau d\tau$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $t \to \infty$

โดยทฤษฎีบทที่ 3. จะได้ว่า

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-at^2} \cos(xt) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} e^{-at^2} \cos(xt) dt$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= -\int_0^\infty e^{-at^2} \sin(xt) t dt \\
&= \frac{1}{2a} \int_0^\infty \sin(xt) de^{-at^2} \\
&= \frac{1}{2a} \lim_{y\to\infty} \int_0^y \sin(xt) de^{-at^2} \\
&= \frac{1}{2a} \lim_{y\to\infty} \left[e^{-at^2} \sin(xt) \Big|_{t=0}^{t=y} - \int_0^y e^{-at^2} x \cos(xt) dt \right] \\
&= \frac{1}{2a} \lim_{y\to\infty} \left[e^{-ay^2} \sin(xy) - \int_0^y e^{-at^2} x \cos(xt) dt \right] \\
&= -\frac{x}{2a} \phi(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}dx &= -\int \frac{x}{2a}dx \\
\int \frac{d\phi(x)}{\phi(x)} &= -\frac{x^2}{4a} + C_0 \\
\ln|\phi(x)| &= -\frac{x^2}{4a} + C_0 \\
\phi(x) &= Ce^{-\frac{x^2}{4a}}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\phi(0) = Ce^0 = C$ และ

$$
\begin{aligned}
\phi(0) &= \int_0^\infty e^{-at^2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du \qquad (u = \sqrt{2a}t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2a}}\left[\sqrt{2\pi}(\Phi(\infty) - \Phi(0))\right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}(1 - \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

สำหรับ $a > 0$ และ $x \in \mathbb{R}$ $\square$

3.2 $\int_0^\infty e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt = \frac{2\sqrt{2\pi}x}{n}e^{-\frac{x^2}{2}}$

พิสูจน์ จาก (1) และภาคผนวกที่ 3.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
-\int_0^\infty e^{-at^2}\sin(xt)tdt &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}e^{-at^2}\cos(xt)dt \\
&= \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-at^2}\cos(xt)dt \\
&= \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}} \\
&= -\frac{x}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}
\end{aligned}$$

เมื่อแทน $a = \frac{n}{8}$ และ $x = \frac{\sqrt{n}x}{2}$ ในสมการข้างต้น จะได้ว่า

$$\int_0^\infty e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})tdt = \frac{2\sqrt{2\pi}x}{n}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \square$$

3.3 $\int_0^\infty t^3 e^{-\frac{nt^2}{8}} \sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})dt = \frac{8\sqrt{2\pi}}{n^2}x(3-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$

พิสูจน์ จากภาคผนวกที่ 3.2 พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับภาคผนวกที่ 3.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-at^2}\cos(xt)t^2dt &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}e^{-at^2}\sin(xt)tdt \\
&= \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-at^2}\sin(xt)tdt \\
&= \frac{d}{dx}\frac{x}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}} \\
&= \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}\left(1-\frac{x^2}{2a}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-at^2}\sin(xt)t^3dt &= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}e^{-at^2}\cos(xt)t^2dt\\ &= -\frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-at^2}\cos(xt)t^2dt\\ &= -\frac{d}{dx}\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}\left(1-\frac{x^2}{2a}\right)\\ &= \frac{x}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(3-\frac{x^2}{2a}\right)e^{-\frac{x^2}{4a}}\end{aligned}$$

เมื่อแทน $a = \frac{n}{8}$ และ $x = \frac{\sqrt{n}x}{2}$ ในสมการข้างต้น จะได้ว่า

$$\int_0^\infty t^3 e^{-\frac{nt^2}{8}}\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})dt = \frac{8\sqrt{2\pi}}{n^2}x(3-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \square$$

3.4 $\int_0^\infty e^{-\frac{nt^2}{8}}\frac{\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t}dt = \pi\Phi(x) - \frac{\pi}{2}$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$

พิสูจน์ ให้ $f(x,\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{\sin(x\tau)}{\tau}$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ และ $0 < \tau < \infty$ เราเห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $0 < \tau < \infty$

กำหนดให้ $F(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $t > 0$

เพื่อที่จะประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทที่ 3. เราจำเป็นต้องแสดงว่า

1. $\phi(x) = \int_0^\infty f(x,\tau)d\tau$ มีค่าทุก $x \in \mathbb{R}$
2. $F(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\phi(x)$ บน $\mathbb{R}$ เมื่อ $t \to \infty$
3. ฟังก์ชัน f_x ต่อเนื่องสำหรับ $x \in \mathbb{R}$ ณ ทุก τ
4. $F_x(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\psi(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}\cos(x\tau)d\tau$ บน $\mathbb{R}$ เมื่อ $t \to \infty$

1. เราสังเกตได้ว่า $\phi(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ เมื่อ $g_n(x) = \int_0^n e^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{\sin(x\tau)}{\tau}d\tau$

เนื่องจาก $e^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{\sin(x\tau)}{\tau}$ ต่อเนื่องทุก $0 < \tau < \infty$ จะได้ว่า

$$g_n(x) = \int_0^n e^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{\sin(x\tau)}{\tau}d\tau$$

หาค่าได้ทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $x \in \mathbb{R}$
เพื่อแสดงว่า $\phi(x)$ หาค่าได้ เราจะต้องแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ หาค่าได้
ซึ่งเพียงพอที่จะแสดงว่า $g_n(x)$ เป็นลำดับโคชี
ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $N \in \mathbb{N}$ โดยที่ $N > \sqrt[4]{\frac{2}{\epsilon}}$
ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m, n \geq N$
โดยไม่เสียในทั่วไป สมมติว่า $N \leq m < n$
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g_m(x)| &= \left| \int_0^n e^{-\frac{\tau^2}{2}} \frac{\sin(x\tau)}{\tau} d\tau - \int_0^m e^{-\frac{\tau^2}{2}} \frac{\sin(x\tau)}{\tau} d\tau \right| \\
&= \left| \int_m^n e^{-\frac{\tau^2}{2}} \frac{\sin(x\tau)}{\tau} d\tau \right| \\
&\leq \int_m^n \frac{e^{-\frac{\tau^2}{2}}}{\tau} d\tau \\
&= \int_m^n \frac{\tau}{\tau^2} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \\
&\leq \frac{1}{m^2} \int_{\frac{m^2}{2}}^{\frac{n^2}{2}} \tau e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \\
&= \frac{1}{m^2} \int_m^n e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\left(\frac{\tau^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{m^2} \left[e^{-\frac{m^2}{2}} - e^{-\frac{n^2}{2}} \right] \\
&< \frac{1}{m^2} e^{-\frac{m^2}{2}} \\
&< \frac{2}{m^4} \\
&\leq \frac{2}{N^4} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ หาค่าได้
2. ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $T = \max\left\{1, \sqrt[4]{\frac{2}{\epsilon}}\right\}$
สำหรับ $t > T = \max\left\{1, \sqrt[4]{\frac{2}{\epsilon}}\right\}$ จะได้ว่า $\frac{2}{t^4} < \epsilon$

ดังนั้น สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|F(x,t)-\phi(x)| &= \left|\int_0^t e^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{\sin(x\tau)}{\tau}d\tau - \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{\sin(x\tau)}{\tau}d\tau\right| \\
&= \left|\int_t^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{\sin(x\tau)}{\tau}d\tau\right| \\
&\le \int_t^\infty \frac{e^{-\frac{\tau^2}{2}}}{\tau}d\tau \\
&= \int_t^\infty \frac{\tau}{\tau^2}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau \\
&\le \frac{1}{t^2}\int_t^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau \\
&= \frac{1}{t^2}\int_{\frac{t^2}{2}}^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\left(\frac{\tau^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}} \\
&< \frac{2}{t^4} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $F(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\phi(x)$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $t \to \infty$

3. เห็นได้ชัดว่า $f_x(x,\tau) = e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(xt)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $x \in \mathbb{R}$

4. เนื่องจาก $f(x,\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{\sin(x\tau)}{\tau}$ และ $f_x(x,\tau) = e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(xt)$ ต่อเนื่องบน $x \in \mathbb{R}$ โดยทฤษฎีบทที่ 1. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
F_x(x,t) = \frac{d}{dx}\int_0^t e^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{\sin(x\tau)}{\tau}d\tau &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}e^{-\frac{\tau^2}{2}}\frac{\sin(x\tau)}{\tau}d\tau \\
&= \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(xt)d\tau
\end{aligned}$$

ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $T = \max\left\{1, \frac{4}{\epsilon}\right\}$

สำหรับ $t > T = \max\left\{1, \frac{4}{\epsilon}\right\}$ จะได้ว่า $\frac{4}{t} < \epsilon$

ดังนั้น สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|F_x(x,t) - \psi(x)| &= \left| \int_0^t e^{-\frac{\tau^2}{2}} \cos(x\tau) d\tau - \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} \cos(x\tau) d\tau \right| \\
&= \left| \int_t^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} \cos(x\tau) d\tau \right| \\
&\leq \int_t^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \\
&\leq \int_t^\infty e^{-\frac{\tau}{2}} d\tau \\
&= 2e^{-\frac{t}{2}} \\
&< \frac{4}{t} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $F_x(x,t)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $\psi(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} \cos(x\tau) d\tau$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $t \to \infty$

โดยทฤษฎีบทที่ 3. จะได้ว่า

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\sin(xt)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\sin(xt)}{t} dt$$

โดยภาคผนวก 3.1 ทำให้ได้ว่า

$$\phi'(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(xt) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^x \phi'(t) dt &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= \pi\Phi(x) - \pi\Phi(0) \\
&= \pi(\Phi(x) - \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

จาก $\phi(0) = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\sin(0)}{t} dt = 0$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(0) &= \pi(\Phi(x) - \frac{1}{2}) \\ \phi(x) &= \pi\Phi(x) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\sin(xt)}{t} dt = \pi\Phi(x) - \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\frac{nt^2}{8}} \frac{\sin(\frac{\sqrt{n}xt}{2})}{t} dt &= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} \sin(ux)}{u} du \qquad (u = \frac{\sqrt{n}t}{2}) \\ &= \pi\Phi(x) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

□

ภาคผนวกที่ 4

4.1 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า} \quad k \neq 0 \\ 2\pi & \text{ถ้า} \quad k = 0 \end{cases}$

พิสูจน์ กรณีที่ $k = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(0)}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1dt \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

กรณีที่ $k \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kt) + i\sin(kt))dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)dt + i\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)dt \\ &= \left.\frac{\sin(kt)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - i\left[\left.\frac{\cos(kt)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}\right] \\ &= \frac{\sin(k\pi)}{k} - \frac{\sin(-k\pi)}{k} - i\left[\frac{\cos(k\pi)}{k} - \frac{\cos(-k\pi)}{k}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

4.2 $\displaystyle\int_a^\infty t^3e^{-t^2}dt = \frac{(a^2+1)e^{-a^2}}{2}$ สำหรับ $a \in \mathbb{R}$

พิสูจน์ จากการอินทิเกรตทีละส่วน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty t^3e^{-t^2}dt &= \frac{1}{2}\int_{a^2}^\infty ue^{-u}du \qquad (u = t^2) \\
&= \frac{1}{2}\left[-ue^{-u}\Big|_{a^2}^\infty - \int_{a^2}^\infty -e^{-u}du\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\lim_{u\to\infty} -ue^{-u} + a^2e^{-a^2} - \int_{a^2}^\infty -e^{-u}du\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[a^2e^{-a^2} - \int_{a^2}^\infty -e^{-u}du\right]
\end{aligned}$$

และเนื่องจาก

$$\int_{a^2}^\infty -e^{-u}du = e^{-u}$$

จะได้ว่า

$$\int_a^\infty t^3e^{-t^2}dt = \frac{a^2e^{-a^2} - e^{-t^2}}{2} \qquad \square$$

ประวัติผู้เขียน

นางสาวบุลภรณ์ คล้อยคล้าย
เลขประจำตัวนิสิต 6033523023
สาขาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย